



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

COPOS DE NIEVE CONFORMES ALEATORIOS

POR JONATHAN CONEJEROS.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la
Pontificia Universidad Católica de Chile para
optar al grado académico de Magister en Matemáticas.

Profesor Guía: Juan Rivera Letelier.

Mayo 2011.

Santiago, Chile.

©Jonathan Conejeros.

©Jonathan Conejeros

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Título de tesis: Copos de Nieve Conformes Aleatorios.

Autor: Jonathan Conejeros.

Fecha: Mayo de 2011.

Santiago, Chile.

Jurado Interno 1:

Martin Chuaqui Farru
Departamento de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

Jurado Interno 2:

Alejandro Ramírez Chuaqui
Departamento de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

Profesor Guía:

Juan Rivera Letelier
Departamento de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

LISTA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	VII
1. DIMENSIONES	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Dimensión de caja	4
1.2.1. Propiedades de la dimensión de caja	6
1.2.2. Problemas de la dimensión de caja	10
1.2.3. Dimensión de caja modificada	12
1.3. Dimensión de Hausdorff	14
1.3.1. Las s-Medidas de Hausdorff	14
1.3.2. Dimensión de Hausdorff	17
1.3.3. Propiedades de la dimensión de Hausdorff	18
1.4. Técnicas para el cálculo de dimensión	21
2. FUNCIONES UNIVALENTES	29
2.1. Preliminares	29
2.1.1. Funciones holomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$	31
2.1.2. Espacio de funciones holomorfas	33
2.2. Funciones univalentes	36
2.2.1. Las clases \mathcal{S} y Σ	37
2.2.2. Teoremas de distorsión de Koebe	41
2.3. Conjetura de Bieberbach	47
3. COPOS DE NIEVE CONFORMES ALEATORIOS	51
3.1. Preliminares	51
3.1.1. Análisis multifractal de medidas armónicas	51
3.1.2. La clase Σ''	54
3.2. Copos de nieve conformes aleatorios	57
3.2.1. Espectro de un copo de nieve conforme aleatorio	62
3.2.2. Operador adjunto del operador Q_t	67
3.3. Aproximación fractal	70

LISTA DE CONTENIDO

A. MEDIDA EXTERIOR MÉTRICA	77
BIBLIOGRAFÍA	81

INTRODUCCIÓN

El problema de los coeficientes

Quizás el problema más famoso en la Teoría geométrica de funciones es la *Conjetura de Bieberbach*, formulada por Ludwig Bieberbach en 1916 y demostrada por Louis de Branges en 1985, véase [dB85]. La Conjetura de Bieberbach esta asociada a la clase \mathcal{S} de las funciones univalentes (holomorfas e inyectivas) f del disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ en el plano complejo \mathbb{C} , normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Conjetura de Bieberbach (1916). Si $f \in \mathcal{S}$ y $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $|a_n| \leq n$ para todo $n \geq 2$.

La *función de Koebe* $k_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ pertenece a \mathcal{S} , lo que muestra que para cada $n \geq 2$ la estimación $|a_n| \leq n$ es óptima.

El problema correspondiente para la clase Σ de las funciones univalentes g de $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ normalizadas por las condiciones $g(\infty) = \infty$ y $g'(\infty) = 1$, aún esta abierto. El mismo Bieberbach demostró en 1914 usando el Teorema del área, que para $g \in \Sigma$ con $g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$, para todo $z \in \Delta$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1,$$

de donde se obtiene que $|b_n| \leq n^{-1/2}$ para cada $n \geq 1$, véase [Dur83, Teorema 2.1, página 29]. Sin embargo, para $n \geq 2$ la desigualdad es estricta para toda $g \in \Sigma$, pues para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $b_0 \in \mathbb{C}$ la función $g(w) = w + b_0 + e^{i\theta} n^{-1/2} w^{-n}$ no es univalente en Δ .

Incluso aún esta abierta la pregunta sobre el comportamiento asintótico de los coeficientes de las funciones $g \in \Sigma$, debido a que las funciones extremales deben ser de naturaleza “fractal”. Para explicar esto último definamos para cada $g \in \Sigma$ con $g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ para todo $z \in \Delta$

$$\gamma_g = 1 + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log n}.$$

Es decir, γ_g es el menor número α tal que para todo $\epsilon > 0$ existe una constante $C(\epsilon) \in (0, +\infty)$ tal que $|b_n| \leq C(\epsilon)n^{\alpha-1+\epsilon}$ para todo $n \geq 2$. Sea

$$\gamma = \sup_{g \in \Sigma} \gamma_g.$$

El origen de la dificultad de determinar el valor exacto de γ fue encontrado por Lennart Carleson y Peter W. Jones en 1992, véase [CJ92]. Ellos definieron otra constante β que mide la tasa de crecimiento de las longitudes de las líneas de Green Γ_r , donde $r \in (1, \infty)$ y $\Gamma_r = g(\{z \in \Delta : |z| = r\})$. Definiendo para $g \in \Sigma$

$$\beta_g := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \text{Longitud}(\Gamma_r)}{-\log(r-1)}$$

y

$$\beta = \sup_{g \in \Sigma} \beta_g.$$

Usando la misma idea que John E. Littlewood uso para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes de las series en \mathcal{S} , véase [Lit25], se prueba que, para $g \in \Sigma$ con $g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ para todo $z \in \Delta$ se tiene

$$\begin{aligned} |b_n| &= \frac{1}{2n\pi} \left| \int_{|w|=1-1/(n+1)} \frac{g'(\frac{1}{w})}{w^{n+2}} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \int_0^{2\pi} \left| g' \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\theta} \right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \frac{2e}{n} \text{Longitud}(\Gamma_{1+1/n}). \end{aligned}$$

Esto último implica $\gamma \leq \beta$.

Teorema (Carleson y Jones, 1992).

$$\gamma = \beta < 0,49755.$$

Además Carleson y Jones conjeturaron

Conjetura (Carleson y Jones, 1992).

$$\beta = 0,25.$$

El propósito de esta tesis es estudiar principalmente el artículo, [BS10], de Dmitri Beliaev y Stanislav Smirnov, véase también [Bel08]. En este artículo ellos probaron que $\beta > 0,23$, que es una mejora sustancial del resultado anterior de Christian Pommerenke, $\beta > 0,17$, en 1975, véase [Pom92].

La identidad $\gamma = \beta$ explica la naturaleza de las funciones extremales, las cuales maximizan las longitudes de las líneas de Green Γ_r . Para una función $f \in \mathcal{S}$ el conjunto $\partial f(\mathbb{D})$ puede ser no acotado, por lo que las líneas de Green

pueden ser de gran longitud. Esto es exactamente lo que ocurre para la función extremal k_0 , véase Figura 1. En contraste, para una función $g \in \Sigma$ el conjunto $\partial g(\Delta)$ es compacto. Por lo tanto para tener líneas de Green de longitud grande, ellas deben “oscilar” o “menearse” mucho y $\partial g(\Delta)$ debe ser de longitud infinita (incluso $\dim_H \partial g(\Delta) > 1$ para $\beta > 0$), véase Figura 2. Esta diferencia explica porque el problema para la clase Σ es más complicado que para la clase \mathcal{S} . Así también sabemos que las funciones extremales para la clase Σ deben tener una naturaleza fractal, es decir el conjunto $\partial g(\Delta)$ debe ser un fractal. Esto último es exactamente el resultado principal que probaron Beliaev y Smirnov en [BS10], que también es el resultado principal de este trabajo de tesis.

Ellos definieron la clase de funciones (aleatorias), los copos de nieve conformes aleatorios y prueban que en el supremo definiendo γ es suficiente tomar g como un copo de nieve conforme aleatorio.

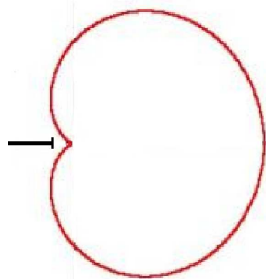


Figura 1:

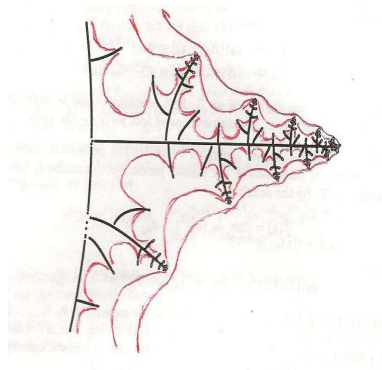


Figura 2:

Análisis multifractal de medidas armónicas

Nikolai Makarov en el año 1998, en su trabajo **Fine structure of Harmonic measure**, véase [Mak98], puso este problema en el lenguaje del análisis multifractal, una disciplina en desarrollo en el borde de la matemática y la física. Estos conceptos fueron introducidos por Benoît Mandelbrot en 1971, véase [Man72] y [Man74] y posteriormente por Tomas Halsey, Mongens Jensen, Leo Kadanoff, Itamos Procaccia y Boris Shraiman en el año 1986, véase [HJK⁺86].

El análisis multifractal estudia diferentes espectros multifractales, sus interrelaciones y conexiones a otras propiedades de la medida en cuestión. Existen varias definiciones de espectro multifractal. En nuestro contexto, consideraremos el *espectro de medias integrales* que satisface una relación tipo-Legendre con el espectro multifractal de Hausdorff de la medida armónica, véase [Mak98].

Sea Ω un dominio propio simplemente conexo de la esfera de Riemann

que contiene a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Por el Teorema de uniformización de Riemann existe una función f que envía Δ conformemente sobre Ω . Definimos el espectro de medias integrales para $t \in \mathbb{R}$ como

$$\beta_{\Omega}(t) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^t d\theta}{-\log(r-1)},$$

y el espectro universal de medias integrales como

$$B(t) = \sup \beta_{\Omega},$$

donde Ω un dominio propio simplemente conexo de la esfera de Riemann que contiene a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Observemos que $B(1) = \beta$.

Sobre la base de los trabajos de James E. Brennan, Szegő, Carleson, Jones y Makarov se conjetura que

Conjetura (Brennan, Szegő, Carleson, Jones, Makarov).

$$B(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & \text{si } |t| < 2 \\ |t| - 1 & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

En el mismo artículo Makarov describe como el espectro universal de medias integrales esta relacionado a muchos problemas aún abiertos de la teoría geométrica de funciones, como por ejemplo la *Conjetura de Brennan*, véase [Bre78].

Conjetura (Brennan, 1978). Sea Ω un dominio simplemente conexo de la esfera de Riemann que contiene a ∞ con al menos dos puntos frontera. Para cualquier $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ y para cualquier $\epsilon \in (0, +\infty)$, se tiene

$$\int \int_{\Omega} |\psi'(z)|^{4-\epsilon} dm(z) < +\infty,$$

donde m es la medida de Lebesgue en el plano.

Considerando la función inversa $\psi^{-1} = \varphi$, no es complicado ver que la conjetura de Brennan es equivalente a: Para cualquier $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ y para cualquier $\epsilon \in (0, +\infty)$, se tiene

$$\int \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(w)|^{-2+\epsilon} dm(w) < +\infty.$$

Probemos que esto último es equivalente a $B(-2) = 1$. La desigualdad $B(-2) \geq 1$ sigue del Teorema de distorsión de Koebe y tomando un dominio particular, véase [Bel05]. Para demostrar $B(-2) \leq 1$ probaremos,

$$\int \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(w)|^{-2+\epsilon} dm(w) < +\infty \Rightarrow \beta_{\varphi}(-2 + \epsilon) \leq 1.$$

lo que implica $B(-2) \leq 1$, por la convexidad de B , véase Proposición 3.1.6. En efecto, observemos que la función

$$r \mapsto r \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^{-2+\epsilon} d\theta,$$

es creciente en $[0, 1]$, véase el Lema 3.3.2. Así se obtiene la desigualdad deseada de

$$\begin{aligned} (1-r_0)r_0 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(r_0e^{i\theta})|^{-2+\epsilon} d\theta &\leq \int_{r_0}^1 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^{-2+\epsilon} r d\theta dr \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(w)|^{-2+\epsilon} dm(w) < +\infty. \end{aligned}$$

Más generalmente se prueba que

$$|t| - 1 \leq B(t) \leq B(-2) + |t| - 2 \text{ para } t \leq -2,$$

véase [Bel05]. Luego la conjetura de Brennan es equivalente a

$$B(t) = |t| - 1 \text{ para } t \leq -2.$$

Las mejores estimaciones superiores de $B(-2)$ fueron obtenidas por Håkan Hedenmalm y Serguei Shimorin en el año 2005, véase [HS05].

Teorema (Hedenmalm y Shimorin, 2005).

$$B(-2) \leq 1,218.$$

La pregunta sobre la integrabilidad de la derivada de transformaciones conformes tiene una conexión con la teoría de aproximaciones, véase [Bre78]. Un ejemplo es el *problema de Keldys* en la década de los 30. El problema es el siguiente: Sean D y U dominios de Jordan en \mathbb{C} con U contenido en D y consideremos el conjunto Ω que es el interior de $D \setminus U$. Para cada $p \in [1, +\infty)$ denotemos por $H^p(\Omega)$ la clausura de los polinomios en $L^p(\Omega)$ y por $L_a^p(\Omega)$ el conjunto de las funciones en $L^p(\Omega)$ que son holomorfas en Ω . Es claro que para todo $p \in [1, +\infty)$ se tiene $H^p(\Omega) \subset L_a^p(\Omega)$. El problema es decidir para cuales p se cumple $H^p(\Omega) = L_a^p(\Omega)$.

Por otro lado $B(t) = \frac{t^2}{4}$ para $t \in [0, 2]$ es equivalente a la *Conjetura de los dominios de Hölder*, véase [BS05].

Uno de los problemas en el cálculo del espectro de medias integrales es el hecho que la derivada de la representación de Riemann de un dominio fractal depende del argumento en una manera no muy regular: f' es de naturaleza “fractal”. En este trabajo de tesis se estudian fractales aleatorios los “copos de nieve conformes aleatorios”, construidos a partir de un “bloque de construcción” $\phi \in \Sigma''$. Para esta clase de “fractales” aleatorios la esperanza de $|f'|^t$, $\mathbb{E}[|f'|^t]$,

(o su tasa de crecimiento) no dependen del argumento. Esto nos permite colocar la integral con respecto al argumento y estudiar la tasa de crecimiento a lo largo de cualquier radio mayor que 1 particular.

Para una función aleatoria f es más natural definir el espectro de medias integrales promedio,

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(t) &= \sup \left\{ \beta \in [0, +\infty) : \text{existe } R \in (1, +\infty) \text{ tal que} \right. \\ &\quad \left. \int_1^R (r-1)^{\beta-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}[|f'_\omega(re^{i\theta})|^t] d\theta dr = +\infty \right\}. \\ &= \inf \left\{ \beta \in [0, +\infty) : \text{existe } R \in (1, +\infty) \text{ tal que} \right. \\ &\quad \left. \int_1^R (r-1)^{\beta-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}[|f'_\omega(re^{i\theta})|^t] d\theta dr < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Además se prueba que $\mathbb{E}[|f'|^t]$ es una solución de cierta ecuación integral. Resolviendo esta ecuación (o estimando su solución) podemos encontrar (o estimar) $\bar{\beta}(t)$.

El teorema principal de Beliaev y Smirnov que desarrollaremos en este trabajo de tesis es que para cada $t \in \mathbb{R}$ se puede construir un copo de nieve conforme aleatorio con bloque de construcción $\phi \in \Sigma''$ de las funciones univalentes de Δ en $\hat{\mathbb{C}}$, normalizadas por las condiciones $\phi(\infty) = \infty$ y $\phi'(\infty) \in (0, +\infty)$, además podemos escoger ϕ suave en la frontera de Δ , encontrar $k \geq 2$ un número entero tal que $\bar{\beta}(t)$ esta arbitrariamente cerca del espectro universal de medias integrales $B(t)$. Formalmente

Teorema Principal 1. *Para todo $\epsilon \in (0, +\infty)$ y $t \in \mathbb{R}$ existe un bloque de construcción $\phi \in \Sigma'' \cap C^\infty(\bar{\Delta})$ y $k \geq 2$ un número entero que definen un copo de nieve conforme aleatorio tal que $\bar{\beta}(t) > B(t) - \epsilon$.*

Este trabajo de tesis esta organizado en tres capítulos. En el primer capítulo se estudia con mayor énfasis la dimensión de Hausdorff y sus propiedades, estudiada por Felix Hausdorff en 1919. Al final de este capítulo se estudian técnicas para el cálculo de dimensión, como por ejemplo el Principio de distribución de masa y la dimensión puntual de una medida.

En el segundo capítulo se estudian las clases de funciones univalentes \mathcal{S} y Σ , los resultados obtenidos en este capítulo nos ayudarán para estudiar la clase Σ'' , donde se definen los copos de nieve conformes. Al final de este capítulo se enuncia la Conjetura de Bieberbach y se prueba que la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Bieberbach.

Al comienzo del tercer capítulo se enuncia la relación de tipo Legendre que existe entre el espectro de medias integrales y el espectro dimensional de Hausdorff de la medida armónica. Finalmente se estudian los copos de nieve conformes aleatorios y sus propiedades ya enunciadas con anterioridad.

Capítulo 1:

DIMENSIONES

En este capítulo queremos extender la noción de “dimensión topológica” ya conocida en \mathbb{R}^p . Con el fin de poder diferenciar conjuntos “fractales” que tienen igual dimensión topológica, como por ejemplo los conjuntos de Cantor. Por lo cual, las propiedades razonables que debe cumplir la nueva dimensión son

- (a) Si $F_1 \subset F_2$, entonces $\dim F_1 \leq \dim F_2$.
- (b) $\dim \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim F_n$.
- (c) Si F es un subconjunto numerable, entonces $\dim F = 0$.
- (d) Si F es una q superficie suave de \mathbb{R}^p , entonces $\dim F = q$.

En este capítulo estudiaremos dos nuevas dimensiones. Primero la *dimensión de caja* que es una de las dimensiones más usadas, debido a su fácil cálculo matemático y estimación empírica. Sin embargo como mostraremos en la sección 2.2 esta dimensión no cumple todas las propiedades enunciadas anteriormente.

Luego estudiaremos la *dimensión de Hausdorff*, estudiada por Felix Hausdorff en 1919, basada sobre la construcción de Carathéodory en 1914. La dimensión de Hausdorff es la más antigua y probablemente la más importante porque es matemáticamente conveniente, porque está construida sobre medidas, las *s-medidas de Hausdorff*, que son relativamente fáciles de manipular. Cabe señalar que la dimensión de Hausdorff satisface todas las propiedades enunciadas anteriormente. Finalmente mostraremos algunas técnicas para el cálculo de dimensión y calcularemos la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor.

1.1. Preliminares.

Empezaremos este capítulo recordando algunos conceptos que usaremos más tarde.

Sistema de números reales extendidos $\overline{\mathbb{R}}$

Definición 1.1.1. *El sistema de números reales extendidos, que denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$, consiste de los números reales, denotado por \mathbb{R} , y dos símbolos $-\infty$ y $+\infty$ que no pertenecen a \mathbb{R} .*

Nosotros preservaremos el orden de \mathbb{R} y definiremos para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Observación 1. En este sentido es claro que $+\infty$ es una cota superior de cualquier subconjunto en el sistema de números reales extendidos y por lo tanto cualquier subconjunto no vacío en el sistema de números reales extendidos tiene una menor cota superior (supremo).

El sistema de números reales extendidos no forma un campo, pero son habituales las siguientes convenciones:

(i) Si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

(ii) Si $x \in (0, +\infty)$ entonces $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

$$(+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty.$$

(iii) Si $x \in (-\infty, 0)$ entonces $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

$$(-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$$

Observemos que no está definido $(+\infty) + (-\infty)$ pero convendremos $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. Además denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}_+ := (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ y $\overline{\mathbb{R}}_+^0 := [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

El espacio euclidiano \mathbb{R}^p

Definición 1.1.2. *Sea p un número entero estrictamente positivo. Denotaremos por \mathbb{R}^p al conjunto de todas las p -uplas*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

donde x_1, x_2, \dots, x_p son números reales.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, denotaremos por $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p) \in \mathbb{R}^p$ y $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_p) \in \mathbb{R}^p$.

También definiremos el *producto interior*, para $x, y \in \mathbb{R}^p$ por $x \cdot y = \sum_{i=1}^p x_i y_i$, y

la *norma* de $x \in \mathbb{R}^p$ por $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2}$.

Dado F subconjunto de \mathbb{R}^p , llamaremos *diámetro de F* al número $\text{diam } F := \sup_{x,y \in F} \|x - y\|$ y diremos que F es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p si $\text{diam } F < +\infty$. Dado E otro subconjuntos de \mathbb{R}^p , llamaremos al número $\text{dist}(E, F) := \inf_{x \in E; y \in F} \|x - y\|$ la *distancia entre E y F* .

Lema 1.1.3. *La función $(x, y) \mapsto \|x - y\|$, es una métrica en \mathbb{R}^p . Además $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico completo.*

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^p$ y $r \in (0, +\infty)$, denotaremos por $B(x_0, r)$ al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x - x_0\| < r\}$, y sera llamado *bola abierta de centro x_0 y radio r* . También denotaremos por $\overline{B}(x_0, r)$ al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x - x_0\| \leq r\}$, y sera llamado *bola cerrada de centro x_0 y radio r* . Luego la familia $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^p, r \in (0, +\infty)\}$ define una topología en \mathbb{R}^p .

Funciones y límites

Dados X, Y conjuntos cualesquiera. Una *función o transformación f* de X a Y , lo que denotaremos por $f : X \rightarrow Y$, es una regla o fórmula que le asigna a cada punto de x en X un único punto $f(x)$ de Y . Si F es un subconjunto de X , denotaremos por $f(F)$ al conjunto *imagen de F* por la función f , definido por $\{f(x) \in Y : x \in F\}$, y si E es un subconjunto de Y , denotaremos por $f^{-1}(E)$ al conjunto *imagen inversa de E* , definido por $\{x \in X : f(x) \in E\}$.

Sean X e Y subconjuntos de \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^q respectivamente, sea $f : X \rightarrow Y$ y sea a un punto de \overline{X} . Diremos que $f(x)$ *tiene límite y (o tiende a y_0)* cuando x *tiende a x_0* , si dado $\epsilon \in (0, +\infty)$ existe $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, +\infty)$ tal que para todo $x \in X$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$ se tiene $\|f(x) - y_0\| < \epsilon$. Lo anterior lo denotaremos por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$. En particular si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ denotaremos por $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$ si dado $\epsilon \in (0, +\infty)$ existe $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, +\infty)$ tal que para todo $x \in X$ con $0 < x - x_0 < \delta$ se tiene $|f(x) - y_0| < \epsilon$.

Definición 1.1.4. *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$). Definiremos,*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) := \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x).$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{\delta > 0} \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x).$$

Los cuales llamaremos límite superior de f y límite inferior de f respectivamente

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} f(x) := \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < x - x_0 < \delta} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{0 < x - x_0 < \delta} f(x).$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} f(x) := \sup_{\delta > 0} \inf_{0 < x - x_0 < \delta} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{0 < x - x_0 < \delta} f(x).$$

Los cuales llamaremos límite superior de f por la derecha y límite inferior de f por la derecha respectivamente.

1.2. Dimensión de caja

Sea p un número entero estrictamente positivo y F un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p . Dado $\delta \in (0, +\infty)$ denotaremos por $N_\delta(F)$ el menor número de conjuntos de diámetro menor o igual que δ necesarios para cubrir F . Entonces definiremos la *dimensión inferior de caja* y la *dimensión superior de caja*, respectivamente

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta};$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Observemos que $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$.

Además si ambos límites son iguales definiremos,

Definición 1.2.1 (Dimensión de cajas). *Sea F un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p tal que $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$. Entonces el número $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ será denotado por $\dim_B F$ y será llamado la dimensión de caja de F .*

Dado $\delta \in (0, +\infty)$, llamaremos δ -cubo a un subconjunto de \mathbb{R}^p , de la forma

$$\prod_{k=1}^p [m_k \delta, (m_k + 1)\delta), \text{ donde } m_k \in \mathbb{Z} \text{ para } k \in \{1, \dots, p\}.$$

Lema 1.2.2 (Definición equivalente para la dimensión de caja). *Sean $\delta \in (0, +\infty)$ y F un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p . Las definiciones de dimensión inferior y dimensión superior de caja son equivalentes si reemplazamos $N_\delta(F)$ por cualquiera de los números siguientes:*

- (i) *El menor número de conjuntos de diámetro menor o igual que δ necesarios para cubrir F ;*
- (ii) *El menor número de cubos de lado δ necesarios para cubrir F ;*
- (iii) *El número de δ -cubos que intersectan F ;*
- (iv) *El menor número de bolas cerradas (abiertas) de radio δ necesarias para cubrir F ;*
- (v) *El mayor número de bolas cerradas (abiertas) de radio δ con centros en F disjuntas dos a dos.*

Demostración. Dado $\delta \in (0, +\infty)$, denotemos por $N_\delta^{(2)}(F)$ el menor número de cubos de lado δ necesarios para cubrir F ; $N_\delta^{(3)}(F)$ el número de δ -cubos que intersectan a F ; $N_\delta^{(4)}(F)$ (respectivamente $\tilde{N}_\delta^{(4)}(F)$) el menor número de bolas cerradas (respectivamente abiertas) de radio δ necesarias para cubrir F y $N_\delta^{(5)}(F)$ (respectivamente $\tilde{N}_\delta^{(5)}(F)$) el mayor número de bolas cerradas (respectivamente abiertas) de radio δ con centros en F disjuntas dos a dos.

Claramente $N_\delta^{(4)}(F) \leq \tilde{N}_\delta^{(4)}(F)$ y $N_\delta^{(5)}(F) \leq \tilde{N}_\delta^{(5)}(F)$. Como todo δ -cubo es un cubo de lado δ , también tenemos $N_\delta^{(2)}(F) \leq N_\delta^{(3)}(F)$. Como cada bola cerrada de radio δ puede ser cubierta por 3^p δ -cubos, tenemos $N_\delta^{(3)}(F) \leq 3^p N_\delta^{(4)}(F)$. Demostraremos

$$N_{\sqrt{p}\delta}(F) \leq N_\delta^{(2)}(F); \quad (1.1a)$$

$$\tilde{N}_{3\delta}^{(4)}(F) \leq N_\delta^{(5)}(F); \quad (1.1b)$$

$$\tilde{N}_\delta^{(5)}(F) \leq N_\delta(F). \quad (1.1c)$$

Esto claramente implica el lema.

Demostración de (1.1a). Sea $\delta \in (0, \sqrt{p^{-1}})$ y \mathcal{C} una colección de cubos de lado δ que cubren F . Como todo cubo de lado δ es un conjunto de diámetro $\sqrt{p}\delta$, luego la colección \mathcal{C} esta formada de conjuntos de diámetro menor o igual a $\sqrt{p}\delta$ que cubre F . Luego $N_{\sqrt{p}\delta}(F) \leq N_\delta^{(2)}(F)$. \square

Demostración de (1.1b). Sea $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ y \mathcal{B} una colección de bolas cerradas de radio δ con centros en F disjuntas dos a dos de cardinalidad máxima. Si $x \in F$, entonces existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $\text{dist}(x, B_x) < \delta$. Luego la bola abierta B'_x concéntrica con B_x y de radio 3δ cumple $x \in B'_x$. Por lo tanto la colección $\mathcal{B}' = \{B'_x\}_{x \in F}$ de bolas abiertas concéntricas con las bolas de \mathcal{B} de radio 3δ cubren F . Luego $\tilde{N}_{3\delta}^{(4)}(F) \leq N_\delta^{(5)}(F)$. \square

Demostración de (1.1c). Sea \mathcal{U} una colección de conjuntos de diámetro menor o igual que δ que cubren F . Sea \mathcal{B} una colección de bolas abiertas de radio δ con centros en F disjuntas dos a dos. Sea $x \in F$ el centro de alguna $B \in \mathcal{B}$ y sea $U \in \mathcal{U}$ que contiene a x . Luego B contiene a U , más preciso como la colección \mathcal{B} es disjunta dos a dos, B solo contiene a U . Luego, $\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{U}$ y por lo tanto como las colecciones \mathcal{U} y \mathcal{B} son arbitrarias se concluye $\tilde{N}_\delta^{(5)}(F) \leq N_\delta(F)$. \blacksquare

Dado $\delta \in (0, +\infty)$ definiremos la δ -vecindad de F , la cual denotaremos F_δ , como

$$F_\delta := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq \delta \text{ para algún } y \in F\}.$$

Proposición 1.2.3. Si F es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p , entonces

$$\underline{\dim}_B F = p - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{\log \delta};$$

$$\overline{\dim}_B F = p - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{\log \delta};$$

donde \mathcal{L}^p es la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^p .

Demostración. Dado $\delta \in (0, 1)$, consideremos la colección \mathcal{B} de bolas abiertas de radio δ que cubren F de cardinalidad mínima. Notemos que si B' es la bola

abierta concéntrica con B de radio 2δ , entonces la colección $\mathcal{B}' = \{B' : B \in \mathcal{B}\}$ cubre F_δ . Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(F_\delta) &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \mathcal{L}^p(B') \leq \#\mathcal{B}(2\delta)^p \mathcal{L}^p(B(\mathbf{0}, 1)) \leq (4\delta)^p \#\mathcal{B}; \\ \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{-\log \delta} &\leq \frac{\log \#\mathcal{B}}{-\log \delta} - p + p \frac{\log 4}{-\log \delta}; \end{aligned}$$

Por el Lema 1.2.2, tenemos

$$-\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{\log \delta} \leq \underline{\dim}_B F - p \quad \text{y} \quad -\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{\log \delta} \leq \overline{\dim}_B F - p. \quad (1.2)$$

Por otro lado, sea \mathcal{C} una colección de bolas abiertas de radio δ con centros en F disjuntas dos a dos de cardinalidad máxima. Luego $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset F_\delta$, y por lo tanto

$$\#\mathcal{C}\delta^p \mathcal{L}^p(B(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{L}^p\left(\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B\right) \leq \mathcal{L}^p(F_\delta).$$

Por el Lema 1.2.2, tenemos

$$\underline{\dim}_B F - p \leq -\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{\log \delta} \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B F - p \leq -\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(F_\delta)}{\log \delta}. \quad (1.3)$$

La proposición se deduce de (1.2) y (1.3). ■

Corolario 1.2.4. *Sea $x \in \mathbb{R}^p$ y $r \in (0, +\infty)$. Entonces $\dim_B B(x, r) = p$.*

Demostración. De la Proposición 1.2.3, se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B B(x, r) &= p - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{L}^p(B(x, r + \delta))}{\log \delta} \\ &= p - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log((r + \delta)^p \mathcal{L}^p(B(\mathbf{0}, 1)))}{\log \delta} \\ &= p. \end{aligned}$$

El mismo argumento es válido si reemplazamos $\overline{\dim}_B$ por $\underline{\dim}_B$. ■

1.2.1. Propiedades de la dimensión de caja

Sean p, q números enteros estrictamente positivos. En esta subsección estudiaremos algunas propiedades de la dimensión de caja, como por ejemplo su invariancia por funciones bi-Lipchitz.

Definición 1.2.5 (Función α -Hölder). *Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^p y $\alpha \in (0, 1]$.*

(a) Diremos que $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función α -Hölder con constante $C \in (0, +\infty)$, si para todo $x, y \in F$ se cumple

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|^\alpha.$$

Además diremos que f es una función α -Hölder si es α -Hölder para alguna constante C .

(b) Diremos que $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función Lipschitz con constante $C \in (0, +\infty)$, si es una función 1-Hölder con constante C . Además diremos que f es una función Lipschitz si es una función 1-Hölder.

(c) Diremos que $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función bi-Lipschitz, si existe f^{-1} (la función inversa de f) y f, f^{-1} son funciones Lipschitz. De forma equivalente diremos que $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función bi-Lipschitz con constante $C \in (0, +\infty)$, si para todo $x, y \in F$, se cumple

$$C^{-1} \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|.$$

Proposición 1.2.6. Sea F un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p y $\alpha \in (0, 1]$. Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función α -Hölder entonces

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \underline{\dim}_B F \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Supongamos que f es una función α -Hölder con constante $C \in (0, +\infty)$. Dado $\delta \in (0, \sqrt[\alpha]{C^{-1}})$ y $\{U_i\}_{i=1}^{N_\delta(F)}$ un cubrimiento de F por conjuntos de diámetro menor o igual a δ . Notemos que para cada $i \in \{1, \dots, N_\delta(F)\}$ tenemos,

$$\begin{aligned} \text{diam } f(F \cap U_i) &= \sup_{x, y \in F \cap U_i} \|f(x) - f(y)\| \\ &\leq \sup_{x, y \in F \cap U_i} C \|x - y\|^\alpha \\ &\leq \sup_{x, y \in U_i} C \|x - y\|^\alpha \\ &= C (\text{diam } U_i)^\alpha. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por lo anterior $\{f(F \cap U_i)\}_{i=1}^{N_\delta(F)}$ es un cubrimiento de $f(F)$ por conjuntos de diámetro menor o igual a $C\delta^\alpha$. Luego,

$$N_{C\delta^\alpha}(f(F)) \leq N_\delta(F);$$

$$\frac{\log N_{C\delta^\alpha}(f(F))}{-\log C\delta^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \sqrt[\alpha]{C} - \log \delta};$$

Así

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \underline{\dim}_B F \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_B F. \quad \blacksquare$$

Corolario 1.2.7. *Sea F subconjunto acotado de \mathbb{R}^p .*

(a) *Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función Lipschitz entonces*

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F \quad y \quad \overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F.$$

(b) *Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función bi-Lipschitz entonces*

$$\underline{\dim}_B f(F) = \underline{\dim}_B F \quad y \quad \overline{\dim}_B f(F) = \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Para la parte (a) basta considerar $\alpha = 1$ en la Proposición 1.2.6. Para la parte (b) consideremos la parte (a) para f y $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$. ■

Corolario 1.2.8. *Sea F subconjunto acotado de \mathbb{R}^p . Dado $q < p$ sea $\Pi : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ la función proyección, definida como $\Pi((x_1, \dots, x_p)) = (x_1, \dots, x_q)$. Entonces*

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F \quad y \quad \overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Notemos que por el Corolario 1.2.7 solo nos basta probar que Π es una función Lipschitz. En efecto, sean $x = (x_1, \dots, x_q, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q, \dots, y_p) \in F$. Luego,

$$\|\Pi(x) - \Pi(y)\| = \left(\sum_{k=1}^q |x_k - y_k| \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^p |x_k - y_k| \right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|.$$

■

Lema 1.2.9 (Propiedades de la dimensión de caja). *Sea $m \geq 2$ un número entero y F, F_1, \dots, F_m subconjuntos acotados de \mathbb{R}^p .*

(a) *Si $F_1 \subset F_2$, entonces $\underline{\dim}_B F_1 \leq \underline{\dim}_B F_2$ y $\overline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_2$.*

(b) $\overline{\dim}_B \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{ \overline{\dim}_B F_k \}.$

(c) *Supongamos que para todo $k \in \{1, \dots, m\}$ tenemos $\underline{\dim}_B F_k = \overline{\dim}_B F_k$. Entonces*

$$\overline{\dim}_B \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) = \underline{\dim}_B \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{ \underline{\dim}_B F_k \}.$$

(d) *Si F es un subconjunto finito, entonces $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 0$.*

(e) *Si F es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^p , entonces $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = p$.*

(f) *Si F es una q -superficie suave y compacta de \mathbb{R}^p , entonces $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = q$.*

Demostración de (a). Dado $\delta \in (0, +\infty)$. Como F_1 es subconjunto de F_2 tenemos $N_\delta(F_1) \leq N_\delta(F_2)$. Luego,

$$\underline{\dim}_B F_1 \leq \underline{\dim}_B F_2 \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_2.$$

□

Demostración de (b). Demostraremos la igualdad en el caso $m = 2$. El caso general se obtiene de este caso particular por inducción. Dado $\delta \in (0, +\infty)$, si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son cubrimientos por conjuntos de diámetro menor o igual que δ de F_1 y F_2 respectivamente, entonces la colección $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ es un cubrimiento por conjuntos de diámetro menor o igual que δ de $F_1 \cup F_2$. Por lo tanto,

$$N_\delta(F_1 \cup F_2) \leq N_\delta(F_1) + N_\delta(F_2) \leq 2 \max\{N_\delta(F_1), N_\delta(F_2)\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(F_1 \cup F_2) &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F_1 \cup F_2)}{-\log \delta}; \\ &\leq \max \left\{ \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log 2N_\delta(F_1)}{-\log \delta}, \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log 2N_\delta(F_2)}{-\log \delta} \right\}; \\ &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log 2}{-\log \delta} + \max \left\{ \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F_1)}{-\log \delta}, \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F_2)}{-\log \delta} \right\}; \\ &= \max \{ \overline{\dim}_B F_1, \overline{\dim}_B F_2 \}. \end{aligned}$$

La desigualdad opuesta esta dada por (a).

□

Demostración de (c). Notemos que por (b) tenemos,

$$\underline{\dim}_B \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) \leq \overline{\dim}_B \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{ \overline{\dim}_B F_k \} = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{ \underline{\dim}_B F_k \}.$$

La desigualdad opuesta esta dada por (a).

□

Demostración de (d). Sea $x \in F$, como para todo $\delta \in (0, +\infty)$ se tiene $N_\delta(\{x\}) = 1$, concluimos que $\dim_B \{x\} = 0$. El resultado sigue de (c).

□

Demostración de (e). Como F es abierto y acotado, para $x \in F$, existen $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$ tal que $B(x, r_1) \subset F \subset B(x, r_2)$. El resultado sigue del Corolario 1.2.4 y (a).

□

Demostración de (f). Para $x \in F$, existe U abierto de F con $U \subset F$ y una función bi-Lipchitz $f : U \rightarrow f(U)$ con $f(U)$ abierto en \mathbb{R}^q . Luego, por el Corolario 1.2.7, la parte (a) y (e), tenemos

$$q = \dim_B f(U) = \dim_B U \leq \underline{\dim}_B F.$$

Como F es compacto, existen abiertos U_1, \dots, U_m de \mathbb{R}^p tal que $F \subset \bigcup_{k=1}^m U_k$. Luego por (a), (c) y (e) tenemos

$$\underline{\dim}_B F \leq \underline{\dim}_B \bigcup_{k=1}^m U_k = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \underline{\dim}_B U_k = q.$$

El mismo argumento es valido si reemplazamos $\underline{\dim}_B$ por $\overline{\dim}_B$. ■

1.2.2. Problemas de la dimensión de caja

Sea p un número estrictamente positivo. El siguiente lema demuestra que en general para $m \geq 2$ un número entero y F_1, \dots, F_m subconjuntos acotados de \mathbb{R}^p no es cierto que

$$\underline{\dim}_B \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{ \underline{\dim}_B F_k \}.$$

Lema 1.2.10. *Existen F_1, F_2 subconjuntos numerables y acotados de \mathbb{R} tal que*

$$\underline{\dim}_B (F_1 \cup F_2) > \max\{ \underline{\dim}_B F_1, \underline{\dim}_B F_2 \}.$$

Para la demostración necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 1.2.11. *Dados $0 < \alpha \leq \beta < 1$. Existen sucesiones de números reales positivos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que*

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n \in (0, 1)$ y $b_n \in \mathbb{N}$;
2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decrece monotonamente a 0 y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ crece monotonamente a $+\infty$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq 1$;
4. si $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$, entonces

$$\alpha = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_n}{-\log a_n} \quad y \quad \beta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_n}{-\log a_n};$$

5. existe $C \in (0, +\infty)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\frac{1}{a_n S_n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k b_k \right) \leq C.$$

Demostración. [Pes97, Lema, página 38]. ■

Lema 1.2.12. *Dados $0 < \alpha \leq \beta < 1$. Existe F subconjunto numerable y cerrado de $[0,1]$ tal que*

$$\alpha = \underline{\dim}_B F \quad y \quad \beta = \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ las sucesiones del lema anterior. Se hace notar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n = a^n$ con $a \in (0, \frac{1}{3}]$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $P_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ ($P_0 = 0$ y $P_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$). Consideremos $F_0 = \{0\}$ y para $n \in \mathbb{N}$ conocido F_{n-1} definiremos

$$F_n := F_{n-1} \cup \left\{ P_{n-1} + a_n, \dots, \overbrace{P_{n-1} + b_n a_n}^{=P_n} \right\}.$$

Sea

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n \cup \{P_\infty\}.$$

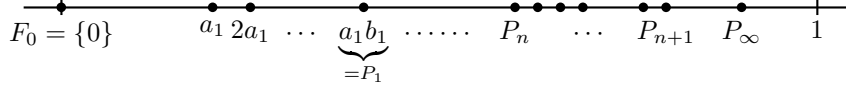


Figura: Conjunto F .

Veamos que F cumple el lema. En efecto, dado $\delta \in (0, 1)$, consideremos $n(\delta)$ el menor número entero tal que $a_{n(\delta)} \leq \delta < a_{n(\delta)-1}$. Sean $E_1 := F_{n(\delta)-1} \setminus \{P_{n(\delta)-1}\}$ y $E_2 := F \setminus E_1$. Observemos que para $x, y \in E_1$ tenemos $|x - y| \geq a_{n(\delta)-1} > \delta$. Luego si $N_\delta(E_i)$ es el número de δ -cubos que intersectan al conjunto E_i para $i = 1, 2$ se tiene

$$N_\delta(E_1) = S_{n(\delta)} \leq N_\delta(F).$$

Por otro lado,

$$N_\delta(E_2) = \left\lceil \frac{P_\infty - P_{n(\delta)-1}}{\delta} \right\rceil + 1 \leq \frac{\sum_{k=S_{n(\delta)}}^{\infty} a_k b_k}{a_{n(\delta)}} + 1 \leq C S_{n(\delta)} + 1 \leq (1 + C) S_{n(\delta)},$$

donde $[x]$, denota la parte entera de x . De donde,

$$N_\delta(F) \leq N_\delta(E_1) + N_\delta(E_2) \leq (2 + C) S_{n(\delta)}.$$

Así,

$$\frac{\log S_{n(\delta)-1}}{-\log(a a_{n(\delta)-1})} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log((C + 2) S_{n(\delta)})}{-\log\left(\frac{a_{n(\delta)}}{a}\right)}.$$

Luego el resultado del lema sigue de 3. del lema anterior. ■

Demostración del Lema 1.2.10. Sean $0 < \alpha \leq \beta < \beta' < 1$. Considerando una construcción análoga a la del lema anterior, existen $F_1 \subset [0, 1]$ y $F_2 \subset [2, 3]$ que satisfacen lo siguiente:

- (a) $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2 = \alpha$; $\overline{\dim}_B F_1 = \beta$ y $\overline{\dim}_B F_2 = \beta'$;
- (b) Consideremos $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que tiende a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_n}(F_1)}{-\log \delta_n} = \alpha \quad \text{y} \quad \alpha < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_n}(F_2)}{-\log \delta_n}.$$

Luego los conjunto F_1 y F_2 satisfacen la propiedad deseada. ■

Proposición 1.2.13. Sea F un subconjunto acotado de \mathbb{R}^p . Si \overline{F} denota la clausura de F , es decir, el menor subconjunto cerrado que contiene a F , entonces

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Dado $\delta \in (0, 1)$, si \mathcal{B} es una colección finita de bolas cerradas de radio δ que cubren F , entonces $\overline{F} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ (pues \overline{F} es el menor subconjunto cerrado que contiene a F). Luego, si $N'_\delta(F)$ (respectivamente $N'_\delta(\overline{F})$) es el menor número de bolas cerradas de radio δ necesarias para cubrir F (respectivamente \overline{F}), entonces $N'_\delta(\overline{F}) \leq N'_\delta(F)$. Luego por el Lema 1.2.2, se tiene

$$\underline{\dim}_B \overline{F} \leq \underline{\dim}_B F \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B \overline{F} \leq \overline{\dim}_B F.$$

Como $F \subset \overline{F}$ la desigualdad opuesta esta dada por el Lema 1.2.9 (a). ■

Corolario 1.2.14. Existe un subconjunto numerable y acotado F de \mathbb{R}^p que satisface $\underline{\dim}_B F = p$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^p$ y $r \in (0, +\infty)$. Por el Corolario 1.2.4 y la Proposición 1.2.13, el subconjunto $F = B(x, r) \cap \mathbb{Q}^p$ de \mathbb{R}^p satisface $\underline{\dim}_B F = p$. ■

1.2.3. Dimensión de caja modificada

Sea p un número entero estrictamente positivo y F subconjunto de \mathbb{R}^p . Definiremos la *dimensión inferior de caja modificada* y la *dimensión superior de caja modificada* respectivamente,

$$\underline{\dim}_{MB} F := \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \underline{\dim}_B F_n : F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right\}.$$

$$\overline{\dim}_{MB} F := \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\dim}_B F_n : F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right\}.$$

Observemos que en general $\underline{\dim}_{MB} F \leq \underline{\dim}_B F$ y $\overline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F$. En la Proposición 1.2.18 veremos un caso en el cual se cumple la igualdad.

Observación 2. En las definiciones anteriores de *dimensión superior* (respectivamente *inferior*) de *caja modificada*,

1. es suficiente por la Proposición 1.2.13 considerar solo cubrimientos por subconjuntos cerrados de F .
2. como por el Lema 1.2.9 (a) se tiene

$$\overline{\dim}_B F \cap F_n \leq \overline{\dim}_B F_n \quad \text{y} \quad \underline{\dim}_B F \cap F_n \leq \underline{\dim}_B F_n,$$

es suficiente considerar cubrimientos de F por subconjunto de F .

Proposición 1.2.15. *Si F es un subconjunto numerable de \mathbb{R}^p entonces,*

$$\overline{\dim}_{MB} F = \underline{\dim}_{MB} F = 0.$$

Demostración. Sea $F = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Basta tomar $F_n = x_n$ en la definición. ■

Definición 1.2.16 (Espacio de Baire). *Diremos que un espacio métrico X es un espacio de Baire: Si dada cualquier colección numerable $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados con interior vacío en X , entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ también tiene interior vacío.*

Teorema 1.2.17 (Teorema de Categoría de Baire). *Si X es un espacio métrico completo, entonces X es un Espacio de Baire.*

Demostración. [Roy63, Corolario 16, página 139]. ■

Observación 3. El Teorema de Categoría de Baire suele ser utilizado de la siguiente manera: Sea X un espacio métrico completo no vacío. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que X_{n_0} tiene interior no vacío.

Proposición 1.2.18. *Sea F un subconjunto compacto de \mathbb{R}^p . Supongamos que para todo V subconjunto abierto de \mathbb{R}^p que intersecta a F , tenemos*

$$\overline{\dim}_B (F \cap V) = \overline{\dim}_B F. \quad (\text{respectivamente } \underline{\dim}_B (F \cap V) = \underline{\dim}_B F.)$$

Entonces $\overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_{MB} F$. (respectivamente $\underline{\dim}_B F = \underline{\dim}_{MB} F$.)

Demostración. Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^p tal que $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $F_n \subset F$. Luego por la observación anterior existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tiene interior no vacío. Luego existe V subconjunto abierto de \mathbb{R}^p que intersecta a F , tal que $F \cap V \subset F_{n_0}$. Por hipótesis para $n_0 \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B (V \cap F) \leq \overline{\dim}_B F_{n_0} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\dim}_B F_n.$$

Como la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es arbitraria, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{MB} F &:= \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\dim}_B F_n : F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \text{ y para todo } n \in \mathbb{N} \text{ el} \right. \\ &\quad \left. \text{subconjunto } F_n \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^p \text{ y cumple } F_n \subset F \right\} \\ &\geq \overline{\dim}_B F. \end{aligned}$$

■

1.3. Dimensión de Hausdorff

En esta sección estudiaremos la dimensión de Hausdorff, que esta construida sobre las s -medidas de Hausdorff, que son medidas borelianas invariantes por translaciones, Teorema 1.3.3.

1.3.1. Las s -Medidas de Hausdorff

Sean p, q números enteros estrictamente positivos.

Definición 1.3.1 (δ -cubrimiento). *Sea $\delta \in (0, +\infty)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^p . Diremos que la colección $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento de F subconjunto de \mathbb{R}^p , si $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\text{diam } U_n \leq \delta$.*

Sea F subconjunto de \mathbb{R}^p . Dados $s \in [0, +\infty)$ y $\delta \in (0, +\infty)$, definiremos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^s : \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\}.$$

Observación 4. Sea $\delta \in (0, +\infty)$ y F subconjunto de \mathbb{R}^p . Sea $\mathcal{C}_\delta(F)$ la familia de los δ -cubrimientos de F .

$$\text{Si } \delta \leq \delta' \text{ entonces } \mathcal{C}_\delta(F) \subset \mathcal{C}_{\delta'}(F).$$

Luego para $s \in [0, +\infty)$,

$$\mathcal{H}_{\delta'}^s(F) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Así existe $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(F) \left(= \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \right)$ en $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Definición 1.3.2 (La s -medida de Hausdorff). *Sea $s \in [0, +\infty)$ y F un subconjunto de \mathbb{R}^p . El límite anterior lo denotaremos por $\mathcal{H}^s(F)$, es decir, $\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, y lo llamaremos la s -medida de Hausdorff de F .*

Teorema 1.3.3. *Si $s \in [0, +\infty)$ entonces la función, $\mathcal{H}^s(\cdot) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^0$ induce una medida boreliana invariante por traslaciones.*

Demostración. Dividiremos la demostración en 3 pasos:

Paso (1). Demostraremos que la función $\mathcal{H}^s(\cdot) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^0$ es una medida exterior métrica, para ello verificaremos las condiciones de la Definición A.0.5.

(1) $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ de la definición.

(2) Dado $\delta \in (0, +\infty)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F_2 . Como $F_1 \subset F_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, la colección $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es un δ -cubrimiento de F_1 . Luego $\mathcal{H}_\delta^s(F_1) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_2)$ y como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario concluimos que $\mathcal{H}^s(F_1) \leq \mathcal{H}^s(F_2)$.

(3) Dado $n \in \mathbb{N}$ y $\delta, \epsilon \in (0, +\infty)$ escojamos $\{U_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F_n tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\text{diam } U_{n,m})^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Notemos que $\{U_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento de $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Luego sumando sobre n , tenemos

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\text{diam } U_{n,m})^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_n) + \epsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_n) + \epsilon.$$

Como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario tenemos

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_n) + \epsilon;$$

y como $\epsilon \in (0, +\infty)$ es arbitrario concluimos

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_n).$$

(4) Sean F_1 y F_2 subconjuntos de \mathbb{R}^p tales que $\text{dist}(F_1, F_2) > 0$. Consideremos $\delta \in \left(0, \frac{\text{dist}(F_1, F_2)}{3}\right)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de $F_1 \cup F_2$. Luego como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene, $U_n \cap F_1 = \emptyset$ ó $U_n \cap F_2 = \emptyset$ y $\text{diam}(U_n \cap F_1) \leq \text{diam } U_n$ y $\text{diam}(U_n \cap F_2) \leq \text{diam } U_n$, concluimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(F_1) + \mathcal{H}_\delta^s(F_2) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam}(U_n \cap F_1))^s + \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam}(U_n \cap F_2))^s; \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^s. \end{aligned}$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento arbitrario de $F_1 \cup F_2$, tenemos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F_1) + \mathcal{H}_\delta^s(F_2) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_1 \cup F_2);$$

y si δ tiende a 0, entonces $\mathcal{H}^s(F_1 \cup F_2) \geq \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2)$.
La desigualdad inversa sigue de la condición (3).

□

Paso (2). Veamos que los conjuntos borelianos son \mathcal{H}^s -medibles y además si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de borelianos entonces

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_n).$$

Por el paso (1) \mathcal{H}^s es una medida exterior métrica, por el Corolario A.0.9 los subconjuntos borelianos son \mathcal{H}^s -medibles .

□

Paso (3). Probaremos que la medida \mathcal{H}^s es invariante por traslaciones. Esto es, para todo $x \in \mathbb{R}^p$ y todo F subconjunto de \mathbb{R}^p , se cumple

$$\mathcal{H}^s(x + F) = \mathcal{H}^s(F), \quad \text{donde } x + F := \{x + y : y \in F\}.$$

En efecto, dado $\delta \in (0, +\infty)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F , notemos que $\{x + U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento de $x + F$. Luego,

$$\mathcal{H}_\delta^s(x + F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam}(x + U_n))^s = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^s.$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento arbitrario de F , tenemos

$$\mathcal{H}_\delta^s(x + F) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario concluimos que $\mathcal{H}^s(x + F) \leq \mathcal{H}^s(F)$. Para obtener la desigualdad opuesta, basta reemplazar $F + x$ por F y $-x$ por x , en la desigualdad anterior.

■

En lo que sigue probaremos algunas propiedades de las s -medidas de Hausdorff.

Lema 1.3.4. *Sea $\alpha \in (0, 1]$ y F subconjunto de \mathbb{R}^p . Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función α -Hölder con constante $C \in (0, +\infty)$, Definición 1.2.5, entonces para $s \in [0, +\infty)$*

$$\mathcal{H}_\alpha^s(f(F)) \leq C^\alpha \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Dado $\delta \in (0, +\infty)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F . Notemos que por (1.4) la colección $\{f(F \cap U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un $C\delta^\alpha$ -cubrimiento de $f(F)$. Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam}(f(F \cap U_n)))^{\frac{s}{\alpha}} \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam} U_n)^s;$$

tomando ínfimo

$$\mathcal{H}_{C\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario concluimos, $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$. ■

Corolario 1.3.5. Sea F subconjunto de \mathbb{R}^p y $s \in [0, +\infty)$.

(a) Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función Lipschitz con constante $C \in (0, +\infty)$, entonces

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq C^s \mathcal{H}^s(F).$$

(b) Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función bi-Lipschitz con constante C , entonces

$$C^{-s} \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(f(F)) \leq C^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Para la parte (a) basta considerar $\alpha = 1$ en el lema anterior. Aplicando la parte (a) a f y $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ obtenemos la parte (b). ■

1.3.2. Dimensión de Hausdorff

Sea p un número entero estrictamente positivo. El lema siguiente prueba que existe un valor crítico s_c tal que la gráfica de la función $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ da un “salto” de $+\infty$ a 0. A este valor crítico lo llamaremos la *dimensión de Hausdorff del conjunto F* .

Lema 1.3.6. Sea $s \in [0, +\infty)$ y F un subconjunto de \mathbb{R}^p tal que $\mathcal{H}^s(F) < +\infty$. Entonces para $t \in (s, +\infty)$ se tiene $\mathcal{H}^t(F) = 0$.

Demostración. Sea $t \in (s, +\infty)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F . Notemos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam} U_n)^t = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam} U_n)^{t-s} (\text{diam} U_n)^s \leq \delta^{t-s} \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam} U_n)^s.$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento arbitrario de F , tenemos $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Si hacemos tender δ a 0 (como $\mathcal{H}^s(F) < +\infty$), concluimos que $\mathcal{H}^t(F) = 0$. ■

Definición 1.3.7 (Dimensión de Hausdorff). Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^p . Llamaremos *dimensión de Hausdorff del conjunto F* , la cual denotaremos por $\dim_H F$, al número

$$\dim_H F := \inf\{s \in [0, +\infty) : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \in [0, +\infty) : \mathcal{H}^s(F) = +\infty\}.$$

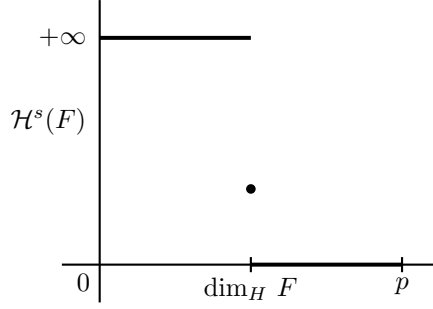


Figura: Gráfica de la función $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$.

Observemos que si $s = \dim_H F$ entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser igual a 0 ó infinito, ó puede satisfacer $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$.

1.3.3. Propiedades de la dimensión de Hausdorff

Sean p, q números enteros estrictamente positivos. En esta subsección estudiaremos algunas propiedades de la dimensión de Hausdorff, como por ejemplo la invariancia por funciones bi-Lipchitz.

Lema 1.3.8. Sea $\alpha \in (0, 1]$ y F subconjunto de \mathbb{R}^p . Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función α -Hölder con constante $C \in (0, +\infty)$, Definición 1.2.5, entonces

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F.$$

Demostración. Sea $s \in [0, +\infty)$ tal que $\mathcal{H}^s(F) = 0$. Entonces por el Lema 1.3.4 tenemos que $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$. Luego $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$ y como $s \in [0, +\infty)$ es arbitrario tenemos $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$. ■

Corolario 1.3.9. Sea F subconjunto de \mathbb{R}^p .

- (a) Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función Lipschitz, entonces $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.
- (b) Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una función bi-Lipschitz, entonces $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Demostración. Para la parte (a) basta considerar $\alpha = 1$ en el Lema 1.3.8. Para la parte (b) consideremos la parte (a) para f y $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$. ■

Lema 1.3.10 (Propiedades de la dimensión de Hausdorff). Sean F y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subconjuntos de \mathbb{R}^p .

- (a) Si $F_1 \subset F_2$, entonces $\dim_H F_1 \leq \dim_H F_2$.
- (b) $\dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H F_n$.
- (c) Si F es un subconjunto numerable, entonces $\dim_H F = 0$.

(d) Si F es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^p , entonces $\dim_H F = p$.

(e) Si F es una q -superficie suave en \mathbb{R}^p , entonces $\dim_H F = q$.

Demostración de (a). Sea $s \in [0, +\infty)$ tal que $\mathcal{H}^s(F_2) = 0$. Luego por el Teorema 1.3.3 (2), se tiene $\mathcal{H}^s(F_1) \leq \mathcal{H}^s(F_2) = 0$. Así $\dim_H F_1 \leq s$ y como $s \in [0, +\infty)$ es arbitrario concluimos que $\dim_H F_1 \leq \dim_H F_2$. \square

Demostración de (b). Sea $s > \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H F_n$, esto es para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\mathcal{H}^s(F_n) = 0$. Luego por el Teorema 1.3.3 (3), se tiene

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_n) = 0.$$

Así $\dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \leq s$ y como $s \in [0, +\infty)$ es arbitrario concluimos que

$$\dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H F_n.$$

La desigualdad inversa la obtenemos de (a). \square

Demostración de (c). Supongamos que $F = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\mathcal{H}^0(\{x_n\}) = 1$, luego $\dim_H \{x_n\} = 0$. El resultado se obtiene de (b). \square

Demostración de (d). El resultado continua del siguiente lema, notando que la familia de los cubos diádicos es una base en \mathbb{R}^p .

Llamaremos un cubo diádico a un subconjunto de \mathbb{R}^p , de la forma

$$\prod_{k=1}^p [m_k 2^{-m}, (m_k + 1) 2^{-m}), \text{ donde } m_k \in \mathbb{Z} \text{ para todo } k \in \{1, \dots, p\} \text{ y } m \in \mathbb{Z}.$$

Lema 1.3.11. Se cumple $0 < \mathcal{H}^p([0, 1]^p) < +\infty$.

Demostración. Primero probaremos que $\mathcal{H}^p([0, 1]^p) < +\infty$. Dado $k \in \mathbb{N}$ consideremos el $\frac{\sqrt{p}}{k}$ -cubrimiento $\{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})^p\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ de $[0, 1]^p$. Luego

$$\mathcal{H}_{\frac{\sqrt{p}}{k}}^p([0, 1]^p) \leq k^p \left(\frac{\sqrt{p}}{k} \right)^p = p^{\frac{p}{2}} < +\infty.$$

Si $k \rightarrow +\infty$ entonces $\mathcal{H}^p([0, 1]^p) < +\infty$.

Por otro lado para probar que $0 < \mathcal{H}^p([0, 1]^p)$, consideremos $\delta \in (0, +\infty)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de $[0, 1]^p$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea B_n una bola de radio $\text{diam } U_n$ que contenga a U_n . Luego $[0, 1]^p \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y

$$1 = \mathcal{L}^p([0, 1]^p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^p(B_n) = \mathcal{L}^p(B(\mathbf{0}, 1)) \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^p.$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento arbitrario de $[0, 1]^p$ tenemos

$$\frac{1}{\mathcal{L}^p(B(\mathbf{0}, 1))} < \mathcal{H}_\delta^p([0, 1]^p).$$

Como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario, se concluye que $0 < \mathcal{H}^p([0, 1]^p)$. ■

□

Demostración de (e). Para $x \in F$, existe U abierto de F con $x \in U$ y una función bi-Lipchitz $f : U \rightarrow f(U)$ con $f(U)$ abierto en \mathbb{R}^q . Luego, por el Corolario 1.3.9, la parte (a) y (d), tenemos

$$q = \dim_H f(U) = \dim_H U \leq \dim_H F.$$

Por otro lado existen abiertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de F tal que $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Luego por la parte (a), (b) y (d), tenemos

$$\dim_H F \leq \dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H U_n = q.$$

■

En lo que sigue probaremos las relaciones entre las distintas dimensiones.

Proposición 1.3.12. *Sea F subconjunto acotado de \mathbb{R}^p . Entonces*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Solo probaremos la primera desigualdad, para la segunda desigualdad véase la página 4. Podemos suponer que $0 < \dim_H F$. Sea $s \in [0, +\infty)$ tal que $1 < \mathcal{H}^s(F) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Luego para $\delta \in (0, 1)$ tal que $1 < \mathcal{H}_\delta^s(F)$ sea

$N_\delta(F)$ como en la página 4 y $\{U_i\}_{i=1}^{N_\delta(F)}$ un δ -cubrimiento de cardinalidad mínima de F . Luego,

$$1 < \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{i=1}^{N_\delta(F)} (\text{diam } U_i)^s \leq N_\delta(F) \delta^s;$$

y

$$s < \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Si δ tiende a 0 entonces $s \leq \underline{\dim}_B F$. Notemos que

$$\dim_H F = \sup\{s \in [0, +\infty) : \mathcal{H}^s(F) > 1\}.$$

Como $s \in [0, +\infty)$ tal que $\mathcal{H}^s(F) > 1$ es arbitrario se concluye

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F.$$

■

Corolario 1.3.13. *Sea F subconjunto de \mathbb{R}^p . Entonces*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_{MB} F.$$

Demostración. Solo probaremos la primera desigualdad, para la segunda desigualdad véase la página 12. Dada una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de \mathbb{R}^p tal que $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Aplicando para cada $n \in \mathbb{N}$ la Proposición 1.3.12 y el Lema 1.3.10 (a) y (b), tenemos

$$\dim_H F \leq \dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H F_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \underline{\dim}_B F_n.$$

Como la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es arbitraria, concluimos que $\dim_H F \leq \underline{\dim}_{MB} F$. ■

1.4. Técnicas para el cálculo de dimensión

Como un primer ejemplo consideraremos el *conjunto de Cantor tercio*, que denotaremos por C . Algunas de las propiedades del conjunto de Cantor tercio son: C es compacto, totalmente desconexo, C es no numerable y tiene medida de Lebesgue nula.

CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE CANTOR TERCIO.

Sea $C_0 = [0, 1]$ el intervalo unitario cerrado en \mathbb{R} . Sea C_1 el conjunto que obtenemos dividiendo C_0 en 3 partes iguales, “extrayendo” el intervalo abierto central, es decir, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Para $k \in \mathbb{N}$ obtenemos C_{k+1} dividiendo cada intervalo $I^{(k)}$ de C_k en tres partes iguales (cada uno de longitud 3^{-k}), extrayendo el intervalo abierto central. Entonces el *conjunto de Cantor tercio* es

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

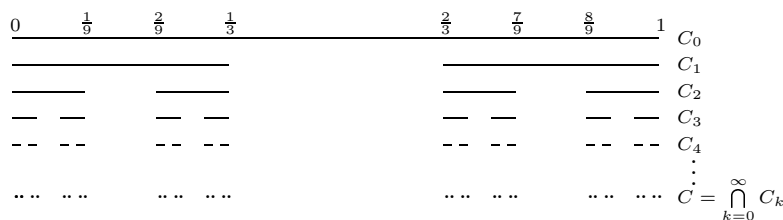


Figura: *Conjunto de Cantor tercio.*

Ejemplo (Conjunto de Cantor tercio). Sea C el *conjunto de Cantor tercio*. Si $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ entonces $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 1$ y luego $\dim_H C = s$.

Demostración. Notemos que para $k \in \mathbb{N}$ el conjunto C_k consiste de 2^k intervalos, cada uno de longitud 3^{-k} . Luego si consideramos estos intervalos como

un 3^{-k} -cubrimiento de C tenemos, para $s = \frac{\log 2}{\log 3}$

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 2^k 3^{-sk} = 1.$$

Luego si k tiende a $+\infty$, tenemos

$$\mathcal{H}^s(C) \leq 1. \tag{1.5}$$

Por otro lado sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento finito de intervalos cerrados de C . Para cada $i \in I$ sea k el número entero positivo tal que

$$3^{-(k+1)} \leq \text{diam } U_i < 3^{-k}.$$

Entonces el conjunto U_i puede intersectar a lo más un intervalo de C_k (pues la separación de los intervalos adyacentes de C_k es 3^{-k}). Además para cada número entero $j \geq k$ el conjunto U_i puede intersectar a lo más

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s (\text{diam } U_i)^s;$$

intervalos de C_j . Escojamos $j \in \mathbb{N}$ el número entero más pequeño tal que para todo $i \in I$ se tenga $3^{-(j+1)} \leq \text{diam } U_i$. Como los conjuntos U_i intersectan los 2^j intervalos de C_j , contando intervalos tenemos,

$$2^j \leq \sum_{i \in I} 2^j 3^s (\text{diam } U_i)^s.$$

Como la colección $\{U_i\}_{i \in I}$ es arbitraria tenemos,

$$\frac{1}{2} = 3^{-s} \leq \mathcal{H}^s(C). \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6) tenemos $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 1$ y por lo tanto $\dim_H C = s$. ■

Sea p un número entero estrictamente positivo y sea μ una medida de Borel sobre \mathbb{R}^p . El *sopORTE* de μ , es el menor subconjunto cerrado de \mathbb{R}^p , que denotaremos por $\text{Sop}(\mu)$, tal que $\mu(\mathbb{R}^p \setminus \text{Sop}(\mu)) = 0$. Diremos que μ es una medida *sobre* F si F contiene al $\text{Sop}(\mu)$.

Definición 1.4.1 (Distribución de masa). *Diremos que una medida de Borel μ sobre un subconjunto de \mathbb{R}^p es una distribución de masa si $\mu(\mathbb{R}^p) \in (0, +\infty)$.*

Proposición 1.4.2 (Principio de distribución de masa). *Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^p y μ una distribución de masa sobre F . Asumamos que existen $s \in [0, +\infty)$, $C \in (0, +\infty)$ y $\epsilon \in (0, +\infty)$ tal que para todo subconjunto U de \mathbb{R}^p con $\text{diam } U \leq \epsilon$ se cumple $\mu(U) \leq C (\text{diam } U)^s$. Entonces*

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{C} \quad \text{y luego} \quad s \leq \dim_H F.$$

Demostración. Dado $\delta \in (0, \epsilon)$ y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F . Entonces

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^s.$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento arbitrario tenemos $\frac{\mu(F)}{C} \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \mathcal{H}^s(F)$. Como $\mu(F) \in (0, +\infty)$ concluimos que $s \leq \dim_H F$. ■

Lema 1.4.3. Dado $s \in (0, 1)$, existe F subconjunto de \mathbb{R} tal que $\dim_H F = s$.

Demostración. La construcción de F es análoga a la del Conjunto de Cantor tercio visto con anterioridad.

CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO F .

Sea $F_0 = [0, 1]$ el intervalo unitario cerrado de \mathbb{R} . Para $k \in \mathbb{N}^*$ obtenemos F_{k+1} de la manera siguiente: Sea $m \geq 2$ un número entero, para cada intervalo $I^{(k)}$ de F_k , consideremos los m intervalos $I_1^{(k+1)}, I_2^{(k+1)}, \dots, I_m^{(k+1)}$ de F_{k+1} contenidos en $I^{(k)}$ igualmente espaciados, tal que el punto inicial de $I_1^{(k+1)}$ coincida con el punto inicial de $I^{(k)}$ y el punto final de $I_m^{(k+1)}$ coincida con el punto final de $I^{(k)}$. Además para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ la longitud del intervalo $I_i^{(k+1)}$ cumple la relación

$$\left(\text{diam } I_i^{(k+1)}\right)^s = \frac{1}{m} \left(\text{diam } I^{(k)}\right)^s. \quad (1.7)$$

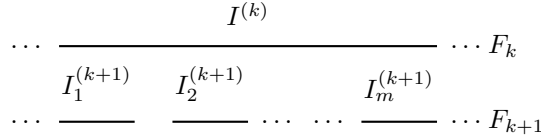


Figura: Parte de los conjuntos F_k y F_{k+1} .

Entonces

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k.$$

Probemos que $\dim_H F = s$. Observemos que para $k \in \mathbb{N}^*$ por la relación (1.7) se tiene

$$\sum_{i=1}^m \left(\text{diam } I_i^{(k+1)}\right)^s = \left(\text{diam } I^{(k)}\right)^s. \quad (1.8)$$

Inductivamente probemos que para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se cumple

$$\sum_{I^{(k)} \in F_k} \left(\text{diam } I^{(k)}\right)^s = 1; \quad (1.9)$$

donde la suma se toma sobre “todos” los intervalos en F_k .

En efecto, esto es claro para $k = 0$, considerando la relación (1.8) y sumando

sobre todos los intervalos $I^{(k)}$ de F_k , tenemos

$$1 = \sum_{I^{(k)} \in F_k} \left(\text{diam } I^{(k)} \right)^s = \sum_{I^{(k)} \in F_k} \sum_{i=1}^m \left(\text{diam } I_i^{(k+1)} \right)^s = \sum_{I^{(k+1)} \in F_{k+1}} \left(\text{diam } I^{(k+1)} \right)^s.$$

Dado $\delta \in (0, +\infty)$ como $\text{diam } I^{(k)} \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow +\infty$, elijamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam } I^{(k_0)} \leq \delta$ para todo intervalo en F_{k_0} . Luego considerando los intervalos $I^{(k_0)}$ de F_{k_0} como un δ -cubrimiento de F , por (1.9) tenemos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{I^{(k_0)} \in F_{k_0}} \left(\text{diam } I^{(k_0)} \right)^s = 1;$$

luego como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario, concluimos que $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Por otro lado consideremos la medida μ sobre F definida para cada $k \in \mathbb{N}^*$ y cada intervalo $I^{(k)}$ en F_k como $\mu(I^{(k)}) = \left(\text{diam } I^{(k)} \right)^s$. Observemos que μ es una distribución de masa sobre F y que por (1.9) para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se cumple $\mu(F_k) = 1$, de donde $\mu(F) = 1$. Consideremos un intervalo U con puntos finales en F y sea k el número entero mas pequeño tal que para algún intervalo $I^{(k)}$ en F_k contenga a U y sean $I_1^{(k+1)}, I_2^{(k+1)}, \dots, I_m^{(k+1)}$ los m intervalos de F_{k+1} contenidos en $I^{(k)}$. Por la elección de k el intervalo U debe intersectar un número $j \in \{2, \dots, m\}$ de los intervalos $\{I_i^{(k+1)}\}$. El espacio entre los $I_i^{(k+1)}$ consecutivos es

$$\begin{aligned} \frac{\text{diam } I^{(k)} - m \left(\text{diam } I_i^{(k+1)} \right)}{m-1} &= \text{diam } I^{(k)} \frac{\left(1 - m \frac{\text{diam } I_i^{(k+1)}}{\text{diam } I^{(k)}} \right)}{m-1}; \\ &= \text{diam } I^{(k)} \frac{\left(1 - m^{1-\frac{1}{s}} \right)}{m-1}; \quad \text{por (1.7)} \\ &\geq \left(1 - 2^{1-\frac{1}{s}} \right) \frac{\text{diam } I^{(k)}}{m}; \quad m \geq 2 \text{ y } s \in (0, 1). \end{aligned}$$

Sea $C_s = 1 - 2^{1-\frac{1}{s}}$, luego

$$\text{diam } U \geq \frac{j-1}{m} C_s \left(\text{diam } I^{(k)} \right) \geq \frac{j}{2m} C_s \left(\text{diam } I^{(k)} \right);$$

de donde

$$\frac{j}{m} \left(\text{diam } I^{(k)} \right)^s \leq 2^s C_s^{-s} \left(\frac{j}{m} \right)^{1-s} \left(\text{diam } U \right)^s.$$

Por (1.7), tenemos

$$\begin{aligned} \mu(U) \leq j \mu(I_i^{(k+1)}) &= j \left(\text{diam } I_i^{(k+1)} \right)^s = \frac{j}{m} \left(\text{diam } I^{(k)} \right)^s; \\ &\leq 2^s C_s^{-s} \left(\frac{j}{m} \right)^{1-s} \left(\text{diam } U \right)^s \leq 2^s C_s^{-s} \left(\text{diam } U \right)^s. \end{aligned}$$

Luego, por el Principio de distribución de masa, Proposición 1.4.2, concluimos que $\mathcal{H}^s(F) \geq 2^{-s} C_s^s$ y $s \leq \dim_H F$ ■

Lema 1.4.4 (Lema del Cubrimiento de Vitali). *Sea \mathcal{C} una familia de bolas contenidas en alguna región acotada de \mathbb{R}^p . Entonces existe una subfamilia disjunta (a lo sumo numerable) $\{B_i\}_{i \in I}$ tal que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_{i \in I} \tilde{B}_i$$

donde para cada $i \in I$ la bola \tilde{B}_i es concéntrica con B_i pero de radio 4 veces el radio de B_i .

Demostración. [Fal03, Lema 4.8, página 66]. ■

Sea p un número entero estrictamente positivo y sea μ una distribución de masa sobre \mathbb{R}^p . Dado $x \in \mathbb{R}^p$ y $s \in [0, +\infty)$, denotaremos por $\overline{D}_\mu(s, x)$ al número

$$\overline{D}_\mu(s, x) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s},$$

y lo llamaremos la s -densidad superior de la medida μ .

Proposición 1.4.5. *Sea μ una distribución de masa sobre \mathbb{R}^p , sea F subconjunto boreliano de \mathbb{R}^p y $C \in (0, +\infty)$ una constante.*

(a) *Si μ -casi todo $x \in F$ cumple $\overline{D}_\mu(s, x) < C$, entonces $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{C} > 0$.*

(b) *Si todo $x \in F$ cumple $\overline{D}_\mu(s, x) > C$, entonces $\mathcal{H}^s(F) \leq \frac{8^s \mu(\mathbb{R}^p)}{C} < +\infty$.*

Demostración de (a). Sea F_0 subconjunto de F tal que todo $x \in F_0$ cumple $\overline{D}_\mu(s, x) < C$. Para cada $\delta \in (0, +\infty)$ sea

$$F_0(\delta) := \{x \in F_0 : \text{para todo } r \in (0, \delta] \text{ y para algún } \epsilon \in (0, +\infty) \text{ se cumple } \mu(B(x, r)) \leq (C + \epsilon) r^s\}.$$

Notemos que $F_0(\delta)$ crece cuando δ decrece a 0 y por hipótesis $F_0 = \bigcup_{\delta \in (0, +\infty)} F_0(\delta)$.

Fijemos $\delta \in (0, +\infty)$ y sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F_0 y sea

$$I_\delta = \{n \in \mathbb{N} : U_n \cap F_0(\delta) \neq \emptyset\}.$$

Para cada $n \in I_\delta$, consideremos una bola B_n con centro en $U_n \cap F_0(\delta)$ de radio $\text{diam } U_n$ que contenga a U_n . Notemos que por definición de $F_0(\delta)$ tenemos

$$\mu(U_n) \leq \mu(B_n) \leq (C + \epsilon) (\text{diam } U_n)^s.$$

Luego,

$$\mu(F_0(\delta)) \leq \sum_{n \in I_\delta} \mu(U_n) \leq (C + \epsilon) \sum_{n \in I_\delta} (\text{diam } U_n)^s \leq (C + \epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^s.$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento arbitrario de F_0 , tenemos

$$\mu(F_0(\delta)) \leq (C + \epsilon)\mathcal{H}_\delta^s(F_0).$$

Tendiendo δ a 0 concluimos $\mu(F_0) \leq (C + \epsilon)\mathcal{H}^s(F_0)$. Como $\epsilon \in (0, +\infty)$ es arbitrario concluimos que $\mu(F_0) \leq C\mathcal{H}^s(F_0)$, y luego

$$\mu(F) = \mu(F_0) \leq C\mathcal{H}^s(F_0) \leq C\mathcal{H}^s(F).$$

□

Demostración de (b). Demostraremos el resultado en dos casos

Caso (1). Caso F subconjunto acotado de \mathbb{R}^p .

Dado $\delta \in (0, +\infty)$ consideremos la familia de bolas

$$\mathcal{B}(\delta) := \{B(x, r) : x \in F \text{ y } \mu(B(x, r)) \geq Cr^s\}.$$

Notemos que por hipótesis $F \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}(\delta)} B$. Aplicando el Lema del Cubrimiento de Vitali, Lema 1.4.4, a la colección $\mathcal{B}(\delta)$, existe una sucesión disjunta de bolas $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}(\delta)$ tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}(\delta)} B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la bola \tilde{B}_n es concéntrica con B_n pero de radio 4 veces el radio de B_n . Luego la sucesión $\{\tilde{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un 8δ -cubrimiento de F , así

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{8\delta}^s(F) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } \tilde{B}_n)^s \leq 4^s \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } B_n)^s \\ &\leq 8^s C^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq 8^s C^{-1} \mu(\mathbb{R}^p). \end{aligned}$$

Como $\delta \in (0, +\infty)$ es arbitrario, tenemos $\mathcal{H}^s(F) \leq 8^s C^{-1} \mu(\mathbb{R}^p)$.

Caso (2). Caso F no subconjunto acotado de \mathbb{R}^p .

Para $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = F \cap B(0, n)$, observemos que $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subconjuntos acotados de \mathbb{R}^p con $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Suponiendo que $\mathcal{H}^s(F) > 8^s C^{-1} \mu(\mathbb{R}^p)$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}^s(F_{n_0}) > 8^s C^{-1} \mu(\mathbb{R}^p)$. Esto último es una contradicción con el caso (1). ■

Sea p un número entero estrictamente positivo y sea μ una distribución de masa sobre \mathbb{R}^p . Dado $x \in \mathbb{R}^p$, definiremos la *dimensión puntual inferior* y la *dimensión puntual superior de la medida μ* , por

$$\underline{d}_\mu(x) := \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log B(x, r)}{\log r};$$

y

$$\bar{d}_\mu(x) := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log B(x, r)}{\log r}.$$

Observemos que generalmente $\underline{d}_\mu(x) \leq \bar{d}_\mu(x)$.

En el caso que $\underline{d}_\mu(x) = \bar{d}_\mu(x)$, definimos la *dimensión puntual de la medida* μ , por

$$d_\mu(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log B(x, r)}{\log r}.$$

La proposición siguiente da la conexión entre dimensión puntual de una medida μ y la dimensión de Hausdorff del $\text{Sop}(\mu)$.

Proposición 1.4.6. *Sea μ una distribución de masa sobre \mathbb{R}^p , sea F subconjunto boreliano de \mathbb{R}^p y $d \in (0, +\infty)$ una constante.*

(a) *Si μ -casi todo $x \in F$ cumple $\underline{d}_\mu(x) \geq d$, entonces $\dim_H F \geq d$.*

(b) *Si todo $x \in F$ cumple $\bar{d}_\mu(x) \leq d$, entonces $\dim_H F \leq d$.*

(c) *Si todo $x \in F$ cumple $d_\mu(x) = d$, entonces $\dim_H F = d$.*

Demostración de (a). Sea F_0 subconjunto de F tal que todo $x \in F_0$ cumple $\underline{d}_\mu(x) \geq d$. Observemos que si $x \in F_0$ y $\epsilon \in (0, d]$, entonces $\bar{D}_\mu(d - \epsilon, x) = 0$. Luego, por la Proposición 1.4.5 (a), para $C \in (0, +\infty)$ tenemos

$$\mathcal{H}^{d-\epsilon}(F) \geq \mathcal{H}^{d-\epsilon}(F_0) \geq \frac{\mu(F_0)}{C}.$$

Como $C \in (0, +\infty)$ se puede escoger arbitrariamente, tenemos $\mathcal{H}^{d-\epsilon}(F) = +\infty$. Luego por definición $d - \epsilon \leq \dim_H F$ y como $\epsilon \in (0, d]$ es arbitrario concluimos que $d \leq \dim_H F$. □

Demostración de (b). Observemos que si $x \in F$ y $\epsilon \in (0, +\infty)$, entonces $\bar{D}_\mu(d + \epsilon, x) = +\infty$. Luego, por la Proposición 1.4.5 (b), para $C \in (0, +\infty)$ tenemos

$$\mathcal{H}^{d+\epsilon}(F) \leq 8^s \frac{\mu(\mathbb{R}^p)}{C}.$$

Como $C \in (0, +\infty)$ se puede escoger arbitrariamente, tenemos $\mathcal{H}^{d+\epsilon}(F) = 0$. Luego por definición $\dim_H F \leq d + \epsilon$ y como $\epsilon \in (0, +\infty)$ es arbitrario concluimos que $\dim_H F \leq d$. □

Demostración de (c). Sigue de (a) y (b). ■

Proposición 1.4.7. *Sea μ una distribución de masa sobre \mathbb{R}^p , sea F subconjunto boreliano de \mathbb{R}^p y $d \in (0, +\infty)$ una constante. Si todo $x \in F$ cumple $\underline{d}_\mu(x) \leq d$, entonces $\dim_H F \leq d$.*

Demostración. [Pes97, Teorema 7.2, página 42]. ■

Capítulo 2:

FUNCIONES UNIVALENTES

En este capítulo, estudiaremos las clases \mathcal{S} y Σ de funciones univalentes y la subclase Σ' de esta última. Mostraremos algunos resultados de la clase \mathcal{S} que son consecuencia directa del Teorema del área, Teorema 2.2.13, destacando el Teorema de distorsión de Koebe, Teorema 2.2.18. Finalizaremos este capítulo, enunciando la Conjetura de Bieberbach formulada en 1916 por Ludwig Bieberbach, pero que fue demostrada mucho tiempo después por Louis de Branges en 1985, véase [dB85].

2.1. Preliminares

El campo de los números complejos \mathbb{C}

Empezaremos este capítulo recordando algunos conceptos que usaremos más tarde.

Definición 2.1.1. *Un número complejo es un par (x, y) de números reales.*

Sean $z = (x, y)$ y $w = (u, v)$ dos números complejos. Definiremos $z + w := (x + u, y + v)$ y $z \cdot w := (xu - yv, xv + yu)$, estas definiciones de adición y multiplicación dotan al conjunto de los números complejos de una estructura de campo, cuyo elemento neutro aditivo es $(0, 0)$ y cuyo elemento neutro multiplicativo es $(1, 0)$. En este capítulo denotaremos por \mathbb{C} el campo de los *números complejos* y i al número complejo $(0, 1)$. Además, para cada $x \in \mathbb{R}$ identificaremos x con el número complejo $(x, 0)$. De esta forma identificamos \mathbb{R} con un subcampo de \mathbb{C} . Observemos que $i^2 = -1$ y para $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos $z = (x, y) = x + yi$ y denotaremos por \bar{z} al número complejo $\bar{z} = z - yi$ y será llamado *conjugado*

de z . Para $z \in \mathbb{C}$, también denotaremos por $|z|$ al número real $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ y será llamado *valor absoluto de z* .

Teorema 2.1.2. *La función $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica en \mathbb{C} .*

Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in (0, +\infty)$, denotaremos por $B(z_0, r)$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ y será llamado *bola abierta de centro z_0 y radio r* . También denotaremos por $\bar{B}(z_0, r)$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ y será llamado *bola cerrada de centro z_0 y radio r* .

Luego la familia $\mathcal{B} = \{B(z, r) : z \in \mathbb{C}, r \in (0, +\infty)\}$ define una topología en \mathbb{C} .

Sea D un subconjunto de \mathbb{C} y z_0 un punto límite de D . Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ (no necesariamente definida en z_0). Para $w_0 \in \mathbb{C}$, escribiremos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ si y solo si para todo $\epsilon \in (0, +\infty)$, existe $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, +\infty)$ tal que para todo $z \in D$ con $0 < |z - z_0| < \delta$ se tiene $|f(z) - w_0| < \epsilon$. Además diremos que f es continua en D si para todo $z_0 \in \mathbb{D}$ se cumple $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definición 2.1.3 (Dominio). *Diremos que D es un dominio o región de \mathbb{C} , si D es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{C} .*

Sea D un dominio de \mathbb{C} y $z_0 \in D$. Diremos que $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es *diferenciable en z_0* si existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w.$$

En este caso al número complejo w lo denotaremos por $f'(z_0)$ y lo llamaremos la *derivada de f en z_0* . Además diremos que f es *diferenciable en D* si f es diferenciable en todo punto $z_0 \in D$. También diremos que $f \in C^1(D)$ si f es diferenciable en D y la función $z \mapsto f'(z)$ es continua en D .

Recursivamente para $k \geq 2$ un número entero se define $f^k = (f^{(k-1)})'$ y diremos que $f \in C^k(D)$ si $f^{(k-1)} \in C^1(D)$.

Ahora estamos en condiciones para poder definir la clase de funciones que son el principal estudio del análisis complejo.

Definición 2.1.4 (Función holomorfa). *Sea D un dominio de \mathbb{C} con $z_0 \in D$ y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es holomorfa en z_0 o analítica en z_0 si existe $r \in (0, +\infty)$ tal que f es diferenciable en $B(z_0, r)$. Además diremos que f es holomorfa en D o simplemente holomorfa si f es holomorfa en todo punto $z_0 \in D$.*

Enunciaremos el siguiente teorema de equivalencias de funciones holomorfas.

Teorema 2.1.5. *Sea D un dominio de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) f es holomorfa en D .
- (ii) f tiene desarrollo en serie de potencias en todo $z = z_0 \in D$.

Demostración. [GKR07, Teorema 5.11, página 88]. ■

En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Lema 2.1.6 (Lema de Schwarz). *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa en \mathbb{D} , tal que $f(0) = 0$. Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple $|f(z)| \leq |z|$. Además si $|f'(0)| = 1$ ó para algún $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se cumple $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces existe $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$, tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f(z) = cz$.*

Demostración. [Con78, Lema 2.1, página 130]. ■

2.1.1. Funciones holomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$

La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$

Definición 2.1.7. *Sea ∞ un símbolo que no este contenido en \mathbb{C} , denotaremos por $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y sera llamada la esfera de Riemann.*

Podemos dotar a la esfera de Riemann, también conocida como la *compactificación por un punto de \mathbb{C}* , con la siguiente topología:

- (1) Todos los conjuntos abiertos de \mathbb{C} .
- (2) Todos los conjuntos de la forma $\hat{\mathbb{C}} \setminus C$, donde C es un subespacio compacto de \mathbb{C} .

Véase [Mun75, Theorem 29.1, página 183].

La *proyección estereográfica* es la función $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definida como sigue: Sea N el punto $(0, 0, 1) \in S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|(x_1, x_2, x_3)\| = 1\}$, notemos que podemos identificar \mathbb{C} con el plano $\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ en \mathbb{R}^3 . Usando esto último para un punto $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ consideremos la recta en \mathbb{R}^3 que pasa por los puntos $(x_1, x_2, 0)$ y N . Esta recta intersecta en exactamente un punto $\varphi(z) \neq N$ a la esfera unitaria S^2 , véase la figura siguiente

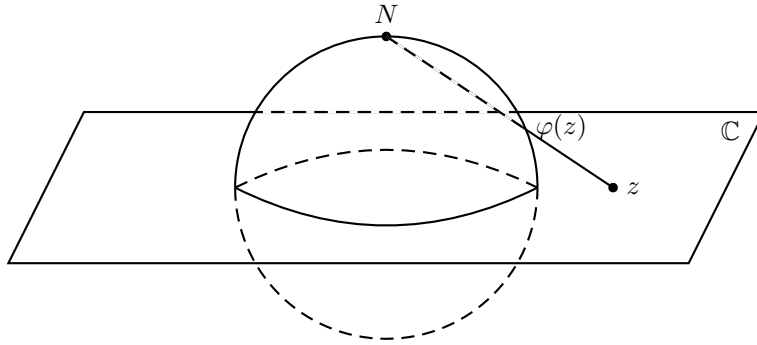


Figura: Proyección estereográfica.

Para encontrar la función φ , notemos que la recta que pasa por $(x_1, x_2, 0)$ y N es $\{(1-t)x_1, (1-t)x_2, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Si t_0 es el valor tal que la recta interseca la esfera unitaria entonces $t_0 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$. Así,

$$\varphi(z) = \begin{cases} \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ N = (0, 0, 1), & \text{si } z = \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Lema 2.1.8. *La proyección estereográfica φ es un homeomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y S^2 .*

Demostración. Esto es claro para $z \in \mathbb{C}$. Veamos la continuidad en $z = \infty$. En efecto observemos que para todo $t \in (0, 1)$ se tiene

$$\varphi^{-1}(\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \in (t, 1)\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right\}.$$

■

Ahora podemos definir una distancia entre puntos de $\hat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera: Para $z, z' \in \hat{\mathbb{C}}$, definimos $d(z, z') = \|\varphi(z) - \varphi(z')\|$, es decir, si $\varphi(z) = (x_1, x_2, x_3)$ y $\varphi(z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$ entonces

$$d(z, z') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2};$$

usando el hecho que $\varphi(z), \varphi(z') \in S^2$, tenemos

$$d(z, z')^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3).$$

Luego usando la ecuación (2.1), para $z, z' \in \mathbb{C}$ tenemos

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}}.$$

De manera similar, tenemos para $z \in \mathbb{C}$

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}.$$

Observemos que si $z, z' \notin \{0, \infty\}$, entonces

$$d(z, z') = d\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z'}\right) \quad \text{y} \quad d(z, z') \leq 2|z - z'|.$$

Definición 2.1.9 (Dominio en $\hat{\mathbb{C}}$). *Diremos que \hat{D} es un dominio de $\hat{\mathbb{C}}$, si \hat{D} es un subconjunto abierto y conexo de $\hat{\mathbb{C}}$.*

Definición 2.1.10 (Funciones holomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$). Sea \hat{D} un dominio de $\hat{\mathbb{C}}$ y sea $f : \hat{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función continua en \hat{D} y sea $\psi : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Diremos que f es holomorfa en $z_0 \in \hat{D}$ si alguna de las cuatro condiciones siguientes se verifica

- (i) $z_0 \neq \infty$; $f(z_0) \neq \infty$ y f es holomorfa en $z = z_0$ en el sentido usual (Definición 2.1.4).
- (ii) $z_0 \neq \infty$; $f(z_0) = \infty$ y la función $\psi \circ f$ es holomorfa en $z = z_0$ en el sentido usual.
- (iii) $z_0 = \infty$; $f(z_0) \neq \infty$ y la función $f \circ \psi$ es holomorfa en $z = 0$ en el sentido usual.
- (iv) $z_0 = \infty$; $f(z_0) = \infty$ y la función $\psi \circ f \circ \psi$ es holomorfa en $z = 0$ en el sentido usual.

Además diremos que f es holomorfa en \hat{D} si f es holomorfa en todo $z_0 \in \hat{D}$.

2.1.2. Espacio de funciones holomorfas

El propósito de esta sección es introducir una topología sobre el espacio de las funciones holomorfas.

El espacio de las funciones continuas $C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$

Sea \hat{D} un dominio de $\hat{\mathbb{C}}$. Denotaremos por $C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$ al conjunto de todas las funciones de \hat{D} en $\hat{\mathbb{C}}$ que son continuas en \hat{D} .

Proposición 2.1.11. Sea \hat{D} un dominio de $\hat{\mathbb{C}}$. Entonces existe una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de \hat{D} , tal que

- (a) $\hat{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}(K_n)$;
- (b) para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$;
- (c) si K es un subconjunto compacto de \hat{D} , entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $K \subset K_{n_0}$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$K_n := \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{dist}(z, \hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{D}) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple (a), (b) y (c). ■

Definición 2.1.12. *A una sucesión de subconjuntos compactos de \hat{D} , que cumple (a), (b) y (c) de la Proposición 2.1.11, la llamaremos exhaustación de \hat{D} .*

Sea $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una exhaustación de \hat{D} . Entonces para $f, g \in C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$ definiremos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_n(f, g) = \sup_{z \in K_n} d(f(z), g(z)).$$

Luego definiremos

$$\rho(f, g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \rho_n(f, g). \quad (2.2)$$

Notemos que ρ es una métrica en $C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$.

Proposición 2.1.13. *El conjunto $(C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}}), \rho)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. [Lin05, página 307]. ■

Observación 5. Notemos que

1. La topología en $(C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}}), \rho)$ es independiente de la elección de la exhaustación de \hat{D} . Es decir, si $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{K'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos exhaustaciones de \hat{D} entonces las métricas definidas como en la ecuación (2.2) son equivalentes.
2. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$ converge a $f \in C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$ si y solo si para todo K subconjunto compacto de \hat{D} se tiene $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en K . Es decir,

para todo K subconjunto compacto de \hat{D} y para todo $\epsilon \in (0, +\infty)$, existe $n_0 = n_0(K, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in K$ y para todo $n \geq n_0$ se tiene $d(f_n(z), f(z)) < \epsilon$.

El espacio de las funciones holomorfas $\mathbf{H}(\hat{D})$

Sea \hat{D} un dominio de $\hat{\mathbb{C}}$. Denotaremos por $\mathbf{H}(\hat{D})$ el conjunto de las funciones definidas en \hat{D} sobre $\hat{\mathbb{C}}$ que son holomorfas en \hat{D} . Notemos que podemos considerar $\mathbf{H}(\hat{D})$ como un subespacio de $(C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}}), \rho)$ visto es la subsección anterior.

Teorema 2.1.14. *Sean $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbf{H}(\hat{D})$ y $f \in C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$ tal que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}})$. Entonces $f \in \mathbf{H}(\hat{D})$ o $f \equiv \infty$.*

Demostración. [Lin05, Teorema 4, página 310]. ■

Notemos que por el teorema anterior $\mathbf{H}(\hat{D}) \cup \{\infty\}$, donde ∞ es la función constante igual a ∞ en \hat{D} es un subconjunto cerrado de $(C(\hat{D}, \hat{\mathbb{C}}), \rho)$.

Corolario 2.1.15. *El conjunto $(\mathbf{H}(\hat{D}) \cup \{\infty\}, \rho)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Véase la Proposición 2.1.13 y el Teorema 2.1.14. ■

Definición 2.1.16. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbf{H}(\hat{D})$ y $f \in \mathbf{H}(\hat{D})$.

1. Diremos que f_n converge a f en $\mathbf{H}(\hat{D})$, en símbolo $f_n \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow +\infty$ en $\mathbf{H}(\hat{D})$, si f_n converge uniformemente a f sobre cada subconjunto compacto de \hat{D} . Es decir,

para todo K subconjunto compacto de \hat{D} y para todo $\epsilon \in (0, +\infty)$, existe $n_0 = n_0(K, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in K$ y para todo $n \geq n_0$ se tiene $d(f_n(z), f(z)) < \epsilon$.

2. Diremos que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{H}(\hat{D})$ si f_n es una sucesión de Cauchy sobre todo subconjunto compacto de \hat{D} . Es decir,

para todo K subconjunto compacto de \hat{D} y para todo $\epsilon \in (0, +\infty)$, existe $n_0 = n_0(K, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in K$ y para todo $n, m \geq n_0$ se tiene $d(f_n(z), f_m(z)) < \epsilon$.

Teorema 2.1.17. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbf{H}(\hat{D})$ y $f \in C(\hat{D}, \hat{C})$ tal que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $C(\hat{D}, \hat{C})$. Entonces f'_n converge a f' en $\mathbf{H}(\hat{D})$

Demostración. [Lin05, Corolario 2, página 311]. ■

Teorema 2.1.18. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbf{H}(\hat{D})$ con $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{H}(\hat{D})$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \hat{D}$, se tiene $f_n(z) \neq 0$, entonces

- (a) $f \equiv 0$, ó
- (b) para todo $z \in \hat{D}$ se tiene $f(z) \neq 0$.

Demostración. [Lin05, Teorema 5, página 311]. ■

Teorema 2.1.19 (Teorema de Hurwitz). Sea \hat{D} un dominio en \hat{C} . Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbf{H}(\hat{D})$ con $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{H}(\hat{D})$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es univalente en \hat{D} , véase Definición 2.2.1, entonces

- (a) f es constante, ó
- (b) f es univalente en \hat{D} .

Demostración. Sea $z_0 \in \hat{D}$ y para $n \in \mathbb{N}$ sea g_n la función definida en \hat{D} como $g_n(z) = f_n(z) - z_0$. Observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \hat{D} \setminus \{z_0\}$ se tiene $g_n(z) \neq 0$. Por el Teorema 2.1.18 se tiene que la función g definida en $\hat{D} \setminus \{z_0\}$ por $g(z) = f(z) - f(z_0)$, cumple $g \equiv 0$ o para todo $z \in \hat{D} \setminus \{z_0\}$ se tiene $g(z) \neq 0$.

Definición 2.1.20. Sea D un dominio de \mathbb{C} y \mathcal{F} un subconjunto de $\mathbf{H}(D)$. Entonces

- (a) Diremos que \mathcal{F} es normal si toda sucesión en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge a alguna función $f \in \mathbf{H}(D)$.

(b) Diremos que \mathcal{F} es localmente acotado si para todo subconjunto compacto K de D existe una constante $M = M(K) \in (0, +\infty)$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in K$ se tiene $|f(z)| < M$.

En el siguiente teorema relacionaremos estos dos conceptos.

Teorema 2.1.21 (Teorema de Montel). *Un subconjunto \mathcal{F} de $\mathbf{H}(D)$ es normal si y sólo si \mathcal{F} es localmente acotado.*

Demostración. [Con78, Teorema 2.9, página 153]. ■

Corolario 2.1.22. *Un subconjunto \mathcal{F} de $\mathbf{H}(D)$ es compacto si y sólo si \mathcal{F} es cerrado y localmente acotado.*

Definición 2.1.23. *Diremos que un dominio \hat{D} de la esfera de Riemann es simplemente conexo si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{D}$ es conexo.*

En lo que sigue denotaremos por $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}$.

Teorema 2.1.24 (Teorema de Uniformización de Riemann). *Sea \hat{D} un dominio propio simplemente conexo con mas de dos puntos frontera. Dado $\zeta \in \hat{D}$, existe una única función univalente, Definición 2.2.1 $\varphi : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que*

1. $\varphi(\infty) = \zeta$;
2. $\varphi(\Delta) = \hat{D}$;
3. $\varphi'(\infty) \in (0, +\infty)$.

A la función φ la llamaremos Representación de Riemann del dominio \hat{D} con punto ζ .

Demostración. [Lin05, Corolario 2 y Corolario 3, página 444].

2.2. Funciones univalentes

En este capítulo D (respectivamente \hat{D}) denotará un dominio de \mathbb{C} (respectivamente $\hat{\mathbb{C}}$). En esta sección estudiaremos las clases de funciones univalentes \mathcal{S} y Σ con sus propiedades.

Definición 2.2.1 (Función Univalente). *Diremos que $f : \hat{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función univalente en \hat{D} o simplemente univalente si f es holomorfa e inyectiva en \hat{D} , esto último quiere decir que si $z_1, z_2 \in \hat{D}$ son tales que $f(z_1) = f(z_2)$ entonces $z_1 = z_2$.*

Un ejemplo de funciones univalentes en $\hat{\mathbb{C}}$ son las transformaciones de Möbius.

Definición 2.2.2 (Transformación de Möbius). *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - cb \neq 0$. Llamaremos transformación de Möbius a $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por*

$$z \mapsto M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \infty \text{ y } z \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Recordemos, que un “círculo” en $\hat{\mathbb{C}}$, es un círculo en \mathbb{C} ó una recta en \mathbb{C} unión ∞ .

Teorema 2.2.3. *Una transformación de Möbius envía “círculos” en “círculos”.*

Demostración. [Con78, Teorema 3.14, página 49]. ■

Enunciaremos algunas propiedades de las funciones univalentes.

Lema 2.2.4. *Sean \hat{D}, \hat{G} dominios en $\hat{\mathbb{C}}$. Sea $f : \hat{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función univalente en \hat{D} y $g : \hat{G} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa en \hat{G} .*

(a) *Si $f(\hat{D}) \subset \hat{G}$ y $g : \hat{G} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función univalente en \hat{G} , entonces $g \circ f$ es una función univalente en \hat{D} .*

(b) *Si $z_0 \in \hat{G}$, entonces $g'(z_0) \neq 0$ si y solo si existe $\epsilon \in (0, +\infty)$ tal que g es una función univalente en $B(z_0, \epsilon)$.*

Esta es solo una propiedad local por ejemplo la función $z \mapsto e^z$ no es univalente en \mathbb{C} .

(c) *Si $f(\hat{D}) = \hat{G}$ y $\infty \notin \hat{D} \cap f(\hat{D})$, entonces*

$$\iint_{f(\hat{D})} g(z) \, dx dy = \iint_{\hat{D}} g(f(z)) |f'(z)|^2 \, dx dy.$$

Demostración. [GKR07, Capítulo 6, páginas 110-113]. ■

2.2.1. Las clases \mathcal{S} y Σ

En lo que sigue de este capítulo denotaremos por

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ y } \Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}.$$

En este capítulo consideraremos la clase \mathcal{S} de las funciones univalentes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Observemos que si $f \in \mathcal{S}$, entonces su desarrollo en serie de potencias en $z_0 = 0$ es para cualquier $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Estrechamente relacionada a la clase \mathcal{S} es la clase Σ de las funciones univalentes $g : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, normalizadas por $g(\infty) = \infty$ y por la condición que el residuo de la función definida para $z \in \mathbb{D}$ como $z \mapsto g(\frac{1}{z})$ en $z = 0$ sea 1, es decir, $\lim_{z \rightarrow 0} z g(\frac{1}{z}) = 1$. Observemos que si $g \in \Sigma$, entonces su desarrollo en serie de Laurent en $w_0 = \infty$ es para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > 1$

$$g(w) = w + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^{-n}.$$

También consideraremos la subclase Σ' de Σ de las funciones $g \in \Sigma$ tales que $0 \in \mathbb{C} \setminus g(\Delta)$. Además definiremos Σ'' como la clase de las funciones univalentes $g : \Delta \rightarrow \Delta$ para las cuales existe $r \in (0, +\infty)$ tal que $rg \in \Sigma'$.

Teorema 2.2.5. *Sea $f \in \mathcal{S}$ y $g \in \Sigma$ tales que para $z \in \mathbb{D}$ y $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ tenemos $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ y $g(w) = w + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^{-n}$.*

- (a) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la función definida para $z \in \mathbb{D}$ por $f_\alpha(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ pertenece a \mathcal{S} .*
- (b) *Si $r \in (0, 1)$, entonces la función definida para $z \in \mathbb{D}$ por $z \mapsto r^{-1} f(rz)$ pertenece a \mathcal{S} .*
- (c) *Si $z \in \mathbb{D}$, entonces la función definida para $\zeta \in \mathbb{D}$ por*

$$K_z(f)(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + \left[\frac{1}{2}(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z}\right]\zeta^2 + \dots$$

pertenece a \mathcal{S} y es llamada la transformación de Koebe de f con respecto a z .

- (d) *Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$, entonces la función definida para $z \in \mathbb{D}$ por*

$$z \mapsto \frac{z_0 f(z)}{z_0 - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{z_0}\right)z^2 + \dots$$

pertenece a \mathcal{S} .

- (e) *La función definida para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ por*

$$w \mapsto \frac{1}{f(w^{-1})} = w - a_2 + (a_2^2 - a_3)w^{-1} + \dots$$

pertenece a $\Sigma' \subset \Sigma$.

- (f) *Si $g \in \Sigma'$. Entonces la función definida para $z \in \mathbb{D}$ por*

$$z \mapsto \frac{1}{g(z^{-1})} = z - b_0 z^2 + \dots$$

pertenece a \mathcal{S} .

Además por (e) y (f), existe una biyección entre la clase \mathcal{S} y la clase Σ' .

Proposición 2.2.6. *Sea $f \in \mathcal{S}$ y $k \geq 2$ un número entero. Existe una única función $h \in \mathcal{S}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $h(z)^k = f(z^k)$. A la función h que satisface esta proposición la denotaremos por $K_k(f)$, y la llamaremos la k -ésima transformada de Koebe de f .*

Antes de comenzar la demostración enunciaremos un lema

Lema 2.2.7. *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en \mathbb{D} tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f(z) \neq 0$. Entonces existe una función holomorfa $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = \exp \circ h$ en \mathbb{D} . Además si $z_0 \in \mathbb{D}$ y $\exp(w_0) = f(z_0)$, entonces la función h se puede escoger tal que $h(z_0) = w_0$.*

Demostración. [Con78, Corolario 6.17, página 94]. ■

Demostración de la Proposición 2.2.6. Consideremos la función f_1 definida en \mathbb{D} por $f_1(0) = 1$ y para $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ por $f_1(z) = z^{-k} f(z^k)$. Como $f \in \mathcal{S}$ la función f_1 es holomorfa en \mathbb{D} y para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f_1(z) \neq 0$. Aplicando el lema anterior existe una única función holomorfa $h_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f_1(z) = \exp(h_1(z))$ y $h_1(0) = 0$. Sea h la función holomorfa definida para $z \in \mathbb{D}$ por $h(z) = z \exp\left(\frac{h_1(z)}{k}\right)$. Se afirma que h verifica la propiedad deseada. En efecto

$$h(z)^k = z^k \exp\left(\frac{h_1(z)}{k}\right)^k = z^k \exp(h_1(z)) = f(z^k).$$

Además es claro que $h(0) = 0$ y $h'(0) = 1$. Solo nos faltaría verificar que h es inyectiva en \mathbb{D} . Observemos que para β raíz k -ésima de la unidad y $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f_1(z) = f_1(\beta z)$ y luego $\beta h(z) = h(\beta z)$. Luego si $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ son tales que $h(z_1) = h(z_2)$, entonces $f(z_1^k) = f(z_2^k)$ y por la univalencia de f existe β raíz k -ésima de la unidad tal que $z_1 = \beta z_2$. Luego,

$$h(z_1) = h(\beta z_2) = \beta h(z_2) = \beta h(z_1);$$

y por lo tanto $\beta = 1$ o $h(z_1) = 0 = h(z_2)$. Así $z_1 = z_2$ o $z_1 = z_2 = 0$ respectivamente. ■

Observación 6. Si $f \in \mathcal{S}$ para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $-K_2(f)(z) = K_2(f)(-z)$, esto es la 2-transformada de Koebe de f es una función impar en \mathcal{S} .

Corolario 2.2.8. Sea $g \in \Sigma'$ y $k \geq 2$ un número entero. Existe una única función $h \in \Sigma'$ tal que para todo $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se cumple $h(w)^k = g(w^k)$.

Demostración. Por la parte (f) del Teorema 2.2.5 la función f definida para $z \in \mathbb{D}$ por $f(z) = \frac{1}{g(z^{-1})}$ pertenece a \mathcal{S} . Por la Proposición 2.2.6 existe una única función $h_1 \in \mathcal{S}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $h_1(z)^k = f(z^k)$. Luego por la parte (e) del Teorema 2.2.5 la función h definida para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ por $h(w) = \frac{1}{h_1(w^{-1})}$ y $h(\infty) = \infty$ esta en Σ' y cumple con la propiedad deseada. ■

Corolario 2.2.9. Sea $g \in \Sigma''$ y $k \geq 2$ un número entero. Existe una única función $h \in \Sigma''$ tal que para todo $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ cumple $h(w)^k = g(w^k)$. A la función h que satisface este corolario la denotaremos por $K_k(g)$, y la llamaremos la k -ésima transformada de Koebe de g .

Demostración. Por definición de la clase Σ'' existe $r \in (0, +\infty)$ tal que la función rg pertenece a la clase Σ' . Por el Corolario anterior existe una única función $h_1 \in \Sigma'$ tal que para todo $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se cumple $h_1(w)^k = rg(w^k)$. Luego la función h definida para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ por $h(w) = \frac{1}{\sqrt[k]{r}} h_1(w)$ y $h(\infty) = \infty$ esta en Σ'' y cumple con la propiedad deseada. ■

Ejemplos de funciones en \mathcal{S} y Σ

Ejemplo (Función de Koebe). La función definida para $z \in \mathbb{D}$ por

$$k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n;$$

pertenece a la clase \mathcal{S} y la llamaremos *la función de Koebe*. En efecto, notemos que también

$$k_0(z) = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right).$$

Luego la transformación de Möbius $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ transforma \mathbb{D} univalentemente sobre el dominio $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\} > 0\}$, ver Teorema 2.2.3, luego $k_0(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

Definición 2.2.10 (Rotación de la función de Koebe). *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, la función definida para $z \in \mathbb{D}$ por*

$$k_\alpha(z) := e^{-i\alpha} k_0(e^{i\alpha} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2};$$

pertenece a \mathcal{S} , ver parte (a) del Teorema 2.2.5. A esta función la llamaremos una rotación de la función de Koebe.

Ejemplo (2-transformada de Koebe de una rotación de la función de Koebe). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, por la Proposición 2.2.6 y el ejemplo anterior la función $K_2(k_\alpha)$ definida para $z \in \mathbb{D}$ por la relación $K_2(k_\alpha)(z)^2 = k_\alpha(z^2)$ pertenece a la clase \mathcal{S} . Notemos además que para $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$K_2(k_\alpha)(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha} z^2}.$$

Lema 2.2.11. *Sea $g : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa tal que $g(\infty) = \infty$ y para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se tiene $g(w) = w + b_0 + b_1 w^{-1} + \dots$. Si el conjunto A de los puntos límites de $g(w)$ cuando $|w| \rightarrow 1$ es acotado, con interior vacío y tal que no desconecta \mathbb{C} , es decir el conjunto $\mathbb{C} \setminus A$ es conexo en \mathbb{C} . Entonces $g \in \Sigma$ y $g(\Delta) = \hat{\mathbb{C}} \setminus A$.*

Demostración. [Pom75, Teorema 1.1, página 13]. ■

Ejemplo. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ y sea $g : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ la función definida por $g(\infty) = \infty$ y para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ por $g(w) = w + b_0 + e^{2i\beta} w^{-1}$. Entonces g pertenece a la clase Σ . En efecto, como $g(e^{i\theta}) = b_0 + 2e^{i\beta} \cos(\theta - \beta)$ tenemos que $\{g(z) : |z| = 1\}$ es el segmento $[b_0 - 2e^{i\beta}, b_0 + 2e^{i\beta}]$. Luego por el Lema 2.2.11 $g \in \Sigma$ y $\mathbb{C} \setminus g(\Delta)$ es el segmento de recta $[b_0 - 2e^{i\beta}, b_0 + 2e^{i\beta}]$ de longitud 4.

Observación 7. Si $b_0 = 0$ (en el ejemplo anterior), entonces $g \in \Sigma'$ y por la parte (f) del Teorema 2.2.5 la función f definida para $z \in \mathbb{D}$ por

$$f(z) = \frac{1}{g(z^{-1})} = \frac{1}{z^{-1} + e^{i\beta}z} \in \mathcal{S}.$$

Además para $z \in \mathbb{D}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^{-1} + e^{i\beta}z}; \\ &= \frac{z}{1 + e^{i\beta}z^2}; \\ &= \frac{z}{1 - e^{i(\beta+\pi)}z^2}; \\ &= K_2(k_{\beta+\pi})(z). \end{aligned}$$

Esto es, f es la 2-transformada de Koebe de una rotación de Koebe.

2.2.2. Teoremas de distorsión de Koebe

En esta subsección demostraremos algunos resultados de la clase \mathcal{S} , que son consecuencia directa del Teorema del área, Teorema 2.2.13, que es fundamental en la teoría de funciones univalentes. Recordemos que una *curva simple cerrada o curva de Jordan* en \mathbb{C} es una función $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que si $t_1, t_2 \in S^1$ son tales que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, entonces $t_1 = t_2$. El Teorema de la curva de Jordan [Pom75, Appendix 1.5, páginas: 31-34] asegura que toda curva de Jordan en \mathbb{C} divide el plano en dos regiones, el interior de la curva, también llamado *dominio de Jordan* y el exterior de la curva.

Teorema 2.2.12 (Formula analítica de Green). *Sea γ una curva simple cerrada y diferenciable con interior D y sea h una función a valores complejos definida y holomorfa en una vecindad de D . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{h(z)} h'(z) dz = \frac{1}{\pi} \iint_D |h'(z)|^2 dx dy.$$

Demostración. [Pom75, Teorema 1.2, página 15]. ■

Teorema 2.2.13 (Teorema del área). *Sea $g \in \Sigma$ tal que para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se tiene $g(w) = w + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^{-n}$. Entonces*

$$\text{Area}(\mathbb{C} \setminus g(\Delta)) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right).$$

Demostración. Para $r \in (1, +\infty)$, sea $\gamma_r : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ la curva de Jordan definida por $\gamma_r(\zeta) = g(r\zeta)$ y sea $D_r = \mathbb{C} \setminus \{g(z) : |z| \geq r\}$ el interior de la curva γ_r .

Aplicando la formula analítica de Green, Teorema 2.2.12, a la función identidad sobre una vecindad de D_r , se tiene

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(D_r) &= \iint_{D_r} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_r} \bar{w} dw = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{g(re^{i\theta})} g'(re^{i\theta}) r i e^{i\theta} d\theta; \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-(n+1)} e^{-i\theta(n+1)} \right) r e^{i\theta} d\theta; \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n+1} e^{i\theta(n+1)} \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-(n+1)} e^{-i\theta(n+1)} \right) d\theta; \\
 &= \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right).
 \end{aligned}$$

Notemos que D_r es creciente en r y $\bigcap_{r \in (1, +\infty)} = \mathbb{C} \setminus g(\Delta)$.

Como el área es la medida 2-dimensional de Lebesgue, tenemos

$$\text{Area}(\mathbb{C} \setminus g(\Delta)) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \text{Area}(D_r) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right).$$

■

Corolario 2.2.14. *Sea $g \in \Sigma$ tal que para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se tiene $g(w) = w + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^{-n}$. Entonces $|b_1| \leq 1$, con igualdad si y solo si $g(w) = w + b_0 + b_1 w^{-1}$.*

Demostración. Como $\text{Area}(\mathbb{C} \setminus g(\Delta)) \geq 0$, por el Teorema del área, Teorema 2.2.13, tenemos

$$|b_1| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right) \leq 1. \tag{2.3}$$

Por otro lado si $|b_1| = 1$ entonces por la desigualdad del lado derecho de (2.3), concluimos que para $n \geq 2$ se cumple $b_n = 0$. Luego $g(w) = w + b_0 + b_1 w^{-1}$. ■

Mas generalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$n |b_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1;$$

y por lo tanto $|b_n| \leq n^{-1/2}$. Sin embargo para $n \geq 2$ la desigualdad es estricta para toda $g \in \Sigma$, pues para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $b_0 \in \mathbb{C}$ la función

$$g(w) = w + b_0 + e^{i\theta} n^{-1/2} w^{-n},$$

no es univalente en Δ , pues su derivada $g'(w) = 1 - n^{1/2} e^{i\theta} w^{-n-1}$ se anula en puntos de Δ , véase parte (b) del Lema 2.2.4.

En lo que sigue estudiaremos algunas propiedades de la clase \mathcal{S} .

Teorema 2.2.15 (Teorema de Koebe). *Sea $f \in \mathcal{S}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$.*

(a) *Entonces $|a_2| \leq 2$, además $|a_2| = 2$ si y solo si f es una rotación de la función de Koebe.*

(b) *Entonces $|a_2^2 - a_3| \leq 1$.*

Demostración de (a). Por la Proposición 2.2.6 la 2-transformada de Koebe de f , denotada por $K_2(f)$, que pertenece a la clase \mathcal{S} . Por la parte (e) del Teorema 2.2.5, la función definida para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ por

$$w \mapsto \frac{1}{K_2(f)(w^{-1})} = w - \frac{a_2}{2}w^{-1} + \dots$$

pertenece a la clase Σ . Luego por el Corolario 2.2.14, $|\frac{a_2}{2}| \leq 1$ y por lo tanto $|a_2| \leq 2$. Además por el Corolario 2.2.14, $|a_2| = 2$ si y solo si

$$\frac{1}{K_2(f)(w^{-1})} = w - \frac{a_2}{2}w^{-1}.$$

Luego, de la Observación 7 y la Proposición 2.2.6 se deduce que f es una rotación de la función de Koebe. □

Demostración de (b). Por la parte (e) del Teorema 2.2.5, la función definida para $w \in \Delta \setminus \{\infty\}$ por

$$w \mapsto \frac{1}{f(w^{-1})} = w - a_2 + (a_2^2 - a_3)w^{-1} + \dots$$

pertenece a la clase Σ . Luego por el Corolario 2.2.14, tenemos $|a_2^2 - a_3| \leq 1$. ■

Teorema 2.2.16 (Teorema un cuarto de Koebe). *Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4} \right\} \subset f(\mathbb{D}).$$

Demostración. Dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$, por la parte (d) del Teorema 2.2.5 la función h definida para $z \in \mathbb{D}$ por

$$h(z) = \frac{z_0 f(z)}{z_0 - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{z_0} \right) z^2 + \dots;$$

pertenece a la clase \mathcal{S} . Luego aplicando el Teorema de Koebe, Teorema 2.2.15, a las funciones f y h tenemos $|a_2| \leq 2$ y $\left| a_2 + \frac{1}{z_0} \right| \leq 2$ respectivamente. Así $\left| \frac{1}{z_0} \right| \leq 4$, o equivalentemente, $|z_0| \geq \frac{1}{4}$. ■

Observemos que el Teorema 2.2.15 muestra que $\frac{|f''(0)|}{2} = |a_2| \leq 2$. Si queremos transferir esta información del punto 0 a un punto arbitrario $z \in \mathbb{D}$, una herramienta será *la transformada de Koebe con respecto a z*, véase parte (c) del Teorema 2.2.5.

Lema 2.2.17. *Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces para cada $z \in \mathbb{D}$, se tiene*

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Demostración. Dado $z \in \mathbb{D}$ consideremos la Transformada de Koebe con respecto a z de f , definida para $\zeta \in \mathbb{D}$ por

$$K_z(f)(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + \left[\frac{1}{2}(1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z} \right] \zeta^2 + \dots;$$

que por la parte (c) del Teorema 2.2.5 pertenece a la clase \mathcal{S} . Por el Teorema de Koebe, Teorema 2.2.15, tenemos

$$\left| \frac{1}{2}(1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z} \right| \leq 2.$$

Luego,

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| = \left| \frac{1}{2}(1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z} \right| \cdot \frac{2|z|}{1-|z|^2} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

■

Teorema 2.2.18 (Teorema de distorsión de Koebe). *Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}; \quad (2.4a)$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}; \quad (2.4b)$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}. \quad (2.4c)$$

La desigualdad (2.4b) es también conocida como el Teorema de Crecimiento.

Demostración de (2.4a). Notemos que para $\zeta \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ la desigualdad $|\zeta| \leq r$ implica que $-r \leq \operatorname{Re}\{\zeta\} \leq r$. Desarrollando la desigualdad del Lema 2.2.17 y aplicando lo anterior, tenemos para cada $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1-|z|^2}. \quad (2.5)$$

Como $f \in \mathcal{S}$, por la parte (b) del Lema 2.2.4 para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f'(z) \neq 0$ y $f'(0) = 1$, luego por el Lema 2.2.7 existe una función holomorfa $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp \circ h = f'$ en \mathbb{D} y $h(0) = 0$. Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, notemos que para h (cualquier función holomorfa) se tiene $\operatorname{Re}\{h'(z)e^{i\theta}\} = \frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\{h(re^{i\theta})\}$ y multiplicando por $r \in (0, 1)$, tenemos

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} \{h(re^{i\theta})\}.$$

Luego reemplazando en la ecuación (2.5), se tiene

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} \{h(re^{i\theta})\} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}.$$

Simplificando $r \in (0, 1)$, fijando $\theta \in [0, 2\pi]$ e integrando con respecto a r entre 0 y $|z| \in (0, 1)$ tenemos

$$\log \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}.$$

Como la función exponencial es creciente, se deduce el resultado. \square

Demostración de (2.4b). Dado $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{D}$, consideremos el arco de Jordan γ definido en el intervalo $[0, |z|]$ por $\gamma(t) = te^{i\theta}$. Como $f(0) = 0$, tenemos

$$f(z) = \int_{\gamma} f'(w) dw = \int_0^{|z|} f'(te^{i\theta})e^{i\theta} dt.$$

Luego por (2.4a),

$$|f(z)| \leq \int_0^{|z|} |f'(te^{i\theta})| dt \leq \int_0^{|z|} \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Para la desigualdad opuesta consideraremos dos casos:

Caso (1). Para $z \in \mathbb{D}$ con $|f(z)| \geq 1/4$. Notemos que la función $\psi(r) = \frac{r}{(1+r)^2}$ es creciente en r en el intervalo $[0, 1]$. Luego para $|z| \in (0, 1)$ se tiene

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq \frac{1}{4} \leq |f(z)|.$$

Caso (2). Para $z \in \mathbb{D}$ con $|f(z)| < 1/4$. Luego por el Teorema un cuarto de Koebe, Teorema 2.2.16, tenemos que el segmento de recta $[0, f(z)]$ esta enteramente contenido en la imagen de f . Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = f^{-1}(tf(z))$, notemos que γ es una curva simple desde 0 a z , y como $f(0) = 0$ tenemos

$$f(z) = \int_{\gamma} f'(w) dw.$$

Pero por construcción $(f \circ \gamma)'$ tiene argumento constante, luego por (2.4a) tenemos

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \int_{\gamma} f'(w) dw \right| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &= \int_0^1 |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{1 - |\gamma(t)|}{(1 + |\gamma(t)|)^3} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^{|z|} \frac{1 - u}{(1 + u)^3} du = \frac{|z|}{(1 + |z|)^2}. \end{aligned}$$

□

Demostración de (2.4c). Dado $z \in \mathbb{D}$ consideremos la transformada de Koebe con respecto a z de f , denotada por $K_z(f)$, que por la parte (c) del Teorema 2.2.5 pertenece a \mathcal{S} . Por (2.4b), tenemos

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |K_z(f)(-z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}.$$

Como $\left| \frac{z}{K_z(f)(-z)(1 - |z|^2)} \right| = \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|$, obtenemos

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

■

Teorema 2.2.19. *La clase \mathcal{S} es un subconjunto compacto de $\mathbf{H}(\mathbb{D})$.*

Demostración. Por el Corolario 2.1.22 nos basta probar que la clase \mathcal{S} es localmente acotado y un subconjunto cerrado en $\mathbf{H}(\mathbb{D})$.

(1) *La clase \mathcal{S} es localmente acotado en \mathbb{D} .*

Dado $r \in (0, 1)$ sea $K := \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r\}$ subconjunto compacto de \mathbb{D} . Observemos que por el Teorema de distorsión de Koebe, Teorema 2.2.18 (2.4b), para todo $z \in K$ y para toda $f \in \mathcal{S}$ se tiene

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \leq \frac{r}{(1 - r^2)^2}.$$

Como $r \in (0, 1)$ es arbitrario se concluye que \mathcal{S} es localmente acotado en \mathbb{D} .

(2) *La clase \mathcal{S} es un subconjunto cerrado en $\mathbf{H}(\mathbb{D})$.*

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{S} , tal que existe $f \in \mathbf{H}(\mathbb{D})$ con $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{H}(\mathbb{D})$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Por el Teorema de Hurwitz, Teorema 2.1.19, f es univalente ó f es constante. Observemos que esto último no puede suceder pues para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f'_n(0) = 1$, luego por el Teorema 2.1.17 $f'(0) = 1$. ■

2.3. Conjetura de Bieberbach

Quizás el problema más famoso asociado a la clase \mathcal{S} es la *Conjetura de Bieberbach*, relacionado al crecimiento de los coeficientes de las series de Taylor de funciones en \mathcal{S} , formulada por Ludwig Bieberbach en 1916. La conjetura es la siguiente,

Conjetura de Bieberbach (1916). Si $f \in \mathcal{S}$ es tal que para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ entonces para todo $n \geq 2$ se tiene

$$|a_n| \leq n.$$

Además, si existe $n_0 \geq 2$ tal que $|a_{n_0}| = n_0$, entonces la función f es una rotación de la función de Koebe.

El mismo Bieberbach logro demostrar que al menos el segundo coeficiente verifica la conjetura, Teorema 2.2.15.

Pasado el tiempo, en 1985 Louis de Branges, demostró que la Conjetura de Bieberbach es cierta, véase [dB85]. De hecho Branges no demostró directamente la Conjetura de Bieberbach, sino que él probó la Conjetura de Milin que implica la Conjetura de Bieberbach. En esta sección probaremos esto último, pero para esto es necesario pasar por una conjetura intermedia, la Conjetura de Robertson, formulada por M.S.Robertson en 1936. Esta conjetura esta relacionada con las funciones impares de \mathcal{S} .

Conjetura de Robertson (1936). Si h es una función impar en \mathcal{S} tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n-1} z^{2n-1}$, entonces para todo $n \geq 2$, se tiene

$$1 + \sum_{k=2}^n |b_{2k-1}|^2 \leq n.$$

Además, si existe $n_0 \geq 2$ tal que $1 + \sum_{k=2}^{n_0} |b_{2k-1}|^2 = n_0$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumpla $h(z)^2 = k_\alpha(z^2)$, esto es h es la 2-transformada de Koebe de una rotación de Koebe.

El siguiente teorema muestra que la Conjetura de Robertson implica la Conjetura de Bieberbach.

Teorema 2.3.1. *Si la Conjetura de Robertson es cierta, entonces la Conjetura de Bieberbach es cierta.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}$ tal que para $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Luego por la Proposición 2.2.6, existe h función impar en \mathcal{S} tal que para $z \in \mathbb{D}$ se tiene $h(z)^2 = f(z^2)$. Luego, si para $z \in \mathbb{D}$ se tiene $h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} z^{2k-1}$, con

$b_1 = 1$, entonces

$$f(z^2) = z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} z^{2k-1} \right)^2 = [h(z)]^2.$$

Para $n \geq 2$ un número entero, igualando los coeficientes de la potencia de z^{2n} se tiene

$$a_n = \sum_{k=1}^n b_{2k-1} b_{2n-2k+1}.$$

Entonces por la desigualdad de Cauchy-Swartz tenemos

$$|a_n| \leq \left(\sum_{k=1}^n |b_{2k-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |b_{2n-2k+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=2}^n |b_{2k-1}|^2.$$

Por otro lado si existe $n_0 \geq 2$ tal que $|a_{n_0}| = n_0$, entonces $1 + \sum_{k=2}^{n_0} |b_{2k-1}|^2 = n_0$.

Luego suponiendo que la Conjetura de Robertson es cierta, tenemos $|a_n| \leq n$ y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $k_\alpha(z^2) = h(z)^2 = f(z^2)$. Luego f es una rotación de la función de Koebe. ■

Una caracterización de las funciones impares en \mathcal{S} es la siguiente:

Lema 2.3.2. *Una función impar $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ pertenece a \mathcal{S} si y solo si existe $f \in \mathcal{S}$ tal que h es la 2-transformada de Koebe de f , es decir, tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $h(z)^2 = f(z^2)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}$. Por el Lema 2.2.6 existe una única función $h \in \mathcal{S}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $h(z)^2 = f(z^2)$. Notemos que para $\beta = -1$ raíz cuadrada de la unidad se tiene $h(\beta z) = \beta h(z)$, luego h es una función impar. Por otro lado supongamos que h es una función impar en \mathcal{S} . Considerando para cada $z \in \mathbb{D}$ un complejo $\zeta \in \mathbb{D}$ tal que $\zeta^2 = z$, sea f definida en \mathbb{D} por $f(z) = h(\zeta)^2$. Como h es impar la función f esta bien definida y además para todo $z \in \mathbb{D}$ satisface $h(z)^2 = f(z^2)$. Resta ver que $f \in \mathcal{S}$. Notemos que como h es una función impar en \mathcal{S} , la función h^2 definida en \mathbb{D} por $h^2(z) = h(z)^2$ es una función par, holomorfa en \mathbb{D} y satisface $h^2(0) = 0$ y $(h^2)''(0) = 2$. Luego el desarrollo en serie de potencias de h^2 en torno a $\zeta_0 = 0$ es para todo $\zeta \in \mathbb{D}$

$$h^2(\zeta) = \zeta^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} \zeta^{2n}.$$

Luego el desarrollo de potencias de f en $z_0 = 0$ es para todo $z \in \mathbb{D}$ igual a

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} z^n.$$

Luego f es holomorfa en \mathbb{D} y satisface $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Para probar que f es inyectiva en \mathbb{D} consideremos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tales que

$f(z_1) = f(z_2)$. Considerando los números complejos $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$ con $\zeta_1^2 = z_1$ y $\zeta_2^2 = z_2$ tenemos $h(\zeta_1)^2 = h(\zeta_2)^2$ de donde $h(\zeta_1) = \pm h(\zeta_2)$. Pero como h es inyectiva e impar en \mathbb{D} , tenemos que $\zeta_1 = \pm \zeta_2$ de donde se tiene $z_1 = z_2$. ■

Ahora mencionaremos la *Conjetura de Milin*, formulada por Milin en 1971, esta conjetura esta relacionada a los coeficientes logarítmicos de la función $f \in \mathcal{S}$. La Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson, y por tanto por el Teorema 2.3.1, la Conjetura de Bieberbach.

Primero observemos que si $f \in \mathcal{S}$ entonces la función definida en \mathbb{D} por $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ es holomorfa en \mathbb{D} , no se anula en \mathbb{D} y envía el 0 al 1. Luego por el Lema 2.2.7 existe una función φ holomorfa en \mathbb{D} tal que $\varphi(0) = 0$ y para $z \in \mathbb{D}$ se tiene $\exp(2\varphi(z)) = \frac{f(z)}{z}$. Luego para $z \in \mathbb{D}$ tenemos

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Los números complejos c_n son llamados coeficientes logarítmicos de la función f .

Conjetura de Milin (1971). Sea $f \in \mathcal{S}$ y para $z \in \mathbb{D}$ sea $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ tal que $\exp(2\varphi(z)) = \frac{f(z)}{z}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left[k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right] \leq 0.$$

Además, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=1}^{n_0} \sum_{k=1}^m \left[k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right] = 0$, entonces la función f es una rotación de la función de Koebe.

Teorema 2.3.3. *Si la Conjetura de Milin es cierta, entonces la Conjetura de Robertson es cierta.*

Para demostrar este teorema usaremos la siguiente desigualdad

Segunda Desigualdad de Lebedev-Milin. Sea φ holomorfa en \mathbb{D} tal que $\varphi(0) = 0$ y para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

Sea ψ definida para $z \in \mathbb{D}$, por

$$\psi(z) = \exp(\varphi(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k.$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=0}^n |\beta_k|^2 \leq (n+1) \exp \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right).$$

Demostración. [Dur83, Second Lebedev-Milin Inequality, página 143]. ■

Demostración del Teorema 2.3.3. Sea h una función impar en \mathcal{S} . Por el Lema 2.3.2 existe $f \in \mathcal{S}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple $f(z^2) = h(z)^2$. Supongamos que para $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n-1} z^{2n-1} \quad \text{y} \quad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Para $z \in \mathbb{D}$, considerando $\zeta \in \mathbb{D}$ tal que $\zeta^2 = z$, definimos la función ψ como

$$\psi(z) = \frac{h(\zeta)}{\zeta} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n-1} \zeta^{2n-2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n-1} z^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} z^n.$$

Como h es una función impar la función ψ esta bien definida en \mathbb{D} y satisface

$$\psi(z)^2 = \frac{h(\zeta)^2}{\zeta^2} = \frac{f(\zeta^2)}{\zeta^2} = \frac{f(z)}{z}.$$

Luego para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene $\exp(\varphi(z)) = \psi(z)$ y aplicando la *Segunda Desigualdad de Lebedev-Milin*, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$1 + \sum_{k=1}^n |b_{2k+1}|^2 \leq (n+1) \exp \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right).$$

Suponiendo que la Conjetura de Milin es cierta, y como la función exponencial es creciente tenemos que

$$1 + \sum_{k=1}^n |b_{2k+1}|^2 \leq (n+1).$$

Por otro lado, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=1}^{n_0} \sum_{k=1}^m \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) = 0$, por la Conjetura de Milin existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f \equiv k_\alpha$, y por lo tanto para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene $h(z)^2 = k_\alpha(z^2)$. ■

Capítulo 3:

COPOS DE NIEVE CONFORMES ALEATORIOS

Se puso de manifiesto durante las últimas décadas que las configuraciones extremas en muchos problemas importantes en análisis complejo, tienen complicadas estructuras fractales. Como por ejemplo se puede considerar el problema de los coeficientes para la clase Σ de funciones univalentes, como la Conjetura de Bieberbach. Nosotros en este capítulo abordaremos el *espectro de medias integrales* sobre dominios propios simplemente conexos en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera y buscaremos una respuesta al problema de buscar fractales que resuelvan el problema maximal. Para ello, introduciremos los fractales llamados *copos de nieve conformes aleatorios* e investigaremos sus propiedades, desarrollaremos las herramientas para estimar el espectro de medias integrales promedio y probaremos que se pueden encontrar la solución al problema de maximalidad en esta clase de fractales.

3.1. Preliminares

En esta sección enunciaremos algunos resultados del artículo [Mak98].

3.1.1. Análisis multifractal de medidas armónicas

Definición 3.1.1 (Medida armónica). *Sea D un dominio propio simplemente conexo en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Para $\zeta \in D$ la medida armónica μ_ζ puede ser descrita en términos de φ la Representación de Riemann del dominio D con punto ζ como sigue: La*

función φ se puede extender \mathcal{L}^1 -casi todo punto $z = e^{i\theta} \in \partial\Delta$, en el sentido de límites angulares, esto es,

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \varphi(re^{i\theta}) \quad \text{existe } \mathcal{L}^1\text{-casi todo } \theta \in [-\pi, \pi],$$

véase [Mil99, Teorema 15.3, página 15-2].

Luego para E subconjunto boreliano de ∂D definiremos la medida armónica μ_ζ como

$$\mu_\zeta(E) = m(\varphi^{-1}(E)),$$

donde m es la medida de Lebesgue normalizada en $\partial\Delta$.

Observación 8. La medida μ_ζ no depende de la función φ . Es decir, si $\varphi_1, \varphi_2 : \Delta \rightarrow D$ son tales que $\varphi_1(\infty) = \varphi_2(\infty) = \zeta$, entonces por la unicidad del Teorema de uniformización de Riemann, Teorema 2.1.24, existe $a \in \partial\Delta$ tal que para cada $z \in \Delta$ se tiene $\varphi_1(z) = \varphi_2(az)$. Luego para E subconjunto boreliano de ∂D , se tiene

$$\begin{aligned} \mu_\zeta(E) &= m(\varphi_1^{-1}(E)); \\ &= m(a^{-1}\varphi_2^{-1}(E)); \\ &= m(\varphi_2^{-1}(E)) = \mu_\zeta(E). \end{aligned}$$

Proposición 3.1.2. *Sea D un dominio propio simplemente conexo en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Si $\zeta, \zeta' \in D$ entonces $\mu_\zeta \ll \mu_{\zeta'}$ y $\mu_{\zeta'} \ll \mu_\zeta$.*

Demostración. Solo mostraremos $\mu_\zeta \ll \mu_{\zeta'}$, pues la afirmación $\mu_{\zeta'} \ll \mu_\zeta$ se deduce de esta intercambiando ζ y ζ' . Sean $\varphi_1, \varphi_2 : \Delta \rightarrow D$ tales que $\varphi_1(\infty) = \zeta$ y $\varphi_2(\infty) = \zeta'$. Si $\phi : \Delta \rightarrow \Delta$ es una función univalente tal que $\phi(\infty) = \varphi_2^{-1}(\zeta)$, entonces la función $\varphi_2 \circ \phi : \Delta \rightarrow D$ es tal que $\varphi_2(\phi(\infty)) = \zeta$. Para E subconjunto boreliano de ∂D , existe $C \in (0, +\infty)$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_\zeta(E) &= m((\varphi_2 \circ \phi)^{-1}(E)); \\ &= m(\phi^{-1}(\varphi_2^{-1}(E))); \\ &\leq C m(\varphi_2^{-1}(E)) = C \mu_{\zeta'}(E). \end{aligned}$$

■

Espectro dimensional de Hausdorff

Sea D un dominio propio simplemente conexo en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Denotemos por μ una medida armónica sobre ∂D . Recordemos que la *dimensión puntual inferior de la medida* μ es la función medible $\underline{d}_\mu : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\underline{d}_\mu(z) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(z, \delta))}{\log \delta}.$$

Definiremos, $\dim_H \emptyset = -\infty$.

Definición 3.1.3 (Espectro dimensional de Hausdorff). *El espectro dimensional de Hausdorff de la medida μ es la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida como*

$$f(\alpha) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \dim_H \{z \in \text{Sop}(\mu) : \underline{d}_\mu(z) \leq \alpha + \eta\}.$$

Teorema 3.1.4. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $f(\alpha) \leq \alpha$.*

Demostración. Sigue de la Proposición 1.4.7. ■

Espectro de medias integrales

Sea D un dominio propio simplemente conexo en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Consideremos la representación de Riemann $\varphi : \Delta \rightarrow D$.

Definición 3.1.5 (Espectro de medias integrales). *El espectro de medias integrales es la función $\beta_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida como*

$$\beta_\varphi(t) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^t d\theta}{-\log(r-1)}.$$

Proposición 3.1.6. *La función β_φ es continua.*

Demostración. Como toda función convexa es continua, véase [Roy63, Proposición 16, página 109]. Basta probar que β_φ es una función convexa, es decir, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene $\beta_\varphi(s\lambda + (1-\lambda)t) \leq \lambda\beta_\varphi(s) + (1-\lambda)\beta_\varphi(t)$. Fijemos $r \in (1, +\infty)$. Dados $s, t \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in [0, 1]$, por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^{\lambda t + (1-\lambda)s} d\theta \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^t d\theta \right)^\lambda \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^s d\theta \right)^{1-\lambda}.$$

De donde se deduce el resultado. ■

Espectros Universales

Para el estudio de los *espectros universales* consideraremos D un dominio propio simplemente conexo en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera. Bajo este contexto definimos.

Definición 3.1.7 (Espectros Universales). *Los espectros universales son las funciones $F : [\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $B : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ donde*

$$F(\alpha) = \sup_D f(\alpha);$$

$$B(t) = \sup_D \beta(t),$$

donde el supremo se considera sobre todos los dominios propios simplemente conexos en la esfera de Riemann que contienen a ∞ , con al menos dos puntos frontera.

Enunciaremos la relación que existe entre los diferentes espectros.

Teorema 3.1.8. *Los espectros universales F y B satisfacen la relación tipo-Legendre en el intervalo $t \in [0, 2]$*

$$\sup_{\alpha \in [1, +\infty)} \left(\frac{F(\alpha) - t}{\alpha} \right) = B(t) - t + 1.$$

Demostración. [Mak98, Teorema 4.1 y Teorema 4.2, páginas 32-33]. ■

3.1.2. La clase Σ''

Recordemos que $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ y que Σ'' es la clase de las funciones univalentes $\phi : \Delta \rightarrow \Delta$ para las cuales existe $r \in (0, +\infty)$ tal que $r\phi \in \Sigma'$. Notemos que si $\phi \in \Sigma''$ entonces la expansión en serie de Laurent de ϕ en $z_0 = \infty$ es

$$\phi(z) = \frac{1}{r}z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \dots, \quad \text{de donde } r = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\phi(z)}.$$

Definición 3.1.9 (Capacidad logarítmica). *Dado $\phi \in \Sigma''$ llamaremos capacidad logarítmica de ϕ , lo que denotaremos $\text{cap}(\phi)$, al número real $-\log|r|$.*

Recordemos también que para $\phi \in \Sigma''$ y $k \geq 2$ un número entero, por el Corolario 2.2.9, la k -ésima transformada de Koebe de ϕ , denotada por $K_k(\phi)$ y definida para $z \in \Delta$ por la relación

$$K_k(\phi)(z)^k = \phi(z^k)$$

pertenece a la clase Σ'' y cumple $\text{cap}(K_k(\phi)) = \frac{\text{cap}(\phi)}{k}$.

Además dado $\theta \in [-\pi, \pi]$, por el Teorema 2.2.5, la función denotada por ϕ_θ y definida para $z \in \Delta$ por $\phi_\theta(z) = e^{i\theta} \phi(e^{-i\theta}z)$ pertenece a la clase Σ'' y cumple $\text{cap}(\phi) = \text{cap}(\phi_\theta)$.

Observación 9. Observemos que para $\phi \in \Sigma''$ y $k \geq 2$ un número entero, tenemos

(a) $K_k(\phi)^{-1} = K_k(\phi^{-1})$.

En efecto, para $z \in \Delta$ se tiene

$$\begin{aligned} K_k(K_k(\phi^{-1}))(z)^k &= \phi(K_k(\phi^{-1})(z)^k); \\ &= \phi(\phi^{-1}(z^k)); \\ &= z^k. \end{aligned}$$

Luego existe β raíz k -ésima de la unidad tal que $K_k(K_k(\phi^{-1}))(z) = \beta z$. Como $K_k(K_k(\phi^{-1})) \in \Sigma''$ se deduce que $\beta = 1$.

- (b) Para $\theta \in [-\pi, \pi]$ se tiene $(K_k(\phi))_\theta = K_k(\phi_{k\theta})$.
 En efecto para $z \in \Delta$ tenemos

$$\begin{aligned} ((K_k(\phi))_\theta(z))^k &= (e^{i\theta} K_k(\phi)(e^{-i\theta}z))^k; \\ &= e^{ik\theta} K_k(\phi)(e^{-i\theta}z)^k; \\ &= e^{ik\theta} \phi(e^{-ik\theta}z^k); \\ &= \phi_{k\theta}(z^k); \\ &= K_k(\phi_{k\theta})(z)^k. \end{aligned}$$

de donde se deduce la igualdad.

El siguiente lema es el análogo al Lema de Schwarz para la clase Σ'' .

Lema 3.1.10. *Sea $\phi \in \Sigma''$. Entonces $\phi'(\infty) \geq 1$ y para cada $z \in \Delta$ se cumple $|z| \leq |\phi(z)|$. Además si $\phi'(\infty) = 1$ ó para algún $z_0 \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se cumple $|z_0| = |\phi(z_0)|$, entonces para todo $z \in \Delta$ se cumple $\phi(z) = z$.*

Demostración. Observemos que la función $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ definida para $w \in \mathbb{D}$ por $\psi(w) = \frac{1}{\phi(w^{-1})}$ es holomorfa en \mathbb{D} y $\psi(0) = 0$. Luego por el Lema de Schwarz, Lema 2.1.6, se tiene $|\psi'(0)| \leq 1$ y para $w \in \mathbb{D}$ se cumple $|\psi(w)| \leq |w|$ que es equivalente a $|\phi'(\infty)| \geq 1$ y para $z = w^{-1} \in \Delta$ se cumple $|\phi(z)| \geq |z|$. Además si $\phi'(\infty) = 1$ ó para algún $z_0 \in \Delta \setminus \{\infty\}$ se cumple $|z_0| = |\phi(z_0)|$, entonces $\psi'(0) = 1$ ó $|\psi\left(\frac{1}{z_0}\right)| = \left|\frac{1}{z_0}\right|$, luego el resultado sigue del Lema de Schwarz, Lema 2.1.6. ■

Lema 3.1.11. *La clase $\Sigma'' \cup \{\infty\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{H}(\Delta)$.*

Demostración. Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Σ'' . Observemos que la sucesión $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$ se define $\psi_n(z) = \frac{1}{\phi_n(z^{-1})}$, cumple $|\psi_n(z)| \leq 1$. Luego por el Teorema de Montel, Teorema 2.1.21, existe una sub-sucesión $\{\psi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa tal que $\psi_{n_k} \rightarrow \psi$ en $\mathbf{H}(\mathbb{D})$ cuando $k \rightarrow +\infty$. Además por el Teorema de Hurwitz, Teorema 2.1.19, la función ψ es contante (en este caso $\psi \equiv 0$, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\psi_n(0) = 0$) o ψ es univalente en \mathbb{D} . Para $z \in \Delta$ definimos $\phi(z) = \frac{1}{\psi(z^{-1})}$. Observemos que $\phi \in \Sigma''$ o $\phi \equiv \infty$, además para $z \in K$, subconjunto compacto de Δ , tenemos

$$\begin{aligned} d(\phi_{n_k}(z), \phi(z)) &= d\left(\frac{1}{\phi_{n_k}(z)}, \frac{1}{\phi(z)}\right); \\ &= d(\psi_{n_k}(z^{-1}), \psi(z^{-1})) < \epsilon, \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.} \end{aligned}$$

Lema 3.1.12. *Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Σ'' y $\phi \in \mathbf{H}(\Delta)$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ en $\mathbf{H}(\Delta)$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Si la sucesión $\{\text{cap}(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, entonces $\phi \in \Sigma''$.*

Demostración. Sigue del Teorema 2.1.17. ■

Lema 3.1.13. *Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Σ'' . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(\phi_n) = 0$, entonces ϕ_n converge uniformemente a la identidad sobre todo subconjunto compacto de Δ .*

Demostración. Sea $\{\phi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por el Lema 3.1.11 y el Lema 3.1.12, existe $\{\phi_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{\phi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\phi \in \Sigma''$ tal que $\phi_{n_{k_l}} \rightarrow \phi$ en $\mathbf{H}(\Delta)$ cuando $l \rightarrow +\infty$. Como $\lim_{l \rightarrow \infty} \text{cap}(\phi_{n_{k_l}}) = 0$ por el Teorema 2.1.17 se tiene $\text{cap}(\phi) = 0$ y luego por el Lema 3.1.10 se concluye que para todo $z \in \Delta$ se tiene $\phi(z) = z$. Como la subsucesión $\{\phi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es arbitraria se concluye el resultado. ■

Corolario 3.1.14. *Sea $\phi \in \Sigma''$. Entonces $K_n(\phi)$ converge uniformemente a la identidad sobre todo subconjunto compacto de Δ .*

Demostración. Observemos que $\text{cap}(K_n(\phi)) = \frac{\text{cap}(\phi)}{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. ■

El teorema siguiente es el análogo al Teorema de distorsión de Koebe para la clase \mathcal{S} .

Teorema 3.1.15. *Sea $\phi \in \Sigma''$. Entonces para todo $z \in \Delta$, se tiene*

$$e^{\text{cap}(\phi)} \frac{(|z| - 1)^2}{|z|} \leq |\phi(z)| \leq e^{\text{cap}(\phi)} \frac{(1 + |z|)^2}{|z|}; \quad (3.1a)$$

$$e^{\text{cap}(\phi)} \frac{(|z| - 1)^5}{|z|^2 (|z| + 1)^3} \leq |\phi'(z)| \leq e^{\text{cap}(\phi)} \frac{(|z| + 1)^5}{|z|^2 (|z| - 1)^3}. \quad (3.1b)$$

Además

$$|\phi(z)| \leq 4e^{\text{cap}(\phi)} |z|; \quad (3.1c)$$

$$|\phi'(z)| \leq 32e^{\text{cap}(\phi)} \left(\frac{|z|}{|z| - 1} \right)^3. \quad (3.1d)$$

Demostración. Observemos que la función $e^{-\text{cap}(\phi)} \phi \in \Sigma'$. Luego por el Teorema 2.2.5, la función ψ definida para $w \in \mathbb{D}$ por $\psi(w) = \frac{e^{\text{cap}(\phi)}}{\phi(w^{-1})}$ esta en \mathcal{S} . Aplicando el Teorema de distorsión de Koebe, Teorema 2.2.18, para $w \in \mathbb{D}$ se tiene

$$\frac{|w|}{(1 + |w|)^2} \leq \left| \frac{e^{\text{cap}(\phi)}}{\phi(w^{-1})} \right| \leq \frac{|w|}{(1 - |w|)^2}. \quad (3.2)$$

Cambiando variable $z = w^{-1}$, se obtiene (3.1a). Además de la desigualdad del lado izquierdo de (3.2) para $w \in \mathbb{D}$ tenemos

$$|\phi(w^{-1})| \leq e^{\text{cap}(\phi)} \frac{(1 + |w|)^2}{|w|} < e^{\text{cap}(\phi)} \frac{4}{|w|}. \quad (3.3)$$

Cambiando variable $z = w^{-1}$, se obtiene (3.1c).

Por otro lado notemos que $\psi'(w) = -e^{\text{cap}(\phi)} \frac{\phi'(w^{-1})}{w^2 \phi(w^{-1})^2}$. Luego aplicando el Teorema de distorsión de Koebe, Teorema 2.2.18, para $w \in \mathbb{D}$ se tiene

$$\frac{1 - |w|}{(1 + |w|)^3} \leq \left| e^{\text{cap}(\phi)} \frac{\phi'(w^{-1})}{w^2 \phi(w^{-1})^2} \right| \leq \frac{1 + |w|}{(1 - |w|)^3}. \quad (3.4)$$

Cambiando variable $z = w^{-1}$, y usando (3.1a) se obtiene (3.1b). Además de la desigualdad del lado derecho de (3.4) y de (3.3), para $w \in \mathbb{D}$ se tiene

$$|\phi'(w^{-1})| \leq e^{-\text{cap}(\phi)} |w|^2 |\phi(w^{-1})|^2 \frac{1 + |w|}{(1 - |w|)^3} < e^{\text{cap}(\phi)} |w|^2 \frac{2}{(1 - |w|)^3} \frac{16}{|w|^2}.$$

Cambiando variable $z = w^{-1}$, se obtiene (3.1d). ■

3.2. Copos de nieve conformes aleatorios

En esta sección introduciremos los *copos de nieve conformes aleatorios* y estudiaremos algunas de sus propiedades. El teorema siguiente prueba la existencia de los *copos de nieve conformes*.

Teorema 3.2.1. *Sean $\phi \in \Sigma''$, $k \geq 2$ un número entero y $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión en $[-\pi, \pi]$. Definiremos la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ en Σ'' como $f_0(z) = \phi_{\theta_0}(z)$ y para $n \in \mathbb{N}$ por inducción*

$$\begin{aligned} f_n(z) &= f_{n-1} \circ K_{k^n}(\phi_{\theta_n})(z); \\ &= \phi_{\theta_0} \circ K_k(\phi_{\theta_1}) \circ \cdots \circ K_{k^n}(\phi_{\theta_n})(z). \end{aligned}$$

Entonces existe $f \in \Sigma''$ tal que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ converge a f uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Δ .*

Demostraremos este teorema mas adelante.

Definición 3.2.2 (Copo de nieve conforme). *Dado $\phi \in \Sigma''$, $k \geq 2$ un número entero y $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión en $[-\pi, \pi]$, llamaremos copo de nieve conforme al límite f de la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida en el Teorema 3.2.1. Por simplicidad también llamaremos copo de nieve conformes $\mathbb{C} \setminus f(\Delta)$ y a la función $g = f^{-1}$.*

En lo que sigue de este capítulo, a ϕ la llamaremos *bloque de construcción del copo de nieve conforme* f y a f_n (respectivamente $g_n = f_n^{-1}$) la *n-ésima aproximación del copo de nieve conforme* f (respectivamente g).

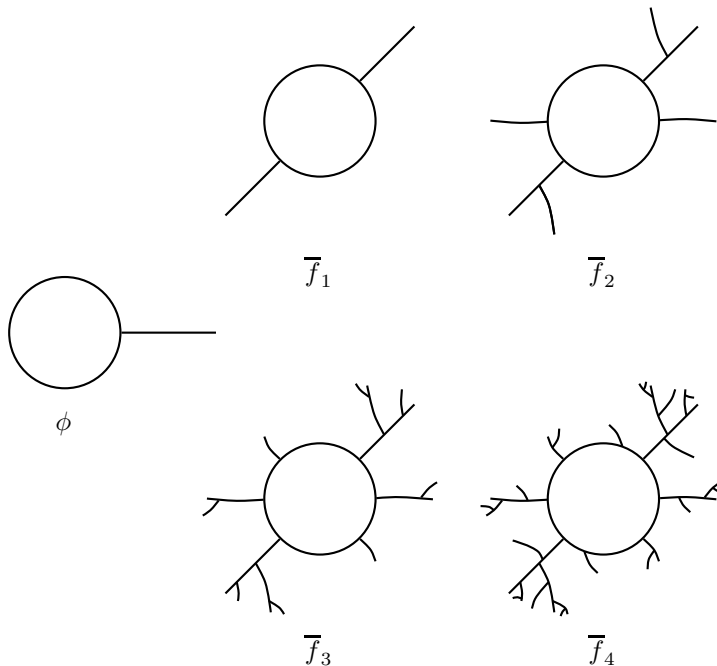
Algunas veces es más fácil trabajar con copos de nieve conformes simétricos. Para $n \in \mathbb{N}$, definiremos por inducción

$$\bar{f}_n(z) = K_k(\phi_{\theta_1}) \circ K_{k^2}(\phi_{\theta_2}) \circ \cdots \circ K_{k^n}(\phi_{\theta_n})(z).$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n = \phi_{\theta_0} \circ \bar{f}_n$.

Observación 10. El copo de nieve conforme simétrico \bar{f}_n evoluciona como sigue: en cada paso añadimos k^n curvas equidistribuidas (con respecto a la medida armónica) de pequeñas copias del bloque de construcción. Pero estas no son exactamente copias, sino que son pequeñas distorsiones.

Ejemplo de un copo de nieve conforme simétrico para $k = 2$.



Lema 3.2.3. Sea $\phi \in \Sigma''$, $k \geq 2$ un número entero y $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión en $[-\pi, \pi]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n = \phi_{\theta_0} \circ \bar{f}_n$ la n -ésima aproximación del copo de nieve conforme f con bloque de construcción ϕ . Entonces la sucesión $\{\text{cap}(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ (respectivamente $\{\text{cap}(\bar{f}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$) es acotada y converge a $\text{cap}(\phi)^{\frac{k}{k-1}}$ (respectivamente $\text{cap}(\phi)^{\frac{1}{k-1}}$). En particular la capacidad de $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (respectivamente $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n$) es igual a $\text{cap}(\phi)^{\frac{k}{k-1}}$ (respectivamente $\text{cap}(\phi)^{\frac{1}{k-1}}$).

Demostración. Primero notemos que para $\phi_1, \phi_2 \in \Sigma''$ y $k \geq 2$ un número entero se tiene,

$$\begin{aligned} \text{cap}(\phi_1 \circ \phi_2) &= \text{cap}(\phi_1) + \text{cap}(\phi_2); \\ \text{cap}(K_k(\phi_1)) &= \frac{\text{cap}(\phi_1)}{k}. \end{aligned}$$

Mostraremos el caso de la sucesión $\{\text{cap}(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. El caso de la sucesión $\{\text{cap}(\bar{f}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ se deduce del caso anterior observando que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\text{cap}(\bar{f}_n) = \text{cap}(f_n) - \text{cap}(\phi)$. Notemos que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \text{cap}(f_n) &= \text{cap}(f_{n-1}) + \text{cap}(K_{k^n}(\phi_{\theta_n})); \\ &= \text{cap}(f_{n-1}) + \frac{\text{cap}(\phi)}{k^n}; \\ &= \text{cap}(\phi) + \text{cap}(\phi) \frac{1}{k} + \cdots + \text{cap}(\phi) \frac{1}{k^n}; \\ &= \text{cap}(\phi) \left(1 + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k^n} \right). \end{aligned}$$

Así para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene

$$\text{cap}(f_n) = \text{cap}(\phi) \left(\frac{1 - \frac{1}{k^{n+1}}}{1 - \frac{1}{k}} \right) \leq \text{cap}(\phi) \left(\frac{k}{k-1} \right)$$

y además

$$\text{cap}(f_n) \rightarrow \text{cap}(\phi) \left(\frac{k}{k-1} \right) \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

■

Demostración del Teorema 3.2.1. Probaremos que la sucesión $\{\bar{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{H}(\Delta)$. Dado $\epsilon \in (0, +\infty)$ y $\Delta_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1 + \epsilon\} \cup \{\infty\}$ subconjunto compacto de Δ . Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, notemos que si escribimos $\Phi_{n,m} := K_{k^{n+1}}(\phi_{\theta_{n+1}}) \circ \cdots \circ K_{k^m}(\phi_{\theta_m})$, entonces $\bar{f}_m = \bar{f}_n \circ \Phi_{n,m}$. Sea $z \in \Delta_\epsilon$, luego por el Lema 3.1.10 $\Phi_{n,m}(z) \in \Delta_\epsilon$. Así, considerando γ la curva de la figura siguiente:

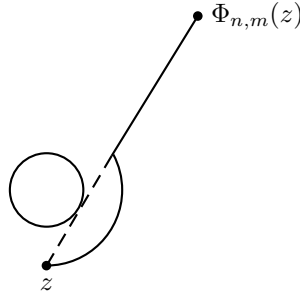


Figura: Curva γ .

Tenemos

$$\begin{aligned} |\bar{f}_n(z) - \bar{f}_m(z)| &= |\bar{f}_n(z) - \bar{f}_n(\Phi_{n,m}(z))| \\ &\leq \int_\gamma |\bar{f}'_n(w)| dw \leq \pi \max_{\zeta \in \Delta_\epsilon} |\bar{f}'_n(\zeta)| |z - \Phi_{n,m}(z)|. \end{aligned}$$

Luego nos resta probar:

1.- La sucesión $\{\bar{f}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en Δ_ϵ .

En efecto, notemos que por el Teorema 3.1.15, (3.1d), y el Lema 3.2.3 para $z \in \Delta_\epsilon$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left| \bar{f}'_n(z) \right| \leq 32e^{\text{cap}(\bar{f}_n)} \left(\frac{|z|}{|z|-1} \right)^3 < 32e^{\frac{\text{cap}(\phi)}{k-1}} \left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon} \right)^3.$$

2.- La sucesión $\Phi_{n,m}$ converge uniformemente a la identidad en Δ_ϵ cuando $n, m \rightarrow +\infty$.

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} \text{cap}(\Phi_{n,m}) &= \text{cap}(\bar{f}_m) - \text{cap}(\bar{f}_n); \\ &= \text{cap}(\phi) \left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k^n} + \cdots + \frac{1}{k^m} \right) - \text{cap}(\phi) \left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k^n} \right); \\ &= \text{cap}(\phi) \left(\frac{1}{k^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{k^m} \right) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Luego por el Lema 3.1.13, $\Phi_{n,m}$ converge uniformemente a la identidad en Δ_ϵ cuando $n, m \rightarrow +\infty$. ■

Notación. Consideremos el espacio de probabilidad $([-\pi, \pi], \mathcal{B}, \frac{\mathcal{L}^1}{2\pi})$ donde \mathcal{B} es la σ -álgebra de Borel en $[-\pi, \pi]$ y $\frac{\mathcal{L}^1}{2\pi}$, es la medida de Lebesgue en $[-\pi, \pi]$ normalizada. En lo que sigue de este capítulo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ denotará el espacio de probabilidad producto de \mathbb{N}^* copias del espacio de probabilidad $([-\pi, \pi], \mathcal{B}, \frac{\mathcal{L}^1}{2\pi})$, es decir,

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \left([-\pi, \pi], \mathcal{B}, \frac{\mathcal{L}^1}{2\pi} \right).$$

Ahora estamos en condiciones de poder definir los copos de nieve conformes aleatorios.

Definición 3.2.4 (Copos de nieve conformes aleatorios). *Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Para $n \in \mathbb{N}^*$ sean $\theta_n : \Omega \rightarrow [-\pi, \pi]$ las variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas definidas por $\theta_n(\omega) = \omega_n$. Llamaremos copo de nieve conforme aleatorio a la función aleatoria (con abuso de notación) $f : \Omega \rightarrow \Sigma''$ definida para $\omega \in \Omega$ y $z \in \Delta$ por*

$$f_\omega(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\theta_0(\omega)} \circ K_k(\phi_{\theta_1(\omega)}) \circ \cdots \circ K_{k^n}(\phi_{\theta_n(\omega)})(z).$$

También llamaremos copo de nieve conforme aleatorio a la función aleatoria g definida por

$$g_\omega(z) = f_\omega^{-1}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{k^n}(\psi_{\theta_n(\omega)}) \circ \cdots \circ K_k(\psi_{\theta_1(\omega)})(\psi_{\theta_0(\omega)}(z)).$$

Teorema 3.2.5. *Sea $\phi \in \Sigma''$ y $k \geq 2$ un número entero. Sea f el copo de nieve conforme aleatorio correspondiente. Entonces f tiene la misma distribución que la función aleatoria $\tilde{f} : \Omega \times [-\pi, \pi] \rightarrow \Sigma''$ definida por*

$$\tilde{f}(\omega, \theta) = \phi_\theta \circ K_k(f_\omega).$$

Demostración. Sea $\omega = (w_0, w_1, \dots) \in \Omega$. Por definición

$$f_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\theta_0(\omega)} \circ K_k(\phi_{\theta_1(\omega)}) \circ \dots \circ K_k^n(\phi_{\theta_n(\omega)})$$

y

$$\tilde{f}(\omega, \theta) = \phi_\theta \circ K_k(f_\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\theta(\omega)} \circ K_k(\phi_{\theta_0(\omega)}) \circ \dots \circ K_k^{n+1}(\phi_{\theta_n(\omega)}).$$

Luego si $\theta\omega = (\theta, \omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega$ entonces $\phi_\theta \circ K_k(f_\omega) = f_{\theta\omega}$. Así para la transformación $\sigma : \Omega \times [-\pi, \pi] \rightarrow \Omega$ definida por $\sigma(\omega, \theta) = \theta\omega$ se tiene que $\tilde{f} = f \circ \sigma$. Como además la medida \mathbb{P} es invariante por σ se tiene el resultado. ■

Corolario 3.2.6. *Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Sea g el copo de nieve conforme aleatorio correspondiente. Entonces g tiene la misma distribución que la función aleatoria \tilde{g} definida por*

$$\tilde{g}(\omega, \theta) = K_k(g_\omega) \circ \psi_\theta.$$

Demostración. Observemos que para la función φ definida para h univalente por $\varphi(h) = h^{-1}$, se tiene $g = \varphi \circ f$ y $\tilde{g} = \varphi \circ \tilde{f}$. De donde se deduce el corolario. ■

Teorema 3.2.7. *Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Sea g el correspondiente copo de nieve conforme aleatorio. Entonces g es rotacionalmente invariante; esto es para cualquier $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ las variables aleatorias g y g_ϑ tienen la misma distribución.*

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}^*$, sea g_n la n -ésima aproximación del copo de nieve conforme aleatorio g definido por la sucesión de variables aleatorias $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$. Es decir,

$$(g_n)_\omega = K_k^n(\psi_{\theta_n(\omega)}) \circ (g_{n-1})_\omega.$$

Para $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sea $\tilde{\theta}_j$ la variable aleatoria definida como $\tilde{\theta}_j(\omega) := \theta_j(\omega) + \vartheta k^j \pmod{2\pi}$. Probaremos por inducción que $\tilde{g}_n := (g_n)_{\vartheta}$ es la n -ésima aproximación del copo de nieve conforme aleatorio definido por la sucesión de variables aleatorias $\theta_0, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$. En efecto, para $n = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_0)_\omega(z) &= ((g_0)_{\vartheta})_\omega(z); \\ &= (\psi_{\theta_0(\omega)})_{\vartheta}(z); \\ &= e^{i\vartheta} \psi_{\theta_0(\omega)}(e^{-i\vartheta} z); \\ &= \psi_{\tilde{\theta}_0(\omega)}(z). \end{aligned}$$

Suponiendo que esto es cierto para \tilde{g}_{n-1} , esto es, $e^{-i\vartheta}(\tilde{g}_{n-1})_\omega(z) = (g_{n-1})_\omega(e^{-i\vartheta}z)$, por definición de $(g_n)_\vartheta$ tenemos que

$$\begin{aligned} ((g_n)_\vartheta)_\omega(z) &= e^{i\vartheta}(g_n)_\omega(e^{-i\vartheta}z); \\ &= e^{i\vartheta}K_{k^n}(\psi_{\theta_n(\omega)})((g_{n-1})_\omega(e^{-i\vartheta}z)); \\ &= e^{i\vartheta}K_{k^n}(\psi_{\theta_n(\omega)})(e^{-i\vartheta}(\tilde{g}_{n-1})_\omega(z)); \\ &= K_{k^n}(\psi_{\tilde{\theta}_n(\omega)})(\tilde{g}_{n-1})_\omega(z); \\ &= (\tilde{g}_n)_\omega(z). \end{aligned}$$

Como las variables aleatorias $\tilde{\theta}_0, \dots, \tilde{\theta}_n$ son también independientes y uniformemente distribuidas sobre $[-\pi, \pi]$ se concluye que $\tilde{g}_n := (g_n)_\vartheta$ tiene la misma distribución de g_n . ■

Notación. Sea h una función definida en algún subconjunto D de Δ sobre Δ . Denotaremos por $\langle\langle h \rangle\rangle$ a la función definida para $z \in \Delta$ por

$$\langle\langle h \rangle\rangle(z) = \begin{cases} |h(z)|, & \text{si } z \in D; \\ 0, & \text{si } z \notin D. \end{cases}$$

Observemos que $\langle\langle h \rangle\rangle : \Delta \rightarrow [0, +\infty]$ y que si en particular si $h : (1, \infty) \subset \Delta \rightarrow (1, \infty) \subset \Delta$, entonces asumiremos

$$\langle\langle \log \circ h \rangle\rangle = \log \circ \langle\langle h \rangle\rangle.$$

Corolario 3.2.8. *La distribución de las variables aleatorias $\langle\langle g \rangle\rangle(z)$ y $\langle\langle g' \rangle\rangle(z)$ dependen solamente de $|z|$.*

3.2.1. Espectro de un copo de nieve conforme aleatorio

Para calcular el espectro universal de medias integrales, se propone el estudio de fractales aleatorios. Para una función aleatoria es más natural considerar el *espectro de medias integrales promedio* $\bar{\beta}$ en lugar del espectro de medias integrales β usual.

Definición 3.2.9 (Espectro de medias integrales promedio). *Llamaremos espectro de medias integrales promedio a la función $\bar{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida como*

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(t) &= \sup \{ \beta \in [0, +\infty) : \text{existe } R \in (1, +\infty) \text{ tal que} \\ &\quad \int_1^R (r-1)^{\beta-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left[|f'_\omega(re^{i\theta})|^t \right] d\theta dr = +\infty \} \\ &= \inf \{ \beta \in [0, +\infty) : \text{existe } R \in (1, +\infty) \text{ tal que} \\ &\quad \int_1^R (r-1)^{\beta-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left[|f'_\omega(re^{i\theta})|^t \right] d\theta dr < +\infty \}. \end{aligned}$$

Definición 3.2.10 (Clase \mathbf{L}). Denotaremos por L a la clase de funciones definidas en $(1, +\infty)$ en \mathbb{R} que son acotadas sobre todo subconjunto compacto de $(1, +\infty)$ e integrables en alguna vecindad de 1. En particular, para cualquier $R \in (1, +\infty)$ estas funciones pertenecen a $L^1([1, R])$.

En lo que sigue de este capítulo para $R, R' \in [0, +\infty)$ denotaremos por

$$A(R, R') := \{z \in \mathbb{C} : R < |z| < R'\}.$$

Lema 3.2.11. Si $R \in (1, +\infty)$ y $z \in A(1, R)$ entonces para todo $\omega \in \Omega$ se tiene

$$|f_\omega(z)| < 4Re^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}}.$$

Además, si $|z| = R$ entonces

$$e^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}} \frac{(R-1)^2}{R} \leq |f_\omega(z)| \leq e^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}} \frac{(1+R)^2}{R}.$$

y

$$e^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}} \frac{(R-1)^5}{R^2(R+1)^3} \leq |f'_\omega(z)| \leq e^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}} \frac{(1+R)^5}{R^2(R-1)^3}.$$

Demostración. Sigue del Teorema 3.1.15 y el Lema 3.2.3. \blacksquare

Notación. Para $\phi \in \Sigma''$, $k \geq 2$ un número entero y $R \in (1, +\infty)$ denotaremos por

$$R^- = e^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}} \frac{(R-1)^2}{R} \text{ y } R^+ = e^{\text{cap}(\phi)\frac{k}{k-1}} \frac{(R+1)^2}{R}.$$

Observación 11. De lo anterior se concluye que

$$A(1, R^-) \cap f_\omega(\Delta) \subset f_\omega(A(1, R)) \subset A(1, R^+) \cap f_\omega(\Delta).$$

Corolario 3.2.12. Dado $R_1 \in (1, +\infty)$. Existe $R \in (1, +\infty)$ tal que para todo $\omega \in \Omega$ y $z \in A(1, R_1) \cap f_\omega(\Delta)$ se tiene

$$1 < |g_\omega(z)| < R.$$

Demostración. Basta tomar $R \in (1, +\infty)$ tal que $R^- = R_1$. \blacksquare

Definición 3.2.13. Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Sea g el correspondiente copo de nieve conforme aleatorio. Para $t, \beta \in \mathbb{R}$ consideraremos la función $F_{t,\beta} : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F_{t,\beta}(r) := \mathbb{E} \left[\left(\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega}{g_\omega} \right\rangle \right\rangle (r) \right)^{2-t} \left(\langle \log g_\omega \rangle (r) \right)^{\beta-1} \right].$$

Lema 3.2.14. Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Sean f y g los correspondientes copos de nieve conformes aleatorios. Si $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\bar{\beta}(t) = \inf\{\beta \in [0, +\infty) : F_{t,\beta} \in L\}.$$

Demostración. Para $\beta \in [0, +\infty)$ y $R \in (1, +\infty)$ denotaremos por

$$I_{\beta,R} := \int_1^R \int_{-\pi}^{\pi} (r-1)^{\beta-1} \mathbb{E} \left[|f'_{\omega}(re^{i\theta})|^t \right] d\theta dr.$$

Cambiando variable $z = re^{i\theta}$, tenemos

$$\begin{aligned} I_{\beta,R} &= \int_{\Omega} \int_1^R \int_{-\pi}^{\pi} (r-1)^{\beta-1} |f'_{\omega}(re^{i\theta})|^t d\theta dr d\mathbb{P}(\omega); \\ &= \int_{\Omega} \int_{A(1,R)} \frac{(|z|-1)^{\beta-1} |f'_{\omega}(z)|^t}{|z|} dm(z) d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned}$$

donde m denota la medida de Lebesgue en \mathbb{C} .

Cambiando nuevamente variable $w = f_{\omega}(z)$, tenemos

$$I_{\beta,R} = \int_{\Omega} \int_{f_{\omega}(A(1,R))} \frac{|g'_{\omega}(w)|^{2-t} (|g_{\omega}(w)|-1)^{\beta-1}}{|g_{\omega}(w)|} dm(w) d\mathbb{P}(\omega).$$

Por el Lema 3.2.11 y cambiando de variable $\rho e^{i\vartheta} = w$ se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_1^{R^-} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\langle\langle g'_{\omega} \rangle\rangle (\rho e^{i\vartheta})^{2-t} (\langle\langle g_{\omega} \rangle\rangle (\rho e^{i\vartheta}) - 1)^{\beta-1} \rho}{\langle\langle g_{\omega} \rangle\rangle (\rho e^{i\vartheta})} d\vartheta d\rho d\mathbb{P}(\omega) \\ &\qquad \leq I_{\beta,R} \leq \\ &\int_{\Omega} \int_1^{R^+} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\langle\langle g'_{\omega} \rangle\rangle (\rho e^{i\vartheta})^{2-t} (\langle\langle g_{\omega} \rangle\rangle (\rho e^{i\vartheta}) - 1)^{\beta-1} \rho}{\langle\langle g_{\omega} \rangle\rangle (\rho e^{i\vartheta})} d\vartheta d\rho d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_1^{R^-} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\langle\langle (g_{-\vartheta})'_{\omega} \rangle\rangle (\rho)^{2-t} (\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho) - 1)^{\beta-1} \rho}{\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho)} d\vartheta d\rho d\mathbb{P}(\omega) \\ &\qquad \leq I_{\beta,R} \leq \\ &\int_{\Omega} \int_1^{R^+} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\langle\langle (g_{-\vartheta})'_{\omega} \rangle\rangle (\rho)^{2-t} (\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho) - 1)^{\beta-1} \rho}{\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho)} d\vartheta d\rho d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} &\int_1^{R^-} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left[\frac{\langle\langle (g_{-\vartheta})'_{\omega} \rangle\rangle (\rho)^{2-t} (\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho) - 1)^{\beta-1} \rho}{\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho)} \right] d\vartheta d\rho \\ &\qquad \leq I_{\beta,R} \leq \\ &\int_1^{R^+} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left[\frac{\langle\langle (g_{-\vartheta})'_{\omega} \rangle\rangle (\rho)^{2-t} (\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho) - 1)^{\beta-1} \rho}{\langle\langle (g_{-\vartheta})_{\omega} \rangle\rangle (\rho)} \right] d\vartheta d\rho \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.2.7, g es rotacionalmente invariante, luego

$$\begin{aligned}
 2\pi \int_1^{R^-} \mathbb{E} \left[\frac{\langle\langle g'_\omega \rangle\rangle(\rho)^{2-t} (\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho) - 1)^{\beta-1}}{\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho)} \right] d\rho &\leq \\
 \int_1^{R^-} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left[\frac{\langle\langle g'_\omega \rangle\rangle(\rho)^{2-t} (\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho) - 1)^{\beta-1}}{\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho)} \right] \rho d\vartheta d\rho & \\
 &\leq I_{\beta,R} \leq \\
 \int_1^{R^+} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left[\frac{\langle\langle g'_\omega \rangle\rangle(\rho)^{2-t} (\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho) - 1)^{\beta-1}}{\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho)} \right] \rho d\vartheta d\rho & \\
 &\leq 2\pi R^+ \int_1^{R^+} \mathbb{E} \left[\frac{\langle\langle g'_\omega \rangle\rangle(\rho)^{2-t} (\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho) - 1)^{\beta-1}}{\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho)} \right] d\rho
 \end{aligned}$$

El Corolario 3.2.12 muestra que g es uniformemente acotada en $A(1, R^-)$ y $A(1, R^+)$. Luego existe $C \in (0, +\infty)$ tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{C} \int_1^{R^-} \mathbb{E} \left[\left(\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega}{g_\omega} \right\rangle \right\rangle(\rho) \right)^{2-t} (\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho) - 1)^{\beta-1} \right] d\rho & \\
 &\leq I_{\beta,R} \leq \\
 C \int_1^{R^+} \mathbb{E} \left[\left(\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega}{g_\omega} \right\rangle \right\rangle(\rho) \right)^{2-t} (\langle\langle g_\omega \rangle\rangle(\rho) - 1)^{\beta-1} \right] d\rho &
 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log x}{x-1} = 1$, existe $C' \in (0, +\infty)$ tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{C'} \int_1^{R^-} F_{t,\beta}(\rho) d\rho &= \frac{1}{C'} \int_1^{R^-} \mathbb{E} \left[\left(\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega}{g_\omega} \right\rangle \right\rangle(\rho) \right)^{2-t} (\langle\langle \log g_\omega \rangle\rangle(\rho))^{\beta-1} \right] d\rho \\
 &\leq I_{\beta,R} \leq \\
 C' \int_1^{R^+} \mathbb{E} \left[\left(\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega}{g_\omega} \right\rangle \right\rangle(\rho) \right)^{2-t} (\langle\langle \log g_\omega \rangle\rangle(\rho))^{\beta-1} \right] d\rho &= C' \int_1^{R^+} F_{t,\beta}(\rho) d\rho.
 \end{aligned}$$

Finalmente sea $\beta \in [0, +\infty)$ tal que existe $R \in (1, +\infty)$ con $I_{\beta,R} < +\infty$. Entonces por lo anterior para R^- y $C' \in (0, +\infty)$ se tiene

$$\frac{1}{C'} \int_1^{R^-} F_{t,\beta}(\rho) d\rho \leq I_{\beta,R} < +\infty.$$

Como $\beta \in [0, +\infty)$ es arbitrario tenemos

$$\inf\{\beta \in [0, +\infty) : F_{t,\beta} \in \mathbb{L}\} \leq \bar{\beta}(t).$$

Por otro lado si $\beta \in [0, +\infty)$ es tal que $F_{t,\beta} \in \mathbb{L}$, luego existe $R \in (1, +\infty)$ con $\int_1^R F_{t,\beta}(\rho) d\rho < +\infty$. Tomando $R' \in (1, +\infty)$ tal que $R'^+ = R$ por lo anterior

para $C' \in (0, +\infty)$ se tiene

$$I_{\beta, R'} \leq C' \int_1^R F_{t, \beta}(\rho) d\rho < +\infty.$$

Luego por definición $\bar{\beta}(t) \leq \beta$ y como $\beta \in [0, +\infty)$ es arbitrario se tiene

$$\bar{\beta}(t) \leq \inf\{\beta \in [0, +\infty) : F_{t, \beta} \in \mathbf{L}\}.$$

■

Lema 3.2.15. *Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Sea g el correspondiente copo de nieve conforme aleatorio. Dados $t, \beta \in \mathbb{R}$, si $F_{t, \beta} \in \mathbf{L}$ entonces $F_{t, \beta}$ es solución de la siguiente ecuación:*

$$F_{t, \beta}(r) = \frac{1}{k^{\beta-1}} \int_{-\pi}^{\pi} F_{t, \beta}(\langle\langle \psi^k \rangle\rangle(re^{i\theta})) \langle\langle \psi^{k-1} \psi' \rangle\rangle(re^{i\theta})^{2-t} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (3.5)$$

Demostración. Por el Corolario 3.2.6 las funciones aleatorias g y $K_k(g) \circ \psi_\theta$ tienen la misma distribución, luego

$$\begin{aligned} F_{t, \beta}(r) &= \mathbb{E} \left[\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega}{g_\omega} \right\rangle \right\rangle (r)^{2-t} (\langle\langle \log g_\omega \rangle\rangle(r))^{\beta-1} \right]; \\ &= \mathbb{E} \left[\left\langle \left\langle \frac{(K_k(g) \circ \psi_\theta)'_\omega}{(K_k(g) \circ \psi_\theta)_\omega} \right\rangle \right\rangle (r)^{2-t} (\langle\langle \log (K_k(g) \circ \psi_\theta)_\omega \rangle\rangle(r))^{\beta-1} \right]; \\ &= \mathbb{E} \left[\left\langle \left\langle \frac{g'_\omega \circ \psi_\theta^k}{g_\omega \circ \psi_\theta^k} \right\rangle \right\rangle (r)^{2-t} (\langle\langle \log (g_\omega \circ \psi_\theta^k) \rangle\rangle(r))^{\beta-1} \frac{\langle\langle \psi_\theta^{k-1} \psi'_\theta \rangle\rangle(r)^{2-t}}{k^{\beta-1}} \right]. \end{aligned}$$

donde θ tiene distribución uniforme. La esperanza es la integral con respecto a la distribución conjunta de g y θ . Como estas son independientes esta distribución conjunta es la medida producto. Por lo tanto podemos escribir la última integral como una integral doble primero tomando la esperanza con respecto a la distribución de g y luego con respecto a la distribución uniforme de θ . De aquí

$$\begin{aligned} F_{t, \beta}(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Sigma''} \left\langle \left\langle \frac{g' \circ \psi_\theta^k}{g \circ \psi_\theta^k} \right\rangle \right\rangle (r)^{2-t} (\langle\langle \log(g \circ \psi_\theta^k) \rangle\rangle(r))^{\beta-1} \\ &\quad \frac{\langle\langle \psi_\theta^{k-1} \psi' \rangle\rangle(r)^{2-t}}{k^{\beta-1}} d\mu(g) \frac{d\theta}{2\pi}; \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\Sigma''} \left\langle \left\langle \frac{g' \circ \psi_\theta^k}{g \circ \psi_\theta^k} \right\rangle \right\rangle (r)^{2-t} (\langle\langle \log(g \circ \psi_\theta^k) \rangle\rangle(r))^{\beta-1} d\mu(g) \right) \\ &\quad \frac{\langle\langle \psi_\theta^{k-1} \psi' \rangle\rangle(r)^{2-t}}{k^{\beta-1}} \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Notemos que la integral entre paréntesis por definición de la función $F_{t,\beta}$, es igual a $F_{t,\beta}(\langle\langle\psi_\theta^k\rangle\rangle(r)) = F_{t,\beta}(\langle\langle\psi^k\rangle\rangle(re^{-i\theta}))$ luego

$$\begin{aligned} F_{t,\beta}(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} F_{t,\beta}(\langle\langle\psi^k\rangle\rangle(re^{-i\theta})) \frac{\langle\langle\psi^{k-1}\psi'\rangle\rangle(re^{-i\theta})^{2-t}}{k^{\beta-1}} \frac{d\theta}{2\pi}; \\ &= \frac{1}{k^{\beta-1}} \int_{-\pi}^{\pi} F_{t,\beta}(\langle\langle\psi^k\rangle\rangle(re^{i\theta})) \langle\langle\psi^{k-1}\psi'\rangle\rangle(re^{i\theta})^{2-t} \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

■

La ecuación (3.5) nos permite intuitivamente definir un operador integral. De aquí, el problema de encontrar el espectro de medias integrales promedio de un copo de nieve conforme aleatorio se reduce a la pregunta sobre el valor propio de un operador integral.

Definición 3.2.16 (Operador Q_t). *Dado $t \in \mathbb{R}$ definiremos el operador Q_t como sigue:*

$$h \mapsto Q_t(h)(r) = k \int_{-\pi}^{\pi} h(\langle\langle\psi^k\rangle\rangle(re^{i\theta})) \langle\langle\psi^{k-1}\psi'\rangle\rangle(re^{i\theta})^{2-t} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Observemos que para $t, \beta \in \mathbb{R}$ y $F_{t,\beta} \in \mathbf{L}$ podemos reescribir (3.5):

$$k^\beta F_{t,\beta} = Q_t(F_{t,\beta}). \quad (3.6)$$

3.2.2. Operador adjunto del operador Q_t

En lo que sigue encontraremos formalmente el operador adjunto de Q_t .

Lema 3.2.17. *Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $k \geq 2$ un número entero. Entonces existe $R \in (1, +\infty)$ tal que*

$$A(1, R^{\frac{1}{k}}) \subset \psi(A(1, R) \cap \phi(\Delta)).$$

Demostración. Por el Teorema 3.1.15 para cualquier $R \in (1, +\infty)$ y $z \in A(1, R^{\frac{1}{k}})$ se tiene

$$1 < |\phi(z)| \leq 4R^{\frac{1}{k}} e^{\text{cap}(\phi)}.$$

Fijemos $R \in (1, +\infty)$ suficientemente grande tal que $R^{1-\frac{1}{k}} > 4e^{\text{cap}(\phi)}$, luego para cada $z \in A(1, R^{\frac{1}{k}})$ tenemos

$$1 < |\phi(z)| \leq 4R^{\frac{1}{k}} e^{\text{cap}(\phi)} < R.$$

Observemos que esto, es equivalente a $\phi(A(1, R^{\frac{1}{k}})) \subset A(1, R) \cap \phi(\Delta)$. De donde se concluye el resultado. ■

Observación 12. Notemos que la conclusión del lema anterior, implica

$$A(1, R) \subset \psi^k(A(1, R) \cap \phi(\Delta)).$$

Definición 3.2.18 (Operador P_t). Sea $\phi \in \Sigma''$, $k \geq 2$ un número entero y $t \in \mathbb{R}$. Definiremos el operador P_t como sigue:

$$\nu \mapsto P_t(\nu)(r) := r^{1-\frac{(k-1)t}{k}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\nu\left(\left|\phi\left(r^{\frac{1}{k}}e^{i\theta}\right)\right|\right)}{\left|\phi\left(r^{\frac{1}{k}}e^{i\theta}\right)\right|} \left|\phi'\left(r^{\frac{1}{k}}e^{i\theta}\right)\right|^t \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Lema 3.2.19. Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ , $k \geq 2$ un número entero y $t \in \mathbb{R}$. Entonces para toda $\nu : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ función test acotada se tiene

$$\int_1^{\infty} Q_t(h)(r)\nu(r) dr = \int_1^{\infty} h(r) P_t(\nu)(r) dr. \quad (3.8)$$

Por lo tanto P_t y Q_t son formalmente operadores adjuntos.

Demostración. Sea $\nu : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función test acotada y $R \in (1, +\infty)$ tal que $A(1, R^{\frac{1}{k}}) \subset \psi(A(1, R) \cap \phi(\Delta))$, dado por el Lema 3.2.17. Luego por la Definición 3.2.16, tenemos

$$\int_1^R Q_t(h)(r)\nu(r) dr = \int_1^R \nu(r) k \int_{-\pi}^{\pi} h(\langle\langle\psi^k\rangle\rangle(re^{i\theta})) \langle\langle\psi^{k-1}\psi'\rangle\rangle(re^{i\theta})^{2-t} \frac{d\theta}{2\pi} dr.$$

Cambiando variable $z = re^{i\theta}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^R Q_t h(r)\nu(r) dr &= \int_{A(1,R)} \frac{\nu(|z|)}{|z|} \frac{k}{2\pi} h(\langle\langle\psi^k\rangle\rangle(z)) \langle\langle\psi^{k-1}\psi'\rangle\rangle(z)^{2-t} dm(z); \\ &= \int_{A(1,R) \cap \phi(\Delta)} \frac{\nu(|z|)}{|z|} \frac{k}{2\pi} h(|\psi(z)|^k) |\psi(z)^{k-1}\psi'(z)|^{2-t} dm(z). \end{aligned}$$

Cambiando variable $\rho e^{i\vartheta} = w = \psi(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} &\int_1^R Q_t(h)(r)\nu(r) dr \\ &= \int_{\psi(A(1,R) \cap \phi(\Delta))} \frac{\nu(|\phi(w)|)}{|\phi(w)|} \frac{k}{2\pi} h(|w^k|) |\phi'(w)|^t |w^{(k-1)(2-t)}| dm(w); \\ &\geq \int_1^{R^{1/k}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\nu(|\phi(\rho e^{i\vartheta})|)}{|\phi(\rho e^{i\vartheta})|} \frac{k}{2\pi} h(\rho^k) \rho^{(k-1)(2-t)+1} |\phi'(\rho e^{i\vartheta})|^t d\vartheta d\rho. \end{aligned}$$

Cambiando variable $u = \rho^k$, tenemos

$$\begin{aligned} &\int_1^R Q_t(h)(r)\nu(r) dr \\ &\geq \int_1^R h(u) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\nu\left(\left|\phi\left(u^{\frac{1}{k}}e^{i\vartheta}\right)\right|\right)}{\left|\phi\left(u^{\frac{1}{k}}e^{i\vartheta}\right)\right|} \left|\phi'\left(u^{\frac{1}{k}}e^{i\vartheta}\right)\right|^t \frac{u^{\frac{(k-1)(2-t)+1}{k}}}{u^{\frac{k-1}{k}}} \frac{d\vartheta}{2\pi} du; \\ &= \int_1^R h(u) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\nu\left(\left|\phi\left(u^{\frac{1}{k}}e^{i\vartheta}\right)\right|\right)}{\left|\phi\left(u^{\frac{1}{k}}e^{i\vartheta}\right)\right|} \left|\phi'\left(u^{\frac{1}{k}}e^{i\vartheta}\right)\right|^t u^{1-\frac{(k-1)}{k}t} \frac{d\vartheta}{2\pi} du. \end{aligned}$$

Por la Definición 3.2.18 podemos reescribir lo anterior,

$$\int_1^R Q_t(h)(r)\nu(r) dr \geq \int_1^R h(r) P_t(\nu)(r) dr. \quad (3.9)$$

Notemos que para $R = +\infty$, como $\psi^k(\Delta \cap \phi(\Delta))$ cubre exactamente k veces Δ . En este caso se tiene que (3.9) es una igualdad, luego

$$\int_1^\infty Q_t(h)(r)\nu(r) dr = \int_1^\infty h(r) P_t(\nu)(r) dr. \quad (3.10)$$

Por lo tanto P_t y Q_t son formalmente operadores adjuntos. ■

Lema 3.2.20. *Sea $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ y $t \in \mathbb{R}$. Si existe $C \in (0, +\infty)$ tal que para todo $r \in (1, +\infty)$ se tiene $\int_{-\pi}^\pi |\phi'(re^{i\theta})|^t \frac{d\theta}{2\pi} < C$, entonces el operador Q_t actúa en L .*

Demostración. Dado $h \in L$, primero veamos que $Q_t(h)$ es acotada en todo subconjunto compacto de $(1, +\infty)$. En efecto dado un compacto K de $(1, +\infty)$, notemos que por continuidad las funciones ψ y ψ' son acotadas en el subconjunto compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \in K\}$ de Δ . Luego como h es acotada en el compacto $\{|\psi(re^{i\theta})|^k : r \in K\}$ de $(1, +\infty)$ la función $Q_t(h)$ es acotada en K .

Por otro lado, sea $R \in (1, +\infty)$ tal que $\int_1^R h(r) dr < +\infty$. Si $r \in (1, R)$, entonces para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ se tiene

$$\frac{r^{1-\frac{(k-1)t}{k}}}{\left|\phi\left(r^{\frac{1}{k}}e^{i\theta}\right)\right|} < \max\left\{1, R^{1-\frac{(k-1)t}{k}}\right\}.$$

Luego reemplazando $\nu \equiv \mathbf{1}_{(1,R)}$ en (3.9) tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^R Q_t(h)(r) dr &= \int_1^R h(r) \int_{-\pi}^\pi \frac{r^{1-\frac{(k-1)t}{k}}}{\left|\phi\left(r^{\frac{1}{k}}e^{i\theta}\right)\right|} \left|\phi'\left(r^{\frac{1}{k}}e^{i\theta}\right)\right|^t \frac{d\theta}{2\pi} dr; \\ &< C \max\left\{1, R^{1-\frac{(k-1)t}{k}}\right\} \int_1^R h(r) dr < +\infty. \end{aligned}$$

■

Observación 13. Para $\phi \in \Sigma''$ y $t \in \mathbb{R}$, la condición sobre $\int_{-\pi}^\pi |\phi'(re^{i\theta})|^t d\theta$, en el lema anterior, es mas fuerte que $\beta_\phi(t) = 0$. Nosotros nos restringiremos a bloques de construcción que son suaves en la frontera de Δ , para tales bloques esta suposición es siempre valida.

En el siguiente lema discutiremos que los autovalores de los operadores Q_t y P_t están relacionados al espectro de medias integral promedio de un copo de nieve conforme aleatorio.

Lema 3.2.21. Sean $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ , $k \geq 2$ un número entero y $t \in \mathbb{R}$. Si $R \in (1, +\infty)$ es tal que $A(1, R^{\frac{1}{k}}) \subset \psi(A(1, R) \cap \phi(\Delta))$ entonces para cualquier función test positiva ν se tiene

$$\bar{\beta}(t) \geq \min_{r \in (1, R)} \frac{\log \left(\frac{P_t(\nu)(r)}{\nu(r)} \right)}{\log k}.$$

Demostración. Sea $\beta \in [0, +\infty)$ tal que $F_{t, \beta} \in \mathbf{L}$. Sabemos que $F_{t, \beta}$ satisface la ecuación (3.6) y por (3.9) para cualquier función test $\nu : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tenemos

$$\int_1^R F_{t, \beta}(r) \nu(r) dr = \int_1^R \frac{Q_t(F_{t, \beta})(r)}{k^\beta} \nu(r) dr \geq \int_1^R F_{t, \beta}(r) \nu(r) \frac{P_t(\nu)(r)}{k^\beta \nu(r)} dr.$$

En particular si consideramos ν una función test positiva y suponemos que para cualquier $r \in (1, R)$ se cumple $P_t(\nu)(r) > k^\beta \nu(r)$ tenemos una contradicción pues

$$\int_1^R F_{t, \beta}(r) \nu(r) dr \geq \int_1^R F_{t, \beta}(r) \nu(r) \frac{P_t(\nu)(r)}{k^\beta \nu(r)} dr > \int_1^R F_{t, \beta}(r) \nu(r) dr.$$

Entonces para cualquier función test positiva ν existe $r_0 \in (1, R)$ tal que $P_t(\nu)(r_0) \leq k^\beta \nu(r_0)$. Como $\beta \in [0, +\infty)$ tal que $F_{t, \beta} \in \mathbf{L}$ es arbitrario, por el Lema 3.2.14 se tiene

$$\bar{\beta}(t) \geq \min_{r \in (1, R)} \frac{\log \left(\frac{P_t(\nu)(r)}{\nu(r)} \right)}{\log k}.$$

■

Corolario 3.2.22. Sean $\phi \in \Sigma''$ con inversa ψ , $k \geq 2$ un número entero y $t \in \mathbb{R}$. Si $R \in (1, +\infty)$ es tal que $A(1, R^{\frac{1}{k}}) \subset \psi(A(1, R) \cap \phi(\Delta))$, entonces para λ el mayor autovalor del operador P_t en $[1, R]$ se tiene

$$\bar{\beta}(t) \geq \frac{\log \lambda}{\log k}.$$

3.3. Aproximación fractal

En esta sección probaremos la aproximación fractal por copos de nieve conformes aleatorios. Mas específicamente probaremos que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se puede construir un copo de nieve conforme aleatorio con bloque de construcción $\phi \in \Sigma''$ y suave en la frontera de Δ y $k \geq 2$ un número entero positivo, tal que $\bar{\beta}(t)$ esta arbitrariamente cerca del espectro universal de medias integrales $B(t)$. Formalmente

Teorema Principal 1. Para todo $\epsilon \in (0, +\infty)$ y $t \in \mathbb{R}$ existe un bloque de construcción $\phi \in \Sigma'' \cap C^\infty(\bar{\Delta})$ y $k \geq 2$ un número entero que definen un copo de nieve conforme aleatorio tal que $\bar{\beta}(t) > B(t) - \epsilon$.

Demostraremos este teorema mas adelante

Lema 3.3.1. Sea $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica. Entonces la función definida para $r \in (1, +\infty)$ como

$$r \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta,$$

es decreciente en r .

Corolario 3.3.2. Sea $\phi \in \Sigma''$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces la función definida para $r \in (1, +\infty)$ como

$$r \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} |\phi'(re^{i\theta})|^t d\theta,$$

es decreciente en r .

Demostración. Basta notar que para una función holomorfa ϕ definida en Δ la función

$$z \mapsto |\phi'(z)|^t,$$

es una función subarmónica en Δ .

Lema 3.3.3. Para cualquier $\epsilon \in (0, +\infty)$ y $t \in \mathbb{R}$ existen constantes $A := A(\epsilon, t) \in (0, +\infty)$ y $C := C(\epsilon, t) \in (0, +\infty)$ tal que para cualquier $\delta \in (0, +\infty)$ existe una función $\phi \in \Sigma'' \cap C^\infty(\overline{\Delta})$ tal que $\text{cap}(\phi) < C$ y para todo $r \in (1, 1+\delta)$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi'(re^{i\theta})|^t d\theta > A \left(\frac{1}{\delta}\right)^{B(t)-\epsilon}.$$

Demostración. Dado $\epsilon \in (0, +\infty)$ existe una función $\tilde{\phi} \in \mathbf{H}(\Delta)$ tal que $\beta_{\tilde{\phi}}(t) \geq B(t) - \frac{\epsilon}{2}$. De aquí existe una sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $r_n \rightarrow 1^+$ cuando $n \rightarrow +\infty$, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\phi}'(r_n e^{i\theta})|^t d\theta > (r_n - 1)^{-B(t)+\epsilon}.$$

Luego, por el Corolario 3.3.2, existe una constante $A \in (0, +\infty)$ tal que para todo $r \in (1, +\infty)$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\phi}'(re^{i\theta})|^t d\theta > 2A(r-1)^{-B(t)+\epsilon}.$$

El problema es que la función $\tilde{\phi}$ no es necesariamente suave hasta la frontera de Δ . Para $s \in (1, 2)$ consideremos la función definida en Δ por $\phi_s(z) = \tilde{\phi}(sz)$, es claro que $\phi_s \rightarrow \tilde{\phi}$ en $\mathbf{H}(\Delta)$ cuando $s \rightarrow 1^+$. Dado $\delta \in (0, +\infty)$, existe $s \in (1, 2)$ suficientemente cerca de 1 tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi'_s((1+\delta)e^{i\theta})|^t d\theta > A\delta^{-B(t)+\epsilon}.$$

Para el caso de $r \in (1, 1 + \delta)$, por el Lema 3.3.2, se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi'_s(re^{i\theta})|^t d\theta > \int_{-\pi}^{\pi} |\phi'_s((1 + \delta)e^{i\theta})|^t d\theta > A\delta^{-B(t)+\epsilon}.$$

Por otro lado notemos que para $s \in (1, 2)$ se tiene

$$\text{cap}(\phi_s) = \log s + \text{cap}(\tilde{\phi}) \leq \log 2 + \text{cap}(\tilde{\phi}).$$

■

Lema 3.3.4. *Sea $\phi \in \Sigma''$, $k \geq 2$ un número entero y f el correspondiente copo de nieve conforme aleatorio. Para $n \in \mathbb{N}^*$ sea f_n la n -ésima aproximación del copo de nieve conforme aleatorio f . Entonces para $z \in \Delta$ con $z^k \in A(1, 2)$ se tiene*

$$|K_k(f_n)(z)| < 1 + 3e^{\text{cap}(\phi)} \frac{\log(8e^{2\text{cap}(\phi)})}{k}.$$

Demostración. Observemos que por el Lema 3.2.3 se tiene

$$\text{cap}(f_n) \leq \text{cap}(f) = \text{cap}(\phi) \frac{k}{k-1} \leq 2 \text{cap}(\phi).$$

Luego por el Teorema 3.1.15 el número $X = |f_n(z^k)| \in (1, 8e^{2\text{cap}(\phi)})$. Además

$$\begin{aligned} |K_k(f_n)(z)| - 1 &= X^{\frac{1}{k}} - 1; \\ &= \frac{1}{k} \int_1^X \frac{x^{\frac{1}{k}}}{x} dx; \\ &\leq \frac{1}{k} X^{\frac{1}{k}} \int_1^X \frac{1}{x} dx; \\ &= \frac{1}{k} X^{\frac{1}{k}} \log X; \\ &\leq \frac{1}{k} X^{\frac{1}{2}} \log X; \\ &\leq 3e^{\text{cap}(\phi)} \frac{\log(8e^{2\text{cap}(\phi)})}{k}. \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema Principal 1. Dado $\epsilon \in (0, +\infty)$ y $t \in \mathbb{R}$ consideremos las constantes $A := A(\epsilon, t) \in (0, +\infty)$ y $C = C(\epsilon, t) \in (0, +\infty)$ del Lema 3.3.3. Fijemos $l \geq 2$ un número entero y sea $\delta = \frac{3e^C \log(8e^{2C})}{l} \in (0, +\infty)$. Por el Lema 3.3.3 existe un bloque de construcción $\phi \in \Sigma'' \cap C^\infty(\bar{\Delta})$ tal que $\text{cap}(\phi) < C$ y para todo $r \in (1, 1 + \delta)$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi'(re^{i\theta})|^t d\theta > A \left(\frac{1}{\delta}\right)^{B(t)-\epsilon}. \quad (3.11)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $f_n^{(l)}$ a la n -ésima aproximación del copo de nieve conforme aleatorio $f^{(l)}$ con bloque de construcción ϕ y número entero l . Dado $\gamma \in (0, +\infty)$, denotaremos también por $I(f^{(l)}, \gamma)$ a la variable aleatoria definida para $\omega \in \Omega$ por

$$I(f^{(l)}, \gamma)(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(f_{\omega}^{(l)} \right)' \left(\exp(\gamma) e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\vartheta.$$

Observemos que para la l -ésima transformada de Koebe de $f^{(l)}$ y $\omega \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} I\left(K_l(f^{(l)}), \frac{\gamma}{l}\right)(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| K_l(f^{(l)})'_{\omega} \left(\exp\left(\frac{\gamma}{l}\right) e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\vartheta; \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\left(f_{\omega}^{(l)} \right)' \left(\exp(\gamma) e^{il\vartheta} \right)}{f_{\omega}^{(l)} \left(\exp(\gamma) e^{il\vartheta} \right)^{\frac{l-1}{l}}} \right|^t \exp\left(\frac{\gamma}{l}\right)^{t(l-1)} d\vartheta \end{aligned}$$

Luego por el Lema 3.2.11, para

$$D := D(C, \gamma) := \min\{1, 4e^{2Ct}\}$$

se tiene

$$\begin{aligned} I\left(K_l(f^{(l)}), \frac{\gamma}{l}\right)(\omega) &\geq D \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(f_{\omega}^{(l)} \right)' \left(\exp(\gamma) e^{il\vartheta} \right) \right|^t d\vartheta; \\ &= D \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(f_{\omega}^{(l)} \right)' \left(\exp(\gamma) e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\vartheta; \\ &= DI(f^{(l)}, \gamma)(\omega). \end{aligned}$$

Observemos que para $n \in \mathbb{N}^*$, como en el Teorema 3.2.5 la función aleatoria $f_{n+1}^{(l)}$ es una composición de las funciones aleatorias ϕ_{θ} con $K_l(f_n^{(l)})$. Luego la esperanza de la variable aleatoria $I\left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}}\right)$ condicionada por $f_n^{(l)}$ es

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[I\left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}}\right) \middle| f_n^{(l)} \right] &= \int_{-\pi}^{\pi} I\left(\phi_{\theta} \circ K_l\left(f_n^{(l)}\right), \frac{1}{l^{n+1}}\right) d\theta; \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\phi_{\theta} \circ K_l\left(f_n^{(l)}\right) \right)' \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\vartheta d\theta; \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \phi'_{\theta} \left(K_l\left(f_n^{(l)}\right) \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right) \right|^t \left| K_l\left(f_n^{(l)}\right)' \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\vartheta d\theta; \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| K_l\left(f_n^{(l)}\right)' \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right|^t \int_{-\pi}^{\pi} \left| \phi' \left(e^{-i\theta} K_l\left(f_n^{(l)}\right) \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right) \right|^t d\theta d\vartheta. \end{aligned}$$

Como $\exp\left(\frac{1}{l^n}\right) e^{i\vartheta} \in A(1, 2)$, por el Lema 3.3.4 se tiene

$$\left| K_l(f_n^{(l)}) \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right| < 1 + 3e^{\text{cap}(\phi)} \frac{\log(8e^{2\text{cap}(\phi)})}{l} < 1 + 3e^C \frac{\log(8e^{2C})}{l} = 1 + \delta.$$

Luego por (3.11) se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \phi' \left(\left| K_l(f_n^{(l)}) \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right| e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\theta > A \left(\frac{l}{3e^C \log(8e^{2C})} \right)^{B(t)-\epsilon}.$$

Sea $c = 3e^C \log(8e^{2C})$. Por lo anterior para $\omega \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \middle| f_n^{(l)} \right] &> A \left(\frac{l}{c} \right)^{B(t)-\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \left| K_l(f_n^{(l)})' \left(\exp\left(\frac{1}{l^{n+1}}\right) e^{i\vartheta} \right) \right|^t d\theta; \\ &= A \left(\frac{l}{c} \right)^{B(t)-\epsilon} I \left(K_l(f_n^{(l)}), \frac{1}{l^{n+1}} \right) (\omega); \\ &> AD \left(\frac{l}{c} \right)^{B(t)-\epsilon} I \left(f_n^{(l)}, \frac{1}{l^n} \right) (\omega). \end{aligned}$$

Observemos que $\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \middle| f_n^{(l)} \right] \right] = \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \right]$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \middle| f_n^{(l)} \right] \right]; \\ &> AD \left(\frac{l}{c} \right)^{B(t)-\epsilon} \mathbb{E} \left[I \left(f_n^{(l)}, \frac{1}{l^n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad anterior $n + 1$ veces tenemos

$$\mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \right] > (AD)^{n+1} \left(\frac{l}{c} \right)^{(n+1)(B(t)-\epsilon)}.$$

De donde,

$$\frac{\log \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}^{(l)}, \frac{1}{l^{n+1}} \right) \right]}{(n+1) \log l} > \frac{\log(AD) - (B(t) - \epsilon) \log c}{\log l} + B(t) - \epsilon.$$

Luego si $k \geq 2$ es un número entero tal que

$$\frac{\log(AD) - (B(t) - \epsilon) \log c}{\log k} > -\epsilon, \quad \left(\text{equivalentemente } \frac{\log(AD) - B(t) \log c}{\log(ck)} > -\epsilon \right);$$

tenemos

$$\frac{\log \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}, \frac{1}{k^{n+1}} \right) \right]}{(n+1) \log k} > B(t) - 2\epsilon,$$

donde f_n es la n -ésima aproximación del copo de nieve conforme aleatorio f con bloque de construcción ϕ y k . De donde finalmente se obtiene

$$\frac{\log \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}, \frac{1}{k^{n+1}} \right) \right]}{-\log \left(e^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \right)} > \frac{\log \mathbb{E} \left[I \left(f_{n+1}, \frac{1}{k^{n+1}} \right) \right]}{-\log \frac{1}{k^{n+1}}} > B(t) - 2\epsilon.$$

Tendiendo n a infinito se obtiene el resultado. ■

Apéndice A:

MEDIDA EXTERIOR MÉTRICA

Definición A.0.5 (Medida exterior métrica). Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que la función $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida exterior sobre X si satisface:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Si $A \subset B \subset X$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonía);
3. para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X , se cumple

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-subaditividad}).$$

Además si para todo par A, B de subconjunto de X con $d(A, B) > 0$ se tiene

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$$

diremos que μ es una medida exterior métrica

Definición A.0.6 (Conjunto μ -medible). Sea μ una medida exterior sobre X . Diremos que E subconjunto de X es μ -medible si para todo A subconjunto de X se cumple

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

Observación 14. Sea A subconjunto de X , notemos que $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$. Luego por la σ -subaditividad tenemos

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

Por lo tanto para que E subconjunto de X sea μ -medible nos basta probar para todo A subconjunto de X

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

Teorema A.0.7. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una medida exterior. Entonces μ es una medida exterior métrica si y solo si todo subconjunto abierto en X es μ -medible.*

Para la demostrar del teorema, usaremos el siguiente lema.

Lema A.0.8. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una medida exterior métrica. Sean U subconjunto abierto de X y E subconjunto de U . Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n := \left\{ x \in E : d(x, U^c) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n)$.

Demostración. Notemos que $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en X , es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $E_n \subset E_{n+1}$. Además para $x \in E$, como U es abierto, tenemos $d(x, U^c) > 0$. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, U^c) \geq \frac{1}{n_0}$, luego $x \in E_{n_0}$ y por tanto $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Probaremos primero que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \leq \mu(E)$.

Como $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente por monotonía tenemos que $\{\mu(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $\overline{\mathbb{R}}$ y por tanto convergente en $\overline{\mathbb{R}}_+$. Además como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $E_n \subset E$ concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \leq \mu(E). \tag{A.1}$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = +\infty$ por (A.1) tenemos $\mu(E) = +\infty$ y se cumpliría el lema.

Supongamos entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) < +\infty$. Si ponemos $E_0 = \emptyset$ y para $n \in \mathbb{N}$

consideramos $D_n = E_n \setminus E_{n-1}$ entonces $E_n = \bigcup_{k=1}^n D_k$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$.

Probemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $d(D_{n+2}, D_n) > 0$.

En efecto, sea $x \in D_{n+2}$ e $y \in D_n$ luego,

$$\frac{1}{n+2} \leq d(x, U^c) < \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n} \leq d(y, U^c) < \frac{1}{n-1}.$$

Sea $z \in U^c$ por desigualdad triangular tenemos

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y);$$

tomando ínfimo sobre $z \in U^c$,

$$d(y, U^c) \leq d(x, U^c) + d(x, y).$$

Así

$$d(x, y) \geq d(y, U^c) - d(x, U^c) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Luego tomando ínfimo sobre $x \in D_{n+2}$ e $y \in D_n$, obtenemos

$$d(D_{n+2}, D_n) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0. \quad (\text{A.2})$$

Como μ es una medida exterior métrica por (A.2) tenemos,

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^n D_{2k} \right) = \sum_{k=1}^n \mu(D_{2k}) \quad \text{y} \quad \mu \left(\bigcup_{k=1}^n D_{2k-1} \right) = \sum_{k=1}^n \mu(D_{2k-1}).$$

Por monotonía $\mu(E_{2n}) \geq \sum_{k=1}^n \mu(D_{2k})$ y $\mu(E_{2n-1}) \geq \sum_{k=1}^n \mu(D_{2k-1})$.

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_{2k}) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_{2k-1});$$

y por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) < +\infty$.

Notemos ahora que $E \setminus E_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} D_k$. Luego por σ -subaditividad tenemos

$$\mu(E \setminus E_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Si tomamos límite sobre n , considerando que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) < +\infty$ tenemos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E \setminus E_n) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Finalmente como para $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\mu(E) \leq \mu(E_n) + \mu(E \setminus E_n)$, y por (A.3)

$$\mu(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \quad (\text{A.4})$$

Demostremos el lema por las desigualdades (A.1) y (A.4). ■

Demostración del Teorema A.0.7. Probemos primero que: Si μ es una medida exterior métrica entonces todo subconjunto abierto U es μ -medible.

Sean A subconjunto de X un conjunto cualquiera y U un subconjunto abierto de X . Consideremos $E = A \cap U$, y para $n \in \mathbb{N}$ sea E_n como en el lema anterior. Notemos que $d(E_n, A \cap U^c) > 0$, y por tanto

$$\mu(E_n \cup (A \cap U^c)) = \mu(E_n) + \mu(A \cap U^c).$$

Luego, considerando que $E_n \cup (A \cap U^c) \subset A$, tenemos

$$\mu(A) \geq \mu(E_n) + \mu(A \cap U^c);$$

Luego, por el lema anterior,

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c).$$

Luego, por la Observación 14, U es un conjunto μ -medible de X .

Probemos ahora que: Si todo subconjunto abierto de X es μ -medible, entonces μ es una medida exterior métrica.

Sean E, F subconjunto de X tales que $d(E, F) = \epsilon > 0$. Luego considerando por ejemplo $U = \bigcup_{x \in E} B(x, \epsilon/2)$, tenemos $E \subset U$ y $U \cap F = \emptyset$. Como U es μ -medible, tomando $E \cup F$ en la definición, obtenemos

$$\mu(E \cup F) = \mu((E \cup F) \cap U) + \mu((E \cup F) \cap U^c).$$

Si notamos que $(E \cup F) \cap U = E$, y que $(E \cup F) \cap U^c = F$, concluimos que

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Luego μ es medida exterior métrica. ■

Corolario A.0.9. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una medida exterior métrica. Entonces todos los conjuntos borelianos son μ -medibles.*

Demostración. Los conjuntos μ -medibles forman una σ -álgebra, que por el teorema anterior contiene a todos los abiertos. Concluimos que todo conjunto boreliano es medible, pues la σ -álgebra de los conjuntos borelianos es la menor σ -álgebra que contiene a los conjuntos abiertos. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [Bel05] D. Beliaev. *Harmonic measure on random fractals*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, 2005.
- [Bel08] D. Beliaev. Integral means spectrum of random conformal snowflakes. *Nonlinearity*, 21(7):1435–1442, 2008.
- [Bre78] James E. Brennan. The integrability of the derivative in conformal mapping. *J. London Math. Soc. (2)*, 18(2):261–272, 1978.
- [BS05] D. Beliaev and S. Smirnov. Harmonic measure on fractal sets. In *European Congress of Mathematics*, pages 41–59. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.
- [BS10] Dmitri Beliaev and Stanislav Smirnov. Random conformal snowflakes. *Ann. of Math. (2)*, 172(1):597–615, 2010.
- [CJ92] Lennart Carleson and Peter W. Jones. On coefficient problems for univalent functions and conformal dimension. *Duke Math. J.*, 66(2):169–206, 1992.
- [Con78] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.
- [dB85] Louis de Branges. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154(1-2):137–152, 1985.
- [Dur83] Peter L. Duren. *Univalent functions*, volume 259 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Fal03] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2003. Mathematical foundations and applications.

-
- [GKR07] Jane P. Gilman, Irwin Kra, and Rubí E. Rodríguez. *Complex analysis*, volume 245 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007. In the spirit of Lipman Bers.
- [HJK⁺86] Thomas C. Halsey, Mogens H. Jensen, Leo P. Kadanoff, Itamar Procaccia, and Boris I. Shraiman. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A* (3), 33(2):1141–1151, 1986.
- [HS05] Håkan Hedenmalm and Serguei Shimorin. Weighted Bergman spaces and the integral means spectrum of conformal mappings. *Duke Math. J.*, 127(2):341–393, 2005.
- [Lin05] Alcides Lins. *Funções de uma variável complexa*. IMPA, segunda edição, 2005.
- [Lit25] John E. Littlewood. On inequalities in the theory of functions. *Proceedings L. M. S.*, 23(2):481–519, 1925.
- [Mak98] N. G. Makarov. *Fine structure of harmonic measure*, volume 10. 1998.
- [Man72] B. B. Mandelbrot. Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. *Lectures Notes Phys.*, 12:333–351, 1972.
- [Man74] B. B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62:331–358, 1974.
- [Mil99] John Milnor. Dynamics in one complex variable. pages viii+257, 1999. Introductory lectures.
- [Mun75] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [Pes97] Yakov B. Pesin. *Dimension theory in dynamical systems*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1997. Contemporary views and applications.
- [Pom75] Christian Pommerenke. *Univalent functions*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975. with a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen.
- [Pom92] Ch. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Roy63] H. L. Royden. *Real analysis*. The Macmillan Co., New York, 1963.