



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

## Tangencias Homoclínicas y Descomposición Dominada

Por

Jose David Torres Riffo

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas  
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,  
como un requisito para optar al grado de  
Magíster en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía : Jan Kiwi - Universidad Católica de Chile.  
Comisión Informante : Godofredo Iommi - Universidad Católica de Chile.  
: Andrés Navas - Universidad de Santiago de Chile.  
Mario Ponce - Universidad Católica de Chile.

Diciembre, 2008  
Santiago - Chile



## Índice general

Capítulo 1. Introducción	5
Capítulo 2. Preliminares	9
1. Dinámica topológica	9
2. El conjunto $\text{Difeo}^r(M)$	12
3. Métrica de Hausdorff	14
Capítulo 3. Dinámica hiperbólica	17
1. Introducción	17
2. Hiperbolicidad local	17
3. Conjuntos hiperbólicos	26
3.1. Definición	26
3.2. Propiedades	30
4. Axioma A y $\Omega$ -estabilidad	35
4.1. El conjunto $\Omega(f)$ es aislado	37
4.2. Descomposición espectral y condición de no ciclos	40
4.3. El teorema de la $\Omega$ -estabilidad de Smale	44
5. Resultados de tipo genérico	45
5.1. Un resultado de Pugh	46
5.2. Difeomorfismos del tipo Kupka-Smale	47
Capítulo 4. Descomposición dominada	49
1. Introducción	49
2. Definición	49
3. Propiedades	52
3.1. Propiedades básicas	52
3.2. Existencia de variedades integrables	55
3.2.1. Un resultado de Pliss	55
3.2.2. Variedades centro estable y centro inestable	59
4. Ángulos pequeños y descomposición dominada	62
4.1. Resultados previos	63
4.2. ¿Cómo encontrar descomposición dominada?	66
4.3. Descomposición dominada y tangencias homoclínicas	70
Capítulo 5. Dinámica de superficies	73

1. Introducción	73
2. Condiciones suficientes para el Teorema B	74
2.1. Finitud de las curvas irracionales	74
2.2. Demostración Teorema B	77
3. Hiperbolicidad o curvas irracionales	77
4. Descomposición espectral para descomposición dominada	78
5. Lema central	80
5.1. Propiedades dinámicas de las variedades integrables	80
5.2. Cajas bien adaptadas y retornos	101
5.3. Demostración del Lema central	106
6. La Conjetura fuerte de Palis	112
6.1. Teorema A	112
6.2. Descomposición dominada lejos de tangencias	114
Bibliografía	121

## CAPÍTULO 1

### Introducción

La presente monografía se enmarca dentro de la Teoría de los Sistemas dinámicos diferenciables, o de manera más precisa, nos interesa estudiar la dinámica de difeomorfismos de clase  $C^k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k > 1$ , definidos sobre una variedad compacta.

La primera familia de sistemas para la cual se obtuvo una descripción completa fue la de los difeomorfismos del tipo Morse-Smale. Estos difeomorfismos son aquellos para los cuales su conjunto no errante se encuentra formado por una cantidad finita de órbitas periódicas, todas de tipo hiperbólica, de modo que sus variedades estables e inestables se intersectan de manera transversal, (ver Definición 3.1). Los difeomorfismos del tipo Morse-Smale poseen la importante propiedad de ser estructuralmente estables.

Posteriormente S.Smale [Sm], introdujo la noción de conjunto hiperbólico, (ver Definición 3.14), y más tarde definió lo que actualmente se conoce como el conjunto de los difeomorfismos del tipo Axioma A, conjunto que contiene en su interior a los del tipo Morse-Smale.

Smale también formuló una manera de comprender la dinámica de los difeomorfismos Axioma A, (ver Teorema 3.47). Este resultado permite describir cuales son las “piezas básicas” de la de la dinámica de los difeomorfismos Axioma A (hiperbólicos).

Como mencionamos anteriormente, los difeomorfismos del tipo Morse-Smale resultaron poseer la importante propiedad de la estabilidad estructural. La pregunta natural que surgió entonces fue ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la estabilidad estructural?. Una “respuesta” a esta interrogante la presentaron J.Palis y S.Smale a través de la siguiente conjetura.

**CONJETURA 1.1** (Conjetura de estabilidad). *Un difeomorfismo de clase  $C^k$  (o  $C^s$ , si  $1 \leq s \leq k$ ) es  $C^s$ -estable si y sólo si es Axioma A y satisface la condición de transversalidad.*

La solución de la  $C^1$ -conjetura de estabilidad vio la luz luego de una serie de resultados obtenidos por Robbin [R], Robinson [Ro1] y a través del fundamental trabajo de R.Mañé, [M1]. En [M1], se introduce el uso de una forma mas débil de hiperbolicidad, conocida como

descomposición dominada, noción a la cual nos referiremos con detalle más adelante.

La solución de la  $C^1$ -conjetura de estabilidad entregó una comprensión más amplia de lo que denominaremos el enfoque “perturbativo”, es decir, como a través de la dinámica de la transformación  $Df$  se consigue una comprensión de la dinámica de la función  $f$ . Asociado a este enfoque se encuentra el problema de dar una descripción global del conjunto  $\text{Difeo}^r(M)$ ; con esto nos referimos a poder determinar la existencia de conjuntos residuales o densos en  $\text{Difeo}^r(M)$  de los cuales se posea una descripción acabada del comportamiento dinámico de sus elementos. Originalmente se pensó que los sistemas del tipo hiperbólico podrían ser una solución a esta interrogante, pero se encontraron ejemplos de conjuntos abiertos de difeomorfismos no hiperbólicos. De manera más precisa, se tiene que:

- Dada una superficie compacta  $M$ , existen conjuntos abiertos no vacíos, contenidos en  $\text{Difeo}^2(M)$  cuyo conjunto no errante es no hiperbólico, [Nw1].
- Para toda variedad compacta  $M$ , con  $\text{Dim} \geq 3$ , existen conjuntos abiertos no vacíos en  $\text{Difeo}^1(M)$  cuyos elementos poseen su conjunto no errante de tipo no hiperbólico, [AS].

Para el caso dos dimensional, Newhouse [Nw2] demostró la existencia de conjuntos abiertos en  $\text{Difeo}^2(M)$  los cuales contienen conjuntos residuales donde coexisten las tangencias homoclínicas con la presencia de infinitos puntos periódicos atractores o repulsores. Este fenómeno dinámico es conocido como el Fenómeno de Newhouse.

Posteriormente Mañé en [M3] demostró que este fenómeno coexistía de manera genérica en  $\text{Dif}^1(M)$  con la propiedad de ser Axioma A. Para ser más exactos, se tiene el siguiente Teorema.

**TEOREMA 1.2.** *Sea  $M$  una superficie compacta. Existe un conjunto residual  $\mathcal{R}$  contenido en  $\text{Dif}^1(M)$  que se descompone como*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_A \sqcup \mathcal{R}_N,$$

donde  $\mathcal{R}_A$  denota al conjunto de los difeomorfismos del tipo Axioma A y  $\mathcal{R}_N$  es un conjunto donde todo difeomorfismo posee infinitos puntos periódicos atractores o repulsores.

La existencia de conjuntos de difeomorfismos cuyo comportamiento dinámico estaba lejos de ser de tipo hiperbólico, empujó el estudio hacia nuevas formas de dinámica caótica. De entre ellas mencionaremos las siguientes:

- La existencia de atractores extraños o del tipo Lorentz.

- Teoría de la bifurcación.
- Formas “débiles” de hiperbolicidad.

Los resultados obtenidos por el estudio de estas formas de dinámica llevaron a J. Palis [P] a proponer las siguientes conjeturas;

CONJETURA 1.3 (Conjetura débil). *El conjunto  $\text{Dif}^r(M)$  para  $r \geq 1$  contiene un conjunto abierto y denso,  $\mathcal{C}$ , que se descompone como la unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos, a saber  $\mathcal{C} = MS \cup \mathcal{I}$ , donde  $\mathcal{I}$  el conjunto de los difeomorfismos que exhiben una intersección homoclínica transversal y  $MS$  es el conjunto de los difeomorfismos del tipo Morse-Smale.*

CONJETURA 1.4 (Conjetura fuerte). *Todo difeomorfismo  $f$  contenido en  $\text{Difeo}^r(M)$  para  $r \geq 1$ , puede ser  $C^r$ -aproximado o bien, por un difeomorfismo del tipo hiperbólico o bien por un difeomorfismo que posee un ciclo heterodimensional o una tangencia homoclínica.*

La Conjetura débil fue demostrada, en su versión para la topología  $C^1$ , por Crovisier [Cr]. Asimismo la Conjetura fuerte fue demostrada, en su versión para la topología  $C^1$  y en el caso en que la variedad  $M$  es una superficie, por Enrique Pujals y Martin Sambarino en [PS1].

El objetivo principal de esta monografía es mostrar los resultados obtenidos por Pujals y Sambarino y exponer los resultados previos necesarios para una comprensión de [PS1].

El resultado principal obtenido en [PS1], se encuentra enunciado en el siguiente Teorema, el cual en la nomenclatura original es llamado Teorema A.

TEOREMA 1.5. *Sea  $M$  una variedad compacta dos dimensional y sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Entonces  $f$  puede ser aproximado, en la topología  $C^1$ , o bien por un difeomorfismo que exhibe una tangencia homoclínica, o bien por un difeomorfismo Axioma A.*

A continuación procedemos a revisar las piezas básicas de su demostración.

La prueba de que todo difeomorfismo lejos de tangencias homoclínicas es aproximado por uno del tipo Axioma A, posee dos elementos centrales.

El primero de ellos consiste en asegurar que, de manera genérica, lejos de tangencias homoclínicas todo difeomorfismo admite descomposición dominada en “casi” todo su conjunto no errante. El hecho que un difeomorfismo se encuentre lejos de tangencias homoclínicas permite probar que para puntos periódicos del tipo silla, (denotaremos por  $\text{Per}_h(f)$  a este conjunto), el ángulo que forman los sub-espacios

estables e inestables se encuentran acotados uniformemente lejos de cero. Haciendo uso, básicamente, de resultados contenidos en [M2], se demuestra que el conjunto  $\text{Per}_h(f)$  admite una descomposición continua de su fibrado tangente que además satisface la propiedad de ser dominada.

Posteriormente se extiende esta descomposición a “casi” todo el conjunto errante. Finalmente haciendo uso simultáneo de [Pu2] y [K] se logra construir un conjunto denso, en el complemento de la clausura de las tangencias homoclínicas, en el cual todo difeomorfismo admite descomposición dominada en “casi” todo su conjunto no errante.

El segundo elemento a considerar tiene un aroma o una inspiración en resultados de dinámica unidimensional. De hecho es en cierto sentido una versión dos-dimensional de un resultado contenido en [M3]. Esta versión dos dimensional, respetando la notación de [PS1], la hemos llamado Teorema B. Este Teorema nos permite descomponer la dinámica de un conjunto compacto con descomposición dominada, en el cual todos sus puntos hiperbólicos son de tipo silla, en dos partes: una donde la dinámica es hiperbólica y otra donde la dinámica es conjugada a una rotación irracional.

Ahora procedemos a describir la forma en la cual se organiza esta monografía.

En el Capítulo 2 entregamos una colección de resultados que nos permitirán fijar notación, además de los requerimientos mínimos que serán necesarios.

El Capítulo 3 consiste en una introducción a la teoría hiperbólica, en la cual hacemos un recorrido que comienza con la definición de hiperbolicidad local y de conjunto hiperbólico hasta el Teorema de la  $\Omega$ -estabilidad de Smale, pasando por un par de resultados de tipo genérico.

En el Capítulo 4 se introduce el concepto de Descomposición dominada junto con una serie de propiedades básicas y resultados que relacionan este concepto con los de hiperbolicidad y tangencias homoclínicas. Las propiedades básicas de la descomposición dominada se exponen de una de manera análoga a las propiedades de la hiperbolicidad presentadas en el capítulo anterior, para facilitar un estudio comparativo de ambas y comprender de esta manera cuan relacionadas se encuentran.

Finalmente, el Capítulo 5 presenta, de manera íntegra, el principal resultado de [PS1]. La primera parte de este Capítulo consiste en la demostración del Teorema B, para posteriormente pasar a la demostración del Teorema A.



## CAPÍTULO 2

### Preliminares

#### 1. Dinámica topológica

Sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua, donde  $X$  es algún espacio métrico. A nosotros nos interesará particularmente el caso en que  $X$  es una variedad riemanniana compacta. El objetivo es estudiar la estructura de órbitas de  $f$ , donde la **órbita positiva** de un punto  $x \in X$  es el conjunto

$$\mathcal{O}^+(x) := \{f^n(x) \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si además  $f$  posee inversa continua denotaremos la **órbita negativa** de  $x$  por

$$\mathcal{O}^-(x) := \{f^{-n}(x) \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}.$$

A la vez denotaremos la **órbita** del punto  $x$  por  $f$  como

$$\mathcal{O}(x) := \mathcal{O}^-(x) \cup \mathcal{O}^+(x).$$

Comenzaremos con aquellos puntos que poseen una “historia” simple de describir. Un **punto fijo** de  $f$  es un punto  $x$  tal que  $f(x) = x$ ; un **punto periódico** de  $f$  es un punto  $x$  que es un punto fijo para algún iterado  $f^n$  esto es, existe algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) = x$ . El conjunto de los puntos periódicos de  $f$  lo denotaremos por  $\text{Per}(f)$ .

A continuación introduciremos nociones de recurrencia mas débiles que las recién mencionadas.

**DEFINICIÓN 2.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Un punto  $x \in X$  se dirá un **punto no errante** de  $f$  si para toda vecindad  $U(x)$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(U(x)) \cap U(x) \neq \emptyset$ . El conjunto de los puntos no errantes de  $f$  lo denotaremos por  $\Omega(f)$ .*

Es claro que un punto periódico es un punto no errante, y como  $\Omega(f)$  es un conjunto cerrado se tiene que

$$\overline{\text{Per}(f)} \subset \Omega(f).$$

**DEFINICIÓN 2.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $x$  un punto del espacio  $X$ . El conjunto  $\omega$ -límite del punto  $x$  quedará definido como,*

$$\omega_f(x) = \{y \in X \mid \text{existe una sub-sucesión } n_k \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Si la función  $f$  posee inversa continua, se define el conjunto  $\alpha$ -límite de  $x$  como,

$$\alpha_f(x) = \{y \in X \mid \text{existe una sub-sucesión } n_k \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Definiremos también los conjuntos

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega_f(x)}, \quad L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha_f(x)},$$

así como el **conjunto límite** de  $f$  como

$$L(f) = L_-(f) \cup L_+(f)$$

**DEFINICIÓN 2.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Dada una función continua  $f : X \rightarrow X$  y una constante positiva  $\varepsilon$ , la sucesión

$$\underline{x} = \{x_i \mid p < i < q; -\infty \leq p \leq q - 2 \leq \infty\},$$

se dirá una  $\varepsilon$ -pseudo órbita para  $f$  si  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$  para  $p < i < q - 1$ . Se dirá que una  $\varepsilon$ -pseudo órbita es  $\varepsilon$ -pseudo periódica si existe  $n$  tal que  $x_i = x_{i+n}$  para todo  $i$ .

**DEFINICIÓN 2.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Un punto  $x$  de  $X$  se dirá **recurrente por cadenas** si para todo  $\varepsilon > 0$ , es el punto inicial de una  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica. Denotaremos por  $\mathcal{R}(f)$  el conjunto recurrente por cadenas asociado a la función  $f$  sobre el espacio  $X$ .

Las siguientes Proposiciones básicas, que no serán demostradas, se encuentran en [Sch].

**PROPOSICIÓN 2.5.** El conjunto  $L(f)$  se encuentra contenido en  $\Omega(f)$ .

**PROPOSICIÓN 2.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. El conjunto no errante se encuentra contenido en el conjunto recurrente por cadenas,  $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$ .

**OBSERVACIÓN 2.7.** Los resultados hasta ahora obtenidos, pueden ser resumidos de la siguiente manera.

$$\text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f).$$

Donde  $f$  es algún homeomorfismo definido sobre  $X$ .

Sea  $X$  un espacio compacto. Un subconjunto cerrado, no vacío  $Y \subset X$ , tal que  $f(Y) \subset Y$  se dirá **minimal** para  $f$ , si no contiene algún subconjunto propio, cerrado, no vacío,  $Z$ , tal que  $f(Z) \subset Z$ . Por lo tanto un subconjunto compacto  $Y$  tal que  $f(Y) = Y$  es minimal si y solo si la órbita positiva de todo punto es densa en  $Y$ .

Supongamos que el espacio métrico  $(X, d)$  tiene una localmente una base numerable. Diremos que  $f : X \rightarrow X$  es **topológicamente transitivo** si existe un punto  $x$  en  $X$  tal que su órbita es densa en  $X$ . Si  $X$  no posee puntos aislados, la definición anterior es equivalente a la existencia de un punto  $x$  en  $X$  tal que su  $\omega$ -límite sea denso en  $X$ .

**PROPOSICIÓN 2.8 (Birkhoff).** *Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto e invariante para el homeomorfismo  $f$ , es decir  $f(\Lambda) = \Lambda$ . El conjunto  $\Lambda$  es transitivo si y solo si dados dos conjuntos abiertos  $U, V$  existe un entero  $m$  tal que  $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Es claro que la condición es necesaria, se probará que es suficiente. Consideremos una base numerable  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  del conjunto  $\Lambda$ . Luego para todo  $i \geq 1$  el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_i),$$

es abierto y denso en  $\Lambda$ . Por el Teorema de Baire,

$$B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_i),$$

es un conjunto denso en  $\Lambda$ . Además, se tiene que todo punto  $x \in B$  posee una órbita densa en  $\Lambda$ .  $\square$

Sea  $f : X \rightarrow X$  un homeomorfismo, diremos que es **topológicamente mezclante** si para todo par de abiertos  $U, V$  en  $X$  existe un entero positivo  $N$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , para todo  $n \geq N$ . Es claro que el ser topológicamente mezclante implica ser topológicamente transitivo, pero no al revés, por ejemplo una rotación irracional del círculo es topológicamente transitiva (ya que es minimal) pero no es topológicamente mezclante.

Un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  se dirá **expansivo** si existe una constante positiva  $\delta$  tal que para cualquiera dos puntos  $x, y$  en  $X$  existe  $n$  en  $\mathbb{Z}$  de manera que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ . Cualquier constante,  $\delta$  positiva, que satisfaga lo anterior se dirá una **constante de expansividad** de  $f$ .

**DEFINICIÓN 2.9.** *Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$  dos funciones continuas. Si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

entonces, diremos que  $h$  es una *conjugación* entre  $f$  y  $g$ . Se dirá en este caso que  $f$  y  $g$  son *topológicamente conjugados*.

OBSERVACIÓN 2.10. *Es claro que ser topológicamente conjugados es una relación de equivalencia, por lo tanto induce una partición, en clases de equivalencia, del espacio de las funciones continuas.*

## 2. El conjunto $\text{Difeo}^r(M)$

Denotaremos por  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ , al conjunto de todas las funciones de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  definidas en una variedad compacta  $M$ .

Escojamos un cubrimiento finito,  $V_1, \dots, V_k$ , por conjuntos abiertos de  $M$ , tal que cada  $V_i$  se encuentra contenido en el dominio de una carta local  $(x_i, U_i)$  con  $x_i(U_i) \subset B(2)$  y  $x_i(v_i) = B(1)$ , donde  $B(r)$  representa la bola de radio  $r$  centrada en el origen. Para  $f$  en  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  denotaremos por  $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^s$ . A continuación introduciremos una norma en  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  definida como,

$$\|f\|_r := \max_i \sup \{ \|f^i(u)\|, \dots, \|D^r f^i(u)\| \mid u \in B(1) \}.$$

Se puede comprobar que con esta norma, el espacio  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  resulta ser un espacio completo. Además la topología inducida por la norma  $\|\cdot\|_r$ , (por la métrica que induce la norma), no depende del cubrimiento escogido, a esta topología la llamaremos la  $C^r$ -topología.

Recordemos que un subconjunto de un espacio topológico se dice *residual* si es la intersección de una cantidad numerable de conjuntos abiertos y densos. Así también, recordemos que, un espacio se dice un *espacio de Baire* si todo conjunto residual es denso.

OBSERVACIÓN 2.11. *En lo que sigue ocuparemos la notación  $U(x)$  para denotar que el conjunto  $U(x)$  es abierto, en el espacio que corresponda y que contiene a  $x$ .*

Las siguientes propiedades topológicas de  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  pueden ser revisadas en [Pdm], siguiendo los números entre parentesis ubicados en cada Proposición.

PROPOSICIÓN 2.12. (2.2)  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  es un espacio de Baire.

PROPOSICIÓN 2.13. (2.3)  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  es un espacio separable.

PROPOSICIÓN 2.14. (2.7) El conjunto  $C^\infty(M, \mathbb{R}^s)$  es un conjunto denso en  $C^k(M, \mathbb{R}^s)$ .

DEFINICIÓN 2.15. Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$  y  $f : U \rightarrow V$  una función sobreyectiva de clase  $C^r$ . Se dirá que  $f$  es un *difeomorfismo de clase  $C^r$*  si existe una función  $g : V \rightarrow U$  de clase  $C^r$ , tal que  $g \circ f$  es la función identidad definida sobre  $U$ .

DEFINICIÓN 2.16. Denotaremos por  $\text{Diff}^r(M)$  al conjunto de los difeomorfismos de clase  $C^r$ , para algún  $r \geq 1$ , definidos sobre una variedad compacta  $n$ -dimensional  $M$ .

TEOREMA 2.17 (Teorema de la función inversa). Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Si  $D_p f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un isomorfismo, entonces  $f$  es localmente un difeomorfismo de clase  $C^r$ . Es decir, existen vecindades  $V \subset U$  con  $p \in V$  y  $W \subset \mathbb{R}^m$  con  $f(p) \in W$  y  $g : W \rightarrow V$  tal que  $g \circ f$  es la función identidad sobre  $V$  y  $f \circ g$  es la función identidad sobre  $W$ .

Sean  $M$  y  $N$  dos variedades abstractas arbitrarias con  $M$  compacta. Es posible definir la  $C^r$  topología en  $C^r(M, N)$ , para ello, basta considerar a  $N$  inmersa en algún  $\mathbb{R}^s$ .

PROPOSICIÓN 2.18. El conjunto  $\text{Diff}^r(M)$  es un conjunto abierto en  $C^r(M, M)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $f$  en  $\text{Diff}^r(M)$ . Sin perder generalidad podemos asumir que  $M$  se encuentra inmersa en  $\mathbb{R}^s$ . Si  $p$  es un punto de  $M$  sabemos, por el Teorema de la función inversa, que existen vecindades  $V(p)$  en  $M$  y  $\mathcal{V}_p$  en  $C^r(M, N)$  una vecindad de  $f$ , tal que si  $g$  se encuentra en  $\mathcal{V}_p$  entonces  $g$  restringido a  $V(p)$  es un difeomorfismo.

Sea  $V(p_1), \dots, V(p_j)$  un cubrimiento finito de  $M$ ,  $\mathcal{V} := \bigcap_{i=1}^j \mathcal{V}_{p_i}$  y  $\delta$  el número de Lebesgue asociado a este cubrimiento. Luego si  $p \neq q$  son dos puntos en  $M$  a distancia menor que  $\delta$  se tiene que  $g(p) \neq g(q)$  para todo  $g$  en  $\mathcal{V}$ .

Por otro lado,

$$\rho := \inf\{d(f(p), f(q)) \mid p, q \in M, d(p, q) \geq \delta\}.$$

Es una cantidad positiva. Luego reduciendo  $\mathcal{V}$ , si fuese necesario, se puede obtener que si  $g$  se encuentra en  $\mathcal{V}$  entonces  $g$  es una función inyectiva. Por lo tanto, como  $g$  es un difeomorfismo local, se tiene que es un difeomorfismo.  $\square$

Ocupando las proposiciones anteriores se puede concluir que  $\text{Diff}^r(M)$  es un espacio de Baire y separable.

A continuación revisaremos la noción de transversalidad así como algunos conceptos asociados.

Comencemos recordando que para  $p \in M$  el espacio tangente al punto  $p$ , al cual denotaremos por  $T_p M$ , es el conjunto de todos los vectores tangentes al punto  $p$ . Se define también el fibrado tangente asociado a una variedad  $M \subset \mathbb{R}^k$  como

$$TM := \{(p, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \mid p \in M, v \in T_p M\}.$$

DEFINICIÓN 2.19. Sea  $S \subset N$  una subvariedad de clase  $C^r$  y sea  $f : M \rightarrow N$  una función de clase  $C^k$  con  $k \geq 1$ . Se dirá que  $f$  es transversal a  $S$  en el punto  $p$  de  $M$  si, o bien  $f(p) \notin S$  o bien

$$D_p f(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N.$$

Es decir si la imagen de  $T_p M$  por  $D_p f$  contiene un sub-espacio de  $T_{f(p)} N$  que es complementario a  $T_{f(p)} S$ .

DEFINICIÓN 2.20. Sean  $E$  y  $F$  dos sub-espacios de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $E \oplus F = \mathbb{R}^n$ . Se tiene que los sub-espacios  $E^\perp$  y  $F$  poseen la misma dimensión, además  $F$  es el gráfico de una función lineal

$$L : E^\perp \longrightarrow F.$$

Definida como sigue. Si  $w$  es un vector en  $F$  existe un único par de vectores  $u$  en  $E$ ,  $v$  en  $E^\perp$  tales que  $w = u + v$ . Se define  $L(v) = u$ , de donde se obtiene que  $F$  es el gráfico de  $L$ .

Se define el ángulo,  $\angle(E, F)$ , entre los sub-espacios  $E, F$  como  $\|L\|^{-1}$ , donde  $\|L\| = \sup\{\|Lv\| \mid \|v\| = 1\}$ .

En particular se tiene que  $\angle(E, E^\perp) = \infty$ .

DEFINICIÓN 2.21. Sea  $p \in M$  un punto fijo de  $f \in \text{Difeo}^r(M)$ . Se dirá que el punto  $p$  es un punto fijo elemental de  $f$ , si 1 no es un autovalor de la transformación lineal,  $D_p f : T_p M \rightarrow T_p M$

PROPOSICIÓN 2.22. Sea  $f \in \text{Difeo}^r(M)$ , supongamos que  $p$  es un punto fijo elemental de  $f$ . Existe una vecindad  $N \subset \text{Difeo}^r(M)$  de  $f$ , una vecindad  $U \subset M$  de  $p$  y una función continua  $h$  la cual cumple con

$$h : N \rightarrow U,$$

$$g \rightarrow p_g.$$

Donde  $p_g$  es el único punto fijo de  $g$  en  $U$ . Este punto fijo es elemental, en particular todo punto fijo elemental es aislado.

### 3. Métrica de Hausdorff

Sea  $(E, \rho)$  un espacio métrico. Si  $Y \subset E$  diremos que  $B_r(Y)$ ,  $r \geq 0$ , es una  $r$ -vecindad de  $Y$  si para todo punto  $y \in Y$  existe  $b \in B$  tal que  $\rho(y, b) < r$ .

Denotemos por  $\mathcal{K}^*$  la colección de todos los subconjuntos compactos de  $E$  y por  $K$  al conjunto  $\mathcal{K}^* \setminus \{\emptyset\}$ .

Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos compactos contenidos en  $E$ , denotaremos  $X \subset_r Y$  si existe una  $r$ -vecindad de  $Y$  que contenga al conjunto  $X$ .

Denotaremos por  $D_Y(X) = \sup_{x \in X} \rho(x, Y)$ , es decir,  $D_Y$  es el menor real positivo  $r$ , tal que  $X \subset_r Y$ , de manera análoga se define  $D_X(Y)$ .

Se define la distancia de Hausdorff sobre  $\mathcal{K}$ , como

$$D_H(X, Y) := \sup(D_Y(X), D_X(Y)).$$

Se puede comprobar que la distancia de Hausdorff es una métrica en el conjunto  $\mathcal{K}$ .

DEFINICIÓN 2.23. *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico arbitrario, diremos que la función*

$$F : X \longrightarrow \mathcal{K}^*.$$

*Es semi-continua superior si*

$$D_{F(x)}(F(x_0)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0.$$

*Es decir  $F$  es semi-continua superior, si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una vecindad  $V$  de  $x_0$ , tal que para todo  $x$  en  $V$  se tiene que  $F(x) \subset_\varepsilon F(x_0)$ .*

*Análogamente se dirá que  $F$  es semi-continua inferior si*

$$D_{F(x_0)}(F(x)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0.$$

Se puede comprobar que el conjunto de los puntos de continuidad tanto de una función semi-continua superior como de una función semi-continua inferior, forman un conjunto residual contenido en  $X$ .





## CAPÍTULO 3

# Dinámica hiperbólica

### 1. Introducción

El concepto de hiperbolicidad ha jugado un rol central en la teoría de sistemas dinámicos diferenciables, es el paradigma de los llamados sistemas “caóticos”, es decir, sistemas inherentemente impredecibles. Esta clase de sistemas presentan propiedades de estabilidad que hacen que esa “caoticidad” no sea destruida bajo pequeñas perturbaciones.

En este capítulo estudiaremos las nociones básicas de dinámica hiperbólica. En la Sección 2 se revisa la noción de hiperbolicidad local, y posteriormente en la Sección 3 se revisará la de conjunto hiperbólico.

En la Sección 4 se definen los difeomorfismos Axioma A y el concepto de estabilidad para difeomorfismos. En particular, se estudiará la noción de  $\Omega$ -estabilidad.

Finalmente, en la Sección 5 serán revisados un par de resultados que nos permitirán comprender, desde un punto de vista global, cómo se insertan los difeomorfismos que poseen un cierto “sabor” hiperbólico, dentro del conjunto  $\text{Difeo}^r(M)$ .

Un estudio más acabado de los tópicos que expondremos a continuación puede ser hallado en [S] y [KH].

### 2. Hiperbolicidad local

En lo que sigue  $M$ , será una variedad compacta,  $n$ -dimensional, de clase  $C^\infty$ , dotada de una métrica Riemanniana arbitraria de clase  $C^\infty$ .

**DEFINICIÓN 3.1.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $p$  un punto periódico de  $f$  de período  $n$ . Diremos que  $p$  es un **punto periódico hiperbólico** si la aplicación lineal  $D_p f^n : T_p M \rightarrow T_p M$  no posee autovalores en el círculo unitario  $S^1 \subset \mathbb{C}$ .*

**OBSERVACIÓN 3.2.** *Un punto periódico hiperbólico de período  $n$  de  $f$ , es un punto fijo hiperbólico de  $f^n$ . Por lo tanto, para los propósitos del estudio local, nos bastará considerar puntos fijos de  $f$ .*

El siguiente resultado permite relacionar la dinámica de un difeomorfismo, en una vecindad de un **punto periódico hiperbólico**, con la dinámica de su parte lineal.

**TEOREMA 3.3 (Hartman-Grobman).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $p \in M$  un punto fijo hiperbólico de  $f$ . Para ciertas vecindades  $V = V(p) \subset M$  y  $U = U(0) \subset T_p M$  de  $0$  y  $p$  respectivamente existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que  $h \circ D_p f = f \circ h$*

Para la demostración de este resultado haremos uso de la siguiente Proposición, cuya demostración puede ser hallada en [Pdm] (Lema 4,3).

**PROPOSICIÓN 3.4.** *Sea  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal hiperbólica. Existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo que verifica  $\sup\{\|G(x) - A(x)\| \mid x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$  y  $G - A$  posee constante de Lipschitz menor que  $\varepsilon$ , entonces  $G$  y  $A$  son conjugadas.*

**DEMOSTRACIÓN.** (del Teorema de Hartman-Grobman) Como el resultado del teorema es de carácter local, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $p = 0 = f(0)$ .

Consideremos la transformación lineal hiperbólica  $A = D_0 f$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es acotada y tiene constante de Lipschitz menor que  $\varepsilon$  entonces  $A$  y  $A + g$  son conjugadas, por el Proposición 3.4.

Por otra parte, la función  $\phi(x) = f(x) - A(x)$  es de clase  $C^1$  y verifica  $\phi(0) = 0$  y  $D_0 \phi = 0$ . Por continuidad existe  $\delta > 0$ , tal que si  $\|x\| < \delta$  entonces

$$\|\phi(x)\| \leq \frac{\varepsilon \|x\|}{8}, \quad \|D_x \phi\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^\infty$  satisfaciendo

- $0 \leq \rho(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\rho(x) = 1$  si  $|x| \leq \delta/2$  y  $\rho(x) = 0$  si  $|x| \geq \delta$ .
- $\|\nabla \rho(x)\| \leq 4/\delta$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $G(x) = A(x) + \rho(x)\phi(x)$ . Para  $\|x\| \leq \delta$  se tiene

$$\|D_x G - A\| \leq \|\phi(x)\| \|D_x \phi\| + \|\phi(x)\| \|\nabla \rho(x)\| \leq \varepsilon,$$

de donde se obtiene que  $g = G - A$  posee constante de Lipschitz menor que  $\varepsilon$ . Por lo tanto, haciendo uso del Teorema 3.4, conseguimos un homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $H \circ G = A \circ H$ .

Finalmente escogemos  $U = B(0, \delta/2)$ ,  $V = H(U)$  y  $h = H|_U$ , con lo que se concluye la demostración.  $\square$

A continuación pasamos a definir las variedades invariantes asociadas a un punto periódico hiperbólico. Con la ayuda de la hiperbolicidad estudiaremos la estructura de estos conjuntos y cómo cambian bajo perturbaciones del difeomorfismo  $f$ .

DEFINICIÓN 3.5 (Conjuntos estables e inestables). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo. El conjunto inestable de un punto fijo hiperbólico es:*

$$W^u(p) = \{x \in M \mid f^{-n}(x) \rightarrow p \text{ para } n \rightarrow \infty\}.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , definiremos el conjunto inestable local de un punto fijo hiperbólico

$$W_\varepsilon^u(p) = \{x \in M \cap B(p, \varepsilon) \mid f^{-n}(x) \in B(p, \varepsilon) \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

De manera análoga se define el conjunto estable  $W^s(p)$  y el conjunto local estable  $W_\varepsilon^s(p)$  cambiando  $f^{-n}$  por  $f^n$  en las definiciones anteriores respectivamente.

Recordemos que una inmersión topológica de  $\mathbb{R}^s$  en  $M$ , es una función  $F : \mathbb{R}^s \rightarrow M$  tal que todo punto  $x \in \mathbb{R}^s$  posee una vecindad  $V$  tal que  $F|_V$  es un homeomorfismo sobre su imagen (esta última dotada de la topología subespacio). En este caso diremos que  $F(\mathbb{R}^s) \subset M$  es una variedad topológica inmersa de dimensión  $s$ . Una incrustación topológica de  $\mathbb{R}^s$  en  $M$  es una inmersión topológica que es un homeomorfismo sobre su imagen.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  y  $p$  un punto periódico hiperbólico de  $f$ . Si  $\varepsilon > 0$  es lo suficientemente pequeño se tiene que*

1.  $W_\varepsilon^s(p) \subset W^s(p)$  y  $W_\varepsilon^u(p) \subset W^u(p)$ , esto es, los puntos en una vecindad de  $p$  cuya órbita positiva (respectivamente negativa) permanece en una vecindad de  $p$  tienen a  $p$  como su  $\omega$ -límite (respectivamente  $\alpha$ -límite).
2.  $W_\varepsilon^s(p)$  es un disco topológicamente incrustado en  $M$  y su dimensión es la del espacio estable del isomorfismo  $D_p f$ . Análogamente se tiene el resultado para  $W_\varepsilon^u(p)$
- 3.

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p)) \quad \text{y} \quad W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\varepsilon^u(p)).$$

Por lo tanto, existe inmersión topológica inyectiva  $\phi_s : E^s \rightarrow M$  (resp.  $\phi_u : E^u \rightarrow M$ ) cuya imagen es  $W^s(p)$  (resp.  $W^u(p)$ ) donde  $E^s, E^u$  son los espacios estable e inestables del isomorfismo  $D_p f$ .

OBSERVACIÓN 3.7. *Si  $p$  es un punto fijo de  $f$ , la variedad estable de  $f$  coincide con la variedad inestable de  $f^{-1}$ . Es esta dualidad la que nos permite traspasar las propiedades de  $W^s(p)$  en propiedades de  $W^u(p)$ .*

*Si bien la variedad local estable es un disco topológicamente incrustado, en general la variedad estable  $W^s(p)$  no.*

Cabe notar que en la Proposición 3.6, el Teorema de Hartman-Grobman nos entrega la estructura topológica de la variedad  $W^s(p)$ . Sin embargo, el siguiente teorema, que es independiente del teorema de Hartman-Grobman, garantizará que  $W^s(p)$  es una subvariedad inmersa de la misma clase de diferenciabilidad que el difeomorfismo en cuestión.

Antes de pasar a revisar el teorema, damos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 3.8.** Sean  $S, S'$  dos subvariedades de  $M$  y sea  $\varepsilon > 0$  dado. Se dirá que  $S, S'$  se encuentran  $\varepsilon$   $C^k$ -ceranas si existe un difeomorfismo  $h : S \rightarrow S'$  de clase  $C^k$ , tal que  $i' \circ h, i$  se encuentren a distancia menor que  $\varepsilon$  en la topología  $C^k$ , donde  $i' : S' \rightarrow M, i : S \rightarrow M$  denotan las respectivas inclusiones.

**TEOREMA 3.9 (Teorema de la Variedad Estable).** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^k$  para algún  $k \geq 1, p \in M$  un punto fijo hiperbólico de  $f$  y  $E^s$  el espacio estable del isomorfismo  $D_p f$ .

- El conjunto estable es una sub-variedad inmersa en  $M$ , de clase  $C^k$ . El espacio tangente de  $W^s(p)$  en el punto  $p$  es  $E^s$ .
- Sea  $D \subset W^s(p)$  un disco que contiene al punto  $p$ . Consideremos  $\mathcal{U} \subset \text{Difeo}^k(M)$  una vecindad de  $f$  tal que cada  $g \in \mathcal{U}$  posee un único punto fijo hiperbólico,  $p_g$ , en una vecindad  $U$  de  $p$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe una vecindad  $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$  tal que, para todo  $g \in \tilde{\mathcal{U}}$ , existe un abierto  $D_g \subset W^s(p_g)$  que se encuentra  $\varepsilon$   $C^k$ -cercano a  $D$ .

Como consecuencia del teorema anterior obtendremos un resultado conocido como el Lema de la Inclinación, el cual nos será de gran ayuda más adelante. Sin embargo, antes de anunciarlo haremos algunas consideraciones geométricas que nos la exposición del resultado.

Consideremos un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de clase  $C^k$  y un punto fijo hiperbólico  $p \in M$ . Pasando a coordenadas locales podemos suponer que  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$  y  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $V$  es una vecindad del punto  $p = 0$ .

Consideremos la descomposición invariante, por el isomorfismo lineal  $D_p f$ , del espacio tangente,

$$\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u.$$

El Teorema de la Variedad Estable asegura que  $W_\varepsilon^s(0)$  es el gráfico de una función de clase  $C^k$ ,

$$\phi_s : B_\beta^s \rightarrow E^u, \phi_s(0) = 0, D\phi_s(0) = 0$$

donde  $B_\beta^s \subset E^s$  es una bola de radio  $\beta$  centrada en el origen. De la misma manera  $W_\varepsilon^u(0)$  es el gráfico de una función de clase  $C^k$ ,

$$\phi_u : B_\beta^u \rightarrow E^u, \phi_u(0) = 0, D\phi_u(0) = 0.$$

donde  $B_\beta^u \subset E^u$  es una bola de radio  $\beta$  centrada en el origen.

Consideremos ahora  $\phi$  definida como:

$$\begin{aligned} \phi : B_\beta^s \oplus B_\beta^u &\rightarrow E^s \oplus E^u, \\ (x_s, x_u) &\rightarrow (x_s - \phi_u(x_u), x_u - \phi_s(x_s)). \end{aligned}$$

Es claro que  $\phi$  es un difeomorfismo de clase  $C^k$ . Si llamamos  $\tilde{f}$  a la conjugación de  $f$  por  $\phi$  obtenemos que

$$D_0 \tilde{f} = D_0 f.$$

Luego  $W_\varepsilon^s(\tilde{f})$  es una vecindad del origen en  $E^s$  y  $W_\varepsilon^u(\tilde{f})$  es una vecindad de el origen en  $E^u$ . Es decir, siempre podemos asumir que  $W_\varepsilon^s(0) \subset E^s$  y  $W_\varepsilon^u(0) \subset E^u$ .

Sea  $B^s \subset E^s$  una bola contenida en  $W_\varepsilon^s(0)$ ,  $B^u \subset E^u$  una bola contenida en  $W_\varepsilon^u(0)$  y  $V = B^s \times B^u$ . Dada una vareidad  $W$  transversal a  $W_\varepsilon^s(0)$  en el punto  $q$ , denotaremos por  $W_n$ , a la componente conexa de  $f^n(W) \cap V$  que contiene al punto  $f^n(q)$ . Bajo las consideraciones anteriores, enunciaremos el siguiente lema.

**LEMA 3.10 (Lema de la inclinación).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^k$  para algún  $k \geq 1$  para el cual el origen es un punto fijo hiperbólico. Consideremos el conjunto  $V = B^s \times B^u$  y  $W \subset M$  una sub-variedad de clase  $C^k$  tal que  $W$  interseca de manera transversal a  $W^s(0) \setminus \{0\}$  en el punto  $q$ .*

*Dado  $\beta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $W_n$  se encuentra  $\beta - C^1$  cercano a  $B^u$ .*

Antes de pasar a la demostración observemos el siguiente esquema,

$$\begin{array}{ccc}
& & W^s(0) \\
0 & & q \\
& & W \\
W_n & & \\
& & \\
W^u(0) & & 
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. En un sistema de coordenadas locales tal que  $W_\varepsilon^s(0) \subset E^s$ ,  $W_\varepsilon^u(0) \subset E^u$  podemos escribir

$$f(x_s, x_u) = (A^s x_s + \phi_s(x_s, x_u), A^u x_u + \phi_u(x_s, x_u)),$$

donde  $\|A^s\| \leq \lambda$ ,  $\|(A^u)^{-1}\| \leq \lambda$ . Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_s}{\partial x_u|_{B^u}} &\equiv 0 \equiv \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s|_{B^s}}, \\
\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(0, 0) &= 0, \quad i = s, u, j = s, u.
\end{aligned}$$

La continuidad de las primeras derivadas nos asegura que podemos escoger  $k \in (0, 1)$  y una vecindad  $V' \subset V$  de manera tal que

$$a_1 = \lambda + k < 1, \quad b = \lambda^{-1} - k > 1, \quad k < \frac{(b-1)^2}{4},$$

$$k \geq \sup_{V'} \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\|$$

Sin perder generalidad podemos asumir suponer que  $q \in V'$  y  $B^u \subset V'$ .

Sea  $v_0$  un vector unitario en  $T_q D^u$ ,  $v_0 = (v_0^s, v_0^u)$  para  $v_0^s \in B^s$  y  $v_0^u \in B^u$ . La pendiente

$$\lambda_0 = \frac{\|v_0^s\|}{\|v_0^u\|}$$

de  $v_0$ , se encuentra bien definida ya que  $v_0$  es tangente a un conjunto transversal a  $B^s$ . Consideramos  $q_1 = f(q), \dots, q_n = f^n(q)$ , los respectivos vectores tangentes  $v_1 = D_q f(v_0), \dots, v_n = D_{q_{n-1}} f(v_{n-1})$  y sus respectivas pendientes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Para  $q$  en la frontera de  $B^s$

$$D_q f(v_0) = \begin{pmatrix} A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u \\ A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\lambda_1 = \frac{\|A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u\|}{\|A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u\|}.$$

Ahora acotando el numerador por arriba

$$\left\| A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u \right\| \leq \lambda \|v_0^s\| + k(\|v_0^s\| + \|v_0^u\|),$$

y el denominador por debajo

$$\left\| A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u \right\| \geq \lambda^{-1} \|v_0^u\| - k \|v_0^u\|,$$

concluimos que

$$\lambda_1 \leq \frac{\lambda_0}{b} + \frac{k}{b}.$$

De manera recursiva se obtiene

$$\lambda_n \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}.$$

Luego existe  $n_0$  tal que  $\lambda_n \leq (b-1)/4$  para todo  $n \geq n_0$ .

Sea  $0 < k_1 < \min(\varepsilon, k)$ . Como  $B^u$  es compacto existe  $\delta < \varepsilon$  tal que para  $V_1 = \delta B^s \times B^u$  (aquí  $\delta B^s$  denota la bola de radio  $\delta$ -veces el radio de  $B^u$ ).

$$\max_{V_1} \left\| \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \right\| \leq k_1.$$

Como  $v_0$  es arbitrario, este se puede escoger de manera que posea la mayor pendiente de los vectores unitarios en  $T_q D^u$ . Luego existe  $n_0$  tal que, para  $n \geq n_0$ , todo vector, distinto de cero, en  $T_{q_n} D_n^u$  tiene pendiente  $\lambda_n$  menor que  $(b-1)/4$  con  $q_{n_0} \in V_1$ .

Entonces, ocupando la continuidad del plano tangente, existe un disco  $\tilde{D}^u \subset D_{n_0}^u$  centrado en  $q_{n_0}$  tal que todo vector en  $T_q \tilde{D}^u$  posea pendiente  $\lambda$  que satisface

$$\lambda \leq \frac{b-1}{2},$$

para todo  $p \in \tilde{D}^u$ .

Sea  $v \in T_p \widetilde{D}^u$  para  $p \in \widetilde{D}^u$  y sea  $\lambda_{n_0}$  su pendiente. Calculamos la pendiente de los iterados de  $v$ ;

$$\lambda_{n_0+1} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{\frac{1}{2}(b+1)} = \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b_1}.$$

Entonces

$$\lambda_{n+n_0} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + \frac{k_1}{b_1 - 1}.$$

De donde existe  $\hat{n}$  tal que para todo  $n \geq \hat{n}$

$$\lambda_{n+n_0} \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{b_1 - 1} \right).$$

Entonces por la elección de  $v$  podemos encontrar  $n'$  tal que para todo  $n \geq n'$  las pendientes de los vectores tangentes a  $f^n(\widetilde{D}^u) \cap V_1$  sean menores que  $\varepsilon(1 + (b_1 - 1)^{-1})$ . y por ende menores que  $\varepsilon$ . Finalmente comparamos las normas de los tangentes a  $f^n(\widetilde{D}^u) \cap V_1$  con la de sus imágenes por  $Df$

$$(1) \quad \frac{\sqrt{\|v_{n+1}^s\|^2 + \|v_{n+1}^u\|^2}}{\sqrt{\|v_n^s\|^2 + \|v_n^u\|^2}} = \frac{\|v_{n+1}^u\|^2}{\|v_n^u\|^2} \sqrt{\frac{1 + \lambda_{n+1}^2}{1 + \lambda_n^2}}.$$

Acotamos el primer factor de 1 por

$$\frac{\|v_{n+1}^u\|^2}{\|v_n^u\|^2} \geq \lambda^{-1} - k - k\lambda_n.$$

Entonces 1 es una cantidad mayor que 1. Luego el diámetro de  $f^n(\widetilde{D}^u) \cap V_1$  crece en cada iterado. Además sabemos que las pendientes de los vectores en su espacio tangente tiene pendiente uniformemente pequeña, por lo que podemos concluir que existe  $N$ , tal que para todo  $n \geq N$  el conjunto  $f^n(\widetilde{D}^u) \cap V_1$  se encuentra arbitrariamente cercano de  $B^u$  en la topología  $C^1$ . □

Con ayuda del Lema de la inclinación construiremos las foliaciones estable e inestable en una vecindad del punto  $p$ . Es decir construiremos foliaciones  $\mathcal{F}^s$  y  $\mathcal{F}^u$  mutuamente transversales en una vecindad del punto  $p$ , tal que las hojas  $\mathcal{F}^s(p)$  y  $\mathcal{F}^u(p)$  que pasan por  $p$  satisfacen

$$\mathcal{F}^u(p) \subset W^u(p), \mathcal{F}^s(p) \subset W^s(p).$$

Para ello, consideraremos  $N \subset W^u(p)$  tal que todo punto de  $W^u(p)$  posea al menos un iterado en el interior de  $N$ . Luego realizamos una foliación, que denotaremos  $\mathcal{F}^s$ , por discos transversales en  $N$ . Es decir



tomamos un disco  $D$  con  $\dim(D) = \dim(W^s(p))$  y  $\Phi$  una inmersión de clase  $C^k$ , definida sobre  $\Phi : N \times D$ , tal que

$$\Phi(x, 0) = x \quad \mathcal{F}^s(x) = \Phi(x, D).$$

De esta manera obtenemos una foliación  $\mathcal{F}^s$  de clase  $C^k$  para  $N$ , la cual se puede construir de manera que

$$\mathcal{F}^s(f^{-1}(x)) \subset f^{-1}(\mathcal{F}^s(x)), \quad \text{si } x, f^{-1}(x) \in N.$$

Ahora extenderemos la foliación  $\mathcal{F}^s$  a una foliación invariante  $\mathcal{F}^s$  en una vecindad  $V$  del punto  $p$  (abusando del lenguaje las denotaremos a ambas de la misma manera).

Para todo  $n \geq 0, x \in N$  se define

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^s(f^{-(n+1)}(x)) &= f^{-1}(\mathcal{F}^s(f^{-n}(x))) \cap V, \\ \mathcal{F}^s(p) &= W^s(p) \cap V \end{aligned}$$

Es claro que la foliación así definida es invariante, entonces sólo nos queda asegurar la continuidad de  $\mathcal{F}^s(x)$ , pero esta propiedad está asegurada por el Lema de la inclinación y la elección de una vecindad  $V$  adecuada, por lo tanto la foliación  $\mathcal{F}^s$  es la foliación que buscábamos. El caso de la foliación  $\mathcal{F}^u$  se realiza de manera análoga.

En esta parte del estudio podemos notar como el análisis local de un sistema dinámico se transforma en una poderosa herramienta bajo la presencia de hiperbolicidad. A continuación concluiremos esta sección introduciendo el concepto de estabilidad local para difeomorfismos.

**DEFINICIÓN 3.11.** Sean  $f, g$  dos elementos de  $\text{Difeo}^k(M)$  y  $p, q$  dos puntos fijos de  $M$ . Diremos que  $f$  y  $g$  son topológicamente equivalentes en  $p$  y  $q$  respectivamente si existen vecindades  $V(p), W(q)$  y un homeomorfismo  $h : V(p) \rightarrow W(q)$  con  $h(p) = q$  tal que  $f$  y  $g$  son topológicamente conjugados via el homeomorfismo  $h$ , es decir  $f \circ h(x) = h \circ g(x)$  para todo  $x \in M$ .

Diremos que  $f$  es localmente estable en  $p$  si para toda vecindad  $U$  de  $p$  existe  $\mathcal{U} \subset \text{Difeo}^k(M)$  tal que  $f$  en  $p$  es topológicamente equivalente a  $g$  en  $q$ , para algún  $q \in U$  y todo  $g \in \mathcal{U}$ .

Veremos como ante la presencia de **puntos fijos hiperbólicos** un difeomorfismo  $f$  resulta ser localmente estable en  $p$ . Para ello necesitamos algunos resultados de isomorfismos hiperbólicos y por supuesto hacer uso del Teorema de Hartman-Grobman.

La demostración del siguiente Lema puede ser revisada en la Proposición 4,5 de [**PdM**].

LEMA 3.12. *Sea  $A$  un isomorfismo hiperbólico. Existe  $\delta > 0$  tal que, si  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  y  $\|A - B\| < \delta$  entonces  $B$  y  $A$  son localmente conjugados.*

A continuación revisaremos el Teorema enunciado anteriormente, haciendo uso del Lema 3.12

TEOREMA 3.13. *Si  $f \in \text{Difeo}^k(M)$  para algún  $k \geq 1$  y  $p \in M$  un punto fijo hiperbólico de  $f$ . Luego  $f$  es localmente estable en  $p$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.22 del Capítulo 1 existen  $\tilde{\mathcal{N}}(f)$ ,  $W(p)$  y una función continua  $\rho : \tilde{\mathcal{N}}(f) \rightarrow W(p)$  la cual a cada  $g$  le asocia su único punto fijo,  $p_g$ , en  $W(p)$  (este punto fijo es hiperbólico ya que el conjunto de los isomorfismos lineales es un conjunto abierto).

Si consideramos  $\mathcal{N}(f) \subset \tilde{\mathcal{N}}(f)$  adecuada tendremos que  $D_{p_g}g$  y  $D_p f$  satisfacen las hipótesis del Lema 3.12. Luego  $D_{p_g}g$  y  $D_p f$  son localmente conjugadas.

El Teorema de Hartman-Grobman asegura que  $f$  es localmente conjugado a  $D_p f$  y que  $g$  es localmente conjugado a  $D_{p_g}g$ . Por transitividad se tiene que  $f$  y  $g$  son localmente conjugados en  $p$  y  $p_g$  respectivamente.  $\square$

### 3. Conjuntos hiperbólicos

A continuación introduciremos la noción de **conjunto hiperbólico**, noción que generaliza la de **punto fijo hiperbólico** revisada en la sección anterior. Para establecer esta definición necesitamos el concepto de conjunto invariante, concepto que a su vez generaliza el de punto fijo. Diremos que un conjunto  $\Lambda \subset M$  es **invariante** con respecto a  $f : M \rightarrow M$  si  $\Lambda \subset \text{Dom}(f^{-1})$  y  $x \in \Lambda$  implica que  $f(x), f^{-1}(x) \in \Lambda$ .

Recordemos que una métrica Riemanniana en una variedad compacta  $M$ , define un producto interno y por lo tanto una norma en el espacio tangente  $T_x M$ , denotaremos a esta norma por  $\|\cdot\|$ .

#### 3.1. Definición.

DEFINICIÓN 3.14. *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^k$  para algún  $k \geq 1$ . Sea  $\Lambda \subset M$  un conjunto compacto e invariante por  $f$ . Diremos que  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico si existen constantes  $C > 0, 0 < \lambda < 1$  tal que para todo punto  $x \in \Lambda$  existe un par de subespacios lineales  $E_x^s, E_x^u$  en  $T_x M$  tales que*

- $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ .
- $D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$  y  $D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ .

- Existen constantes  $C > 0, 0 < \lambda < 1$  tales que

$$\|Df^n|_{E_x^s}\| \leq C\lambda^n \quad \text{y} \quad \|Df^n|_{E_x^u}\| \leq C\lambda^n \quad \text{para todo } n > 0.$$

Los subespacios  $E_x^s, E_x^u$  serán llamados, respectivamente, el **Espacio estable** y el **Espacio inestable** de  $Df$  en el punto  $x$ .

En general cuando hablemos de un conjunto hiperbólico  $\Lambda$  nos referiremos, a menos que se especifique lo contrario, a un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de clase  $C^k$ , para algún  $k \geq 1$ .

Si bien la definición de conjunto hiperbólico hace uso de una métrica Riemanniana en  $M$ , la siguiente Proposición nos dice que la propiedad de ser hiperbólico es independiente de la métrica escogida.

**PROPOSICIÓN 3.15.** *Si  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico con respecto a alguna métrica Riemanniana en  $M$  entonces lo es con respecto a cualquier otra métrica Riemanniana. En particular, la constante  $\lambda$  de la Definición 3.14, puede escogerse de manera independiente de la métrica.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  dos normas inducidas por dos métricas Riemannianas, distintas, en  $M$ . Supongamos que  $\Lambda$  es hiperbólico con respecto a  $\|\cdot\|_1$ , con constantes  $C$  y  $\lambda$  como en la Definición 3.14. Probaremos que  $\Lambda$  también es hiperbólico con respecto a  $\|\cdot\|_2$ .

Debido a la compacidad de  $\Lambda$  y a la continuidad de la norma, existen constantes  $k, K$  tales que

$$k \leq \frac{\|w\|_1}{\|w\|_2} \leq K \quad \text{para todo } w \in T_x M.$$

Luego para cualquier  $u \in E_x^s, v \in E_x^u$

$$\|D_x f^n u\|_2 \leq K \|D_x f^n u\|_1 \leq K c \lambda^n \|u\|_1 \leq K k^{-1} C \lambda^n \|u\|_2,$$

$$\|D_x f^{-n} v\|_2 \leq K \|D_x f^{-n} v\|_1 \leq K c \lambda^n \|v\|_1 \leq K k^{-1} C \lambda^n \|v\|_2.$$

□

El siguiente resultado nos permite construir una métrica, que llamaremos una **métrica adaptada del sistema** o **métrica de Lyapunov**, tal que  $C = 1$ , donde  $C$  es la constante de la Definición 3.14.

**PROPOSICIÓN 3.16 (Métrica Adaptada).** *Para todo conjunto hiperbólico  $\Lambda \subset M$  existe una métrica Riemanniana en  $M$  tal que para alguna constante  $0 < \sigma < 1$*

$$\|Df|_{E^s(x)}\| \leq \sigma, \quad \|Df^{-1}|_{E^u(x)}\| \leq \sigma.$$

Donde  $\|\cdot\|$  es la norma inducida por la métrica.

DEMOSTRACIÓN. Dada una métrica Riemanniana arbitraria, denotaremos el producto interno por  $L(\cdot, \cdot)$ . Para  $u, v \in T_x M$  sea

$$(f^*L)(u, v) = L(D_x f u, D_x f v).$$

Definiremos un nuevo producto interno en  $T_\Lambda M$  como sigue

$$(2) \quad L^*(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = \sum_{n>0} f^{n*} L(u_1, u_2) + f^{-n*} L(v_1, v_2),$$

donde  $u_1, u_2 \in E_x^s, v_1, v_2 \in E_x^u$  y  $x \in \Lambda$ . Aplicando la Definición 3.14 para  $u_1 = u_2 = u$  y  $v_1 = v_2 = v$  se tiene que

$$f^{n*} L(u, u) + f^{-n*} L(v, v) = \|Df^n u\|^2 + \|Df^{-n} v\|^2 \leq C^2 \lambda^{2n} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Luego 2 es un suma convergente.

Para  $u \in E^s$ , definimos  $\|u\|^* = L^*(u, u)^{1/2}$ . Se tiene que

$$(\|u\|^*)^2 = \|u\|^2 + (\|Df u\|^*)^2,$$

$$\|Df u\|^* = \left( \sum_{n>0} \|Df^n u\|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n>0} C^2 \lambda^{2n} \|u\|^2 \right)^{1/2} = \frac{c\lambda}{1-\lambda} \|u\|.$$

Por lo tanto

$$(3) \quad \|Df u\|^* \leq \sqrt{1 - \left( \frac{1-\lambda}{c\lambda} \right)^2} \|u\|^*,$$

y análogamente para  $v \in E^u$

$$(4) \quad \|Df^{-1} v\|^* \leq \sqrt{1 - \left( \frac{1-\lambda}{c\lambda} \right)^2} \|v\|^*.$$

Extendemos  $L^*$  a un producto interno continuo y definido positivamente en  $T M$  para luego aproximarlos por un producto interno  $L_1$  de clase  $C^\infty$  tal que las desigualdades 3 y 4 sigan siendo válidas para la norma inducida por  $L_1$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 3.17 (Continuidad). *Los subespacios  $E_x^u, E_x^s$  tienen dimensión localmente constante y dependen de manera continua del punto  $x$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos  $M$  una variedad de dimension  $n$ . Sea  $x_k \rightarrow x$  una sucesión convergente en  $M$  y  $\{v_1^k, \dots, v_{i_k}^k\}$  una base ortonormal de  $E_{x_k}^s$ .

Pasando a subsucesiones podemos asumir que  $i_k = i$  es constante y que  $\{v_j^k\} \rightarrow v_j \in T_x M$  para  $1 \leq j \leq i$ . Es claro que el conjunto  $\{v_1, \dots, v_i\}$  es un conjunto ortonormal. Por otro lado, si se define

$$E^{s,n} = \{u \in T_x M \mid \|D_x f^n u\| \leq C \lambda^n \|u\|\},$$

tenemos que para cada  $n$ ,  $E^{s,n}$  es un conjunto cerrado, luego

$$E^s = \bigcup_{x \in \Lambda} E_x^s = \bigcap_{n \geq 0} E^{s,n},$$

es un conjunto cerrado. Por lo tanto  $\{v_1, \dots, v_i\} \subset E_x^s$

Finalmente para ver que estos vectores generan  $E_x^s$  basta considerar una base ortonormal en  $E_{x_k}^u$  que complemente a la base  $\{v_1^k, \dots, v_i^k\}$ . Al igual que antes se puede suponer que estos convergen a un conjunto ortogonal en  $E_x^u$  con  $n - i$  elementos. Luego por un argumento dimensional se concluye la demostración.  $\square$

Recordemos  $\angle(u, v)$  denota el ángulo entre los subespacios generados por vectores  $u, v$ . La definición de ángulo entre subespacios fue dada en Definición 2.20.

**COROLARIO 3.18.** *Los subespacios  $E_x^s, E_x^u$  son uniformemente transversales, es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$\angle(u, v) \geq \alpha \quad \text{para todo } u \in E_x^s, v \in E_x^u, \text{ para todo } x \in \Lambda.$$

**DEFINICIÓN 3.19.** *Sea  $v \in T_x M = E_x \oplus F_x$ ,  $v = v^e + v^f$  donde  $v^e \in E, v^f \in F$ . Definiremos el **cono estable** de tamaño  $\alpha > 0$ ,  $K_\alpha^e(x)$ , asociado a la descomposición  $E, F$  como:*

$$K_\alpha^e(x) := \{v \in T_x M \mid \|v^f\| \leq \alpha \|v^e\|\}.$$

*Análogamente se define el **cono inestable** de tamaño  $\alpha$ ,  $K_\alpha^e(x)$ , asociado a  $E, F$  como:*

$$K_\alpha^e(x) := \{v \in T_x M \mid \|v^f\| \leq \alpha \|v^e\|\}.$$

Denotaremos por  $K_\alpha^e(\Lambda) \subset TM$  o simplemente  $K_\alpha^e$  cuando  $\Lambda$  este claro en el contexto, como la colección de los conos  $K_\alpha^e(x)$  asociados a una descomposición continua de  $T_x M$  para todo  $x \in \Lambda$ .

Consideremos un conjunto hiperbólico  $\Lambda$  y su descomposición invariante del espacio tangente  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ . Sean  $K_\alpha^s, K_\alpha^u$  las familias de conos asociadas a estos subespacios. Sea  $U$  una vecindad de  $\Lambda$ , como los subespacios  $E^s, E^u$  son continuos, estos se pueden extender a la vecindad  $U$  de manera continua. Luego se tiene la siguiente Proposición.

**PROPOSICIÓN 3.20.** *Sea  $\Lambda_\varepsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \Lambda) < \varepsilon\}$ .*

1. *Para todo  $\alpha > 0$  existe  $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$  tal que si  $f^i(\Lambda_\varepsilon) \subset U$ ,  $i = \pm 1$  entonces*

$$D f_x(K_\alpha^u(x)) \subset \text{int}(K_\alpha^u(f(x))),$$

$$D f_{f(x)}^{-1}(K_\alpha^s(f(x))) \subset \text{int}(K_\alpha^s(x)).$$

Para todo  $x \in \Lambda_\varepsilon$ .

2. Para todo  $\delta > 0$  existen  $\alpha > 0$  y  $\varepsilon > 0$  tales que para todo  $x \in \Lambda_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \|D f_x^{-1} v\| &\leq (\lambda + \delta) \|v\| & v \in K_\alpha^u, \\ \|D f_x v\| &\leq (\lambda + \delta) \|v\| & v \in K_\alpha^s. \end{aligned}$$

La siguiente Proposición es el recíproco de la Proposición 3.20.

**PROPOSICIÓN 3.21** (Familias de Conos). *Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto e invariante para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Asumamos que para todo  $x \in \Lambda$  existe una descomposición*

$$\tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^u = T_x M,$$

que depende de manera continua del punto  $x$ , junto con una constante  $\alpha > 0$  tal que los  $\alpha$ -conos  $K_\alpha^s, K_\alpha^u$  determinados por los subespacios satisfacen

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad D_x f(K_\alpha^u(x)) &\subset K_\alpha^u(f(x)), \quad D_x f^{-1}(K_\alpha^u(f(x))) \subset K_\alpha^s(x). \\ \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D_x f v\| &< \|v\| \quad \text{para todo } v \in K_\alpha^s(x), \\ \|D_x f^{-1} v\| &< \|v\| \quad \text{para todo } v \in K_\alpha^u(x). \end{aligned}$$

Entonces  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico.

**DEMOSTRACIÓN.** Por la compacidad de  $\Lambda$  existe una constante  $\lambda \in (0, 1)$  independiente de  $x$ , tal que

$$\|D_x f v\| \leq \lambda \|v\|, \quad \|D_x f^{-1} u\| \leq \lambda \|u\|,$$

para todo  $v, u$  en  $K_\alpha^s(x), K_\alpha^u(x)$  respectivamente.

Ahora para,  $x \in \Lambda$ , los subespacios

$$E_x^s = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^n(x)} f^{-n} K^s(f^n(x)), \quad E_x^u = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^n(x)} K^u(f^n(x)).$$

satisfacen la definición de hiperbolicidad con constantes  $C = 1$  y  $\lambda$ .  $\square$

**3.2. Propiedades.** Revisaremos una serie de propiedades básicas para conjuntos hiperbólicos, en todas las cuales  $d(\cdot, \cdot)$  será la distancia, entre dos puntos  $x, y$  de  $M$ .

La primera de ellas es la generaliza el Teorema de la Variedad Estable, revisado en la sección anterior. Para ello comenzaremos definiendo la variedad estable local y la variedad inestable local.

DEFINICIÓN 3.22. La *variedad estable local*  $W_\varepsilon^s(x)$  de tamaño  $\varepsilon > 0$  para el punto  $x \in M$  se define como:

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

De manera analoga se define la *variedad inestable local*  $W_\varepsilon^u(x)$  de tamaño  $\varepsilon$  para el punto  $x \in M$  como

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

TEOREMA 3.23 (Variedades estables e inestables). Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , con  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ . Supongamos que  $f$  es de clase  $C^k$ . Existe  $0 < \mu < 1$  y  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in \Lambda$ ,

- $W_\varepsilon^s(x)$  es un disco incrustado de clase  $C^k$ , tangente a  $E_x^s$  en el punto  $x$ .
- $d(f(y), f(x)) \leq \mu d(x, y)$ , para todo  $y \in W_\varepsilon^s(x)$ .
- La familia de discos  $W_\varepsilon^s(x)$  varía de manera continua con  $x$ , en la topología  $C^k$ .

OBSERVACIÓN 3.24. Notemos que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$  es sólo el punto  $x$ .

PROPOSICIÓN 3.25 (Expansividad). Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Luego  $f$  es un difeomorfismo expansivo sobre  $\Lambda$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varepsilon$  dado por el Teorema de la variedad estable. Sean  $x \neq z$  dos puntos en  $M$ , si  $d(f^n(x), f^n(z)) \leq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  entonces  $x \in W_\varepsilon^s(z), x \in W_\varepsilon^u(z)$ . Luego  $x \in W_\varepsilon^s(z) \cap W_\varepsilon^u(z) = \{z\}$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 3.26 (Estabilidad). Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Existe una vecindad  $V$  de  $\Lambda$  y una  $C^1$ -vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$  el conjunto invariante

$$\Lambda_V^g = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} g^k(V),$$

es hiperbólico para  $g$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$  la descomposición hiperbólica del espacio tangente en el punto  $x \in \Lambda$  para  $f$ . Extendamos de manera continua la descomposición anterior a un abierto  $V$  que contenga al conjunto  $\Lambda$ . Fijemos  $\gamma > 0$  pequeño y para todo  $x \in V$  consideremos los conos  $K_\gamma^u(x), K_\gamma^s(x)$ .

Sea  $x \in \Lambda$ . La hiperbolicidad nos permite asegurar que

- $D_x f(K_\gamma^u(x)) \subset K_\gamma^u(f(x)), \quad (D_x f)^{-1}(K_\gamma^u(x)) \subset K_\gamma^s(f^{-1}(x)),$

■

$$\begin{cases} \|D_x f v\| \geq \frac{1}{\lambda(1+\gamma)} \|v\| & \text{si } v \in K_\gamma^u(x), \\ \|D_x f u\| \geq \frac{1+\gamma}{\lambda} \|u\| & \text{si } v \in K_\gamma^s(x). \end{cases}$$

Por lo tanto si fijamos  $\delta > 0$  pequeño, por la continuidad de la extensión y la continuidad de  $Df, Df^{-1}$  podemos encontrar una vecindad  $V$  de  $\Lambda$  tal que para todo  $x \in \bar{V}$  se satisfagan las condiciones 2.2.1, con  $\lambda$  reemplazado por  $\lambda + \delta$ , no solo para  $f$  sino también para todo  $g$  suficientemente cercano a él en la topología  $C^1$ . Es decir

- $D_x g(K_\gamma^u(x)) \subset K_\gamma^u(g(x)), \quad (D_x g)^{-1}(K_\gamma^u(x)) \subset K_\gamma^s(g^{-1}(x)),$
- Para todo vector  $v$  distinto del vector cero.

$$\begin{aligned} \|D_x g v\| &\geq \frac{1}{(\lambda + \delta)(1 + \gamma)} \|v\|, & \text{si } v \in K_\gamma^u(x), \\ \|D_x g v\| &\geq \frac{1 + \gamma}{\lambda + \delta} \|v\|, & \text{si } v \in K_\gamma^s(x). \end{aligned}$$

Luego si  $\gamma$  y  $\delta$  se escogen de manera adecuada aplicando la Proposición 3.21, se tiene la hiperbolicidad de  $\Lambda_V^g$ .  $\square$

En general se tiene que  $\Lambda \neq \Lambda_V^f$ , razón por lo que se realiza la siguiente Definición.

**DEFINICIÓN 3.27.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para  $f : M \rightarrow M$ . Si existe una vecindad  $V$  de  $\Lambda$  tal que  $\Lambda = \Lambda_V^f$ , diremos que  $\Lambda$  es un conjunto localmente maximal o básico.*

Si bien con la proposición anterior, se puede vislumbrar una cierta noción de estabilidad para conjuntos hiperbólicos, el siguiente teorema es el resultado mas general.

**TEOREMA 3.28.** *Sea  $\Lambda \subset M$  un conjunto hiperbólico para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Para cualquier vecindad  $V$  de  $\Lambda$  y cualquier  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $g : V \rightarrow g(V) \subset M$  es un difeomorfismo con*

$$d_{C^1}(g, f|_V) < \varepsilon,$$

*entonces existe un conjunto,  $\Lambda^g \subset V$ , hiperbólico e invariante bajo  $g$  y existe un homeomorfismo*

$$h : \Lambda^g \rightarrow \Lambda,$$

*con  $d_{C^0}(Id, h) + d_{C^0}(Id, h^{-1}) < \delta$ , de manera que*

$$h \circ g|_{\Lambda^g} = f|_\Lambda \circ h.$$

*Mas aún si  $\delta$  se escoge pequeño, el homeomorfismo  $h$  es único.*



La demostración del Teorema 3.28, la podríamos realizar inmediatamente, pero la pospondremos por un momento como una manera de ilustrar la fuerza del Teorema del sombreado de Anosov, el cual enunciaremos sin demostrar, esta demostración puede encontrarse en la Sección 1 del Capítulo 18 de [KH].

**TEOREMA 3.29** (Teorema del sombreado de Anosov). *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Entonces existe una vecindad  $U$  del conjunto  $\Lambda$  y constantes  $\varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$  con las siguientes propiedades.*

- *Para todo  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo difeomorfismo  $g : U \rightarrow g(U) \subset M$  en una  $\varepsilon_0 - C^1$  vecindad de  $f$ , para todo espacio topológico  $Y$ , para todo homeomorfismo  $h : Y \rightarrow Y$  y para toda función  $\alpha \in C^0(Y, U)$  con  $d_{C^0}(\alpha \circ h, g \circ \alpha) < \varepsilon$  existe  $\beta \in C^0(Y, U)$  tal que  $\beta \circ h = g \circ \beta$  y  $d_{C^0}(\alpha, \beta) < \delta$*
- *Si  $\bar{\beta} \in C^0(Y, U)$  es tal que  $\bar{\beta} \circ h = g \circ \bar{\beta}$  y  $d_{C^0}(\alpha, \bar{\beta}) < \delta_0$  entonces  $\bar{\beta} = \beta$ .*

Como claramente la órbita de un difeomorfismo cercano a  $f$  constituye una  $\varepsilon$ -órbita de  $f$ , podemos pasar a revisar la demostración del Teorema 3.28.

**DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3.28.** Para no confundirnos con la notación, el difeomorfismo  $g$  del Teorema 3.28 lo denotaremos por  $l$ .

La demostración consiste en aplicar el Teorema 3.29 para determinadas condiciones. Sea  $\delta_0$  dado por el Teorema 3.29 y consideremos

$$\varepsilon < \frac{\delta_0}{2}, \quad Y = \Lambda, \quad \alpha = Id|_{\Lambda}, \quad g = f.$$

Por el Teorema 3.29 encontramos un único  $\beta : \Lambda \rightarrow U$  tal que,

$$\beta \circ f = l \circ \beta.$$

Como  $\Lambda^l = \beta(\Lambda)$  es invariante, es hiperbólico.

Veamos ahora que la función  $\beta$  es un homeomorfismo. Para ello consideremos

$$\varepsilon < \frac{\delta_0}{2}, \quad Y = \Lambda^l, \quad \alpha = Id|_{\Lambda^l}, \quad g = l$$

entonces el Teorema 3.29 asegura la existencia de un homeomorfismo  $h$  para el cual se tiene que

$$h \circ l = f \circ h$$

Además notemos que si  $\varepsilon$  es pequeño podemos escoger indistintamente  $f$  ó  $l$ , por lo tanto afirmamos que

$$h \circ \beta = Id,$$

es decir  $\beta$  es el homeomorfismo buscado. Debemos probar la afirmación, para ello sea  $\alpha \circ f = f \circ \alpha$ , (la conjugación trivial) y  $\bar{\beta} \circ f = f \circ \bar{\beta}$  para  $\bar{\beta} = h \circ \beta$ . Luego

$$d_{C^0}(\alpha, \bar{\beta}) = d_{C^0}(Id, h \circ \beta) \leq \delta_0.$$

Entonces por la unicidad asegurada por el Teorema 3.29, se tiene que  $\bar{\beta} = Id|_{\Lambda}$ . Con lo que se concluye la prueba del teorema.  $\square$

Como consecuencia del Teorema 3.29 obtendremos además el siguiente par de lemas, los cuales nos permiten comparar la estructura de órbitas de un sistema dinámico con una perturbación del mismo.

**LEMA 3.30** (Lema del sombreado). *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Existe una vecindad  $U$  de  $\Lambda$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe un  $\varepsilon > 0$ , tal que toda  $\varepsilon$ -órbita contenida en  $U$  es  $\delta$ -sombreada por una órbita de  $f$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para la demostración ocuparemos el Teorema 3.28 bajo las siguientes hipótesis.

$$Y = (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{discreta}), \quad f = g, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad h(n) = n + 1,$$

Y para  $(x_n)$  una  $\varepsilon$ -órbita se define la función  $\alpha$  por  $\alpha(n) = x_n$  así como la función  $\beta$  obtenida por el Teorema da origen a la órbita  $\beta(n) = \{f^n(x)\}$ .

Entonces por Teorema 3.28 se tiene que  $d(x_n, f^n(x)) < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$   $\square$

**LEMA 3.31** (Closing lemma). *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Existe una vecindad  $V$  de  $\Lambda$  y constantes  $\delta > 0, \varepsilon_1 > 0$ , tales que para todo  $\varepsilon < \varepsilon_1$  y para toda  $\varepsilon$ -órbita periódica  $\{x_0, \dots, x_m\}$ , existe una órbita periódica  $\mathcal{O}(y) \subset V$  tal que para  $i = 1, \dots, m$  se tiene que  $dist(x_i, f^i(y)) < \delta$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración sigue de manera similar que el lema anterior. En este caso consideraremos

$$g = f, \quad Y = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad h(k) = k + 1 \pmod{m}$$

y las funciones  $\alpha, \beta$  serán escogidas tal como en el Lema anterior. Bajo estas condiciones el resultado se tiene por el Teorema 3.28.  $\square$

Para finalizar esta sección un importante corolario del Closing Lemma

**COROLARIO 3.32.** *Sea  $\Lambda$  hiperbólico para el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Sea  $V$  tal que  $\Lambda_V^f$  es un conjunto hiperbólico. Luego el conjunto de los puntos periódicos,  $Per(f)$ , es denso en el conjunto no errante  $\Omega(f/\Lambda_V^f)$ .*

#### 4. Axioma A y $\Omega$ -estabilidad

Un tema clásico dentro de la teoría de sistemas dinámicos, consiste en determinar cuando propiedades interesantes de un sistema dinámico persisten bajo perturbaciones. Desde este punto de vista, especial importancia revisten aquellos sistemas que son iguales, salvo por un cambio de coordenadas (continuo), a todo otro sistema cercano. Este tipo de sistemas poseen la importante característica de mantener inalterables, bajo perturbaciones, las propiedades topológicas de su estructura de órbitas.

Para el caso de difeomorfismos sobre variedades compactas, la manera precisa de enunciar lo anterior es introduciendo el concepto de estabilidad estructural.

**DEFINICIÓN 3.33.** *Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^k$  para algún  $k \geq 1$ . Diremos que  $f$  es  $C^k$ -estructuralmente estable, si posee una  $C^k$ -vecindad  $\mathcal{U}$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$ ,  $g$  es topológicamente conjugado a  $f$ .*

Este concepto, introducido en la década del '30 por Andronov y Pontrjagin [AP], tuvo un importante desarrollo en los años '60 cuando los trabajos de Birkhoff y Smale permitieron determinar que la estabilidad estructural podía coexistir con formas de recurrencia no triviales. Posteriormente los trabajos de Anosov, Palis y Smale entregaron importantes familias de difeomorfismos que resultaron ser estructuralmente estables. En vista de estos resultados surgió el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes que permitieran asegurar la estabilidad estructural.

En dirección hacia exhibir cuales son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la estabilidad estructural debemos introducir un par de definiciones.

**DEFINICIÓN 3.34.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Omega(f)$  su conjunto no errante. Se dirá que  $f$  satisface el **Axioma A** o es un difeomorfismo del tipo **Axioma A**, si  $\Omega(f)$  es un conjunto hiperbólico y el conjunto de los puntos periódicos  $\text{Per}(f)$  es denso en  $\Omega(f)$ .*

Diremos que un difeomorfismo que satisface el Axioma A, satisface la condición de **transversalidad fuerte** si para todo punto  $x \in \Omega(f)$  las variedades estables e inestables de  $x$  se intersectan transversalmente.

Robbin [R] y Robinson [Ro1] probaron que la condición de ser Axioma A y satisfacer la condición de transversalidad fuerte implica el ser estructuralmente estable. El resultado de Robbin y Robinson es válido para toda topología  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , es decir tempranamente se

resolvía el problema de encontrar condiciones que fuesen necesarias para la estabilidad estructural.

Para probar que estas condiciones eran también suficientes, el primer paso lo dio el mismo Robinson [**Ro2**] quien probó que el ser estructuralmente estable sumado con la condición de ser Axioma A implicaba la condición de transversalidad fuerte. Es decir en este punto de la historia el problema a resolver era, lo que se conoce como la conjetura de estabilidad,

**CONJETURA 3.35** (Palis-Smale). *Todo difeomorfismo  $C^k$ -estable es del tipo Axioma A.*

En 1988, Mañé, en un muy original y destacable trabajo, probó la conjetura de estabilidad para el caso de la topología  $C^1$ .

Si bien todo lo que hemos hablado (y hablaremos) está en el contexto de difeomorfismos sobre variedades, podemos apartarnos por unos segundos para reseñar que en 1998, Hayashi [**H**] extendió el resultado de Mañé para el caso de flujos. Es decir, en resumen tenemos el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.36** (Estabilidad estructural). *Un flujo o un difeomorfismo de clase  $C^1$  es estructuralmente estable si y sólo si es Axioma A y satisface la condición de transversalidad fuerte.*

De manera paralela al estudio de la estabilidad estructural se comenzaron a estudiar propiedades más débiles de estabilidad. Una muy importante es la propiedad de ser  $\Omega$ -estable. Esta noción, que pasaremos a revisar, nos permitirá estudiar la clase de los difeomorfismos Axioma A.

**DEFINICIÓN 3.37.** *Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de clase  $C^k$ , se dirá  $C^k$ - $\Omega$  estable si existe una  $C^k$ -vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$ ,  $g|_{\Omega(g)}$  es topológicamente conjugado a  $f|_{\Omega(f)}$ .*

De ahora en adelante, nos dedicaremos a encontrar condiciones que nos permitan asegurar cuando un difeomorfismo es  $\Omega$ -estable, en otras palabras nos dedicaremos a probar el siguiente teorema de Smale [**Sm**].

**TEOREMA 3.38** (Smale). *Supongamos que  $f \in \text{Diff}^k(M)$  es un difeomorfismo Axioma A y que sus conjuntos básicos satisfacen la condición de no ciclos. Entonces  $f$  es  $C^k$ - $\Omega$  estable.*

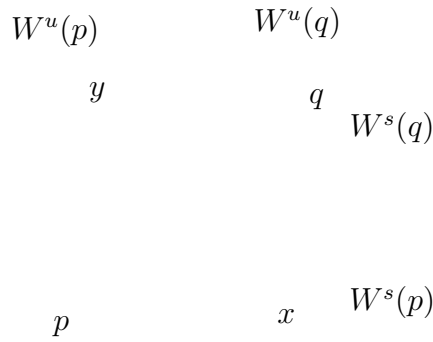
Las razones por las cuales vamos a estudiar esta parte de la teoría pueden parecer antojadizas, pero el camino hacia el resultado esperado, nos irá mostrando una variedad de propiedades y estructuras que conforman una parte importante de la teoría de dinámica hiperbólica.

**4.1. El conjunto  $\Omega(f)$  es aislado.** En la serie de propiedades que revisaremos a continuación  $f : M \rightarrow M$  será un difeomorfismo de clase  $C^k$  para algún  $k \geq 1$ . Comenzaremos con una simple y bella proposición.

PROPOSICIÓN 3.39 (Cloud lema). *Sean  $p, q$  dos puntos periódicos hiperbólicos de  $f$ . Supongamos que*

$$x \in W^s(p) \pitchfork W^u(q), \quad y \in W^u(p) \pitchfork W^s(q).$$

*Entonces  $x, y$  son puntos no errantes de  $f$ .*



DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad podemos asumir que  $p, q$  son puntos fijos de  $f$ . Recordemos que, por el Lema de la inclinación, dado un disco  $B$  en  $W^u(z)$  y un disco  $D$  transversal a  $W^s(z)$  existe un tiempo  $N$  tal que para todo  $n \geq N$  los iterados  $f^n(D)$  contienen un disco que se encuentra  $\varepsilon$ -cercano de  $B$  en la topología  $C^1$ .

Sea  $B$  un disco centrado en  $y$  contenido en  $W^u(p)$  y sea  $D$  un disco centrado en  $x$  contenido en  $W^u(q)$ . Por el Lema de la inclinación existe  $n_1$  tal que  $f^{n_1}(D)$  interseca transversalmente a  $W^s(q)$  en un punto  $z$ . Tomemos ahora un disco  $D_1$ , contenido en  $f^{n_1}(D)$ , centrado en el punto  $z$ . Nuevamente aplicamos el lema de la inclinación para asegurar la existencia de un tiempo  $n_2$  tal que  $f^{n_2}(D_1)$  contiene un disco arbitrariamente cercano a  $D$ . Por lo tanto el punto  $x$  es un punto no errante. El resultado para el punto  $y$  se obtiene de manera análoga.  $\square$

La Proposición recién demostrada, puede extenderse a cualquier familia finita de intersecciones transversales, además en el caso particular de un punto homoclínico transversal nos dice, que este es un punto no errante.

El siguiente Lema es otro de los frutos del Teorema de la variedad estable.

LEMA 3.40. *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico. Existen  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  tales que para todo  $x, y \in \Lambda$  con  $d(x, y) < \delta$  las variedades  $W_\varepsilon^s(x), W_\varepsilon^u(y)$  se intersectan transversalmente en un único punto.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que  $W_\varepsilon^s(x), W_\varepsilon^u(x)$  son respectivamente tangentes a  $E^s(x), E^u(x)$  en el punto  $x$  y además varían continuamente con  $x$  en la topología  $C^1$ . Luego es claro que existe  $\varepsilon > 0$  de manera que  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) = \{x\}$ . Por lo tanto existe  $\delta(x)$  tal que si  $y \in \Lambda$  con  $d(x, y) < \delta(x)$  entonces las variedades  $W_\varepsilon^s(x), W_\varepsilon^u(y)$  se intersectan en un único punto. Finalmente por la compacidad de  $\Lambda$  la constante  $\delta(x)$  puede escogerse independiente de  $x$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 3.41. *Al par de números  $(\delta, \varepsilon)$ , de la proposición anterior, los llamaremos un tamaño adaptado para el conjunto hiperbólico  $\Lambda$ . Notemos que no necesariamente  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \in \Lambda$ .*

DEFINICIÓN 3.42. *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico. Se dirá que posee estructura local de producto si existe un tamaño adaptado  $(\delta, \varepsilon)$  de manera que*

$$W_\varepsilon^s(x) \pitchfork W_\varepsilon^u(y) \in \Lambda \quad \text{para todo } x, y \in \Lambda \text{ con } d(x, y) < \delta.$$

PROPOSICIÓN 3.43. *Sea  $f$  un difeomorfismo que satisface el Axioma A entonces  $\Omega(f)$  posee estructura local de producto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(\delta, \varepsilon)$  un tamaño adaptado para  $\Omega(f)$ . Sean  $x, y$  dos puntos en  $\Omega(f)$  a distancia menor que  $\delta$ . Basta considerar el caso en que  $x, y$  son puntos periódicos, ya que estos forman un conjunto denso en  $\Omega(f)$ . Pero por el Cloud Lema si es que ambos puntos son periódicos entonces el punto en el que se intersectan las variedades estable e inestable es un punto no errante, luego se tiene el resultado buscado.  $\square$

A continuación revisaremos sin demostrar un resultado conocido como el Lema del Sombreado de Bowen, este nos será útil para probar el principal resultado de esta sección, una demostración de este resultado puede encontrarse en [Sch].

LEMA 3.44 (Lema del Sombreado de Bowen). *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico con estructura local de producto. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita en  $\Lambda$  puede ser  $\varepsilon$ -sombreada por un órbita contenida en  $\Lambda$ .*

PROPOSICIÓN 3.45. *Un conjunto hiperbólico posee estructura local de producto si y solamente si es aislado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico con estructura local de producto y sea  $\varepsilon$  su constante de expansividad.

Probaremos que existe una vecindad  $U$  de  $\Lambda$  tal que si

$$\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset U, \quad \text{entonces, } x \in \Lambda.$$

Ocupando la continuidad uniforme de  $f$ , escogeremos  $\bar{\alpha} > 0$  tal que si  $d(x, y) < \bar{\alpha}$  entonces  $d(f(x), f(y)) < \delta/2$  para todo  $x, y \in \Lambda$ . Luego escogemos  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}, \bar{\alpha}\}$  donde  $\delta = \delta(\varepsilon/2)$  es dado por el Lema del Sombreado de Bowen.

Consideremos  $x$  tal que  $\{f^n(x)\} \subset U$ , donde  $U = B(\Lambda, \alpha)$ . Para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se define

$$x_n = \inf_{y \in \Lambda} d(f^n(x), y).$$

La colección  $\{x_n\}$  forma un  $\delta$ -pseudo órbita ya que para todo  $n \in \mathbb{Z}$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq d(f(x_n), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), x_{n+1}) \leq \frac{\delta}{2} + \alpha \leq \delta.$$

Entonces como  $\{x_n\}$  es una  $\delta$ -pseudo órbita, el Lema del sombreado de Bowen asegura la existencia de  $z \in \Lambda$  tal que

$$d(f^n(z), x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente tenemos que

$$d(f^n(x), f^n(z)) \leq d(f^n(x), x_n) + d(f^n(z), x_n) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Pero por expansividad se concluye que  $x = z$ . Es decir  $x \in \Lambda$ .

Ahora si es que  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico aislado, por definición sabemos que si existe una órbita  $\{f^n(x)\}$  contenida en  $B(\Lambda, a)$  para  $a > 0$ , en realidad ésta órbita se encuentra contenida en  $\Lambda$ .

Sea  $(\delta, \varepsilon)$  un tamaño adaptado para  $\Lambda$ , supongamos que  $a \geq \varepsilon$ . Sean  $x, y$  dos puntos en  $\Lambda$  de manera que

$$W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) = \{z\}.$$

Debemos probar que el punto  $z$  se encuentra en  $\Lambda$ . Sabemos que la órbita de  $z$ ,  $\varepsilon$ -sombrea la órbita positiva de  $x$  y  $\varepsilon$ -sombrea la órbita negativa de  $y$  luego  $\{f^n(z)\}$  se encuentra contenida en  $B(\Lambda, a)$ , ya que  $a \geq \varepsilon$ . Por lo tanto  $z \in \Lambda$ , es decir  $\Lambda$  posee estructura local de producto.  $\square$

**COROLARIO 3.46.** *Si  $f$  satisface el Axioma A entonces  $\Omega(f)$  es aislado.*

#### 4.2. Descomposición espectral y condición de no ciclos.

Otra importante propiedad de los difeomorfismos que satisfacen el Axioma A es que su conjunto no errante se descompone en una cantidad finita de “piezas” disjuntas.

**TEOREMA 3.47 (Descomposición Espectral).** *Si  $f$  satisface el Axioma A entonces su conjunto no errante,  $\Omega(f)$ , se descompone de manera única en una unión finita y disjunta de conjuntos transitivos*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k.$$

Los conjuntos  $\Omega_i$  los llamaremos los conjuntos básicos de  $f$ .

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar veamos que una tal descomposición es única. Supongamos que existe otra descomposición de  $\Omega(f)$  por conjuntos transitivos,

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_l$$

Veremos entonces que ambas descomposiciones deben ser la misma. Para ello escogemos  $x_i \in \Omega_i$  tal que  $\overline{\mathcal{O}(x_i)} = \Omega_i$ , luego existe un único  $j = j(i)$  tal que

$$\Omega_i \subset \Lambda_{j(i)}.$$

Por simetría, dado  $j(i)$  existe un único  $i = i(j)$  tal que

$$\Lambda_j \subset \Omega_{i(j)}.$$

Entonces  $\Omega_i = \Lambda_j$ . Luego podemos concluir que las descomposiciones son las mismas.

Notaremos por,  $\sim$ , la siguiente relación binaria definida para puntos  $x, z$  en  $\text{Per}(f)$ ,

$$x \sim z \quad \text{ssi} \quad W^s(x) \cap W^u(z) \text{ y } W^s(z) \cap W^u(x).$$

La relación,  $\sim$ , es reflexiva y simétrica además en virtud del Lema de la inclinación es una relación transitiva. Por ende,  $\sim$ , es una relación de equivalencia, la cual induce una partición en  $\text{Per}(f)$  a través de las clases de equivalencia que ella define, las cuales denotaremos por  $\{P_i\}_{i \in I}$ .

Por el Lema 3.40 sabemos que si  $d(x, y) < \delta$  entonces  $x \sim y$ , luego tenemos las siguientes propiedades para  $\{P_i\}_{i \in I}$ .

- Existen finitas clases de equivalencias  $P_i, i = 1, \dots, k$ . Ya que

$$\text{dist}(\overline{P_i}, \overline{P_j}) \geq \delta \quad \text{si } i \neq j.$$

Luego por la compacidad de  $\Omega(f)$  se concluye que  $I$  es un conjunto finito, digamos  $\{1, 2, \dots, k\}$ .



- Como  $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$  se tiene que

$$\Omega(f) = \bigcup_{i=1}^k \overline{P_i}.$$

- Dado  $i$  existe  $j$  tal que

$$f(\overline{P_i}) = \overline{P_j}.$$

Luego las clases de equivalencia son permutadas por la función  $f$ . Sean  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  las distintas orbitas bajo  $f$ , de  $\overline{P_j}$  para  $j = 1, \dots, k$  es decir

$$\Omega_1 = \overline{P_{1,1}} \cup \dots \cup \overline{P_{1,n_1}},$$

⋮

$$\Omega_N = \overline{P_{N,1}} \cup \dots \cup \overline{P_{N,n_N}}.$$

Ordenamos cada  $\Omega_i$  de manera que las clases de equivalencia satisfagan  $f(\overline{P_{i,j}}) = \overline{P_{i,j+1}}$ .

Por ultimo nos queda por probar que cada  $\Omega_i$  es un conjunto transitivo.

Para todo abierto  $U$  de  $\overline{P_{i,j}}$  y todo abierto  $V$  de  $\overline{P_{i,k}}$  con  $1 \leq j \leq k \leq N$ , sea  $W = f^{k-j}(U)$ , luego existe un entero  $m$  de manera que  $f^{-m}(W) \cap V \neq \emptyset$  ya que si  $x \in W, y \in V$  entonces  $x \sim y$ , luego por el resultado de Birkhoff, Teorema 2.8, se tiene la transitividad.  $\square$

Como dijimos al comienzo la motivación de esta sección era encontrar condiciones necesarias para asegurar la  $\Omega$ -estabilidad, bueno hasta ahora hemos desarrollado la primera de ellas, el ser Axioma A. A continuación revisaremos la segunda propiedad necesaria, para luego introducir el concepto de filtración, el cual nos permitirá concluir el resultado buscado.

**DEFINICIÓN 3.48** (Condición de no ciclos). *Sea  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  una colección de conjuntos compactos e invariantes por  $f$ , disjunta a pares. Denotaremos por  $\rightarrow$  a la siguiente relación binaria.*

$$\Lambda_i \rightarrow \Lambda_j \quad \text{si y solo si} \quad [W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j)] \setminus \bigcup_{r=1}^k \Lambda_r \neq \emptyset.$$

Se dirá que  $\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_m}$  forman un ciclo si

$$\Lambda_{i_1} \rightarrow \Lambda_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_{i_m} \rightarrow \Lambda_{i_1}.$$

Finalmente se dirá que la colección  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  satisface la condición de no ciclos si es que no existen ciclos entre ellos.

Si  $\Lambda_i \rightarrow \Lambda_j$  esto nos dice, que existe un punto, fuera de los  $\Lambda_i$ , que en un tiempo se encuentra en  $\Lambda_i$  y en otro en  $\Lambda_j$ .

Cuando  $\{\Lambda_i\}$  satisface la condición de no ciclos, podemos reordenar los índices de manera que  $\Lambda_i \rightarrow \Lambda_j$  implique  $i > j$ . Este orden de la colección  $\{\Lambda_i\}$  lo llamaremos un **orden filtrante**.

Consideremos una colección, creciente, finita, de subconjuntos compactos de  $M$ , es decir,

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M.$$

Una tal colección la llamaremos una filtración de  $f$  si

$$f(M_i) \subset \text{int}(M_i).$$

Donde  $\text{int}(M_i)$  denota el interior del conjunto  $M_i$ .

En este caso llamaremos a  $M_i \setminus M_{i-1}$  el  $i$ -ésimo nivel de la filtración y denotaremos por

$$K_i = K_i(f) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i \setminus M_{i-1})$$

al conjunto maximal invariante del  $i$ -ésimo nivel. Si la colección  $\{M_i\}$  es un filtración, entonces podemos definir de manera equivalente al conjunto  $K_i(f)$  como:

$$K_i(f) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i \setminus \text{int}(M_{i-1})) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\text{int}(M_i) \setminus M_{i-1}).$$

A continuación pasamos a enunciar un par de resultados, los cuales revisaremos sin su demostración, que nos permiten extender las propiedades de una filtración así como asegurar que la colección  $K_i(f)$  satisface la condición de no ciclos.

**TEOREMA 3.49.** *Sea  $\{M_i\}_{i=0}^k$  una filtración de  $f$ . Luego  $\{K_i\}$  es una colección disjunta de pares, de conjuntos aislados e invariantes bajo  $f$ . El  $i$ -ésimo nivel de la filtración es una vecindad aislante de  $K_i$ . La unión de los conjuntos  $K_i$  contiene al conjunto recurrente por cadenas  $\mathcal{R}(f)$ , además la colección  $\{K_i\}$  satisface la condición de no ciclos.*

**PROPOSICIÓN 3.50.** *Sea  $\{M_i\}_{i=0}^k$  una filtración de  $f$  entonces:*

- *Existe una  $C^0$ -vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$ ,  $\{M_i\}_{i=0}^k$  también es una filtración de  $g$ .*
- *Para toda vecindad  $U_i$  de  $K_i(f)$  existe una  $C^0$ -vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que, para todo  $g \in \mathcal{U}$ ,  $K_i(g) \subset U_i$ .*

El siguiente teorema, del cual solo esbozaremos su demostración, es el recíproco del Teorema 3.49

**TEOREMA 3.51.** *Sea  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  una colección disjunta a pares, de conjuntos compactos e invariantes bajo  $f$ , cuya unión contiene al conjunto límite  $L(f)$ . Si  $\{\Lambda_i\}$  satisface la condición de no ciclos y el orden de los índices es un orden filtrante, entonces existe una filtración  $\{M_i\}_{i=0}^k$  de  $f$  tal que  $K_i = \Lambda_i$ .*

**ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN.** Para cada  $i$ , consideremos una vecindad  $U_i$  de  $\Lambda_i$  tal que

$$\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset, \quad (f(\overline{U_i})) \cap \overline{U_j} = \emptyset.$$

La idea de la demostración consiste, básicamente, en analizar las cuencas de atracción de ciertos conjuntos atractores, proceso que se realiza en el Paso 4. Los pasos 1 a 3 son los preparativos para analizar los conjuntos en cuestión. Finalmente, en el Paso 5, ocupando los conjuntos analizados en el paso 4, se define la filtración buscada.

Paso 1: Si  $f^n(z) \in \overline{U_i}$  para todo  $n \geq 0$  entonces  $z \in W^s(\Lambda_i)$ .

Paso 2: Si  $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j) \neq \emptyset$  entonces  $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$ .

Paso 3: Si  $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$  y  $i \neq j$  entonces

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j) \neq \emptyset.$$

Paso 4: Para todo  $i = 1, 2, \dots, k$

- $\cup_{l \leq i} W^u(\Lambda_l)$  es un conjunto compacto e invariante.
- $\cup_{l \leq i} W^s(\Lambda_l)$  es un vecindad de  $\cup_{l \leq i} W^u(\Lambda_l)$ .
- Para todo conjunto compacto  $Q_i$  con

$$\cup_{l \leq i} W^u(\Lambda_l) \subset Q_i \subset \cup_{l \leq i} W^s(\Lambda_l),$$

se tiene que

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q_i) = \cup_{l \leq i} W^u(\Lambda_l).$$

Paso 5: Si  $P$  es un conjunto compacto e invariante bajo  $f$  que posee una vecindad compacta  $Q$  con  $\cap_{n \geq 0} f^n(Q) = P$ , entonces  $P$  tiene una vecindad compacta  $V$  con  $V \subset \text{int}(Q)$  tal que  $f(V) \subset \text{int}(V)$ .

Finalmente para concluir la demostración se verifica que las vecindades del paso 5, son tales que si se define

$$M_i = \bigcup_{l \leq i} V_l,$$

entonces la colección  $\{M_i\}$  es una filtración de  $f$ . Veamos que es la filtración buscada es decir  $K_i = \Lambda_i$ . Notemos que  $\Lambda_i$  no interseca al conjunto  $\cup_{l \leq i-1} W^s(\Lambda_l)$  y además  $\Lambda_i \subset M_i$  luego  $\Lambda_i \subset M_i \setminus M_{i-1}$ . Pero

$\Lambda_i$  es un conjunto invariante bajo  $f$  luego  $\Lambda_i \subset K_i$ . Por otro lado consideremos  $x \in K_i$  luego para todo iterado se tiene

$$f^n(x) \in M_i \setminus M_{i-1}.$$

Luego existe  $j$  tal que  $x \in W^s(\Lambda_j)$ , mas aún se puede comprobar que  $i = j$  luego

$$x \in W^s(\Lambda_i) \cap W^u(\Lambda_i),$$

pero por la condición de no ciclos  $x \in \Lambda_i$  y por lo tanto  $K_i \subset \Lambda_i$ , con lo que se concluye la demostración.  $\square$

**4.3. El teorema de la  $\Omega$ -estabilidad de Smale.** A continuación entregaremos el teorema central de toda esta sección.

**TEOREMA 3.52 (Smale).** *Si  $f$  satisface el Axioma A y los conjuntos básicos de  $f$  no poseen ciclos, entonces  $f$  es  $C^k$ - $\Omega$  estable para todo  $k \geq 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que basta demostrar la  $C^1$ - $\Omega$  estabilidad. Para ello consideremos los conjuntos,  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ , dados por la descomposición espectral de  $f$ . Como la colección anterior satisface la condición de no ciclos, el Teorema 3.51, asegura la existencia de una filtración:

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M,$$

tal que  $K_i(f) = \Omega_i$  para  $1 \leq i \leq k$ . Además por el Teorema 3.49, cada  $\Omega_i$  es un conjunto aislado con vecindad aislante  $M_i \setminus M_{i-1}$ .

Por la Proposición 3.50 existe una  $C^0$ -vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que  $\{M_i\}_{i=1}^k$  es una filtración para todo  $g \in \mathcal{U}$ . Definamos

$$K_i(g) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} g^n(M_i \setminus M_{i-1}).$$

Sea  $\varepsilon > 0$  dado, por la estabilidad de los conjuntos hiperbólicos existe un  $\delta$  tal que para todo  $g$  con  $dist_{C^1}(f, g) < \delta$  y todo  $i = 1, 2, \dots, k$  existe un homeomorfismo

$$h_i = h_i(g) : K_i(f) \rightarrow K_i(g),$$

tal que

$$d(h_i, Id) \leq \varepsilon, \quad h_i \circ f = g \circ h_i,$$

los  $h_i$  además nos permiten definir de manera natural la siguiente función,

$$h : \Omega(f) \rightarrow \bigcup_{i=1}^k K_i(g).$$

Finalmente basta ver que

$$\bigcup_{i=1}^k K_i(g) = \Omega(g).$$

Por el Teorema 3.49 tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^k K_i(g) \supset \Omega(g).$$

Luego nos basta probar la otra contención, la cual esta dada por lo siguiente,

$$\bigcup_{i=1}^k K_i(g) = h(\Omega(f)) = h(\overline{Per(f)}) = \overline{h(Per(f))} \subset \overline{P(g)} \subset \Omega(g).$$

□

Finalizamos esta sección con un par de resultados que ocuparemos mas adelante.

**PROPOSICIÓN 3.53.** *Si  $L(f)$  es hiperbólico entonces  $L(f) = \overline{Per(f)}$*

**DEMOSTRACIÓN.** Tomamos un punto  $x \in L(f)$ . Existe un punto  $y \in M$  junto con un entero  $N$  tal que  $y, f^N(y)$  se encuentran cercanos a  $x$ , además la órbita finita,  $\{y, f(y), \dots, f^N(y)\}$ , permanece en una vecindad de  $L(f)$ . Consideramos

$$\{y, f(y), \dots, f^N(y), f^{N-1}(y), \dots, y\}.$$

Este conjunto es una pseudo-órbita periódica contenida en una vecindad de  $L(f)$ . Luego por la propiedad del sombreado podemos encontrar un punto periódico  $z$  arbitrariamente cercano a  $x$ . □

**PROPOSICIÓN 3.54.** *Si  $L(f)$  es un conjunto hiperbólico y no existen ciclos en la descomposición de  $L(f)$  entonces  $\overline{Per(f)} = L(f) = \Omega(f) = R(f)$ . En particular  $f$  es Axioma A y satisface la condición de no ciclos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $L_1, \dots, L_k$  los conjuntos básicos dados por la descomposición espectral de  $L(f)$ . Existe una filtración  $\{M_i\}$  de  $f$  tal que  $K_i = L_i$ , luego  $R(f) \subset L(f)$  de donde  $L(f) = \Omega(f) = R(f)$ . Finalmente la Proposición 3.53 nos permite concluir el resultado. □

## 5. Resultados de tipo genérico

Los siguientes resultados, Teorema de densidad de Pugh y densidad de los difeomorfismos del tipo Kupka-Smale, nos permiten dar con propiedades que resultan satisfacerse para un conjunto abierto y denso de  $\text{Difeo}^r(M)$ .

**5.1. Un resultado de Pugh.** El primero de los resultados de esta sección es el Teorema de densidad de Pugh [**Pu2**].

**TEOREMA 3.55 (Pugh).** *Existe un conjunto residual,  $\mathcal{R} \subset \text{Diff}^1(M)$  tal que si  $f \in \mathcal{R}$  entonces  $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$ .*

Antes de dar la demostración de este Teorema, necesitamos un par de resultados los cuales pasamos a detallar. El primero de ellos es la siguiente Proposición.

**PROPOSICIÓN 3.56.** *Consideremos la función  $\Gamma : \text{Diff}^1(M) \rightarrow \mathcal{H}$  definida como  $\Gamma(f) = \overline{\text{Per}_e(f)}$ , donde  $\mathcal{H}$  es la colección de los conjuntos compactos de  $M$  y  $\text{Per}_e(f)$  es el conjunto de los puntos periódicos elementales de  $f$ . La función  $\Gamma$  es semicontinua inferiormente.*

**DEMOSTRACIÓN.** Para probar que  $\Gamma$  es una función semicontinua inferiormente se debe probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_{C^1}(f, g) < \delta$  entonces  $d_{\Gamma(g)}(\Gamma(f)) < \varepsilon$ . Para ello es suficiente probar que si  $p$  es un punto periódico elemental de  $f$  de periodo  $n$  entonces existe una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  y una vecindad  $U$  de  $p$  tal que si  $g \in \mathcal{U}$  entonces  $g$  posee un punto periódico elemental de periodo  $n$  en la vecindad  $U$ .

Se define la siguiente función

$$\begin{aligned} F : \text{Diff}^1(M) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (g, x) &\longrightarrow g^n(x) - x. \end{aligned}$$

Si  $f^n(p) = p$  entonces  $F(f, p) = 0$ . Además  $DF_{(f,p)} = D_p f^n - Id$  la cual es una transformación lineal invertible ya que el punto  $p$  es elemental. Luego el Teorema de la Función implícita nos permite concluir la demostración del Lema.  $\square$

La siguiente Proposición que enunciamos sin su demostración, nos permitira concluir el resultado central.

**PROPOSICIÓN 3.57.** *Existe un conjunto residual  $\mathcal{R}_1 \subset \text{Diff}^1(M)$  tal que si  $f \in \mathcal{R}_1$  entonces  $\text{Per}_e(f) = \text{Per}(f)$ .*

A continuación, haciendo uso de las Proposiciones 3.57 y 3.56, procedemos a la demostración del resultado de Pugh.

**DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3.55.** Sea  $\mathcal{R}_2$  el conjunto residual, donde la función  $\Gamma$  es continua. Se define  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$  es claro que  $\mathcal{R}$  es un conjunto residual en  $\text{Diff}^1(M)$ , veremos que si  $f \in \mathcal{R}$  entonces  $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ .

La demostración sigue por contradicción, es decir supongamos que para cierto  $f \in \mathcal{R}$  existe  $x$  con  $x \in \Omega(f) \setminus \overline{Per(f)}$ . Tomemos una vecindad  $U$  de  $\overline{Per(f)}$  tal que  $x \notin U$ , luego haciendo uso de la continuidad de  $\Gamma$  en  $f$ , podemos encontrar una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$ ,  $\overline{Per_e(g)} \subset U$ . Pero lo anterior lleva a una contradicción, ya que por el Closing Lemma sabemos que existe una vecindad de  $f$ , la cual contiene un difeomorfismo  $g$ , tal que  $x \in Per(g)$ .  $\square$

**5.2. Difeomorfismos del tipo Kupka-Smale.** El siguiente resultado de tipo genérico que pasaremos a revisar nos dice (o parte de el nos dice) que, de manera genérica, los difeomorfismos solo poseen puntos periódicos hiperbólicos. Antes de presentar este resultado necesitamos una definición.

**DEFINICIÓN 3.58.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^k$ , diremos que  $f$  es del tipo Kupka-Smale si:*

- *Los puntos periódicos de  $f$  son hiperbólicos.*
- *Si  $p$  y  $q$  son puntos periódicos de  $f$  entonces  $W^s(p)$  y  $W^u(q)$  se intersectan de manera transversal.*

Al conjunto de los difeomorfismos del tipo Kupka-Smale lo denotaremos por  $K-S$ .

**TEOREMA 3.59 (Kupka-Smale).** *El conjunto  $K-S$  es un conjunto residual en  $\text{Diff}^k(M)$ .*

Antes de comenzar la demostración haremos algunas consideraciones. Sea  $f \in \text{Diff}^k(M)$  y  $n \in \mathbb{N}$  se define:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^n : M &\longrightarrow M \times M, \\ p &\longrightarrow (p, f^n(p)). \end{aligned}$$

Si  $p$  es un punto de periodo  $n$ , entonces  $\tilde{f}^n(p) \in \Delta$  (donde  $\Delta$  es la diagonal del conjunto  $M \times M$ ). Por otro lado sabemos que  $p$  es un punto elemental de  $f$  si y solo si la imagen de  $\tilde{f}^n$  intersecta de manera transversal en el punto  $p$  al conjunto  $\Delta$ .

**ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN.** La demostración del Teorema 3.59, consiste básicamente, en la prueba de tres resultados, Lemas 3.60, 3.61, 3.62, los cuales presentaremos sin demostración. Una demostración completa puede encontrarse en el Capítulo 7 de [KH].

El primero de los lemas a considerar es el siguiente.

**LEMA 3.60.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos el conjunto  $D^n \subset \text{Diff}^k(M)$  formado por los difeomorfismo  $f$  tal que la imagen de  $\tilde{f}^n$  es transversal*

al conjunto  $\Delta$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ . El conjunto  $D^n$  es un conjunto abierto en  $\text{Diff}^1(M)$  y denso en  $\text{Diff}^k(M)$ .

El siguiente lema que necesitaremos, nos dice que cerca de cualquier difeomorfismo con puntos periódicos transversales se puede encontrar un difeomorfismo que posee solo puntos periódicos hiperbólicos.

LEMA 3.61. *Sea  $f \in D^n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $g \in D^n$  tal que todos sus puntos periódicos, de periodo a lo mas  $n$ , son hiperbólicos y  $d_{C^k}(f, g) \leq \varepsilon$ .*

La colección de los difeomorfismos que pertenecen a  $D^n$  que poseen solo puntos periódicos de período a lo mas  $n$  la denotaremos por  $D_H^n$ .

Los Lemas 3.60, 3.61 nos permiten concluir que el conjunto  $D_H^n$  es denso en  $\text{Diff}^k(M)$ . Además como  $D_H^n$  es abierto en la topología  $C^1$  y por lo tanto, lo es para toda topología  $C^k$  para  $k \geq 1$  tenemos que  $D_H^n$  es un conjunto abierto y denso en  $\text{Diff}^k(M)$ .

Finalmente enunciamos el último de los lemas que utilizaremos.

LEMA 3.62. *Sea  $K^n \subset D_H^n$  tal que si  $f \in K^n$  entonces las variedades estables e inestables de puntos periódicos de  $f$ , de periodo a lo mas  $n$ , se intersectan transversalmente. El conjunto  $K^n$  es denso en  $D_H^n$  y por lo tanto en  $\text{Diff}^k(M)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Para concluir la demostración, solo debemos notar que dado que la transversalidad es una condición abierta en la topología  $C^1$  y que,

$$K-S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^n.$$

Tenemos que  $K-S$  es un conjunto residual en  $\text{Diff}^k(M)$ . □



## CAPÍTULO 4

# Descomposición dominada

### 1. Introducción

Existen varios conceptos que permiten extender la noción de hiperbolicidad uniforme. Uno de estos conceptos es el de **descomposición dominada**. Este concepto, introducido en los trabajos de Mañé, Liao y Pliss, da lugar a una descomposición invariante del fibrado tangente en dos sub-fibrados, donde uno de ellos es más contractivo (o menos expansivo) que el otro, después de una cantidad uniforme de iterados.

El objetivo de este capítulo es dar una descripción de las propiedades básicas así como de algunos resultados relacionados con la descomposición dominada.

### 2. Definición

**DEFINICIÓN 4.1.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Lambda$  un conjunto invariante por  $f$ . Se dirá que  $\Lambda$  posee una **descomposición dominada** de índice  $i$  en su fibrado tangente, si existen sub-fibrados invariantes  $E, F$  tales que*

- $\dim(E) = i$ .
- $T_\Lambda M = E \oplus F$ .
- *Existen constantes positivas  $C, \lambda$ , con  $\lambda < 1$ , tales que para todo  $x$  en  $\Lambda$ ,*

$$\|Df^n|_{E_x}\| \|Df^{-n}|_{F_{f^n(x)}}\| \leq C\lambda^n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

El significado de la definición anterior podría traducirse diciendo que, si se escoge una dirección que no pertenece al fibrado  $E$ , en el futuro esta dirección converge de manera exponencial a la dirección  $F$ .

La constante  $\lambda$  de la Definición 4.1 la llamaremos la constante de dominación de  $f$  en  $\Lambda$ .

La siguiente proposición nos entrega una definición alternativa a la definición ya entregada para la descomposición dominada.

**PROPOSICIÓN 4.2** (Equivalencia de la definición). *Sea  $\Lambda \subset M$  un conjunto compacto e invariante por el difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . El conjunto  $\Lambda$  posee una **descomposición dominada**  $T_\Lambda M = E \oplus F$ , si y*

solo si existe  $l \in \mathbb{Z}^+$  tal que para todo  $x \in \Lambda$  existe  $k = k(x) \leq l$  de manera que

$$\|Df_{|E_x}^k\| \|Df_{|F_x}^{-k}\| < \frac{1}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la condición expresada por la proposición es necesaria, ya que basta escoger un tiempo  $n$  suficientemente grande de manera que

$$\|Df_{|E_x}^n\| \|Df_{|F_x}^{-n}\| < \frac{1}{2}.$$

Para demostrar que la condición es suficiente notemos que,

$$\begin{aligned} & \|Df_{|E_x}^n\| \|Df_{|F_x}^{-n}\| \\ &= \|Df_{|E_x}^k\| \|Df_{|F_x}^{-k}\| \|Df_{|E_x}^{n-k}\| \|Df_{|F_x}^{-n+k}\|. \\ &\leq \frac{1}{2} \|Df_{|E_{f(x)}}^{n-k}\| \|Df_{|F_{f^{-n+k}(x)}}^{-n+k}\|. \end{aligned}$$

para  $k \leq l$ . Si  $n - k > l$  Aplicamos el proceso a  $Df^{n-k}$ , proceso que podemos repetir a lo más  $\lceil \frac{n}{l} \rceil$  pasos, al cabo de los cuales se tiene que

$$\begin{aligned} \|Df_{|E_x}^n\| \|Df_{|F_x}^{-n}\| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n}{l} \rceil} \|Df_{|E_{f(x)}}^{n-l}\| \|Df_{|F_{f^{-n+k}(x)}}^{-n+l}\| \\ &\leq C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n}{l} \rceil} \leq 2C_0 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{l}}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

□

Entregaremos una segunda definición alternativa para la descomposición dominada, la cual será útil cuando queramos extender las propiedades de la misma a vecindades del conjunto en cuestión.

DEFINICIÓN 4.3. Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto tal que su tangente admite una descomposición continua,  $T_\Lambda M = E \oplus F$  y  $0 < a < 1$  un constante real. Se definen los **conos centro estable** y **centro inestable** de tamaño  $a$ , asociados a los fibrados  $E, F$  como

$$\mathcal{C}_a^{cs}(x) := \{w \in T_x M : w = v_E + v_F, v_E \in E_x, v_F \in F_x, \|v_E\| \leq a\|v_F\|\}.$$

$$\mathcal{C}_a^{cu}(x) := \{w \in T_x M : w = v_E + v_F, v_E \in E_x, v_F \in F_x, \|v_F\| \leq a\|v_E\|\}.$$

La siguiente proposición que revisaremos será demostrada solo para el caso dos dimensional, es decir, el caso en que los fibrados que forman la descomposición dominada son unidimensionales.

PROPOSICIÓN 4.4 (Definición por familias de conos). *Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto, invariante por  $f$ , el cual que admite una descomposición dominada,  $T_\Lambda M = E \oplus F$ . Supongamos que la constante  $C$  de la Definición 4.1 es igual a 1. Para todo  $0 < a \leq 1$  y todo  $x$  en una vecindad  $V$  de  $\Lambda$  se cumple que;*

$$(5) \quad D_x f^{-1}(\mathcal{C}_a^{cs}(x)) \subset \mathcal{C}_{\lambda a}^{cs}(f^{-1}(x)), \quad D_x f(\mathcal{C}_a^{cu}(x)) \subset \mathcal{C}_{\lambda a}^{cu}(f(x)).$$

*La afirmación en el otro sentido también se tiene, es decir, si existe una descomposición continua  $E_1, F_1$  del fibrado tangente  $T_\Lambda M$ , tal que para algún  $0 < a \leq 1$  se tenga (5), con los conos asociados a la nueva descomposición, entonces  $\Lambda$  posee descomposición dominada.*

DEMOSTRACIÓN. Veremos sólo la segunda parte de la demostración ya que la primera parte es similar a la realizada para el caso hiperbólico. Podríamos suponer que los fibrados  $E_1, F_1$  son los candidatos a realizar una descomposición dominada, pero estos fibrados no son necesariamente invariantes, razón por la cual debemos definir unos nuevos fibrados que si lo sean. Para ello consideraremos

$$E_x = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^n(x)} f^{-n}(\mathcal{C}_a^{cs}(x)), \quad F_x = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^{-n}(x)} f^n(\mathcal{C}_a^{cu}(x)).$$

Es claro que estos nuevos conjuntos, son invariantes por  $f$  y además por estar contenidos dentro de los conos estable e inestables satisfacen la dominación requerida. Para finalizar debemos revisar que estos conjuntos sean en efecto sub-espacios de dimension 1, para ello consideremos subespacios de dimension 1,  $\hat{E}_x \subset E_x, \hat{F}_x \subset F_x$ , luego se tiene que  $T_x M = \hat{E}_x \oplus \hat{F}_x$ . Debemos comprobar que la contención anterior es en realidad una igualdad de conjuntos. Para ello sea  $v \in E_x, v \notin \hat{E}_x$  entonces  $v = v_s + v_u$  donde  $v_s \in \hat{E}_x, v_u \in \hat{F}_x$  y con  $v_s \neq 0$ . Como por hipótesis los vectores y sus iterados permanecen en los conos se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\|D_x f v_s\|}{\|v_s\|} &< \frac{\|D_x f v_u\|}{\|v_u\|}, \\ \frac{\|D_x f v_s\|}{\|D_x f v_u\|} &< \frac{\|v_s\|}{\|v_u\|}, \\ \frac{\|D_x f^k v_s\|}{\|D_x f^k v_u\|} &< \lambda^k \frac{\|v_s\|}{\|v_u\|}. \end{aligned}$$

Entonces  $D_x f^k v \in \mathcal{C}_a^{cu}(x)$ , pero sabemos que  $D_x f^k v \in \mathcal{C}_a^{cs}(x)$  y los conos estables e inestable son disjuntos, entonces no existe un tal vector  $v$ . Por ende  $\hat{E}_x = E_x$  y de manera análoga se obtiene el resultado para el sub-fibrado  $F$ , con lo que se concluye la demostración.  $\square$

### 3. Propiedades

#### 3.1. Propiedades básicas.

LEMA 4.5 (Unicidad para dimensión fija). *Sea  $\Lambda \subset M$  un conjunto con descomposición dominada de dimensión  $i$ ,  $T_\Lambda M = E \oplus F$ , entonces esta es la única descomposición dominada de  $\Lambda$  con  $\text{Dim}(E) = i$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe otra descomposición dominada,  $T_\Lambda M = G \oplus H$  para el conjunto  $\Lambda$  con  $\text{Dim}(G) = i$ . Basta probar que  $G \subset E$  de donde se tendrá que  $G = E$  y consecuentemente  $H = F$ .

Supongamos que existe algún  $x \in \Lambda$  tal que la fibra  $G_x \not\subset E_x$ . Consideremos un vector  $u \in e_x \setminus G_x$ , un tal vector existe por hipótesis, luego

$$u = u_G + u_H \quad \text{con } u_G \in G_x \text{ y } u_H \in H_x \text{ con } u_H \neq 0.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que el fibrado  $H$  domina al fibrado  $G$ , luego los iterados positivos de  $u$  crecen tanto como los iterados positivos de  $u_H$  (por la dominación).

Sea también

$$u_H = v_E + v_F \quad \text{donde } v_E \in E_x \text{ y } v_F \in F_x.$$

Luego, si  $v_F \neq 0$  los iterados positivos de  $u_H$  crecen tanto como los iterados positivos de  $v_F$ , pero  $u \in E_x$  lo cual es una contradicción, por lo tanto  $v_F = 0$  de donde

$$u_H \in E_x \cap H_x.$$

Por otro lado existe  $w \in G_x \setminus E_x$  el cual admite una descomposición del tipo

$$w = w_E + w_F \quad \text{donde } w_E \in E_x \text{ y } w_F \in F_x \text{ con } w_F \neq 0.$$

Como los iterados positivos de  $w$  crece tanto como los de  $w_F$ ,  $w$  crece mas rápido que los iterados positivos de  $u_H \in E_x$  se tiene que los iterados positivos de  $w$  crecen "mas rápido" que los iterados positivos de  $u_H \in H_x \cap E_x$  pero esto contradice la dominación de  $G$  por  $H$ .  $\square$

LEMA 4.6 (Transversalidad). *Sea  $\Lambda$  un conjunto con descomposición dominada  $T_\Lambda M = E \oplus F$ . Existe  $\alpha > 0$ , tal que para todo punto  $x \in \Lambda$  el ángulo entre los sub-espacios  $E_x, F_x$  se encuentra acotado lejos de cero, es decir;*

$$\angle(E_x, F_x) > \alpha.$$

PRUEBA. Se demostrará que el ángulo entre  $E$  y  $F$  se encuentra uniformemente acotado lejos de cero. Para ello veamos que dados  $u \in E_x, v \in F_x$  ambos de norma 1, el seno del ángulo que forman  $u$  y  $v$ , ( $\|u -$

$v\|/2)$ , es mayor que cierta constante positiva, la cual no dependerá de la elección de los vectores  $u, v$ .

Supongamos que lo anterior no se cumple, luego existen sucesiones  $u_n \in E_{x_n}, v_n \in F_{x_n}$  tales que  $u_n - v_n \rightarrow 0$ . Como  $Df$  se encuentra acotada y la norma es una función continua, tenemos que para todo  $m > 0$  existe  $\varepsilon = \varepsilon(m) > 0$  tal que si  $\|u - v\| \leq \varepsilon$ , entonces

$$\frac{1}{2} < \frac{\|Df^k(v_n)\|}{\|Df^k(u_n)\|} < 2, \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq m.$$

Pero lo anterior contradice la dominación de los fibrados  $E, F$ .  $\square$

**LEMA 4.7 (Continuidad).** *Sea  $\Lambda$  un conjunto con descomposición dominada,  $T_\Lambda M = E \oplus F$ . Los sub-fibrados  $E_x, F_x$  dependen de manera continua del punto  $x$*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $x_n \rightarrow x$  una sucesión convergente en  $\Lambda$ . Pasando a subsucesiones podemos asumir que

$$E_{x_n} \rightarrow E_x, \quad F_{x_n} \rightarrow F_x,$$

$\text{Dim}(E_{x_n}) = \text{Dim}(E_x)$  y  $\text{Dim}(F_{x_n}) = \text{Dim}(F_x)$ . Si  $u \in E_x$  y  $v \in F_x$  entonces

$$\frac{\|Df_x^n u\|}{\|Df_x^n v\|} = \lim_m \frac{\|Df_x^n u_m\|}{\|Df_x^n v_m\|} < \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La relación anterior caracteriza de manera única al fibrado  $E$ , dado que la dimensión está fija, como el conjunto de vectores para los cuales sus iterados, en el futuro, crecen más lento que los iterados de cualquier otro vector  $w \notin E$ . Análogamente

$$\frac{\|Df_x^{-n} u\|}{\|Df_x^{-n} v\|} = \lim_m \frac{\|Df_x^{-n} u_m\|}{\|Df_x^{-n} v_m\|} < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

caracteriza al fibrado  $F$ .  $\square$

Una de las propiedades más importantes de la descomposición dominada es que al igual que la hiperbolicidad es persistente frente a perturbaciones o de manera mas precisa se tiene el siguiente Lema.

**LEMA 4.8.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo que exhibe descomposición dominada  $T_\Lambda M = E \oplus F$  sobre  $\Lambda \subset M$ . Entonces existe un abierto  $U$  que contiene a  $\Lambda$  y una vecindad  $\mathcal{U}(f)$  en la topología  $C^1$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}(f)$  todo conjunto compacto e invariante  $\Lambda_g \subset U$ , para  $g$  exhibe una descomposición dominada. Además la constante de dominación puede escogerse de manera uniforme para todos los elementos de  $\mathcal{U}(f)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Extendamos de manera continua la descomposición  $T_\Lambda M = E \oplus F$  a una vecindad  $U$  de  $\Lambda$ , esta extensión no es necesariamente invariante y abusando de la notación la denotaremos por  $T_U M = E \oplus F$ .

Para la descomposición  $E, F$  consideremos la familia de conos  $\mathcal{C}_\alpha(F)$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $x \in \Lambda$ , por la dominación tenemos que

$$Df^n(\mathcal{C}_1(x)) \subset \mathcal{C}_2(f^n(x)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, dado  $0 < \varepsilon < 1$  existe una vecindad  $V \subset U$  de  $\Lambda$  y una  $C^1$ -vecindad,  $\mathcal{U}$ , de  $f$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$  y todo  $x \in V$ ,

$$Dg^n(\mathcal{C}_1(x)) \subset \mathcal{C}_{2-\varepsilon}(g^n(x)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Lo anterior implica que el conjunto invariante maximal de  $g$  en  $V$  posee descomposición dominada de la misma dimensión que  $F$  y con “casi” las mismas constantes de dominación. De manera análoga se realiza la demostración para el fibrado  $E$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 4.9. *Una vecindad  $U$  de  $\Lambda$  que satisfaga la Proposición 4.8 la llamaremos una **vecindad admisible** para el conjunto  $\Lambda$ .*

Si bien la siguiente propiedad no es exclusiva para fibrados que exhiben descomposición dominada (basta que sean continuos) la mostraremos aquí ya que nos será de gran utilidad más adelante

LEMA 4.10 (Hiperbolicidad). *Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto invariante con descomposición dominada  $T_\Lambda = E \oplus F$ . Si para todo punto  $x$  en  $\Lambda$*

$$\|Df^n|_{E_x}\| \longrightarrow 0, \quad \|Df^{-n}|_{F_x}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty,$$

*entonces  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $\Lambda$  no es un conjunto hiperbólico, se tiene que para todo  $m$  en  $\mathbb{N}$  existe  $x_m$  en  $\Lambda$  tal que,

$$\|Df^i|_{E_{x_m}}\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } 0 < i \leq m.$$

Pasando a sub-sucesiones podemos asumir que,  $x_m \rightarrow x \in \Lambda$ . Haciendo uso de la continuidad de los sub-fibrados se tiene que,

$$\|Df^i|_{E_x}\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para } 0 < i \leq m,$$

lo cual contradice la hipótesis. La demostración para el sub-fibrado  $F$  se realiza de manera análoga, con lo que se concluye la demostración.  $\square$

**3.2. Existencia de variedades integrables.** El objetivo de esta sección es probar la existencia de variedades invariantes tangentes a los fibrados de la descomposición dominada y que además, bajo ciertas condiciones, presentan una “buena” diferenciabilidad. Para ello necesitaremos un par de resultados, los cuales pasamos a revisar.

*3.2.1. Un resultado de Pliss.* El siguiente resultado en su versión original, (4.12), es debido a Pliss [P1]. La siguiente versión que nos será de gran ayuda esta extraída de [PS1].

**TEOREMA 4.11 (Pliss numérico).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\gamma_1, \gamma_2$  constantes positivas tales que  $\gamma_1 < \gamma_2 < 1$ . Existe  $N = N(\gamma_1, \gamma_2, f)$  y una constante positiva  $c = c(\gamma_1, \gamma_2, f)$  tales que para cada  $x \in M$ , si  $S \subset T_x M$  es un subespacio que satisfice*

$$\prod_{i=0}^n \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n, \quad \text{para algún } n \geq N.$$

Donde  $S_i = Df^i(S)$ , entonces existen  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_l \leq n$  tales que

$$\prod_{i=n_r}^j \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_2^{j-n_r}.$$

para  $r = 1, \dots, l, n_r \leq j \leq n$ . Mas aún  $l \geq cn$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración del Teorema 4.11 se basa en el siguiente teorema, del cual su demostración puede ser revisada en [M3].

**TEOREMA 4.12.** *Dados  $\lambda, \varepsilon > 0, H > 0$  dados, existe una constante positiva  $c = c(\lambda, \varepsilon, H)$  y un entero positivo  $N = N(\lambda, \varepsilon, H)$  de forma tal que si  $a_1, \dots, a_n$  ( $n > N$ ) cumplen con  $|a_j| \leq H$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$  y además*

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq n\lambda.$$

Entonces existen  $1 \leq n_1 < \dots < n_l \leq n$  tales que,

$$\sum_{i=n_j}^{n_j+r} a_i \leq (n - n_j)(\lambda + \varepsilon), \quad \text{para } j = 1, \dots, l; 0 \leq r \leq n - n_j.$$

Mas aun  $l \geq cn$ .

Haciendo uso del Teorema 4.12 pasaremos a demostrar el Teorema 4.11. Consideremos  $K = \sup_{x \in M} \{\|D_x f\|\}$ ,  $H = \log(K)$ ,  $\lambda = \log(\gamma_1)$ ,

$\varepsilon = \log(\gamma_2) - \log(\gamma_1)$ , donde  $\gamma_1, \gamma_2$  son dadas como en las hipótesis del Teorema. Sean  $N, c$  dados por 4.12 y sea  $S$  el sub-espacio que satisface,

$$(6) \quad \prod_{i=0}^n \|D f_{|_{S_i}}\| \leq \gamma_1^n.$$

Aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad 6, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \log(\|D f_{|_{S_i}}\|) \leq n\lambda.$$

De donde si se define  $a_i = \log(\|D f_{|_{S_i}}\|)$ , se concluye la demostración del Teorema 4.11.  $\square$

A cada uno de los enteros  $n_i$  asegurados por el Teorema recién demostrado, en lo que sigue los llamaremos **tiempos hiperbólicos**. El siguiente corolario de 4.11 nos será de gran utilidad más adelante.

**COROLARIO 4.13.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo,  $\gamma_1 < \gamma_2 < 1$  un par de constantes positivas y un subespacio  $S \subset T_x M$  para algún  $x$  en  $M$ . Si para algún  $m$*

$$\prod_{i=0}^n \|D f_{|_{S_i}}\| \leq \gamma_1^n, \quad \text{para todo } n \geq m.$$

*Entonces existe una sucesión (infinita)  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots$  tal que*

$$\prod_{i=n_r}^j \|D f_{|_{S_i}}\| \leq \gamma_2^{j-n_r}, \quad \text{para todo } j \geq n_r, r = 1, 2, \dots$$

La siguiente proposición, que también es un resultado de Pliss, si bien no lo necesitaremos para demostrar propiedades de las variedades invariantes, lo mostraremos en esta sección para dar un sentido de completitud a la misma.

Recordemos que  $P_0(f)$  denota el conjunto de los pozos de  $f$ .

**PROPOSICIÓN 4.14.** *Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Supongamos que existe  $\mathcal{P} \subset P_0(f)$  con  $\#\mathcal{P} = \infty$ . Entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe un difeomorfismo  $g$ ,  $\varepsilon$ -cercano a  $f$  en la topología  $C^1$ , y un punto  $p \in \mathcal{P}$  tales que  $p$  es un punto periódico no hiperbólico de  $g$ .*

Antes de pasar a la prueba de la Proposición 4.14 es necesario introducir alguna definiciones y notaciones extraídas de [M2].

Sea

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Z} &\longrightarrow Gl(\mathbb{R}^n) \\ j &\longrightarrow \xi_j. \end{aligned}$$



Una sucesión de transformaciones lineales invertibles. Denotaremos por  $E_j^s(\xi)$  (resp.  $E_j^u(\xi)$ ) al subespacio de vectores,

$$\sup\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi_{j+1} \circ \xi_{j+2} \circ \dots \circ \xi_{j+n+1}(v)\|, n \geq 0\} < \infty,$$

respectivamente

$$\sup\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|(\xi_{j-n-1})^{-1} \circ (\xi_{j-n-2})^{-1} \circ \dots \circ (\xi_{j-1})^{-1}(v)\|, n \geq 0\} < \infty.$$

Diremos que  $\xi$  es hiperbólica si

$$E_j^s(\xi) \oplus E_j^u(\xi) = \mathbb{R}^n, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

La sucesión se dirá periódica si existe  $n_0 \geq 1$  tal que

$$\xi_{j+n_0} = \xi_j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

En este último caso la hiperbolicidad de la sucesión es equivalente a la hiperbolicidad de

$$\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j = \xi_0 \circ \xi_1 \circ \dots \circ \xi_{n_0-1}.$$

Diremos que  $\xi$  es contractiva si  $E_j^s = \mathbb{R}^n$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $\{\xi^\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  una familia de sucesiones periódicas de funciones lineales. Diremos que una tal familia es contractiva si cada elemento de la familia lo es.

Dadas dos familias  $\xi^\alpha, \eta^\alpha$  definiremos la distancia entre ellas como

$$\text{dist}(\eta, \xi) := \sup\{\|\eta_n^\alpha - \xi_n^\alpha\|, \text{para todo } \alpha \in \mathcal{A} \text{ y todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diremos que las familias son periódicamente equivalente si para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$  los mínimos periodos de  $\eta^\alpha, \xi^\alpha$  coinciden.

Finalmente, diremos que una familia hiperbólica  $\{\xi^\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  es uniformemente contractiva (resp. hiperbólica) si existe  $\varepsilon$  positivo, tal que toda familia periódicamente equivalente  $\{\eta^\alpha\}$  con  $\text{dist}(\xi, \eta) < \varepsilon$  es contractiva (resp. hiperbólica).

**LEMA 4.15.** *Sea  $\{\xi^\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  una familia uniformemente contractiva de sucesiones periódicas de isomorfismos lineales de  $\mathbb{R}^n$ . Existe  $K_0, 0 < \lambda < 1$  y  $m_0 \in \mathbb{Z}^+$  tal que si escogemos  $\alpha \in \mathcal{A}$  y  $\xi^\alpha$  con periodo mínimo  $n \geq m_0$  entonces*

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \prod_{i=0}^{m_0-1} \xi_{i+m_0+j}^\alpha \right\| \leq K_0 \lambda^k.$$

Donde  $k = \lfloor n/m_0 \rfloor$ .

Veamos ahora como sigue la demostración de la Proposición 4.14.

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue por contradicción. Consideremos los infinitos pozos y supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que cualquier perturbación de la derivada a lo largo de la órbita de cualquier pozo sigue siendo un pozo. Dada una perturbación de la derivada de  $f$ , usamos el lema de Franks y encontramos para cada pozo una función  $g$   $\varepsilon$ -cercana a  $f$ , cuyas derivadas a lo largo de la órbita del pozo realizan la perturbación dada. Usando la terminología anterior, la familia  $\{Df_p : p \in \mathcal{P}\}$  es una familia periódica uniformemente contractiva. Entonces por el Lema 4.15 se tiene que,

$$\prod_{i=0}^n \|D_{f^i(p)} f\| \leq \lambda^n, \quad \text{para todo } n \geq 0, p \in \mathcal{P}.$$

De donde se tiene la siguiente afirmación que nos permitirá concluir el resultado.

AFIRMACIÓN 4.16 (Cuencas de atracción). *Sea  $f$  un difeomorfismo sobre  $M$ . Dado  $0 < \lambda < 1$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $x \in M$  verifica*

$$\prod_{i=0}^n \|D f_{f^i(x)}\| \leq \lambda^n \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

*Entonces para todo  $y$  contenido en  $B(x, \varepsilon)$  se verifica que*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0.$$

La demostración sigue de la siguiente manera. Sea  $\sigma$  tal que  $\lambda < \sigma < 1$  y consideremos  $c > 0$  tal que  $(1+c)\lambda < \sigma$ . Como  $M$  es compacta y  $f$  es de clase  $C^1$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $d(z, w) < \varepsilon$  entonces

$$\frac{\|D_z f\|}{\|D_w f\|} < 1 + c.$$

Sea  $x$  como en el enunciado e  $y$  un punto contenido en  $B(x, \varepsilon)$ .

Si  $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$  para  $0 \leq i \leq n-1$  entonces

$$\prod_{i=0}^{n-1} \|D f_{f^i(y)}\| \leq \sigma^{n-1}.$$

Lo que a su vez implica que  $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$  para  $0 \leq i \leq n$ . Así por inducción se prueba que para todo  $y$  contenido en  $B(x, \varepsilon)$  se tiene que

$$\prod_{i=0}^n \|D_{f^i(y)} f\| \leq \sigma^n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Entonces  $d(f^n(x), f^n(y)) < \sigma^n \varepsilon \rightarrow 0$ . □

3.2.2. *Variedades centro estable y centro inestable.*

TEOREMA 4.17 (HPS-1). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$  y sea  $p \in M$  punto fijo de  $f$ . Sea  $T_p M = E_1 \oplus E_2$  una descomposición del tangente tal que para algún  $a > 0$*

1.  $Df(E_i) = E_i$ ,  $i = 1, 2$
2. *Las normas de los autovalores de  $Df|_{E_1}$  se encuentran acotadas por arriba por  $a$*
3. *Las normas de los autovalores de  $Df|_{E_2}$  se encuentran acotadas por debajo por  $a$*

*Entonces existe una variedad  $C^1$  localmente invariante  $V$  con  $p \in V$  y  $T_p(V) = E_1$ . Es localmente invariante en el siguiente sentido,  $V \cap f(V)$  contiene una vecindad de  $p$  en  $V$ . La variedad  $V$  es en general no única y no de clase  $C^k$  para  $k > 1$*

El teorema anterior también tiene una versión para el fibrado  $E_2$ , de igual manera que el teorema de la variedad inestable.

Como una aplicación que nos será útil estamos en condiciones de construir la variedad centro-estable y centro-inestable. Comenzaremos por la primera, consideramos un difeomorfismo  $f$  y un punto  $p$  como en el Teorema, escogemos  $a > 1$  tal que los autovalores de  $Df$  tienen norma menor o igual a 1 si y solo si tienen norma menor o igual que  $a$ . Asociada a esta descomposición espectral podemos escribir el tangente como  $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$ . El espectro de  $Df|_{E_1}$  vive fuera de un disco de radio  $a$  y el espectro de  $Df|_{E_2}$  vive dentro de un disco de radio  $a$ , de donde aplicamos el Teorema para obtener la variedad invariante  $W^{cs}$  que llamaremos la variedad centro estable. Realizando el mismo procedimiento para  $f^{-1}$  se construye la variedad centro inestable  $W^{cu}$ .

Como hemos dicho en el Teorema, estas variedades no necesariamente son de la diferenciabilidad deseada, pero el siguiente resultado, entrega condiciones necesarias para obtener la diferenciabilidad esperada. Antes introduciremos una definición que ya hemos esbozado en el teorema anterior

DEFINICIÓN 4.18. *Sea  $f$  un difeomorfismo sobre un conjunto  $\Lambda \subset M$ , diremos que este es  $a$ -pseudo hiperbólico si el conjunto de los autovalores de su derivada  $Df$  tienen modulo fuera de un círculo de radio  $a$*

Es claro que la definición anterior es equivalente a la existencia de una descomposición invariante  $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$  de manera que  $Df$ , expande en  $E_1$  por un factor mas grande que  $a$  y que en  $E_2$  tiene norma menor que  $a$ .

Después de esta definición entregaremos las condiciones necesarias para obtener la diferenciabilidad requerida para las variedades centro estable y centro inestable.

**TEOREMA 4.19.** *Sea  $f$  difeomorfismo de clase  $C^r$ ,  $a$ -pseudo hiperbólico, sea  $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$  su descomposición canónica (asociada como antes a su espectro). Los conjuntos  $W^{cu}, W^{cs}$  se definen como*

$$W^{cu} = \bigcap_{n \geq 0} f^n(S_1) \quad S_1 = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : |x| > |y|\},$$

$$W^{cs} = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_2) \quad S_2 = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : |x| < |y|\}$$

Entonces son grafos de funciones de clase  $C^1$ . Además están caracterizados por la siguiente condición:  $z \in W^{cu}$  si y solo si existen imágenes inversas  $f^{-n}(z)$  tal que

$$|f^{-n}(z)|/a^{-n} \rightarrow 0.$$

y análogamente  $z \in W^{cs}$  si y solo si

$$|f^n(z)|/a^n \rightarrow 0.$$

Si además  $\|Df^{-1}/_{E_1}\|^j \|Df/_{E_2}\| < 1$  para  $1 \leq j \leq r$  entonces  $W^{cu}$  es de clase  $C^j$  y si  $\|Df/_{E_2}\|^j \|Df^{-1}/_{E_1}\| < 1$  entonces  $W^{cs}$  es de clase  $C^j$ . Por último las variedades  $W^{cs}, W^{cu}$  dependen de manera continua de  $f$  en la topología  $C^r$

Los teoremas revisados anteriormente nos permiten asegurar tanto la existencia como la diferenciabilidad de variedades invariantes y tangentes a los sub-espacios  $E, F$  de nuestra descomposición dominada.

El siguiente lema nos permitirá concluir la diferenciabilidad requerida tanto para  $W_\varepsilon^{cs}$  como para  $W_\varepsilon^{cu}$ .

**LEMA 4.20.** *Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$  y  $\Lambda$  compacto invariante con descomposición dominada  $T_\Lambda M = E \oplus F$  y con todos los puntos periódicos hiperbólicos del tipo silla. Existen constantes  $C > 0, 0 < \sigma < 1$  tales que para todo  $x \in \Lambda$  y para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene;*

1.  $\|Df^n|_{E_x}\| \|Df^{-n}|_{F_{f^n(x)}}\|^2 < C\sigma^n.$
2.  $\|Df^n|_{E_x}\|^2 \|Df^{-n}|_{F_{f^n(x)}}\| < C\sigma^n.$

**PRUEBA:** Probaremos la primera de las aseveraciones la otra se prueba de manera análoga, para ello probaremos la existencia de un entero  $m_1$  tal que para todo  $x \in \Lambda$  existe  $1 \leq m \leq m_1$  tal que

$$\|Df^m|_{E(x)}\| \|Df^{-m}|_{F(f^m(x))}\|^2 < \frac{1}{2}.$$

Supongamos que tal entero no existe, entonces para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  existe  $x_n \in \Lambda$  tal que

$$\|Df^j|_{E_{x_n}}\| \|Df^{-j}|_{F_{f^n(x_n)}}\|^2 \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } 0 \leq j \leq n.$$

tomando una subsucesión, si es que fuese necesario, podemos asumir que  $x_n \rightarrow x$ , para ese punto de acumulación se tiene por continuidad que

$$\|Df^j|_{E_x}\| \|Df^{-j}|_{F_{f^j(x)}}\|^2 \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Ahora por la descomposición dominada  $\|Df^j|_{E_x}\| \|Df^{-j}|_{F_{f^j(x)}}\| < \lambda^j$ . Entonces

$$\frac{1}{2} \leq \|Df^j|_{E_x}\| \|Df^{-j}|_{F_{f^j(x)}}\|^2 \leq \lambda^j \|Df^{-j}|_{F_{f^j(x)}}\|.$$

De donde se obtiene,

$$\|Df^j|_{E_x}\| \leq \lambda^j \|Df^j|_{F_x}\| < 2\lambda^{2j}.$$

Ahora como sabemos, dada una descomposición dominada el ángulo entre los sub-fibrados, E, F, está uniformemente acotado lejos de cero, luego podemos encontrar una constante  $K$  positiva tal que,

$$\|D_z f^n\| \leq K \sup\{\|Df^n|_{E_z}\|, \|Df^n|_{F_z}\|\} \leq K \|Df^n|_{F_z}\|.$$

Para todo  $z \in \Lambda$  y todo  $n$  positivo. En particular para todo  $q$

$$\prod_{j=0}^n \|Df^q(f^{qj}(z))\| \leq \prod_{j=0}^n K \|Df^q|_{F(f^{qj}(z))}\|.$$

Tomando  $\sigma_0, \lambda < \sigma_0 < 1$  y  $q$  tal que  $2K\lambda^q < \sigma_0$  entonces para  $x$  se tiene

$$\prod_{j=0}^n \|Df^q(f^{qj}(x))\| \leq K^n 2\lambda^{qn} = 2(K\lambda^q)^n \leq \sigma_0^n \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Sea  $g = f^q$  entonces

$$\prod_{j=0}^n \|Dg(g^j(x))\| \leq \sigma_0^n \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Tomando  $0 < \lambda < \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$  por el Corolario 4.13 existe una sucesión de enteros  $n_k \rightarrow \infty$  tal que para todo  $k$  y todo entero positivo  $n$

$$\|Dg^n(g^{n_k}(x))\| \leq \prod_{j=0}^{n-1} \|Dg(g^j(g^{n_k}(x)))\| < \sigma_1^n.$$

Entonces se puede probar que existe  $\eta > 0$  independiente de  $k$  tal que para todo  $y, z \in B_\eta(g^{n_k}(x))$  se tiene que

$$d(g^j(y), g^j(z)) \leq \sigma_2^j d(y, z) \quad \text{para todo } j.$$

Sea  $j_0$  tal que para todo  $j > j_0$  se tiene que  $\sigma_2^j < \eta/4$ . Tomamos  $n_i, n_l$  tal que  $n_l - n_i > j_0$  y la distancia  $d(g^{n_l}(x), g^{n_i}(x)) < \eta/4$  si hacemos  $r = n_l - n_i$  se tiene que

$$g^r(B_\eta(g^{n_i}(x))) \subset B_\eta(g^{n_i}(x)),$$

entonces  $g^r$  restringido a  $B_\eta(g^{n_i}(x))$  es una contracción y por lo tanto posee un punto fijo  $p$ , entonces para todo  $z \in B_\eta(g^{n_i}(x))$

$$g^{rn}(z) \rightarrow p$$

Ahora como  $g = f^q$  se tiene que  $p$  es un punto fijo atractor para  $f^{qr}$ , por ende es un pozo que atrae al punto  $z = g^{n_i}(x) \in \Lambda$  de donde  $p \in \Lambda$  lo cual contradice las hipótesis.  $\square$

Finalizaremos esta sección con el siguiente resultado que es una consecuencia del Teorema 4.17.

LEMA 4.21. *Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

- *Si  $y \in W^{cs}(x)$  es tal que  $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \delta$  para  $0 \leq j \leq n$  entonces  $f^j(y) \in W^{cs}(f^j(x))$  para  $0 \leq j \leq n$ .*
- *Si  $y \in W^{cu}(x)$  es tal que  $d(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \leq \delta$  para  $0 \leq j \leq n$  entonces  $f^{-j}(y) \in W^{cs}(f^{-j}(x))$  para  $0 \leq j \leq n$ .*

#### 4. Ángulos pequeños y descomposición dominada

En la sección anterior nos hemos preocupado de mostrar propiedades básicas de la descomposición dominada, en esta sección nos interesara encontrar técnicas que nos permitan asegurar la existencia de una descomposición dominada. Para ello comencemos recordando que el Teorema de Densidad de Pugh nos dice que de manera genérica, en la topología  $C^1$ , el conjunto no errante es igual a la clausura de los puntos periódicos. Luego como también sabemos, los puntos periódicos son genéricamente de tipo hiperbólico y por lo tanto tienen una descomposición natural en su tangente. Entonces la pregunta natural que uno podría realizarse es, ¿se puede extender la descomposición sobre los puntos periódicos hacia el conjunto no errante? acerca de la manera de como responder esta interrogante es que la descomposición dominada tiene algo que decir. Pero para ello necesitamos primero un par de resultados.

#### 4.1. Resultados previos.

TEOREMA 4.22 (Lema de Franks). *Sea  $f$  en  $\text{Diff}^1(M)$  y  $\mathcal{O} \subset M$  un conjunto de cardinalidad finita. Existen  $\delta, \varepsilon = \varepsilon(\delta)$  positivos tales que si  $\{L_x\}_{x \in \mathcal{O}}$  es una colección de isomorfismos lineales*

$$L_x : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} M,$$

con  $\|L_x - D_x f\| < \varepsilon$ , entonces existe  $g$   $\delta$ -cercano a  $f$  tal que  $D_x g = L_x$ . Además, si  $R$  es un conjunto compacto de  $M$  con  $R \cap (\mathcal{O}) = \emptyset$  entonces  $g$  se puede elegir de manera que  $g(x) = f(x)$  para  $x$  en  $R$ .

DEMOSTRACIÓN. Escogemos  $\delta$  pequeño y  $\varepsilon$  tal que  $\varepsilon < \delta$  (en la demostración se puede ver cuan precisa debe de ser la cota).

Consideremos

$$\mathcal{O} \cup g(\mathcal{O}) = \{y_1, \dots, y_m\}, \quad \hat{B}_i = \{v : v \in T_{x_i} M, \|v\| \leq \delta'\}, \quad B_i = \exp(\hat{B}_i)$$

y escogamos  $\delta'$  de manera que

1.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  y además si  $R = \{x_1, \dots, x_n\} \cup (M \setminus U)$  entonces para todo  $i$ ,  $R \cap B_i = \emptyset$ .
2.  $\|\exp(v) - v\| \leq \varepsilon$  si  $v \in \hat{B}_i$ , donde  $\|\cdot\|$  es la métrica heredada de  $\mathbb{R}^n$
3.  $\|d(\exp_v)\| < 1 + \varepsilon$  si  $v \in \hat{B}_i$   
 $\|d(\exp_x^{-1})\| < 1 + \varepsilon$  si  $x \in B_i$
4. Se puede definir una función  $\hat{f} : \hat{B}_i \rightarrow \cup_{x \in \mathcal{O}} T_{f(x)} M$  de la siguiente manera

$$\hat{f}(v) : \exp^{-1}(f(\exp(v)))$$

y además

$$\|L(u) - \hat{f}(u)\| < \varepsilon \|u\|, \quad \|Lv - d\hat{f}_u(v)\| < \varepsilon \|v\|$$

para todo  $u \in \hat{B}_i$

5. Si  $K = \sup_{x \in M} \|df_x\|$  entonces  $\|d\exp_u - d\exp_v\| < \frac{\varepsilon}{K}$  para todo  $u, v \in \hat{B}_i$

Ahora consideraremos una función  $\sigma$  de clase  $C^\infty(\mathbb{R})$  con  $0 \leq \sigma(x) \leq 1$  que asume los siguientes valores

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \delta, \\ 1 & \text{si } |x| \leq \delta/4. \end{cases}$$

y  $0 \leq \sigma'(x) \leq 2/\delta$  para todo  $x$

Finalmente definimos  $\rho : TM \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\rho(v) = \sigma(\|v\|)$

Entonces en este punto nos encontramos en condiciones de definir la función que nos servirá de aproximación.

$$\hat{g} : \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \hat{B}_i \longrightarrow TM$$

$$v \rightarrow \rho(v)L(v) + (1 - \rho(v))\hat{f}(v),$$

y definimos  $g : M \rightarrow M$  como

$$g(x) = \begin{cases} \exp(\hat{g}(\exp^{-1}(x))) & \text{si } x \in \cup B_i, \\ f(x) & \text{si } x \notin \cup B_i. \end{cases}$$

Entonces solo nos queda comprobar cuan lejos esta la función  $g$  y sus derivadas de la función  $f$  y sus derivadas.

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &= \|\exp(\hat{f}(\exp^{-1}(x))) - \hat{f}(\exp^{-1}(x)) + \hat{f}(\exp^{-1}(x)) \\ &\quad - \hat{g}(\exp^{-1}(x)) + \hat{g}(\exp^{-1}(x)) - \exp(\hat{g}(\exp^{-1}(x)))\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|\hat{f}(\exp^{-1}(x)) - \hat{g}(\exp^{-1}(x))\| \\ &= 2\varepsilon + |\rho| \|\hat{f}(v) - L(v)\| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Para concluir calculamos la distancia entre las derivadas. Para ello sea  $v \in \cup \hat{B}_i$  entonces por regla de la cadena

$$d\hat{g}_v(u) = \rho(v)L(u) + d\rho_v(u)L(v) + (1 - \rho(v))d\hat{f}_v(u) - d\rho_v(u)\hat{f}(v),$$

de donde,

$$\|d\hat{f}_v(u) - d\hat{g}_v(u)\| \leq |\rho(v)| \|L(u) - d\hat{f}_v(u)\| + \|(L(v) - \hat{f}(v))d\rho_v(u)\| \leq 3\varepsilon \|u\|.$$

Entonces si escogemos  $y = \exp^{-1}(x)$ ,  $x = \hat{f}(y)$ ,  $w = \hat{g}(y)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|df_x(v) - dg_x(v)\| &= \|d(\exp_z)d\hat{f}(y)d(\exp^{-1}(v)) - d(\exp_w)d\hat{g}(y)d(\exp^{-1}(v))\| \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 3\varepsilon \|v\| \end{aligned}$$

con lo que se encuentra la perturbación  $C^1$  de  $f$  tal que su derivada se realiza como los  $L_i$  □

El resultado de Franks, recién revisado, no admite una versión para difeomorfismos de clase  $C^2$  [PS2].

El siguiente resultado que necesitaremos es debido a Mañé y lo hemos extraído de [M1]

LEMA 4.23 (Lema Elemental). Sea  $\mathbb{R}^N = E_1 \oplus E_2$  y  $\alpha = \angle(E_1, E_2)$ .

1. Para todo  $v \in E_2$ ,  $u \in E_1$  se tiene que:

$$\|v - u\| \geq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \|v\|.$$



2. Si  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una transformación lineal entonces,

$$\|T\| \leq \frac{1 + \alpha}{\alpha} \left( \|T|_{E_1}\| + \|T|_{E_2}\| \right).$$

3. Si  $A : E_2 \rightarrow E_1$  es una transformación lineal y

$$G = \{v + Av \mid v \in E_2\},$$

entonces existen funciones lineales  $T_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, i = 1, 2$  tales que

■

$$\|T_i\| \leq \frac{1 + \alpha}{\alpha} \|A\|, \quad T_{i|_{E_1}} = 0 \quad i = 1, 2.$$

■

$$(T_1 + Id)G = E_2, \quad (T_2 + Id)E_2 = G.$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea  $L : E_1^\perp \rightarrow E_2$  tal que  $E_2 = \{w + Lw \mid w \in E_1^\perp\}$ . Si  $w \in E_1^\perp$  y  $w + Lw = v$  entonces

$$(7) \quad \|v - u\| = \|v - w - Lw\| \geq \|w\|$$

Por otro lado

$$(8) \quad \|v\| \leq \|w\| + \|L\|\|w\| \leq \|w\|(1 + \|L\|).$$

Luego de 7, 8 se concluye

$$\|v - u\| \geq \|v\| \frac{1}{1 + \|L\|}.$$

2) Sea  $v = v_1 + v_2$  con  $v_1 \in E_1, v_2 \in E_1^\perp$ . Si  $L$  es como en la parte (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \|T(v_1 + v_2)\| = \|T(v_2 + Lv_2) + T(v_1 - Lv_2)\| \\ &\leq \|T|_{E_2}\|(1 + \|L\|)\|v_2\| + \|T|_{E_1}\|(\|v_1\| + \|L\|\|v_2\|). \end{aligned}$$

Luego como  $\|v_1\| \leq \|v\|$  y  $\|v_2\| \leq \|v\|$  se concluye lo pedido.

3) Sea  $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow E_2$  la proyección a lo largo de  $E_1$ . Se definen  $T_1 = -A \circ \pi, T_2 = A \circ \pi$ . Luego es claro que  $T_{i|_{E_1}} = 0$  y  $T_{i|_{E_2}} = \pm A$ . Haciendo uso de (2) se concluye la primera parte de (3).

Para probar la segunda parte de (3), dado  $v \in E_2$  se tiene que:

$$(Id + T_1)(v + Av) = v + Av - A \circ \pi v - A \circ \pi \circ Av = v.$$

$$(Id + T_2)v = v + A \circ \pi v = v + Av.$$

□

**4.2. ¿Cómo encontrar descomposición dominada?** El siguiente teorema es esencialmente debido a Mañé y nos permite asegurar condiciones suficientes para tener una descomposición dominada. Recordemos que hemos denotado por  $Per_h(f)$  el conjunto de los puntos hiperbólicos tipo silla de  $f$ .

**TEOREMA 4.24.** *Sea  $M$  una variedad compacta dos dimensional y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Si existe una vecindad  $\mathcal{U}(f)$  de  $f$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}(f)$  y todo  $p \in Per_h(g)$ ,*

$$\angle(E_p^s(g), E_p^u(g)) > \gamma > 0,$$

*entonces  $\overline{Per_h(g)}$  posee descomposición dominada.*

El Teorema 4.24 admite una versión para difeomorfismos en variedades de cualquier dimensión. Antes de pasar a la demostración probaremos el siguiente lema. Sea  $\delta > 0$  dada por el Lema 4.22, y sea  $\mathcal{U}_0$  la  $\delta$ -vecindad de  $f$ .

**LEMA 4.25.** *Consideremos la vecindad  $\mathcal{U}$  del Teorema 4.24 y  $\epsilon$ ,  $\mathcal{U}_0$  dados por el 4.22. Existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $g$  en  $\mathcal{U}_0$  y todo  $p \in Per_h(g)$  se tiene alguna de las siguientes desigualdades;*

$$|\lambda_p| < (1 - \delta)^n, \quad |\sigma_p| > (1 + \delta)^n.$$

*Donde  $\lambda_p, \sigma_p$  son los autovalores de la derivada de  $g^n$  y  $n$  es el período del punto periódico  $p$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $C = \sup\{\|Dg\| : g \in \mathcal{U}_0\}$  y  $\epsilon' < \epsilon/C$ .

Notemos que podemos escoger  $b_0 = b_0(\epsilon)$ ,  $b_0 \in (0, 1)$  tal que, si una aplicación lineal  $T : T_x M \rightarrow T_x M$  satisface

$$T|_{\langle u \rangle} = (1 - b')Id, \quad T|_{\langle v \rangle} = (1 + b'')Id,$$

para algún par de vectores  $u, v$  con  $\angle(u, v) > \gamma$  y cualquier  $|b'|, |b''| < b_0$ , donde  $\langle v \rangle$  representa el sub-espacio lineal generado por el vector  $v$ , entonces se tiene que

$$\|T - Id\| < \frac{\epsilon'}{2}.$$

Supongamos que la tesis del Lema es falsa, en este caso existen sucesiones  $\delta_m \rightarrow 0$ ,  $g_m \in \mathcal{U}_0(f)$  y  $p_n \in Per_h(g_n)$ , de periodo  $m_n$  respectivamente, tales que

$$(1 - \delta_n)^{m_n} < |\lambda_{p_n}| < 1, \quad (1 + \delta_n)^{m_n} > |\sigma_{p_n}| > 1.$$

Supongamos, para fijar ideas, que todos autovalores son positivos. Escojamos  $n$  suficientemente grande tal que  $\delta_n < b_0$  y tomemos para ese  $n$  denotemos  $p = p_n$ ,  $m = m_n$ ,  $g = g_n$ .

Sea

$$b' = 1 - \lambda_p^{1/n}, \quad b'' = \sigma_p^{1/n} - 1.$$

Para  $0 \leq i \leq n-1$  se define  $T_i : T_{g^i(p)} M \rightarrow T_{g^i(p)} M$  como:

$$T_i(v) = \begin{cases} (1 - b')v & \text{si } v \in E_{g^i(p)}^s, \\ (1 + b'')v & \text{si } v \in E_{g^i(p)}^u. \end{cases}$$

Consideremos  $u_0, v_0 \in T_{g^0(p)} M$  tal que  $\angle(u_0, v_0) < \gamma$  y  $b_1$  una constante positiva. Se define  $S : T_{g^0(p)} M \rightarrow T_{g^0(p)} M$  como:

$$S(v) = \begin{cases} (1 - b_1)v & \text{si } v \in \langle u_0 \rangle, \\ (1 + b_1)v & \text{si } v \in \langle v_0 \rangle. \end{cases}$$

Si escogemos  $b_1$  suficientemente pequeño tenemos que  $\|S - Id\| \|T_0\| < \frac{\varepsilon'}{2}$ .

Sea  $L_i : T_{g^i(p)} M \rightarrow T_{g^{i+1}(p)} M$  una transformación lineal definida como sigue

$$L_i = \begin{cases} T_{i+1} \circ D_{g^i(p)} g & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ S \circ T_0 \circ D_{g^{n-1}(p)} g & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

Se tiene que

$$\|L_i - D_{g^i(p)} g\| < \varepsilon \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq n-1.$$

Luego por el Lema 4.22 sabemos que existe  $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$  y  $p \in Per(\tilde{g})$  tales que, la derivada de  $\tilde{g}$  a lo largo de la orbita de  $p$  es la colección  $\{L_i\}$ . Entonces tenemos que  $D_p \tilde{g}^n = L_{n-1} \circ \dots \circ L_0 = S$  de donde  $p \in Per_h(\tilde{g})$ . Además

$$\angle(E_p^s(\tilde{g}), E_p^u(\tilde{g})) < \gamma.$$

Pero lo anterior es una contradicción ya que  $\tilde{g} \in \mathcal{U}$ .  $\square$

A continuación revisaremos la demostración del Teorema 4.24. Haciendo uso del Lema 4.7, nos bastará demostrar que el conjunto  $Per_h(f)$  posee descomposición dominada.

**DEMOSTRACIÓN.** Como sabemos, para probar la existencia de una descomposición dominada, nos basta encontrar un entero positivo  $l$  tal que para todo  $p \in Per_h(f)$  exista  $1 \leq m \leq l$  de manera que:

$$\|Df_{E_p^s}^m\| \|Df_{E_p^u}^m\| < \frac{1}{2}.$$

Supongamos que tal entero  $l$  no existe, en ese caso existe una sucesión  $p_n \in Per_h(f)$  que satisface

$$\|Df_{E_{p_n}^s}^m\| \|Df_{E_{p_n}^u}^{-m}\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{para todo, } 0 < m \leq n.$$

Notemos que por el hecho de estar considerando puntos hiperbolicos, se tiene que

**AFIRMACIÓN 4.26.** *La sucesión  $\{m_n\}$ , de los periodos de  $p_n$ , es una sucesión no acotada.*

Por la afirmación anterior podemos asumir que para todo punto  $p_n$

$$|\lambda_n| < (1 - \delta)^{m_n},$$

donde  $\lambda_n$  es el autovalor de  $Df^{m_n}$  que determina el espacio estable  $E_p^s$  y  $\delta$  es dado por el Lema 4.25.

Consideremos ahora  $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_1 > 0$  y  $m$  tales que

$$(2\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2)C \leq \varepsilon.$$

$$(1 + \varepsilon_1)(1 - \delta) < 1.$$

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\gamma}{1 + \gamma}\varepsilon_0.$$

$$(1 + \varepsilon_1)^m \geq 4 + \frac{2}{\gamma},$$

donde  $\varepsilon$  es dado por el Lema 4.22.

Como los periodos son no acotados podemos escoger  $m_n > m$ . Sea  $p = p_n$  y  $n_0 = m_n$ . Sean  $v \in E_p^u, w \in E_p^s$  vectores unitarios, por las hipótesis sobre  $p$  se tiene que

$$\|Df^m w\| \geq \frac{1}{2}\|Df^m v\|.$$

Por otro lado si  $L : E_p^u \rightarrow E_p^s$  es tal que  $Lv = \varepsilon_1 w$  y  $\|L\| = \varepsilon_1$  entonces para  $\tilde{L} : E_p^u \rightarrow E_p^s$  definida como

$$\tilde{L} = (1 + \varepsilon_1)^{n_0} Df_{|E_p^s}^{n_0} \circ L \circ Df_{|E_p^u}^{-n_0},$$

se tiene que  $\|\tilde{L}\| \leq \varepsilon_1$ .

Sea ahora

$$G = \{u + Lu : u \in E_p^u\} \quad \tilde{G} = \{u + \tilde{L}u : u \in E_p^u\}.$$

Escogemos funciones lineales  $P, S : \rightarrow$  tales que

$$P_{|E_p^s} = 0 \quad (Id + P)_{|E_p^u} = G,$$

$$S_{|E_p^s} = 0 \quad (Id + S)_{|\tilde{G}} = E_p^u.$$

Las cuales por el Lema 4.23 se pueden elegir de manera que sus normas estén acotadas por  $\varepsilon_0$ . A continuación se define  $T_j : T_{f^j(p)} \rightarrow T_{f^j(p)}$  para  $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ ] como

$$T_j(v) = \begin{cases} \varepsilon_1 v & \text{si } v \in E_{f^j(p)}^s, \\ 0 & \text{si } v \in E_{f^j(p)}^u. \end{cases}$$

Luego  $\|T_j\| \leq \varepsilon_0$  para  $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ .

Ahora bien, veamos en qué punto de la demostración nos encontramos. Hasta ahora hemos construido una colección de transformaciones lineales con ciertas características especiales, la idea es que con estas transformaciones se construirá una perturbación de  $Df$  a lo largo de la orbita del punto  $p$ , esta perturbación resultará ser, por el Lema 4.22, la derivada de otra función  $g \in \mathcal{U}$ , función para la cual probaremos que el ángulo entre los subespacios estables e inestables de  $D_p g$  se encuentra por debajo de lo permitido.

La perturbación buscada,  $L_i$ , sera definida como

$$L_i = \begin{cases} (Id + T_1) \circ Df \circ (Id + P) & \text{si } i = 0, \\ (Id + T_{j+1}) \circ Df & \text{si } i = 1, \dots, n_0 - 2, \\ (Id + S) \circ (Id + T_0) \circ Df & \text{si } i = n_0 - 1. \end{cases}$$

Luego es fácil ver que  $\|L_j - D_{f^j(p)} f\| \leq \varepsilon$ . De donde se tiene, por el Lema 4.22, que existe  $g \in \mathcal{U}$  con  $p \in Per(g)$  tal que  $D_{g^i(p)} g = L_i$ . Sea  $\beta = \angle(E_{g^m(p)}^s, E_{g^m(p)}^u)$  luego  $\beta > \gamma$ , ya que  $g \in \mathcal{U}$ . Veamos como lo anterior nos lleva a una contradicción y por ende a la prueba del Teorema.

Sea  $E_j^s(f) = E_{f^j(p)}^s(f)$ ,  $E_j^u(f) = E_{f^j(p)}^u(f)$ . Notemos que

$$Dg|_{E_j^s(f)} = L_j = (1 + \varepsilon_1) Df|_{E_j^s(f)}.$$

Lo cual implica que  $E_j^s(g) = E_j^s(f)$  ya que  $(1 + \varepsilon)(1 - \delta) < 1$ . Además

$$Dg^{n_0} E_0^u(f) = E_0^u(f).$$

Es decir  $E_0^u(g) = E_0^u(f)$  y por lo tanto podemos concluir que  $p \in Per_h(g)$ . Por otro lado como  $v \in E_0^u(g)$ ,  $w \in E_0^s(g)$  tenemos que

$$u_1 = Dg^m(v) \in E_m^u(g) \quad u_2 = Dg^m(w) \in E_m^s(g).$$

Además

$$u_1 = Df^m(v) + (1 + \varepsilon_1)^m Df^m w \quad u_2 = (1 + \varepsilon_1)^m Df^m w.$$

De donde por el Lema 4.25 se tiene que

$$\|Df^m v\| = \|u_1 - u_2\| \geq \frac{\beta}{1 + \beta} \|u_1\| \geq \frac{\beta}{1 + \beta} |(1 + \varepsilon_1)^m \|Df^m w\| - \|Df^m v\|.$$

$$\frac{\beta}{1+\beta} \geq \frac{(1+\varepsilon_1)^m}{2} - 1.$$

Y podemos concluir que  $\beta \leq \gamma$ , lo cual no puede suceder.  $\square$

### 4.3. Descomposición dominada y tangencias homoclínicas.

Dentro de los fenómenos que quiebran la hiperbolicidad existen dos fenómenos a los cuales se les ha dedicado una mayor atención.

1. La formación de una órbita no-hiperbólica (bifurcaciones de Hopf, dobles periodos, etc.)
2. La pérdida de la intersección transversal entre  $W^s(p), W^u(q)$  para puntos periódicos  $p, q$ .

El segundo caso es el que nos interesará a nosotros ya que dentro de las posibilidades se encuentra lo que llamaremos tangencias homoclínicas.

**DEFINICIÓN 4.27.** *Sea  $M$  una superficie y  $f$  en  $\text{Diff}^k(M)$ , para algún  $k \geq 1$ . Se dirá que  $f$  posee una **tangencia homoclínica** si existe un punto periódico  $p$  de  $f$ , de manera que sus variedades estables e inestables se intersectan de manera no transversal.*

Si la variedad  $M$  es de dimension mayor a dos, llamaremos a la intersección no transversal de las variedades estable e inestable una **intersección heteroclínica**.

A lo largo de los años este fenómeno ha resultado asociado a variadas formas de dinámica caótica, en particular los trabajos de S. Newhouse [Nw1], [Nw2] demostraron la existencia de conjuntos abiertos en  $\text{Diff}^2(M)$ , para  $M$  una superficie, en los cuales coexistían tangencias homoclínicas e infinitos puntos periódicos atractores o repulsores, de manera mas precisa se tiene el siguiente teorema.

**TEOREMA 4.28 (Fenómeno de Newhouse).** *Sea  $f$  en  $\text{Diff}^2(M)$ , donde  $M$  es una superficie. Si  $f$  posee una tangencia homoclínica asociada a un punto tipo silla  $p$ , entonces:*

- *Existe un abierto  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^2(M)$  con  $f \in \overline{\mathcal{U}}$  tal que todo  $g \in \mathcal{U}$  puede ser aproximada por un difeomorfismo que posee una tangencia homoclínica asociada a un punto  $q$  que es la continuación analítica del punto  $p$ .*
- *Si  $|\det D f^{\text{per}(p)}| < 1$ , respectivamente  $|\det D f^{\text{per}(p)}| > 1$ , existe un conjunto residual  $\mathcal{R}$  contenido en  $\mathcal{U}$ , tal que todo  $g$  en  $\mathcal{R}$  posee una cantidad infinita de puntos periódicos atractores, respectivamente puntos periódicos repulsores.*

En vista de poder encontrar una relación entra la presencia de tangencias homoclínicas y la existencia de descomposición dominada, necesitaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.29. *Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Se dirá que  $f$  se encuentra lejos de tangencias homoclinicas, en la topología  $C^r$ , si existe un abierto  $\mathcal{U}(f)$ , en la topología  $C^r$ , tal que no existe  $g \in \mathcal{U}(f)$  que exhiba una tangencia homoclinica.*

DEFINICIÓN 4.30. *Se define  $\mathcal{U}_t$  como el complemento de la clausura de los difeomorfismos de clase  $C^1$  que poseen una tangencia homoclinica, es decir:*

$$\mathcal{U}_t := \text{Diff}^1(M) \setminus \text{Cl}(\{f \in \text{Diff}^1(M) \mid f \text{ posee una tangencia homoclinica}\}).$$

El siguiente resultado, demostrado en su version dos dimensional en [PS1] y extendido a cualquier dimension por L.Wen [W1]. Nos dice que la ausencia de tangencias homoclinicas garantiza la existencia de descomposicion dominada.

TEOREMA 4.31. *Sea  $M$  una superficie y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ , el cual se encuentra  $C^1$ -lejos de tangencias homoclinicas. Entonces el conjunto de los puntos periodicos hiperbolicos de  $f$ , posee descomposicion dominada.*

La demostracion de este resultado sera dada en el capitulo final de esta monografia.





## CAPÍTULO 5

# Dinámica de superficies

### 1. Introducción

Sabemos, de los trabajos de Mañé [M3], que genéricamente para los endomorfismos definidos sobre una variedad de dimensión uno, la ausencia de puntos críticos es una condición suficiente para asegurar hiperbolicidad. De manera más precisa se tiene el siguiente resultado.

**TEOREMA 5.1.** *Sea  $N$  el círculo unitario o el intervalo unitario. Sea  $f$  un endomorfismo de clase  $C^2$  definido sobre un conjunto compacto e invariante  $\Lambda \subset N$ . Si  $f$  no posee puntos críticos, pozos o puntos periódicos no hiperbólicos entonces o bien  $\Lambda = S^1$  y  $f$  es topológicamente conjugado a una rotación irracional o bien  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico.*

Luego de revisar este resultado, la pregunta que surge de manera natural es: ¿Cómo encontrar condiciones suficientes para asegurar la hiperbolicidad en el para variedades de dimensión mayor a uno?.

Una manera de abordar la pregunta planteada, en el caso dos dimensional, es notar que en dimension uno la presencia de puntos críticos da lugar a dinámica caótica y difícil de controlar, ahora bien, sabemos del capítulo anterior, que para el caso de difeomorfismos sobre superficies la presencia de tangencias homoclínicas es una propiedad que nos asegura formas caóticas de dinámica. También sabemos, del capítulo anterior, que la presencia de descomposición dominada es una manera de prevenir la existencia de tangencias homoclínicas. En resumen podríamos pensar que la descomposición dominada juega, para dimension dos, el papel que la ausencia de puntos críticos juega para dimension uno.

El resultado que presentamos a continuación debido a E.Pujals y M.Sambarino, [PS1], es el análogo del Teorema 5.1 para el caso de dinámica sobre superficies.

**TEOREMA 5.2 (Teorema B).** *Sea  $M$  una superficie compacta y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^2$  definido sobre  $M$ . Supongamos que  $\Lambda \subset M$  es un conjunto compacto e invariante que posee descomposición dominada, que todo punto periódico de  $\Lambda$  es un punto*

hiperbólico tipo silla. Entonces  $\Lambda$  se descompone como

$$\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2,$$

donde  $\Lambda_1$  es un conjunto hiperbólico y  $\Lambda_2$  es un conjunto formado por la unión finita de curvas simples, periódicas, cerradas, normalmente hiperbólicas  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ , tales que, si  $m_i$  es el periodo de la curva  $\mathcal{C}_i$ , entonces  $f^{m_i} : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_i$  es conjugada a una rotación irracional.

El objetivo de este capítulo es probar el Teorema 5.2. Para ello, en primer lugar, simplificaremos un poco las cosas y veremos que en realidad nos basta probar el siguiente teorema.

**TEOREMA 5.3 (Teorema C).** *Sea  $M$  una superficie compacta y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^2$  definido sobre  $M$ . Sea  $\Lambda \subset M$  un conjunto compacto, invariante, con descomposición dominada  $T_\Lambda M = E \oplus F$  y tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos de tipo silla. Entonces se tiene alguna de las siguientes posibilidades:*

- *El conjunto  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico.*
- *Existe una curva simple, periódica, cerrada  $\mathcal{C} \subset \Lambda$ , invariante para  $f^m$  (donde  $m$  es el periodo de  $\mathcal{C}$ ) normalmente hiperbólica y tal que  $f^m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es conjugado a una rotación irracional.*

Luego de probar por qué nos basta con probar el Teorema 5.3 para obtener el Teorema 5.2, nos dedicaremos a probar el Teorema 5.3, para el cual necesitaremos un lema, que hemos llamado Lema Central. Está será quien mas satisfacciones y pesares nos dará, ya que para su demostración tendremos que desarrollar una importante maquinaria matemática.

En lo que sigue nos referiremos a las curvas  $\{\mathcal{C}_n\}$  del Teorema 5.2 simplemente como curvas irracionales. Además, a menos que se especifique lo contrario,  $M$  será una variedad compacta dos dimensional (una superficie) y  $f$  será un difeomorfismo de clase  $C^2$  definido sobre  $M$ .

## 2. Condiciones suficientes para el Teorema B

En esta sección probaremos el Teorema 5.2 asumiendo el Teorema 5.3. Para ello supondremos que existe al menos una curva irracional, de lo contrario no hay nada que probar, y veremos que la cantidad de tales curvas es finita. Posteriormente probaremos el resultado buscado.

### 2.1. Finitud de las curvas irracionales.

**LEMA 5.4 (Diámetro lejos de cero).** *Sea  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$  la colección de todas las curvas irracionales. Existe  $\eta > 0$  tal que el diámetro de todas las curvas de la colección  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$  se encuentra acotado inferiormente por  $\eta$ .*

DEMOSTRACIÓN. Notaremos por  $\text{Diam } \mathcal{C}_i$  el diámetro de la curva  $\mathcal{C}_i$ .

La demostración sigue por contradicción, es decir, supongamos que existe una sub-colección  $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Diam } \mathcal{C}_n = 0.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos  $x_n \in \mathcal{C}_n$ . Pasando a subsucesiones, podemos asumir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \Lambda$ . Luego por la condición 9,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n = \{x\}.$$

Luego para todo  $y_n \in \mathcal{C}_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ .

Sin perder generalidad podemos asumir que todas las curvas de la colección  $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , son normalmente atractoras, es decir  $T_x(\mathcal{C}_n) = F_x$  para todo  $x$  en  $\mathcal{C}_n$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por la continuidad del sub-fibrado  $F$ , se tiene que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{y_n} = F_x$ . Pero, gracias a la continuidad de la derivada y la compacidad de la curva  $\mathcal{C}_n$ , dado  $z_n \in \mathcal{C}_n$  existe  $w_n \in \mathcal{C}_n$  tal que los espacios  $F_{w_n}, F_{z_n}$  son ortogonales. Sin embargo, esto es una contradicción ya que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{z_n} = F_x = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{w_n}.$$

□

De la sección 3 del capítulo 4, tenemos la existencia de variedades integrables  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$ , a las cuales hemos llamado respectivamente variedad centro estable y centro inestable. El siguiente lema nos permite encontrar condiciones bajo las cuales  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  son en realidad variedades estable e inestable respectivamente. Enunciaremos y probaremos solo el resultado para la variedad centro estable, ya que el resultado para la variedad centro inestable es análogo

LEMA 5.5 (Variedad estable fuerte). *Sea  $x \in \Lambda$  tal que para algún  $0 < \gamma < 1$*

$$\|Df^n|_{E_x}\| \leq \gamma^n \quad \forall n \geq 0$$

*Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$l(f^n(W_\varepsilon^{cs}(x))) \rightarrow 0$$

*para  $n \rightarrow 0$ . Es decir la variedad centro estable es en efecto la variedad estable de  $x$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\varepsilon_1 < 1$  y  $\delta > 0$  dados por el Lema 4.21. Sean  $\varepsilon' < \varepsilon$  y  $\delta' < \delta$  de tamaño adecuado de manera que, si  $\tilde{E}_z = T_z(W_{\varepsilon'}^{cs}(y))$

para todo  $z$  en  $W_{\varepsilon'}^{cs}(y)$  con  $y$  en  $\Lambda$  entonces

$$\frac{\|Df|_{\tilde{E}_{z_1}}\|}{\|Df|_{\tilde{E}_{z_2}}\|} \leq 1 + c.$$

Para todo  $z_1, z_2$ , tales que  $d(z_1, z_2) < \delta'$ , donde  $(1+c)\gamma = \gamma_1 < 1$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  de manera que para todo  $y$  en  $\Lambda$ ,  $l(W_{\varepsilon}^{cs}(y)) \leq \delta$ , donde  $l(W_{\varepsilon}^{cs}(y))$  denota el largo de la curva  $W_{\varepsilon}^{cs}(y)$ .

Consideremos  $\alpha : I \rightarrow M$  una parametrización por longitud de arco, de  $W_{\varepsilon}^{cs}(y)$  para algún  $y \in \Lambda$ . Probaremos, por inducción, que  $l(f^n(\alpha)) \leq (1+c)^n \gamma^n l(\alpha)$ .

El caso  $n = 1$  se tiene directamente,

$$l(f(\alpha)) = \int_0^1 \|Df|_{\alpha(t)}(\alpha(t))\| dt \leq (1+c) \|Df|_{E_y}\| l(\alpha).$$

Supongamos que lo anterior se cumple para  $n-1$  y demostrémoslo para  $n$ .

$$l(f^n(\alpha)) \leq (1+c) \|Df|_{E_y}\| l(f^{n-1}(\alpha)) \leq (1+c)^n \gamma^n l(\alpha).$$

Por lo tanto  $f^n(W_{\varepsilon}^{cs}(y)) \subset W_{\varepsilon'}^{cs}(f^n(y))$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 5.6 (Finitud de las curvas).** *La colección  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$  tiene cardinalidad finita.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\lambda < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$  y  $c > 0$  tal que  $(1+c)\lambda < \gamma_1$ . Como las curvas  $\mathcal{C}_i$  son conjugadas a una rotación irracional, para toda curva  $\mathcal{C}_i$  existe un punto  $x_i$  en  $\mathcal{C}_i$  y un índice  $k_i$  tal que

$$\|Df^j|_{F_{x_i}}\| \leq (1+c)^j \quad \text{para todo } j \geq k_i.$$

Luego, gracias a la descomposición dominada,

$$\|Df^j|_{E_{x_i}}\| \leq (1+c)^j \lambda^j < \gamma_1^j \quad \text{para todo } j \geq k_i.$$

Por el Corolario 4.13, existe  $j_i$  tal que si  $y_i = f^{j_i}(x_i)$  entonces

$$\|Df^j|_{E_{y_i}}\| \leq \gamma_2^j \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Ahora, por el Lema 5.5, sabemos que existe  $\varepsilon > 0$ , tal que para todo  $i$  en  $I$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} l(f^j(W_{\varepsilon}^{cs}(j_i))) = 0.$$

Sabemos también, por el Lema 5.4, que los diámetros de todas las curvas irracionales están acotados lejos de cero. Luego podemos encontrar índices  $i_1$  y  $i_2$  tales que para algún  $y_{i_1}$  en  $\mathcal{C}_{i_1}$  la curva  $W_{\varepsilon}^{cs}(y_{i_1})$  interseca la órbita de  $\mathcal{C}_{i_2}$ . Pero lo anterior es una contradicción, ya que los puntos de la intersección permanecerían en la órbita de  $\mathcal{C}_{i_2}$  y a la vez

serían asintóticos a la órbita de  $\mathcal{C}_{i_1}$ . Luego la colección de las curvas forman un conjunto de cardinalidad finita.  $\square$

**2.2. Demostración Teorema B.** Con lo hecho hasta el momento, probar que el Teorema 5.3 implica el Teorema 5.2 resulta bastante fácil. En efecto, por la Proposición 5.6, las curvas irracionales son una cantidad finita. Sea  $\Lambda_2$  la unión de tales curvas y sea  $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \Lambda_2$ , de modo que  $\Lambda_1$  es un conjunto compacto e invariante. Entonces el Teorema 5.3 nos dice que  $\Lambda_1$  es un conjunto hiperbólico, con lo cual se concluye la demostración del Teorema 5.2.

### 3. Hiperbolicidad o curvas irracionales

A continuación nos dedicaremos a dar la demostración del Teorema 5.3, para ello, en primer lugar, recordemos que es lo que nos dice. Supongamos que tenemos un conjunto  $\Lambda$ , el cual es invariante, compacto, con descomposición dominada y tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos del tipo silla, entonces se tiene alguna de las siguientes opciones:

1. El conjunto  $\Lambda$ , es un conjunto hiperbólico.
2. Existe una curva simple, periódica, cerrada  $\mathcal{C} \subset \Lambda$ , invariante para  $f^m$ , donde  $m$  es el periodo de  $\mathcal{C}$ , normalmente hiperbólica y tal que  $f^m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es conjugado a una rotación irracional.

Debemos demostrar que o bien se tiene (1) o bien se tiene (2) para el conjunto  $\Lambda$ . Supongamos que no se cumple (2) en este caso debemos probar que el conjunto  $\Lambda$  es hiperbólico. Para ello haremos uso del Lema 4.10, más el siguiente resultado.

**LEMA 5.7 (Lema Central).** *Sea  $\Lambda_0$  un conjunto transitivo no trivial, compacto, invariante, con descomposición dominada,  $T_{\Lambda_0} = E \oplus F$  y tal que no es una curva irracional. Asumamos que todo conjunto propio compacto e invariante de  $\Lambda_0$  es hiperbólico. Entonces  $\Lambda_0$  es hiperbólico*

Para probar que el conjunto  $\Lambda$  es hiperbólico procederemos por contradicción, es decir supondremos que el conjunto  $\Lambda$  es no hiperbólico.

Consideremos la siguiente colección de conjuntos,

$$H = \{\tilde{\Lambda} \subset \Lambda \mid \tilde{\Lambda} \text{ es invariante, compacto y no hiperbólico}\}.$$

Ordenamos la colección  $H$  por inclusión y consideramos una cadena totalmente ordenada  $H_\Gamma = \{\Lambda_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ . Luego el conjunto

$$\Lambda_\infty = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma.$$

Es compacto e invariante.

AFIRMACIÓN 5.8. *El conjunto  $\Lambda_\infty$  es no hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $\Lambda_\infty$  fuese un conjunto hiperbólico, existiría una vecindad  $U$  de  $\Lambda_\infty$  tal que todo compacto, invariante contenido en  $U$  sería hiperbólico. Pero para algún  $\gamma$  en  $\Gamma$ ,  $\Lambda_\gamma \subset U$ , luego obtenemos una contradicción.  $\square$

Por la afirmación anterior, toda cadena totalmente ordenada contenida en  $H$  posee un elemento minimal. Por el Lema de Zorn podemos asegurar la existencia de un conjunto  $\Lambda_0$  tal que todo subconjunto propio, compacto e invariante contenido en  $\Lambda_0$  es hiperbólico.

AFIRMACIÓN 5.9. *El conjunto  $\Lambda_0$  es un conjunto transitivo no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $\Lambda_0$  no es una órbita periódica, ya que  $\Lambda_0$  es un elemento de la colección  $H$ . Ahora si para todo  $x$  en  $\Lambda_0$  se tuviese que  $\alpha(x) \not\subset \Lambda_0$  entonces  $\alpha(x)$  es hiperbólico y en este caso se tendría que

$$\|Df|_{E_x}^{-n}\| \rightarrow 0, \quad \text{para todo } x \in \Lambda_0.$$

De manera análoga se obtiene el mismo resultado para el sub-fibrado  $E$ , de donde se tendría que  $\Lambda_0$  es un conjunto hiperbólico, por el Lema 4.10, pero esto es una contradicción ya que  $\Lambda_0$  está contenido en  $H$ . Luego existe un punto  $x$  en  $\Lambda_0$  tal que o bien  $\alpha(x) = \Lambda_0$  o bien  $\omega(x) = \Lambda_0$ . En cualquiera de los dos casos el conjunto  $\Lambda_0$  resulta ser un conjunto transitivo.  $\square$

Finalmente aplicando el Lema 5.7 tenemos que  $\Lambda_0$  es un conjunto hiperbólico, pero  $\Lambda_0$  se encuentra contenido en  $H$  y tendríamos la contradicción que buscábamos. Por lo tanto, podemos concluir que  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico.

#### 4. Descomposición espectral para descomposición dominada

Sabemos que para difeomorfismo que presentan una descomposición hiperbólica en su fibrado tangente, el Teorema de la descomposición espectral de Smale, nos permite dar una buena descripción acerca del comportamiento de su dinámica. En la búsqueda de una descripción similar para difeomorfismos que presentan descomposición dominada en su fibrado tangente, E.Pujals y M.Sambarino en [PS2], obtienen el siguiente resultado para difeomorfismos de clase  $C^2$ .

TEOREMA 5.10. *Sea  $M$  una variedad compacta dos dimensional y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^2$  definido sobre  $M$ . Si*

el conjunto límite de  $f$ ,  $L(f)$ , admite una descomposición dominada, entonces  $L(f)$  se puede descomponer de la siguiente manera:

$$L(f) = \mathcal{I}(f) \cup \tilde{\mathcal{L}}(f) \cup \mathcal{R}(f).$$

Donde

- $\mathcal{I}(f)$  es el conjunto de los puntos periódicos con periodos acotados. El conjunto  $\mathcal{I}(f)$  se encuentra contenido en una unión disjunta y finita de arcos periódicos hiperbólicos o curvas simples y cerradas.
- $\mathcal{R}(f)$  es una unión finita de curvas cerradas, periódicas, simples, normalmente hiperbólicas y conjugadas a una rotación irracional.
- $\tilde{\mathcal{L}}(f)$  es una unión de finitos conjuntos transitivos, compactos, invariantes. Cada uno de los cuales son una unión de finitas clases homoclínicas, no triviales.

Los puntos periódicos son densos en  $\tilde{\mathcal{L}}(f)$  y a lo más finitos de ellos son puntos periódicos no hiperbólicos. Además  $f$  restringido a  $\tilde{\mathcal{L}}(f)$  es un difeomorfismo expansivo.

Usando el Teorema 5.2, más el teorema recién enunciado, se obtiene el siguiente corolario.

**COROLARIO 5.11.** *Sea  $M$  una variedad compacta dos dimensional y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^2$  definido sobre  $M$ . Si  $f$  posee infinitos pozos o fuentes con periodos no acotados entonces  $f$  puede ser aproximado, en la topología  $C^1$ , por un difeomorfismo que exhibe tangencias homoclínicas.*

Comentaremos brevemente los pasos más importantes de la demostración del Teorema 5.10. El punto de partida es el Teorema 5.2. Como sabemos la pérdida de hiperbolicidad en un sistema con descomposición dominada, puede darse o bien por la presencia de curvas irracionales o bien por la presencia de puntos periódicos no hiperbólicos. El siguiente teorema nos da una manera para tratar con estos últimos.

**TEOREMA 5.12.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^2$ , sea  $\Lambda$  un conjunto compacto invariante con descomposición dominada. Existe un entero  $N_1$  tal que, todo punto periódico  $p \in \Lambda$ , de periodo mayor que  $N_1$ , es un punto hiperbólico de tipo silla.*

Sea  $Per_1^N$  el conjunto de los puntos periódicos hiperbólicos de periodo mayor que  $N$  y de índice 1.

**TEOREMA 5.13.** *Sea  $M$  una variedad compacta de dimension dos,  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^2$ . Si que  $\overline{Per_1(f)}$  admite una*

descomposición dominada entonces existe  $N > 0$ , tal que  $\overline{Per_1^N(f)}$  se puede descomponer en la unión de finitas clases homoclínicas disjuntas. Mas aun  $\overline{Per_1^N(f)}$  contiene a lo mas finitos punto periódicos no hiperbólicos y  $f$  restringido a  $\overline{Per_1^N(f)}$  es un difeomorfismo expansivo.

Con ayuda de estos dos resultados, los cuales no probaremos, podemos esbozar el paso final en la demostración del Teorema 5.10. La idea consiste en probar que  $\tilde{\mathcal{L}}(f) \subset \overline{Per_1^N(f)}$ . La prueba de este hecho es bastante similar a el caso hiperbólico. Ya que si bien en el caso hiperbólico, contamos con la importante herramienta de tener variedades de tamaño uniforme, que se intersectan de manera transversal y que además poseen propiedades dinámicas, en el caso de la descomposición dominada las variedades locales con las que se cuenta no poseen, en principio, propiedades dinámicas. Sin embargo usando fuertemente el hecho que son unidimensionales así como su grado diferenciabilidad, se obtienen propiedades dinámicas suficientes para lo buscado.

## 5. Lema central

A continuación procederemos a demostrar el Lema 5.7 enunciado anteriormente. Las siguientes dos sub-secciones estarán dedicadas, a preparar las herramientas necesarias. Finalmente en la sección 5.3, concluiremos la demostración del Lema 5.7, subdividiendo de acuerdo si  $\Lambda_0$  es minimal o no.

### 5.1. Propiedades dinámicas de las variedades integrables.

El objetivo de esta sección es probar que las variedades centro estable y centro inestable poseen propiedades dinámicas casi tan buenas como en el caso hiperbólico.

Para comenzar probaremos una propiedad que establece una suerte de Teorema Denjoy, en dimensión dos. Para ello necesitamos en primer lugar un par de definiciones.

Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto, invariante con descomposición dominada, como en el Lema 5.7. Sea  $a$  en  $(0, 1]$ . Consideremos el campo de conos  $\mathcal{C}_a^{cs}, \mathcal{C}_a^{cu}$  como en la Proposición 4.4. Luego existe una vecindad admisible de  $\Lambda$ , que denotaremos por  $V_a(\Lambda)$ , donde la descomposición dominada de  $\Lambda$  se extiende de manera continua. Sin perder generalidad asumiremos que la dominación en  $V_a(\Lambda)$  cumple con

$$\|Df|_{E_x}\| \|Df|_{F_x}^{-1}\| < \lambda.$$

Para algún  $\lambda$  en  $(0, 1)$ .

**DEFINICIÓN 5.14.** *Un intervalo  $I$  contenido en  $V_a(\Lambda)$  se dirá  $a$ -transversal a la dirección  $E$ , si para todo  $x$  en  $I$ , el espacio tangente*



$T_x I$ , se encuentra contenido en  $C_a^{cu}(x)$ . Diremos que  $I$  es transversal, si lo es para algún  $a$  en  $(0, 1]$ .

De ahora en adelante, trabajaremos con una vecindad admisible  $V = V_1$ . Consideremos una vecindad  $U$  de  $\Lambda$ , con  $\bar{U}$  contenida en  $V$ . Denotaremos por  $\Lambda_1$  el conjunto invariante maximal de  $f$  contenido en  $\bar{U}$  y por  $\Lambda_1^+$  al conjunto de los puntos que permanecen en  $\bar{U}$  en el futuro, es decir,

$$\Lambda_1^+ := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\bar{U}).$$

DEFINICIÓN 5.15. Sea  $I$  un intervalo abierto de clase  $C^2$  contenido en  $M$ . Diremos que  $I$  es un  $\delta$ -E intervalo si se satisfacen las siguientes propiedades:

- El intervalo  $I$  esta contenido en  $\Lambda_1^+$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $l(f^n(I)) \leq \delta$ .
- Los iterados positivos de  $I$ ,  $f^n(I)$ , son siempre transversales a la dirección  $E$ .

Si además, existe una constante positiva,  $\gamma$ , tal que para todo  $x$  en  $I$

$$\|Df_{|_{E_x}}^n\| < \gamma^n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Entonces diremos que  $I$  es un  $(\delta, \gamma)$ -E intervalo.

LEMA 5.16. Sea  $I$  un  $\delta$ -E intervalo y  $\gamma < \delta$  una constante positiva. Existe  $0 < \delta_1 = \delta_1(\gamma)$ , tal que si  $\delta < \delta_1$  entonces, para algún  $m \geq 0$ ,  $f^m(I)$ , es un  $(\delta, \gamma)$ -E intervalo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\lambda_1 > \lambda$  y  $c$  una constante positiva tal que  $(1 + c)\lambda_1 < \gamma$ . Tomemos  $\delta_1$  positivo y  $V_a(\Lambda_1)$  con  $a$  suficientemente pequeño tal que,

$$\frac{\|Df_{|_{E_x}}\|}{\|Df_{|_{E_y}}\|} < 1 + c.$$

Y también

$$\frac{\|Df_{|_{\tilde{F}_x}}\|}{\|Df_{|_{\tilde{F}_y}}\|} > 1 - c.$$

Para todo  $x, y$  en  $V_a(\Lambda_1)$  con  $d(x, y) < \delta_1$ . Donde  $\tilde{F}$  es alguna dirección en el cono centro inestable de tamaño  $a$ . Sea  $\delta < \delta_1$ . Consideremos  $I$  un  $\delta$ -E intervalo, para probar el lema, es suficiente probar que existe  $m \geq 0$  tal que para todo  $x$  en  $f^m(I)$  se tiene que

$$\|Df_{|_{E_x}}^n\| < \gamma^n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Como  $I$  se encuentra contenido en  $\Lambda_1^+$  tenemos que  $f^n(I)$  se encuentra contenido en  $V_a(\Lambda_1)$  para todo  $n$  suficientemente grande. Mas aún

$T_x(f^n(I))$  se encuentra contenido en el cono centro inestable de tamaño  $a$ . Sin perder generalidad asumiremos que lo anterior es válido para todo  $n$  positivo.

Sea  $\tilde{F}_x = T_x(f^n(I))$  para  $x$  en  $f^n(I)$ , por lo dicho anteriormente se tiene que

$$\|Df|_{E_x}\| \|Df|_{\tilde{F}_x}^{-1}\| < \lambda.$$

Escojamos  $x$  en  $I$  arbitrario

**AFIRMACIÓN 5.17.** *Si  $n$  es un tiempo suficientemente grande, entonces*

$$\|Df|_{\tilde{F}_x}^n\| \leq \lambda_2^{-n}.$$

Para algún  $\lambda_2$  tal que  $\lambda\lambda_2^{-1} \geq \gamma$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Por contradicción, si la afirmación es falsa existe una sucesión de tiempos  $n_k$  que tiende a infinito tal que

$$\|Df|_{\tilde{F}_x}^{n_k}\| > \lambda_2^{-n_k}.$$

Luego para todo  $y$  en  $I$ ,

$$\|Df|_{\tilde{F}_y}^{n_k}\| > ((1-c)\lambda_2^{-1})^{n_k} > \lambda_3^{-n_k}.$$

Donde  $1 > \lambda_3 > \gamma$ . Si  $n_k$  es tal que  $\lambda_3^{-n_k}l(I) > \delta$  entonces,

$$l(f^{n_k}(I)) > \lambda_3^{-n_k}l(I) > \delta.$$

Pero lo anterior es una contradicción, ya que los intervalos  $f^n(I)$  siempre mantienen su largo acotado por  $\delta$ .  $\square$

Gracias a la descomposición dominada tenemos que,

$$\|Df|_{E_x}^n\| \leq (\lambda\lambda_2^{-1})^n \leq \lambda_0^n.$$

Con  $\lambda_0 < \gamma$ . Luego por el Teorema 4.11 sabemos que existe  $m = m(\lambda_0, \lambda_1)$  tal que,

$$\|Df|_{E_{f^m(x)}}^n\| \leq \lambda_1^n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Es decir, para todo  $y$  en  $f^m(I)$  se tiene que  $\|Df|_{E_y}^n\| \leq \lambda_1^n$ . De donde se concluye que  $f^m(I)$  es un  $(\delta, \gamma) - E$  intervalo.  $\square$

Diremos que un intervalo  $J$  es estable si para todo  $x$  en  $J$  existe una variedad estable de tamaño uniforme  $W_\epsilon^s(x)$ . Diremos también, que un intervalo  $J$  es pre-periódico, si existe un intervalo  $I$ , estable, tal que  $f^m(I)$  se encuentra contenido en  $J$ , para algún  $m > 0$  y para algún  $n \geq 0$ . Luego se tiene que  $f^n(J) \subset \cup_{x \in I} W_\epsilon^s(x)$ . Se puede ver que, si  $I$  es pre-periódico, entonces  $\omega(x)$  es una orbita periódica para todo elemento  $x$  de  $I$ .

Denotaremos por  $\omega(I)$  a la union de todos los conjuntos  $\omega$ -limite para puntos  $x$  en  $I$ , es decir

$$\omega(I) = \bigcup_{x \in I} \omega(x).$$

**TEOREMA 5.18 (Propiedad Denjoy).** *Existe  $\delta_0 > 0$  tal que si  $I$  es un  $\delta$ -E intervalo, con  $\delta < \delta_0$  entonces se cumple alguna de las siguientes propiedades.*

- *El conjunto  $\omega(I)$  es una curva simple, cerrada,  $\mathcal{C}$ , periódica (de periodo  $m$ ), normalmente hiperbólica y tal que  $f_C^m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es conjugada a una rotación irracional.*
- *El conjunto  $\omega(I)$  se encuentra contenido en el conjunto de los puntos periódicos de  $f$  en  $V$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para probar la existencia de la constante buscada comencemos escogiendo las siguientes constantes. Sea  $\gamma = \sqrt{\lambda}$ , donde  $\lambda$  es la constante de dominación del sistema en la vecindad admisible  $V$ . Sean  $\lambda_2, \lambda_3 > 0$  tales que;

$$\lambda < \gamma < \lambda_2 < \lambda_3 < 1.$$

Y sea  $c > 0$  tal que  $(1 + c)\lambda_2 < \lambda_3$ . Escojamos  $\delta_2 > 0$  y  $a > 0$  suficientemente pequeño, tal que; si  $x$  e  $y$  están contenidos en  $V_a(\Lambda)$  con  $d(x, y) < \delta_2$  entonces

$$\frac{1}{1 + c} < \frac{\|Df|_{E_x}\|}{\|Df|_{E_y}\|} < 1 + c,$$

$$\frac{1}{1 + c} < \frac{\|Df|_{\tilde{F}_x}^{-1}\|}{\|Df|_{\tilde{F}_y}^{-1}\|} < 1 + c.$$

Donde  $\tilde{F}$  es alguna dirección en  $\mathcal{C}_a^{cu}$ . Finalmente sea  $\delta_1 = \delta_1(\gamma)$  tal que para todo  $\delta$ -E intervalo  $I$ , con  $\delta < \delta_1$ , existe un entero positivo  $m$  tal que  $f^m(I)$  es un  $(\delta, \gamma)$ -E intervalo. Sea  $\delta_0 \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Probaremos que esta es la constante que estamos buscando.

Sin perder generalidad asumiremos que  $I$  es un  $(\delta, \gamma)$ -E intervalo (ya que lo que probemos para un iterado de  $f$  también será válido para  $f$ ). Escogiendo  $a$  de manera adecuada siempre se puede exigir que la dirección  $\tilde{F}_x = T_x f^n(I)$ , para  $x$  en  $f^n(I)$ , cumpla que

$$\|Df|_{E_x}\| \|Df|_{\tilde{F}_x}^{-1}\| < \lambda.$$

Sea  $x_0$  un punto en  $I$ , luego para todo entero positivo  $n$ ,

$$\|Df|_{E_{x_0}}^n\| < \gamma^n.$$

Por el Corolario 4.13, existe una sucesión no acotada  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que,

$$\|Df^j_{|E_{f^{n_i}(x_0)}}\| < \lambda_2^j \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Luego, como  $d(x, y) < \lambda_2$  si  $x$  e  $y$  se encuentran en  $I$ ,  $f^{n_i}(I)$  es un  $(\delta, \lambda_3)$ -E intervalo.

Tomemos  $I_0$  un intervalo que contenga a  $I$  y que sea  $(\delta, \lambda_3)$ -maximal. Luego para todo  $n_i$ ,  $f^{n_i}(I_0)$  es un  $(\delta, \lambda_3)$ -E intervalo.

Para cada entero positivo  $i \geq 1$ , escogemos intervalos  $I_{n_i}$  tales que

- $f^{n_i - n_{i-1}}(I_{n_i}) \subset I_{n_i}$ .
- $I_{n_i}$  es un intervalo  $(\delta, \lambda_3)$  maximal.

Por el Teorema de la variedad estable fuerte, Lema 5.5, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $W_\varepsilon^s(x)$  esta definida para todo  $x \in I_{n_i}$  y para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Sea  $n_i$  un índice arbitrario de nuestra colección  $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Para continuar con la demostración, consideraremos dos casos, a saber:

1. Existe  $n_j > n_i$  tal que

$$W_\varepsilon^s(I_{n_i}) \cap W_\varepsilon^s(f^{n_j - n_i}(I_{n_i})) \neq \emptyset.$$

2. Para todo  $n_r \geq n_i$  se tiene que

$$W_\varepsilon^s(I_{n_i}) \cap W_\varepsilon^s(f^{n_r - n_i}(I_{n_i})) = \emptyset.$$

Donde  $W_\varepsilon^s(I_{n_i}) = \cup_{x \in I_{n_i}} W_\varepsilon^s(x)$ .

Procederemos a demostrar el Teorema en el caso 1.

Sea  $m = n_j - n_i$ . Consideraremos dos casos. Supongamos que  $l(f^{km}(I_{n_i})) \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ .

**AFIRMACIÓN 5.19.** *El conjunto  $\omega(I_{n_i})$  es una orbita periódica.*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que por hipótesis se tiene que  $l(f^k(I_{n_i})) \rightarrow 0$ . Sea  $p$  un punto de acumulación de  $f^k(I_{n_i})$ , es decir  $f^{k_j}(I_{n_i}) \rightarrow \{p\}$  para  $k_j \rightarrow \infty$ .

Luego  $f^{k_j + m}(I_{n_i}) \rightarrow \{f^m(p)\}$  pero como  $m = n_j - n_i$  se tiene que  $f^{k_j + m}(I_{n_i}) \rightarrow \{p\}$ . Es decir  $p$  es un punto periódico. Pero como el largo de los iterados de  $I_{n_i}$  tienden a cero, se tiene que para todo  $x$  en  $I_{n_i}$ ,

$$\omega(I_{n_i}) = \mathcal{O}(p).$$

Además sabemos que  $f^{n_i}(I) \subset I_{n_i}$ , de donde  $\omega(I)$  es una orbita periódica.  $\square$

- b) Si  $l(f^{km}(I_{n_i})) \not\rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ .

Sea  $\{k_j\}$  una sucesión tal que  $f^{k_j m}(I_{n_i}) \rightarrow L$  con  $k_j \rightarrow \infty$ , donde  $L$  es un intervalo contenido en  $\Lambda$ . Sea

$$J = \bigcup_{n \geq 0} f^{nm}(L).$$

AFIRMACIÓN 5.20.  $J$  es una curva simple cerrada o un intervalo.

DEMOSTRACIÓN. Para todo  $n \geq 0$ ,  $f^{nm}(L)$  es un  $\delta$ -E intervalo. Luego para todo  $x \in J$  existe  $\varepsilon(x)$  tal que  $W_{\varepsilon(x)}^{cs}(x)$  es la variedad estable del punto  $x$  y por lo tanto

$$W(J) := \bigcup_{x \in J} W_{\varepsilon(x)}^s(x),$$

es un abierto que contiene al conjunto  $J$ .

Para probar la afirmación, nos basta probar que dado un punto  $x$  en  $J$  existe una vecindad,  $U(x)$ , con  $x \in U(x)$  tal que  $U(x) \cap J$  es un intervalo. Para ello, sea  $x$  un punto en  $J$ , supongamos que este pertenece a  $f^{n_1 m}(L)$ , consideramos un intervalo abierto  $U$  con

$$x \in U \subset f^{n_1 m}(L).$$

Y tomemos una vecindad  $U(x)$  del punto  $x$  tal que:

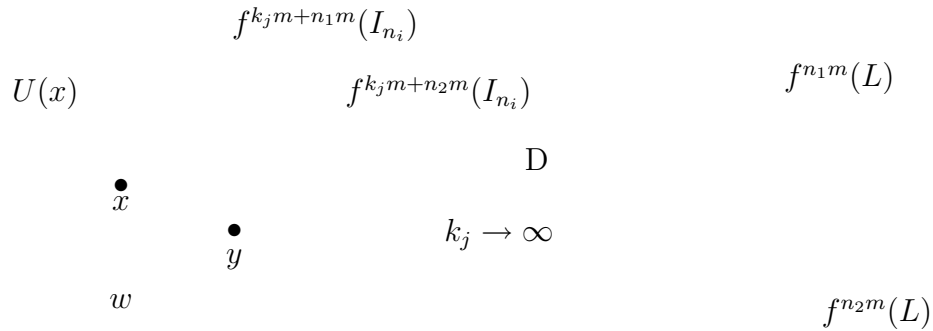
$$U(x) \subset W(J) \quad \text{y} \quad U(x) \cap L_1 \subset U.$$

Donde  $L_1$  es algún intervalo que contiene a  $f^{n_1 m}(L)$ , es transversal al fibrado  $E$  y tal que su largo no excede de  $2\delta_0$ .

Sea  $z$  un punto en  $J \cap U(x)$ , debemos probar que  $z$  se encuentra contenido en  $U$ . Como  $z$  se encuentra en  $J$  existe  $n_2$  tal que  $f^{n_2 m}(L)$  contiene a  $z$ . Luego para  $i = 1, 2$  tenemos que

- $f^{n_i m}(L) = \lim_j f^{k_j m + n_i m}(I_{n_i})$ .
- $f^{n_i m}(L) \cap U(x) \neq \emptyset$ .

Entonces existe  $j_0$  tal que intervalos  $L_{n_1} = f^{k_{j_0} m + n_1 m}(I_{n_1})$  y  $L_{n_2} = f^{k_{j_0} m + n_2 m}(I_{n_2})$  se encuentran conectados por la variedad estable,  $w$ , de algún punto de  $U(x)$ .



Además  $l(f^j(L_{n_i})) < \delta_0$  para todo  $j \geq 0$  y para  $i = 1, 2$ . Luego  $f^{n_1 m}(L) \cup f^{n_2 m}(L)$  es un intervalo transversal al fibrado  $E$  y de largo menor que  $2\delta_0$ . Es decir

$$z \in U(x) \cap (f^{n_1 m}(L) \cup f^{n_2 m}(L)) \subset U.$$

□

Con la afirmación ya demostrada procedemos a completar la prueba del Teorema en este primer caso.

Tenemos por un lado que  $J$  puede ser un intervalo, en este caso, como  $f^{n_j - n_i}(J)$  esta contenido en  $J$ , se tiene que  $I_{n_i}$  es un intervalo pre-periódico. Luego por dinámica en el intervalo, para todo  $x$  en  $I$ ,  $\omega(x)$  es una orbita periódica.

Por otro lado  $J$  es una curva simple cerrada tenemos nuevamente dos opciones para su numero de rotación. O bien este es racional, en cuyo caso  $\omega(I)$  es un orbita periódica, o bien el numero de rotación es irracional.

A continuación pasamos a dar la prueba del Teorema en el caso 2. Para ello necesitamos el siguiente Lema.

LEMA 5.21. *Para todo intervalo  $I_{n_i}$ , escogido como antes, se tiene que*

$$\sum_{k \geq 0} l(f^k(I_{n_i})) < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que

$$f^{n_i - n_{i-1}}(I_{n_{i-1}}) \subset I_{n_i}.$$

Luego el hecho que, para todo  $n_j > n_i$

$$W_\varepsilon^s(I_{n_i}) \cap W_\varepsilon^s(f^{n_j - n_i}(I_{n_i})) = \emptyset,$$

implica que

$$W_\varepsilon^s(f^{n_k - n_i}(I_{n_i})) \cap W_\varepsilon^s(f^{n_j - n_i}(I_{n_i})) = \emptyset.$$

Para todo  $n_i$  y para todo  $n_j > n_i, n_k > n_i$ . Fijemos un índice  $i$  (fijo pero arbitrario). Sin perder generalidad podemos suponer que  $i = 0$ . Sea  $N = N(\gamma, \lambda_2)$  dado por el Teorema 4.11, y sea  $m_j = n_{j+1} - n_j$ .

Como deseamos dar una cota a la suma de los largos de los iterados de  $I_{n_i}$  el caso “complicado” de acotar se da cuando  $N < m_j$ , pero vamos a ver que en estos casos vamos a encontrar una buena contracción en el fibrado  $F$ .

AFIRMACIÓN 5.22. *Si  $N < m_j$  entonces*

$$\|Df_{f^{n_{j+1}-n}(x_0)}^n\| \geq \gamma^n, \quad \text{para } N \leq n \leq m_j.$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba sigue por contradicción, es decir supongamos que existe un tiempo  $n$  con  $N \leq n \leq m_j$  tal que

$$\|Df^n|_{E_{f^{n_{j+1}-n}(x_0)}}\| \leq \gamma^n.$$

Luego por el Teorema 4.11, podemos encontrar un tiempo  $\tilde{n} < n$  tal que

$$\|Df^j|_{E_{f^{n_{j+1}-\tilde{n}}(x_0)}}\| \leq \lambda_2^j \quad \text{para } 0 \leq j \leq \tilde{n}.$$

Pero en realidad lo que tenemos es que (por la elección de los tiempos  $n_j$ )

$$(10) \quad \|Df^j|_{E_{f^{n_{j+1}-\tilde{n}}(x_0)}}\| \leq \lambda_2^j, \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Pero lo anterior es una contradicción ya que  $n_j < n_{j+1} - \tilde{n} < n_{j+1}$  o dicho de otra manera hemos encontrado un nuevo tiempo hiperbólico entre los tiempos hiperbólicos  $n_j, n_{j+1}$ . Pero la selección de los tiempos hiperbólicos, la hemos realizado de manera exhaustiva con respecto a la propiedad (10).  $\square$

Haciendo uso de la descomposición dominada y de la afirmación que acabamos de revisar, tenemos que

$$\|Df^{-n}|_{\tilde{E}_{f^{n_{j+1}}(x_0)}}\| \leq (\lambda\gamma^{-1})^n = \gamma^n, \quad \text{para } N \leq n \leq m_j.$$

Haciendo uso, (una vez mas!!), del Teorema 4.11, obtenemos un tiempo  $r_j$  con

$$n_j \leq n_{j+1} - N < r_j \leq n_{j+1}.$$

Tal que:

$$\|Df^{-j}|_{\tilde{E}_{f^{r_j}(x_0)}}\| \leq \lambda_2^j, \quad \text{para } 0 \leq j \leq r_j - n_j.$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{r_j-n_j} l(f^{-j}(f^{r_j}(I_0))) \leq \sum_{j=0}^{r_j-n_j} \lambda_3^j l(f^{r_j}(I_0)) \leq \frac{1}{1-\lambda_3} l(f^{r_j}(I_0)).$$

Sea  $K_1 = \sup\{\|D_x f^{-n}\| \mid x \in M, 0 \leq n \leq N\}$  y  $K_2 = \frac{1}{1-\lambda_3}K_1 + NK_1$ .  
Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} l(f^k(I_0)) &= \sum_{j \geq 0} \sum_{n_j}^{n_{j+1}-1} l(f^k(I_0)), \\ &= \sum_{j, m_j > N} \sum_{n_j}^{n_{j+1}-1} l(f^k(I_0)) + \sum_{j, m_j \leq N} \sum_{n_j}^{n_{j+1}-1} l(f^k(I_0)), \\ &= \sum_{j, m_j > N} \left( \sum_{n_j}^{r_j} + \sum_{r_j}^{n_{j+1}-1} \right) l(f^k(I_0)) + \sum_{j, m_j \leq N} \sum_{n_j}^{n_{j+1}-1} l(f^k(I_0)). \end{aligned}$$

Ahora como

$$\begin{aligned} \sum_{n_j}^{r_j} l(f^k(I_0)) + \sum_{r_j}^{n_{j+1}-1} l(f^k(I_0)) &\leq \frac{1}{1-\lambda_3} l(f^{r_j}(I_0)) + N l(f^{r_j}(I_0)), \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda_3} K_1 l(f^{n_{j+1}}(I_0)) + NK_1 l(f^{n_{j+1}}(I_0)). \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} l(f^k(I_0)) &\leq K_2 \sum_{j \geq 0} l(f^{n_{j+1}}(I_0)) \leq KK_2 \sum_{j \geq 0} \text{Vol}(W_\varepsilon^s(f^{n_{j+1}}(I_0))), \\ &\leq KK_2 \text{Vol}(M) < \infty. \end{aligned}$$

La existencia de la constante  $K$  que nos permite asegurar que

$$K \text{Vol}(W_\varepsilon^s(f^{n_{j+1}}(I_0))) \geq l(f^{n_{j+1}}(I_0)).$$

Será demostrada más adelante.  $\square$

Como consecuencia del Lema 5.21, tenemos que  $l(f^k(I_{n_i})) \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ .

Continuando con la demostración del Teorema, consideraremos dos nuevos sub-casos, de los cuales veremos que finalmente solo una de ellos es posible de realizarse.

- a) Supongamos que para algún par  $n_r, n_j$  con  $n_r \neq n_j$  se tiene que,

$$W_\varepsilon^s(I_{n_r}) \cap W_\varepsilon^s(I_{n_j}) \neq \emptyset.$$

**AFIRMACIÓN 5.23.** *El conjunto  $\omega(I)$  es una órbita periódica.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $n_r < n_j$ . La demostración sigue de manera similar al caso (1.a) revisado anteriormente. Es decir ocupando el hecho que  $f^{n_r - n_j} \subset I_{n_j}$  y que para todo



tiempo  $i$ ,  $l(f^k(I_{n_i})) \rightarrow 0$ , se tiene que existe una subsucesión  $k_j$  tal que  $f^{k_j}(I_{n_i}) \rightarrow \{p\}$ , donde  $p$  es un punto periódico y por lo tanto  $\omega(I)$  es una órbita periódica.  $\square$

b) Supongamos que para todo  $n_r, n_j$  se tiene que

$$W_\varepsilon^s(I_{n_r}) \cap W_\varepsilon^s(I_{n_j}) = \emptyset.$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene que  $l(I_{n_i}) \rightarrow 0$  si  $i \rightarrow \infty$ . Ocupando las técnicas de la Proposición ?? (Schwartz) podemos ver que tenemos dos opciones, o bien para cada  $I_{n_i}$  existe un intervalo  $J_{n_i}$  con  $I_{n_i} \subset J_{n_i}$  tal que  $l(J_{n_i}) \rightarrow 0$  o bien para todo  $i$  existe  $k_i$  tal que  $l(f^{k_i}(I_{n_i})) = \delta$ . El primer caso nos lleva a contradecir la maximalidad de los intervalos  $I_{n_i}$ . Para el segunda caso tenemos la siguiente afirmación.

**AFIRMACIÓN 5.24.** *Existen  $n_j$  y  $n_i$  con  $n_j > n_i$  tal que  $k_i = n_j - n_i$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para probar la afirmación debemos asegurar que:

$$\|Df_{|_{\mathbb{E}_{f^{n_i+k_i}(x_0)}}}^j\| \leq \lambda_2^j, \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Para ello procedemos por contradicción, es decir, supongamos que para algún  $j_0 > 0$

$$\|Df_{|_{\mathbb{E}_{f^{n_i+k_i}(x_0)}}}^{j_0}\| > \lambda_2^{j_0}.$$

Luego, ocupando la descomposición dominada, tenemos que

$$\|Df_{|_{\mathbb{F}_{f^{n_i+k_i+j_0}(x_0)}}}^{-j_0}\| \leq (\lambda_2^{-1}\lambda)^{j_0} \leq \gamma^{j_0} \leq \lambda_2^{j_0}.$$

Por lo tanto para todo punto  $y$  contenido en  $f^{j_0}(f^{k_i}(I_{n_i}))$ ,

$$\|Df_{|_{\mathbb{F}_y}}^{-j_0}\| \leq (\lambda^2(1+c))^{j_0} \leq \lambda_3^{j_0}.$$

Y como las direcciones  $\tilde{\mathbb{F}}_y$  son de dimension 1, se tiene que para todo  $y$  contenido en  $f^{k_i}(I_{n_i})$ :

$$\|Df_{|_{\tilde{\mathbb{F}}_y}}^{j_0}\| \geq \lambda_3^{-j_0}.$$

De lo anterior concluimos que

$$\delta \geq l(f^{j_0}(f^{k_i}(I_{n_i}))) \geq \lambda_3^{-j_0}(f^{k_i}(I_{n_i})) = \lambda_3^{-j_0}\delta > \delta.$$

Con lo que concluye la prueba de la afirmación.  $\square$

Finalmente para concluir la prueba del Teorema solo debemos notar que  $l(f^{k_i}(I_{n_i})) = \delta$  implica que  $l(I_{n_j}) = \delta$  para  $j$  arbitrariamente grande, pero anteriormente habíamos concluido que  $l(I_{n_j}) \rightarrow 0$ . Es decir el caso (b) no es realizable bajo nuestras hipótesis. Con lo cual se termina la demostración del Teorema 5.18.

□

**COROLARIO 5.25.** *Si el conjunto  $\Lambda$  no contiene alguna curva, simple, periódica, cerrada y conjugada a una rotacional irracional, entonces existe una vecindad admisible  $V$  del conjunto  $\Lambda$ , tal que, dado un  $\delta$ -E intervalo,  $I$ , contenido en  $V$  se tiene que;*

$$\omega(I) \subset \text{Per}(f|_V).$$

Si bien todos los resultados obtenidos hasta el momento los hemos desarrollado para  $\delta$ -E intervalos, estos resultados tienen sus análogos para intervalos del tipo  $\delta$ -F. Las demostraciones son similares y solo es necesario cambiar  $f$  por  $f^{-1}$  y E por F donde corresponda.

Como hemos dicho al comienzo de esta sección nuestro objetivo es comprobar que las variedades centro estable y centro inestable tienen propiedades dinámicas casi tan “buenas” como las variedades estable e inestable del caso hiperbólico. El resultado contenido en el Teorema 5.18 nos será de gran ayuda en todo el trabajo que aun debemos realizar.

En lo que sigue  $\Lambda$  sera un conjunto invariante, compacto, que admite descomposición dominada y que no posee curvas simples, periódicas, cerradas, conjugadas a una rotación irracional.

Por el Teorema 5.18 sabemos que existe  $\delta_0 > 0$  tal que si  $I$  es un  $\delta$ -E intervalo con  $\delta < \delta_0$  entonces  $\omega(I)$  se encuentra contenido en el conjunto de los puntos periódicos de  $f$  que viven en la vecindad admisible  $V$ , donde  $V$  es dada por el Corolario 5.25.

**LEMA 5.26.** *Existe  $\delta_3 > 0$  tal que si  $p \in \Lambda$  es un punto periódico y alguna componente conexa de  $W^u(p) \setminus \{p\}$  tiene largo menor que  $\delta_3$ , digamos  $(p, q)$ , entonces el punto  $q$  es un pozo o un punto periódico no hiperbólico.*

La demostración del Lema 5.26 es bastante sencilla, razón por la cual la obviaremos.

**OBSERVACIÓN 5.27.** *En lo que sigue la constante  $\delta_0$  asegurada por el Teorema 5.18 la escogeremos de manera tal que  $\delta_0 < \delta_3$ .*

A continuación el resultado anunciado anteriormente

PROPOSICIÓN 5.28 (Propiedades dinámicas).

1. Para todo  $\varepsilon < \delta_0$  existe  $\gamma = \gamma(\varepsilon)$  tal que:
  - $f^{-n}(W_\gamma^{cu}(x)) \subset W_\varepsilon^{cu}(f^{-n}(x))$ , para todo  $n \geq 0, x \in \Lambda$ .
  - $f^n(W_\gamma^{cs}(x)) \subset W_\varepsilon^{cs}(f^n(x))$ , para todo  $n \geq 0, x \in \Lambda$ .
2. Para todo  $\gamma \leq \gamma(\delta_0)$  o bien

$$l(f^{-n}(W_\gamma^{cu}(x))) \longrightarrow 0,$$

o bien  $x \in W^u(p)$  para algún  $p$  contenido en  $Per(f|_V) \cap W_\gamma^{cu}(x)$ .

De manera análoga o bien

$$l(f^n(W_\gamma^{cs}(x))) \longrightarrow 0,$$

o bien  $x \in W^s(p)$  para algún  $p$  contenido en  $Per(f|_V) \cap W_\gamma^{cs}(x)$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración la realizaremos solo para la variedad centro inestable,  $W^{cu}$ , la demostración para la variedad centro estable  $W^{cs}$  se realiza de manera similar.

Comencemos con la demostración de (1) para ello escojamos algún  $\varepsilon \leq \delta_0$ .

Sabemos, por el Corolario 4.21, que existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que: Si  $y \in W_\varepsilon^{cu}(x)$  y  $d(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \leq \delta$  para  $0 \leq j \leq n$ , entonces  $f^{-j}(y) \in W_\varepsilon^{cu}(f^{-j}(x))$  para  $0 \leq j \leq n$ .

Supongamos que la tesis de (1) es falsa. Luego tendremos que existen sucesiones  $\gamma_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \in \Lambda$  y  $m_n \rightarrow 0$  tales que

$$l(f^{-j}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n))) \leq \delta, \quad \text{para } 0 \leq j \leq m_n,$$

y además

$$l(f^{-m_n}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n))) = \delta.$$

Sea  $I_n = f^{m_n}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n))$  sin perder generalidad podemos asumir que existe un intervalo  $I$ , contenido en  $\Lambda$  tal que

$$I_n \longrightarrow I, f^{-m_n}(x_n) \rightarrow z \in \Lambda, z \in \bar{I}.$$

Como  $I$  se encuentra contenido en  $W_\varepsilon^{cu}(z)$  y para todo entero positivo  $n$ ,  $l(f^n(I)) \leq \delta$ , se tiene que  $I$  es un  $\delta$ -E intervalo. Luego, por el Teorema 5.18,  $\omega(z)$  es una orbita periódica  $\mathcal{O}(p)$ . Además  $p$  es un punto periódico de tipo hiperbólico, ya que  $p$  esta contenido en  $\Lambda$ .

Por lo tanto tenemos que  $z \in W^s(p)$ , además al menos una componente conexa de  $W^u(p) \setminus \{p\}$  tiene largo menor que  $\delta$ . Para continuar con la demostración analizaremos dos casos, a saber;

- a) Supongamos que para algún  $m_n$ ,

$$f^{-m_n}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n)) \cap W^s(p) \neq \emptyset.$$

Como la intersección es transversal tenemos, gracias al Lema de la inclinación, que  $f^m(f^{-m_n}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n))) \rightarrow W^u(p)$  para  $m$  tendiendo a infinito. Pero

$$l(f^m(f^{-m}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n)))) = l(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n)) \rightarrow 0$$

b) Supongamos que para todo  $m_n$

$$f^{-m_n}(W_{\gamma_n}^{cu}(x_n)) \cap W^s(p) = \emptyset.$$

Sea  $(p, q)$  la componente de  $(W^u(p) \setminus \{p\})$  que posee largo menor que  $\delta$ . Luego para  $n$  suficientemente grande

$$\omega(f^{-m_n}(x_n)) = q,$$

ya que sabemos que  $q$  es un pozo o un punto periódico no hiperbólico. Pero por otro lado tenemos que  $\omega(f^{-m_n}(x_n))$  se encuentra contenido en  $\Lambda$ , en el cual todos los puntos periódicos son hiperbólicos.

Luego como, tanto en (a) como en (b) hemos llegado a una contradicción, se concluye la demostración de la parte (1). Procedamos ahora con la demostración de (2).

Sea  $\gamma \leq \gamma(\delta_0)$ , donde  $\gamma(\delta_0)$  es dado por la parte (1). Supongamos que existe  $x$  en  $\Lambda$  tal que

$$(11) \quad l(f^{-n}(W_{\gamma}^{cu}(x))) \rightarrow 0.$$

Ocupando la parte (1) con  $\varepsilon = \delta_0$  tenemos que

$$l(f^{-n}(W_{\gamma}^{cu}(x))) \leq \delta_0, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Además por 11 podemos asumir que existe  $\eta$  positivo tal que

$$l(f^{-n_k}(W_{\gamma}^{cu}(x))) \geq \eta, \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Donde  $\{n_k\}$  es alguna subsucesión adecuada. Sea  $I_{n_k} = f^{-n_k}(W_{\gamma}^{cu}(x))$ , sin perder generalidad podemos suponer que

$$I_{n_k} \rightarrow I, f^{-n_k}(x) \rightarrow z \in \bar{I}, z \in \Lambda.$$

De donde, al igual que en la parte (1),  $I$  resulta ser un  $\delta_0$ -E intervalo y  $z$  se encuentra contenido en  $W^s(p)$  para algún punto periódico  $p$  de  $\Lambda$ .

Luego debemos considerar dos opciones cuando el punto  $z$  sea un punto interior de  $I$  o cuando sea un punto contenido en la clausura de  $I$ . Analizaremos estas dos opciones por separado.

Supongamos que  $z$  se encuentra en el interior del intervalo  $I$ . Como  $I$  interseca de manera transversal a  $W^s(p)$  tenemos que  $l(W^u(p)) \leq \delta_0$ .

AFIRMACIÓN 5.29. *Para todo  $n_k$ ,*

$$f^{-n_k}(x) \in W^s(p).$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $f^{-n_k}(x)$  se encontrara contenido en  $W^u(p) \setminus \{p\}$  entonces  $\omega(x)$  sería un pozo o un punto periódico no hiperbólico, ya que ambas componentes de  $W^u(p) \setminus \{p\}$  poseen largo menor que  $\delta_0$ , pero  $\omega(x)$  se encuentra contenido en  $\Lambda$ .  $\square$

Sin perder generalidad podemos asumir que  $\{f^{n_k}(x)\}$  se encuentra contenido en un dominio fundamental de  $W^s(p)$ . No puede suceder que  $z$  sea distinto de  $p$  ya que la variedad estable de  $p$  no puede tener auto-intersecciones. Luego  $z = p$ , mas aun  $\{f^{n_k}(x)\}$  se encuentra contenida en la variedad estable local de  $p$ , ya que de lo contrario  $\omega(f^{n_k}(x))$  sería un pozo o un punto periódico no hiperbólico, pero en este caso se tiene que  $x = p$ . Con lo que se concluye la demostración de (2) en el caso que  $z$  se encuentre en el interior de  $I$ .

Supongamos ahora que  $z$  se encuentra en la clausura de  $I$ . La demostración en este caso sigue de manera similar a la de (1.b), es decir considerando los siguientes sub-casos.

a) Supongamos que para todo  $n_k$ ,

$$f^{-n_k}(W_\gamma^{\text{cu}}(x)) \cap W^s(p) \neq \emptyset.$$

En este caso, ocupando el Lema de la inclinación, llegamos a que  $\omega(f^{-n_k}(x))$  es un pozo, pero este se encuentra contenido en  $\Lambda$ , lo cual produce una contradicción.

b) Supongamos que existe  $n_k$  tal que

$$f^{-n_k}(W_\gamma^{\text{cu}}(x)) \cap W^s(p) = \emptyset.$$

En este caso como  $l(f^j(f^{-n_k}(W_\gamma^{\text{cu}}(x)))) \leq \delta_0$  para  $0 \leq j \leq n_k$ , se tiene que  $x$  se encuentra en  $W^u(p)$ , mas aun  $x$  se encuentra en  $W_{\delta_0}^u(p)$ . Finalmente  $x \in W_\gamma^u(p)$  ya que de lo contrario, como  $f^{-n_k}(x) \rightarrow p$  y

$$l(f^{-n_k}(W_\gamma^{\text{cu}}(x))) \rightarrow 0,$$

se tendría que  $I \cap W^s(p)$  lo cual es una contradicción.

Luego con la parte (2.b) se concluye la prueba de la Proposición 5.28.  $\square$

OBSERVACIÓN 5.30. *Consideremos*

$$\gamma_0 \leq \frac{\gamma(\delta_0)}{2}.$$

Sea  $p$  un punto periódico,  $x \in \Lambda$  un punto contenido en  $W_\gamma^u(p)$  y  $\gamma \leq \gamma_0$ .  
Luego

$$W_\gamma^{\text{cu}}(x) \cap W_\gamma^u(p),$$

es un abierto relativo en ambas curvas.

Como hemos dicho anteriormente, el objetivo de esta sección es encontrar “ciertas” propiedades dinámicas a las variedades centro estable y centro inestable. Los resultados que mostraremos a continuación se basan en una serie de objetos y propiedades de los mismos, que pasamos a definir. Pero antes de introducir las próximas definiciones es necesario que hagamos algunas consideraciones las cuales nos acompañaran el resto del trabajo.

- Para todo  $0 < a \leq 1$  hemos definido una vecindad admisible  $V_a = V_a(\Lambda)$ , del conjunto  $\Lambda$ , vecindad en la cual hemos definido las familias de conos estables e inestables de tamaño  $a$ ,  $(\mathcal{C}_a^{\text{cs}}, \mathcal{C}_a^{\text{cu}})$ . De ahora en adelante notaremos por  $V = V_1(\Lambda)$  y  $V_a = V_a(\Lambda)$  para  $0 < a < 1$ .
- Recordemos que hemos dicho que un intervalo es transversal a la dirección E (resp. F), si  $I$  se encuentra contenido en  $V_a(\Lambda)$  y además, para todo  $x$  en  $I$ ,  $T_x I$  se encuentra contenido en  $\mathcal{C}_a^{\text{cu}}(x)$  (resp.  $\mathcal{C}_a^{\text{cs}}(x)$ ).
- Sea  $\gamma_0$  como en la Observación 5.30. Fijaremos  $\gamma \leq \gamma_0$  tal que para todo  $x$  en  $\Lambda$ , las siguientes intersecciones sean transversales:

$$W_\gamma^{\text{cu}}(x) \cap E, \quad W_\gamma^{\text{cs}}(x) \cap F.$$

- Sea  $\lambda > 0$  la constante de dominación de  $f$  en  $\Lambda$ . Fijaremos constantes positivas  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c, \delta_2$ . que satisfagan
  1.  $0 < \lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$ .
  2.  $\lambda_1 = \sqrt{\lambda}$ ,  $\lambda_1(1+c) < \lambda_2$ ,  $\lambda_2(1+c) < \lambda_3$ .
  3. Si  $a$  se escoge pequeño,

$$\frac{1}{1+c} < \frac{\|Df|_{\tilde{E}_x}\|}{\|Df|_{\tilde{E}_y}\|} < 1+c,$$

$$\frac{1}{1+c} < \frac{\|Df^{-1}|_{\tilde{F}_x}\|}{\|Df^{-1}|_{\tilde{F}_y}\|} < 1+c.$$

Cuando  $\tilde{E}$  (resp.  $\tilde{F}$ ) sea una dirección contenida en  $\mathcal{C}_a^{\text{cs}}$  (resp.  $\mathcal{C}_a^{\text{cu}}$ ) y  $d(x, y) < \delta_2$ .

DEFINICIÓN 5.31. Sea  $x$  un punto de  $\Lambda$ . Sean  $J$  y  $T$  dos intervalos abiertos que contienen a  $x$ , tales que

$$J \subset W_\gamma^{\text{cu}}(x), \quad T \subset W_\varepsilon^{\text{cs}}(x).$$

Se define la *caja*,  $B_T(J)$ , para el punto  $x$  como el rectángulo abierto, centrado en  $x$ , que posee a  $J$  y a  $T$  como sus ejes centrales y tal que las componentes conexas de la frontera de  $B_T(J)$  son transversales a las direcciones  $E, F$ . De manera más precisa, sea  $h : [0, 1]^2 \rightarrow M$  un homeomorfismo que preserva orientación tal que

$$h(\{0\} \times [-1, 1]) = \bar{J},$$

$$h([-1, 1] \times \{0\}) = \bar{T}.$$

Luego se define  $B_T(J) = \text{Int}(h([-1, 1]^2))$  donde además, si se define la frontera centro estable como:

$$\partial^{\text{cs}}(B_T(J)) := \partial_1^{\text{cs}}(B_T(J)) \cup \partial_2^{\text{cs}}(B_T(J)) = h(\{-1, 1\} \times [-1, 1]).$$

Entonces  $\partial_i^{\text{cs}}(B_T(J))$  es transversal a la dirección  $E$  para  $i = 1, 2$ . De manera análoga se tiene lo mismo para  $\partial^{\text{cu}}(B_T(J))$ , la frontera centro estable.

Si  $B_T(J)$  es una caja en torno al punto  $x$ . Sea  $T' \subset T$  un intervalo que contiene al punto  $x$ . Diremos que  $B_{T'}(J)$  es una sub-caja de  $B_T(J)$  si

- $B_{T'}(J) \subset B_T(J)$ .
- $\partial^{\text{cu}}(B_{T'}(J)) \subset \partial(B_T(J))$ .

Es claro que para asegurar la existencia de  $B_T(J)$  solo necesitamos escoger  $\varepsilon$  y  $J$  de tamaño adecuado (pequeño).

Para simplificar la notación, denotaremos  $B_\varepsilon(J)$  en lugar de  $B_T(J)$  en el caso que  $T \subset W_\varepsilon^{\text{cs}}(x)$ . Además si  $\varepsilon' < \varepsilon$  denotaremos por  $B_{\varepsilon'}(J)$  a la sub-caja  $B_{T'}(J)$  donde  $T' \subset T \cap W_{\varepsilon'}^{\text{cs}}(x)$ . Denotaremos también

$$J^+ = \{y \in J \mid y > x\}.$$

$$J^- = \{y \in J \mid y < x\}.$$

Diremos que  $B_\varepsilon(J^+)$  es la parte superior de la caja  $B_\varepsilon(J)$  y que  $B_\varepsilon(J^-)$  es la parte inferior de  $B_\varepsilon(J)$ . Donde por  $B_\varepsilon(J^+)$  hemos denotado a la componente conexa de  $B_\varepsilon(J) \setminus W_\varepsilon^{\text{cs}}(x)$  que contiene a  $J^+$  y análogamente para  $B_\varepsilon(J^-)$ . Asimismo diremos que  $B_\varepsilon^-(J)$  (resp.  $B_\varepsilon^+(J)$ ) es el lado izquierdo (resp. derecho) de la caja  $B_\varepsilon(J)$ .

Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja arbitraria y sea  $y$  un punto en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$ . Se define

$$J(y) := W_\gamma^{\text{cu}}(y) \cap B_\varepsilon(J).$$

Sin perder generalidad podemos escoger  $B_\varepsilon(J)$  lo suficientemente pequeña de manera que  $J(y)$  sea un intervalo, transversal a la dirección  $E$  y con sus puntos extremos contenidos en  $\partial^{cu}(B_\varepsilon(J))$ .

Si escogemos  $B_\varepsilon(J)$  con diámetro suficientemente pequeño, sabemos que dado  $\delta > 0$ ,

$$l(f^{-n}(J(y))) \leq \delta, \quad \text{para todo } y \in B_\varepsilon(J) \cap \Lambda, n \geq 0.$$

**DEFINICIÓN 5.32.** *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja y  $C$  una constante positiva. Si para todo par de intervalos  $J_1, J_2$  contenidos en  $B_\varepsilon(J)$ , transversales a la dirección  $E$  y con sus extremos en la frontera centro inestable de  $B_\varepsilon(J)$ , se tiene que*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{l(J_1)}{l(J_2)} \leq C.$$

*Entonces se dirá que  $C$  es la **distorsión** de la caja  $B_\varepsilon(J)$  o que la caja  $B_\varepsilon(J)$  posee **distorsión** igual a  $C$ .*

Una manera de asegurar distorsión  $C$  en una caja  $B_\varepsilon(J)$ , es asegurar la existencia de una foliación de clase  $C^1$ , cercana a la dirección  $E$ , tal que para cualquiera dos intervalos  $J_1, J_2$  dados como en la Definición 5.32 se tenga que

$$\frac{1}{C} \leq \|\Pi'\| \leq C.$$

Donde  $\Pi' = \Pi'(J_1, J_2)$  es la holonomía de la foliación entre los intervalos  $J_1$  y  $J_2$ .

**OBSERVACIÓN 5.33 (Foliación).** *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja y  $X$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en  $B_\varepsilon(J)$ . Supongamos que  $X(x)$  se encuentra contenido en  $\mathcal{C}_b^{cs}(x)$  para  $b$  suficientemente pequeño, supongamos además que si  $x$  se encuentra en  $\partial^{cu}(B_\varepsilon(J))$  entonces  $X(x)$  se encuentra en  $T_x(\partial^{cu}(B_\varepsilon(J)))$ . Consideremos el flujo (o la foliación), la cual denotaremos por  $\mathcal{F}^{cs}$ , generado por el campo vectorial  $X$ . Para cada  $x$  en  $B_\varepsilon(J)$ , denotaremos por  $\mathcal{F}^{cs}(x)$  la hoja del flujo  $\mathcal{F}^{cs}$  que pasa por el punto  $x$ , luego tenemos que existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$\frac{1}{C} \leq \|\Pi'\| \leq C.$$

A continuación revisaremos un Lema que nos permitirá controlar la distorsión de las pre-imágenes de una caja.

**LEMA 5.34.** *Sean  $B_\varepsilon(J)$ ,  $\mathcal{F}^{cs}$  y  $C > 0$  como en la Observación 5.33. Existen constantes positivas  $\tau$  y  $\alpha$  tal que si  $z$  es un punto de  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  y para algún entero positivo  $n$  existe una caja  $B(n) = B_\varepsilon(f^{-n}(J(z)))$  que cumple con*



- $f^n(B(n)) \subset B_\varepsilon(J)$  y  $f^n(\partial^{cu}(B(n))) \subset \partial^{cu}(B_\varepsilon(J))$ .
- Para todo  $0 \leq j \leq n$  el diámetro de  $f^j(B(n))$  se encuentra acotado por  $\tau$ .
- Existe una constante positiva  $K$ , tal que para todo  $x$  en  $B(n)$

$$\sum_{j=0}^n l(f^j(\mathcal{F}_n^{cs}(x)))^\alpha \leq K.$$

Donde  $\mathcal{F}_n^{cs}(x)$  denota la componente conexa de

$$f^{-n}(\mathcal{F}^{cs}(f^{-n}(x))) \cap B(n).$$

En la cual se encuentra contenido el punto  $x$ .

Entonces existe una constante positiva  $C_1 = C_1(C, K)$  tal que  $B(n)$  posee distorsión  $C_1$ .

DEMOSTRACIÓN. Denotaremos por  $\mathcal{F}_n^{cs}$  a la foliación definida en  $B(n)$ , obtenida como la imagen de  $\mathcal{F}^{cs}$  por  $f^{-n}$ .

Sean  $J_1^n, J_2^n$  dos intervalos con extremos en  $\partial^{cu}(B(n))$ , transversales a la dirección  $E$ . Denotaremos por  $\Pi_n = \Pi(J_1^n, J_2^n)$  a la proyección desde  $J_1^n$  hasta  $J_2^n$  a lo largo de la foliación  $\mathcal{F}_n^{cs}$ .

Para probar el lema es suficiente probar la existencia de  $C_1 > 0$  tal que

$$(12) \quad \frac{1}{C_1} \leq \|\Pi'_n\| \leq C_1.$$

Para  $x \in f^j(J_i^n)$  sea  $\tilde{F}_x = T_x(f^j(J_i^n))$  para  $i = 1, 2$  y  $0 \leq j \leq n$ . Como  $f^{-n} \circ \Pi = \Pi_n \circ f|_{J_1}^{-n}$ .

Si  $y$  es un punto de  $J_1$

$$(13) \quad \|\Pi'_n(f^{-n}(y))\| = \frac{\|Df|_{\tilde{F}_{\Pi(y)}}^{-n}\|}{\|Df|_{\tilde{F}_y}^{-n}\|} \|\Pi'(y)\|.$$

Por lo tanto, en vista de 13 para probar 12, es suficiente probar que existe  $K_1$  tal que

$$\frac{1}{K_1} \leq \frac{\|Df|_{\tilde{F}_{\Pi(y)}}^{-n}\|}{\|Df|_{\tilde{F}_y}^{-n}\|} \leq K_1.$$

O de manera equivalente, como  $y = f^n(x)$  para algún  $x$  en  $J_1^n$ .

$$\frac{1}{K_1} \leq \frac{\|Df|_{\tilde{F}_x}^n\|}{\|Df|_{\tilde{F}_{\Pi_n(x)}}^n\|} \leq K_1.$$

□

Como muchas veces sucede en Matemáticas, el Corolario es de mayor utilidad práctica que el Teorema o el Lema que lo precede. Está oportunidad no es la excepción.

**COROLARIO 5.35.** *Existe  $\tau > 0$ , con  $\tau < \delta_2$ , tal que, si para algún  $z$  contenido en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  y para algún entero positivo  $n$  se tiene que.*

■

$$\|Df_{|_{E_{f^{-n}(z)}}}^j\| \leq \lambda_1^j, \quad \text{para } 0 \leq j \leq n.$$

- $f^n(B(n)) \subset B_\varepsilon(J)$  y  $f^n(\partial^{cu}(B(n))) \subset \partial^{cu}(B_\varepsilon(J))$ .
- Para todo  $0 \leq j \leq n$  el diámetro de  $f^j(B(n))$  se encuentra acotado por  $\tau$ .

Entonces existe una constante  $C_1 > 0$  tal que la caja  $B(n)$  posee distorsión  $C_1$ .

El Lema 5.34, así como el Corolario 5.35, nos serán de gran utilidad para demostrar que las variedades centro estable y centro inestable se encuentran dinámicamente definidas.

En lo que sigue  $\Lambda$  sera un conjunto transitivo, tal que todo subconjunto propio, compacto e invariante es hiperbólico. Veremos como bajo estas hipótesis  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  se encuentran dinámicamente definidas; Es decir  $W^{cs}$  (resp.  $W^{cu}$ ) posee las mismas propiedades dinámicas que la variedad estable (resp. variedad inestable).

Para comenzar otro resultado clásico de dinámica unidimensional, del cual su demostración puede ser revisada en [**PdM**].

**LEMA 5.36.** *Existe una constante positiva  $K_0$  tal que para todo punto  $x$  en  $\Lambda$ , todo intervalo  $J$  contenido en  $W_\gamma^{cu}(x)$ , todo par de puntos  $z, y$  en  $J$  y todo entero positivo  $n$  se tiene que*

■

$$\frac{\|Df_{|\bar{F}_y}^{-n}\|}{\|Df_{|\bar{F}_z}^{-n}\|} \leq \exp\left(K_0 \sum_{i=0}^{n-1} l(f^{-i}(J))\right).$$

■

$$\|Df_{|\bar{F}_x}^{-n}\| \leq \frac{l(f^{-n}(J))}{l(J)} \exp\left(K_0 \sum_{i=0}^{n-1} l(f^{-i}(J))\right).$$

El siguiente resultado debe ser tomado como ejemplo para la demostración del Lema Central, ya que las técnicas e ideas a ocupar serán básicamente las mismas.

**TEOREMA 5.37.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto transitivo, tal que todo subconjunto propio, compacto e invariante es hiperbólico. Luego para todo*

punto  $x$  de  $\Lambda$ , o bien

$$l(f^{-n}(W_\gamma^{\text{cu}}(x))) \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

O bien

$$\|Df|_{\tilde{F}_x}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Donde  $\tilde{F}$  es alguna dirección tangente a  $W_\gamma^{\text{cu}}(x)$  en el punto  $x$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\Lambda$  es una órbita periódica el resultado es inmediato, supondremos que  $\Lambda$  no es una órbita periódica.

Para la demostración, supondremos que existe un punto  $x$  en  $\Lambda$  para el cual

$$l(f^{-n}(W_\gamma^{\text{cu}}(x))) \not\rightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Luego debemos probar que el fibrado  $F$  es expansivo. Para ello recordemos que en este caso por la Proposición 5.28 existe un punto periódico  $p$  en  $\Lambda$  tal que alguna componente conexa de  $W^u(p) \setminus \{p\}$  posee largo menor que  $\delta_0$ , donde  $\delta_0$  es como en la Observación 5.27. Sea  $(p, q)$  la componente de largo menor que  $\delta_0$ , luego tenemos que el punto  $q$  es un pozo o un punto periódico no hiperbólico, Lema 5.26.

Como  $\Lambda$  es un conjunto transitivo, dado  $x_0$  en  $W^s(p) \setminus \{p\}$  existe una vecindad  $U$  del punto  $x_0$  tal que existe otra vecindad  $U'$  con  $U' \subset U$  tal que  $x \in U'$  entonces  $\omega(x) = \{q\}$ .

Consideremos una caja  $B_\varepsilon(J)$  en torno al punto  $x_0$  con  $B_\varepsilon(J)$  contenida en  $U$ . Sin perder generalidad podemos asumir que

$$(14) \quad f^n(B_\varepsilon(J^+)) \cap B_\varepsilon(J^+) = \emptyset, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}.$$

Además escogiendo el diámetro de  $B_\varepsilon(J)$  lo suficientemente pequeño, se tiene que para todo  $y$  en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$

$$l(f^{-n}(J(y))) \leq \delta, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Donde  $\delta$  y  $\varepsilon$  los escogemos de manera que  $\delta + \varepsilon < \tau$ , donde es dado por el Corolario 5.35.

Para  $z$  en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  denotaremos por

$$J^+(z) = J(z) \cap B_\varepsilon(J^+).$$

Luego por 14,

$$f^{-n}(J^+(z)) \cap B_\varepsilon(J^+) = \emptyset, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Sea  $B_{\varepsilon_1}(J)$  una sub-caja de  $B_\varepsilon(J)$  entorno al punto  $x_0$ , donde  $\varepsilon_1 < \varepsilon/4$ . Luego bajo estas hipótesis tenemos la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 5.38. *Existe una constante  $K$  positiva tal que*

$$\sum_{j \geq 0} l(f^{-j}(J^+(z))) \leq K.$$

Con la afirmación anterior estamos en condiciones de enfrentar la parte final de la demostración. Tal como en la demostración del Teorema ?? (Schwartz), podemos concluir que para todo  $z$  en  $B_{\varepsilon_1}(J) \cap \Lambda$  existe un intervalo  $J_1(z)$  con

$$J^+(z) \subset J_1(z) \subset J(z).$$

Tal que

$$l(J_1(z) \setminus J^+(z))\eta > 0.$$

De donde nuevamente ocupando las técnicas de la demostración del Teorema ?? podemos concluir que existe  $\tilde{K}$  tal que

$$\sum_{j \geq 0} l(f^{-j}(J_1^+(z))) \leq \tilde{K}.$$

AFIRMACIÓN 5.39. *Para todo punto  $y$  de  $J_1(z)$  se tiene que*

$$\|D f_{|\tilde{F}_y}^{-n}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para  $z, w$  contenidos en  $J_1(z)$  tenemos que

$$\frac{\|D f_{|\tilde{F}_z}^{-n}\|}{\|D f_{|\tilde{F}_w}^{-n}\|} \leq \exp\left(K_0 \sum_{j \geq 0} l(f^{-j}(J_1^+(z)))\right) \leq \exp(K_0 \tilde{K}).$$

Ahora si  $y$  es un punto de  $J_1(z)$ ,

$$\|D f_{|\tilde{F}_y}^{-n}\| \leq \frac{l(f^{-n}(J_1(z)))}{l(J_1(z))} \exp(K_0 \tilde{K}).$$

De donde sumando sobre  $n$ ,

$$\sum_{n \geq 0} \|D f_{|\tilde{F}_y}^{-n}\| \leq \frac{\tilde{K}}{l(J_1(z))} \cdot \exp(K_0 \tilde{K}) < \infty.$$

De donde se desprende la afirmación.  $\square$

Finalmente consideremos el siguiente abierto que contiene al punto  $x_0$ .

$$B_1 = \bigcup_{z \in B_{\varepsilon_1}(J) \cap \Lambda} J_1(z).$$

Luego sea  $y$  un punto arbitrario de  $\Lambda$ . Si  $\alpha(y)$  es un subconjunto propio de  $\Lambda$  entonces

$$\|D f_{|\tilde{F}_y}^{-n}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Ya que  $\alpha(y)$  sería un conjunto hiperbólico. Por otro lado si  $\alpha(y) = \Lambda$  se tendría que para algún  $m_0$ ,  $f^{-m_0}(y)$  se encuentra en  $B_1$ , mas aun  $f^{-m_0}(y)$  se encuentra en  $J_1(f^{-m_0}(y))$ , luego por la Afirmación 5.39,

$$\|Df_{\bar{F}_{f_y^{-n_0}}}^{-n}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto

$$\|Df_{|F_y}^{-n}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

□

El Teorema recién demostrado tiene una version análoga para la variedad centro inestable, la demostración es análoga. Luego podemos concluir que existe  $\gamma_1$  tal que para todo  $x$  en  $\Lambda$ ,

$$\blacksquare \quad l(f^{-n}(W_\gamma^{\text{cu}}(x))) \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

$$\blacksquare \quad l(f^n(W_\gamma^{\text{cs}}(x))) \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

En lo que sigue escogeremos  $\gamma$  de manera que sea menor que  $\gamma_1$ . De donde tendremos el siguiente Corolario del Teorema 5.37.

**COROLARIO 5.40.** *Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que para todo  $x$  en  $\Lambda$  y  $n$  mayor que  $n_0$*

- $l(f^{-n}(W_\gamma^{\text{cu}}(x))) \leq \varepsilon.$
- $l(f^n(W_\gamma^{\text{cs}}(x))) \leq \varepsilon.$

**5.2. Cajas bien adaptadas y retornos.** En esta section definiremos una serie de nuevas estructuras, para las cuales nos basaremos en las hipótesis y resultados de la sección anterior. En particular  $\Lambda$  será un conjunto transitivo en el cual todo subconjunto propio, compacto e invariante es hiperbólico. Consideraremos el siguiente conjunto.

$$\tilde{\Lambda} = \{x \in V \mid f^n(x) \in V, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ y } \text{dist}(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0\}.$$

Como  $V$  es un vecindad admisible de  $\Lambda$  y  $\tilde{\Lambda}$  se encuentra contenido en  $V$ , se tiene que  $\tilde{\Lambda}$  es un conjunto que admite descomposición dominada. Además las variedades  $W^s$ ,  $W^u$  se encuentran dinámicamente definidas, en realidad las variedades que se definen son las variedades centro estable e inestable, pero ya sabemos que podemos verlas como las variedades estable e inestable.

**DEFINICIÓN 5.41.** *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja. Tal como antes denotaremos,*

$$J(y) = W_\gamma^{\text{cu}}(x) \cap B_\varepsilon(J), \quad \text{para } y \in B_\varepsilon(J) \cap \Lambda.$$

Se dirá que la caja  $B_\varepsilon(J)$  es  $\delta$ -adaptada (o simplemente adaptada) si para todo  $y$  contenido en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  se tienen las siguientes propiedades.

- $l(f^{-n}(J(y))) \leq \delta$ , para todo  $n \geq 0$ .
- Se cumple que, o bien,

$$f^{-n}(J(y)) \cap B_\varepsilon(J) = \emptyset \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

O bien,

$$f^{-n}(J(y)) \subset B_\varepsilon(J) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

LEMA 5.42. Sea  $x$  un punto periódico. Para todo  $\delta$  positivo existen cajas  $\delta$ -adaptadas.

DEMOSTRACIÓN. Para satisfacer la Definición 5.41 solo debemos procurar la segunda condición, ya que para poder verificar la primera solo debemos considerar una caja suficientemente pequeña. Sea  $x$  un punto periódico.

AFIRMACIÓN 5.43. Existe  $J$  que contiene al punto  $x$ ,  $J$  contenido en  $W_\gamma^{\text{cu}}(x)$  tal que

$$f^{-n}(J) \cap J = \emptyset, \quad \text{para}$$

La demostración sigue por contradicción, es decir si no existiese tal intervalo existiría una sucesión no acotada  $\{n_k\}$  tal que

$$f^{-n_k}(x) \in W_\gamma^{\text{cu}}(x) \quad \text{y además } f^{-n_k}(x) \rightarrow x.$$

Pero como  $l(f^{-n_k}(W_\gamma^{\text{cu}}(x)))$  tiende a cero, el conjunto  $\alpha(x)$  sería una órbita periódica, por el Teorema 5.18. Pero lo anterior contradice el que  $x$  sea un punto no periódico.  $\square$

Sea  $J$  dado por la afirmación anterior. Denotaremos, la parte superior e inferior de  $J$  respectivamente, por

$$J^+ = \{y \in J \mid y < x\}.$$

$$J^- = \{y \in J \mid y > x\}.$$

Para continuar con la demostración consideraremos dos casos.

El primero es suponiendo que el punto  $x$  es aproximado por sucesiones de puntos en  $\tilde{\Lambda}$ , pertenecientes a ambos lados de  $W_\gamma^{\text{cs}}(x)$ . En este caso comenzaremos definiendo los siguientes conjuntos,

$$A^+ = \{y \in J^+ \mid \text{existe } z \in \tilde{\Lambda} \text{ con } W_\gamma^{\text{cs}}(z) \cap J^+ = \{y\}\}.$$

$$A^- = \{y \in J^- \mid \text{existe } z \in \tilde{\Lambda} \text{ con } W_\gamma^{\text{cs}}(z) \cap J^- = \{y\}\}.$$

Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja para algún  $\varepsilon$  positivo. Consideremos una sucesión decreciente de cajas

$$\dots \subset B_{\varepsilon_{k+1}}(J) \subset B_{\varepsilon_k}(J) \subset \dots \subset B_\varepsilon(J), \quad \text{donde } \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Tal que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_k}(J) = J.$$

Para cada entero positivo  $k$ , denotaremos por  $U_{y, \varepsilon_k}$  la componente conexa de  $W_\gamma^{\text{cs}}(z) \cap B_{\varepsilon_k}$  que contiene al punto  $y$ .

Para cada  $y$  contenido en  $A^+$  consideraremos

$$I(y, \varepsilon_k) = \{(z, n) \mid z \in \Lambda \cap B_{\varepsilon_k}, f^{-n}(J(z)) \cap U_{y, \varepsilon_k} \neq \emptyset\}.$$

**AFIRMACIÓN 5.44.** *Para algún  $k$  existe algún punto, que denotaremos por  $y^+$ , contenido en  $A^+$  tal que la cardinalidad de  $I(y^+, \varepsilon_k)$  es finita.*

Un resultado análogo se tiene para  $A^-$ , denotaremos el punto correspondiente por  $y^-$ .

Supongamos verdadera la Afirmación 5.44 y procedamos a concluir la demostración para este caso. Por la Afirmación tenemos que existe  $k' > k$  para el cual la cardinalidad de  $I(y, \varepsilon_{k'})$  es igual a cero. Ya que de lo contrario existiría  $n$  tal que  $f^{-n}(J) \cap J \neq \emptyset$ , lo cual es una contradicción.

Sea  $J' = (y^-, y^+) \subset J$ , luego la sub-caja  $B_{\varepsilon_{k'}}(J')$  contenida en  $B_\varepsilon(J)$  satisface la tesis del Lema.

Pasemos ahora al segundo caso. Es decir el caso en que el punto  $x$  es acumulado por una sucesión de puntos en  $\tilde{\Lambda}$  contenida a un lado de  $W_\gamma^{\text{cs}}(x)$ , a estos puntos los llamaremos los puntos frontera de  $\tilde{\Lambda}$ .

Sea  $U(x)$  una vecindad del punto  $x$ , escogida de manera que ella solo contenga puntos de  $\tilde{\Lambda}$  en una parte de  $W_\gamma^{\text{cs}}(x)$ , digamos en la parte de abajo y sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja contenida en  $U(x)$ . Luego  $B_\varepsilon(J^+) \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$ .

Sin perder generalidad podemos asumir que para todo  $y$  contenido en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$ ,

$$f^{-n}(J(y)) \cap \partial^{\text{cu}, -}(B_\varepsilon(J)) = \emptyset, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Donde  $\partial^{\text{cu}, -}(B_\varepsilon(J))$  denota la parte superior de la frontera centro estable de la caja  $B_\varepsilon(J)$ .

**AFIRMACIÓN 5.45.** *Para todo  $\varepsilon' < \varepsilon$  la caja  $B_{\varepsilon'}(J)$  es una caja adaptada.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que la afirmación es falsa, luego existe  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  y una sucesión de cajas no adaptadas  $\{B_{\varepsilon_n}(J)\}$  tales que,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_n}(J) = J.$$

Mas aun, existe  $\{y_n\}$  con  $y_n$  contenido en  $B_{\varepsilon_n}(J) \cap \Lambda$  y  $\{m_n\}$  tal que

$$f^{-m_n}(J(y_n)) \cap \partial^{cu,+}(B_\varepsilon(J)) \neq \emptyset.$$

Donde la sucesión  $\{m_n\}$  es no acotada, ya que de lo contrario  $f^{-m}(J) \cap J \neq \emptyset$  para algún  $n \geq 0$ .

Por la propiedades dinámicas de las variedades centro inestable  $l(f^{-m}(J(y_n)))$  decrece con  $n$ . Luego para  $n$  suficientemente grande

$$f^{-m_n}(J(j_n)) \in U(x)^+.$$

De donde

$$f^{-m_n}(y) \in U(x)^+ \subset \Lambda.$$

Pero esto ultimo contradice la elección de  $U(x)$ . De donde se concluye la demostración de la afirmación y del Lema.  $\square$

Gracias a la demostración del Lema 5.44, se tiene que para todo punto no periódico  $x$ , las cajas adaptadas (de diámetro pequeño), pueden escogerse de manera que

$$\partial^{cu}(B_\varepsilon(J)) \subset W^{cs}(y) \quad \text{para algún } y \in \tilde{\Lambda}.$$

Siempre que  $x$ , no sea un punto frontera de  $\tilde{\Lambda}$ , pero en este caso tenemos el siguiente lema.

**LEMA 5.46.** *Sea  $x$  en  $\Lambda$  un punto frontera de  $\tilde{\Lambda}$ . Para toda caja adaptada en torno a  $x$ ,  $B_\varepsilon(J)$ , de diámetro arbitrariamente pequeño, se tiene que  $B_\varepsilon(J^-)$  es una caja adaptada, donde  $B_\varepsilon(J^-)$  denota al lado de  $B_\varepsilon(J)$  que contiene puntos de  $\Lambda$ .*

La prueba de este lema, utiliza las mismas técnicas que el Lema 5.44, razón por la que la omitiremos.

Abusando de la notación, denotaremos por  $B_\varepsilon(J)$  la caja adaptada en torno al punto  $x$  independiente de si  $x$  es o no un punto frontera de  $\tilde{\Lambda}$ .

**DEFINICIÓN 5.47 (Retorno).** *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja adaptada y  $S$  un subconjunto de ella. Se dirá que la función*

$$\psi : S \longrightarrow B_\varepsilon(J),$$

*es un retorno de  $B_\varepsilon(J)$ , asociado a  $\Lambda$ , si:*

- $S \cap \Lambda \neq \emptyset$ .
- Existe un entero positivo  $k$ , tal que  $\psi = f|_S^{-k}$ .
- $\psi(S) = f^{-k}(S)$  es una componente conexa de  $f^{-k}(B_\varepsilon(J)) \cap B_\varepsilon(J)$ .
- $f^{-i}(S) \cap B_\varepsilon(J) = \emptyset$ , para  $1 \leq i \leq k$ .



OBSERVACIÓN 5.48. Denotaremos por  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  la colección de todos los retornos de  $B_\varepsilon(J)$  asociados a  $\Lambda$ .

1. Sea  $\xi$  alguna constante positiva menor que 1. Un retorno  $\psi$  en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  satisface

$$|\psi'| < \xi.$$

Si para todo  $y$  en  $J(z)$ ,  $z$  en  $\text{Dom}(\psi) \cap \Lambda$  se tiene que

$$\|Df|_{\tilde{F}_y}^{-k}\| < \xi.$$

Donde  $\psi = f|_{\text{Dom}(\psi)}^{-k}$ ,  $\tilde{F}_y = T_y(J(z)) = T_y(W_\gamma^{cu}(z))$ .

2. Si  $\psi$  es un retorno en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  entonces  $\text{Dom}(\psi) = S$  es una franja horizontal contenida en  $B_\varepsilon(J)$ , es decir, una caja tal que

$$\partial^{cu}(S) \subset \partial^{cu}(B_\varepsilon(J)).$$

Además para todo  $z$  contenido en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  o bien  $J(z)$  es un subconjunto de  $S$  o bien  $J(z) \cap S = \emptyset$ .

3. Si  $\psi$  es un retorno entonces  $\psi(S)$  es una caja adaptada. Mas aun si

$$S \cap \partial^{cs}(B_\varepsilon(J)) = \emptyset.$$

Entonces  $\psi$  es una franja horizontal, esto es, una caja tal que

$$\partial^{cs}(\psi(S)) \subset \partial^{cs}(B_\varepsilon(J)).$$

4. Sean  $\psi_i : S_i \rightarrow B_\varepsilon(J)$ , dos retornos distintos, para  $i = 1, 2$ . Luego  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  y  $\psi_1(S_1) \cap \psi_2(S_2)$ .

DEFINICIÓN 5.49 (Caja bien adaptada). Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja bien adaptada. Se dirá que  $B_\varepsilon(J)$  es una **caja bien adaptada** si existe una sub-caja  $B_{\varepsilon'}(J)$  contenida en  $B_\varepsilon(J)$  y dos franjas verticales  $S_1$  y  $S_2$  tales que

$$B_\varepsilon(J) \setminus B_{\varepsilon'}(J) = S_1 \cup S_2.$$

Donde

- O bien

$$S_i \cap \Lambda = \emptyset.$$

Para  $i = 1, 2$ .

- O bien,  $S_i$  es el dominio de un retorno  $\psi_i$  en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$ , con  $\psi_i(S_i)$  una franja horizontal en  $B_\varepsilon(J)$ , para  $i = 1, 2$ .

LEMA 5.50. Existen cajas bien adaptadas de diámetro arbitrariamente pequeño.

ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN. Como sabemos si,  $B_\varepsilon(J)$  es una caja bien adaptada entonces  $B_{\varepsilon'}(J)$  también es una caja bien adaptada, para  $\varepsilon' < \varepsilon$ . Luego para probar el lema, es suficiente encontrar un  $\varepsilon' < \varepsilon$  tal que  $B_{\varepsilon'}(J)$  sea una caja bien adaptada. Para la demostración se consideran dos casos. El primero de ellos es suponer que para todo  $\varepsilon' < \varepsilon$  se tiene que

$$(15) \quad B_{\varepsilon'}(J) \neq \bigcup \{J(z) \mid z \in \overline{B_\varepsilon(J)} \cap \Lambda\}.$$

Se supone que 15 se cumple para el lado derecho de la caja, en este caso existe un punto  $w$  que no se encuentra en ningún intervalo del tipo  $J(z)$ .  $\square$

**5.3. Demostración del Lema central.** Finalmente estamos en condiciones de cosechar resultados con todo la maquinaria desarrollada en las secciones anteriores. La prueba del Lema Central comienza a ver la luz para ello comenzamos con el siguiente lema.

LEMA 5.51. *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja adaptada. Existe una constante positiva  $K_1 = K_1(B_\varepsilon(J))$  tal que si  $z$  es un punto en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  y  $f^{-i}(z) \in B_\varepsilon(J)$  para  $1 \leq i \leq n$  entonces*

$$\sum_{i=0}^n l(f^{-i}(J(z))) \leq K_1.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Lambda_1$  el conjunto invariante maximal de  $f$  contenido en  $\Lambda \setminus B_\varepsilon(J)$ , es decir,

$$\Lambda_1 := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Lambda \setminus B_\varepsilon(J)).$$

Si tal conjunto es trivial, tenemos que existe  $N$  tal que para todo  $z$  en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  existe  $m \leq N$  con  $f^{-m}(z)$  contenido en  $B_\varepsilon(J)$ , de donde

$$\sum_{i=0}^n l(f^{-i}(J(z))) \leq N \text{Diam}(M) = K_1.$$

Si el conjunto  $\Lambda_1$  es no trivial, entonces es hiperbólico ya que es un subconjunto propio de  $\Lambda$ . Luego existen una constante  $\sigma$ ,  $0 < \sigma < 1$  y un entero positivo, al que nos referiremos como tiempo hiperbólico,  $n_1$  tal que, si  $y$  es un punto de  $\Lambda_1$  entonces

$$\|D f_{|_{\mathbb{F}_y}}^{-n}\| \leq \sigma^n, \quad \text{para todo } n \geq n_1.$$

Además por la persistencia de la hiperbolicidad existe una constante  $\sigma_1$  con  $0 < \sigma < \sigma_1 < 1$  y una vecindad  $U$  de  $\Lambda$  tal que

$$(16) \quad \|D f_{|_{\mathbb{F}_y}}^{-j}\| \leq \sigma_1^j, \quad \text{para } n_1 \leq j \leq n.$$

Donde  $y$  es un punto en  $U \cap \Lambda$  y  $f^{-j}(y)$  se encuentra contenido en  $U$  para  $0 \leq j \leq n$ .

Consideremos las siguientes constantes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y  $\delta_1$  las cuales satisfacen

- $\sigma < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < 1$ .
- $(1 + \delta_1)\delta_2 < \delta_3$ . Donde  $\delta_2$  y  $\delta_3$  son como en la sub-section 5.1.

Además si  $N = N(\sigma_1, \sigma_2)$  es dado por el Teorema 4.11, escogeremos  $N_1 \geq \max\{N, n_1\}$ , donde  $n_1$  es el tiempo hiperbólico de la vecindad  $U$ . Luego si  $y$  es un punto en  $U \cap \Lambda$  con  $f^{-j}(y)$  en  $U$  para  $0 \leq j \leq n$  y  $n \geq N_1$ , tenemos que existe  $m_0 < N_1$  tal que

$$\|D f_{|_{\mathbb{F}_{f^{-m_0}(y)}}}^{-j}\| \leq \sigma_2^j, \quad \text{para } 0 \leq j \leq n - m_0.$$

Además como hemos escogido  $\delta_2$  de manera de controlar la distorsión, es decir

$$\frac{\|D f_{|_{\mathbb{F}_x}}^{-1}\|}{\|D f_{|_{\mathbb{F}_y}}^{-1}\|} \leq (1 + \delta_1), \quad \text{si } d(x, y) \leq \delta_2.$$

y  $\varepsilon_1$  de manera que para todo  $n \geq 0$  se tenga que  $f^n(W_{\varepsilon_1}^{cu}(x)) \subset W_{\varepsilon_1}^{cu}(f^{-n}(x))$ . Podemos concluir que para  $y$  como en 16 y para todo  $z$  en  $W_{\varepsilon_1}^{cu}(f^{-m_0}(y))$ , se tiene que

$$\|D f_{|_{\mathbb{F}_z}}^{-j}\| \leq \sigma_3^j, \quad \text{si } 0 \leq j \leq n - m_0.$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-m_0} l(f^{-j}(W_{\varepsilon_1}^{cu}(f^{-m_0}(y)))) &\leq \sum_{j=0}^{n-m_0} \sigma_3^j l(W_{\varepsilon_1}^{cu}(f^{-m_0}(y))), \\ &\leq \frac{1}{1 - \sigma_3} \text{Diam}(M). \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que existe  $m_1$  tal que

$$\bigcap_{|j| \leq q} f^j(\Lambda \setminus B_\varepsilon(J)) \subset U, \quad \text{para todo } n > m_1.$$

Por el Corolario 5.40, existe  $m_2$  tal que  $f^{-n}(J(z)) \subset W_{\varepsilon_1}^{cu}(f^{-n}(z))$  para todo  $n \geq m_2$ .

Sea  $z$  un punto en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  para el cual, sin perder generalidad, supondremos que,  $f^{-j}(z)$  se encuentra en el complemento de  $B_\varepsilon(J)$ , para  $0 \leq j \leq n$ . Luego existen dos opciones. Supongamos que  $n \leq N$ , en esta caso

$$\sum_{j=0}^n l(f^{-j}(J(z))) \leq N\delta < \infty.$$

Por otro lado si  $n > N$ , tendremos que existe  $n(z) < m_2 + N_1$  tal que

- $f^{-n(z)}(J(z)) \subset W_{\varepsilon_1}^{cu}(f^{-n(z)}(z))$ .
- $\|Df_{|_{F_{f^{-n(z)}(z)}}}^{-j}\| \leq \sigma_2^j$ , para  $0 \leq j \leq n - n(z)$ .

De donde

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n l(f^{-j}(J(z))) &= \sum_{j=0}^{n(z)} l(f^{-j}(J(z))) + \sum_{j=0}^{n-n(z)} l(f^{-j}(f^{-n(z)}(J(z)))) \\ &\leq N \text{Diam}(M) + \text{Diam}(M) \frac{1}{1 - \sigma_3} = K_1. \end{aligned}$$

□

LEMA 5.52. *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja adaptada. Supongamos que para todo retorno  $\psi$  en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$ , se tiene que  $|\psi| \leq \xi < 1$ . Entonces para todo  $y$  en  $B_\varepsilon(J) \cap \Lambda$  se tiene que*

$$\sum_{n \geq 0} l(f^{-n}(J(y))) \leq \infty.$$

De donde se deduce que

$$\|Df_{|_{F_y}}^{-n}\| \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $y$  un punto como en las hipótesis del Lema. Consideremos la sucesión de tiempos

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$$

Tales que  $f^{-n_i}(y)$  se encuentra en  $B_\varepsilon(J)$ . Luego para todo  $i$  existe  $\psi_i$  contenido en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  tal que  $\psi_i = f_{|_{S_i}}$  donde  $S_i = \text{Dom}(\psi_i)$  y  $f^{-n_{i-1}}(y)$  se encuentra contenido en  $S_i$ .  $m_i = n_i - n_{i-1}$ . Por el Lema 5.51 tenemos que

$$\sum_{n=0}^{m_i-1} l(f^{-n}(J(f^{-n_{i-1}}(y)))) < K_1 \quad \text{para } m_i = n_i - n_{i-1}.$$

Además por el Lema 5.36 si  $z, w$  se encuentran en  $J(f^{-n_{i-1}}(y))$  entonces

$$\frac{\|Df_{|_{F_z}}^{-n}\|}{\|Df_{|_{F_w}}^{-n}\|} \leq \exp(K_0 K_1) = K_2, \quad \text{para } 0 \leq n \leq m_i.$$

Luego para todo intervalo  $L$  contenido en  $J(f^{-n_{i-1}}(y))$  se tiene que,

$$\frac{l(f^{-n}(L))}{l(L)} \leq K_2 \frac{l(f^{-n}(J(f^{-n_{i-1}}(y))))}{l(J(f^{-n_{i-1}}(y)))}.$$

De donde

$$\sum_{n=0}^{m_i-1} l(f^{-n}(L)) \leq \frac{l(L)K_2}{l(J(f^{-n_{i-1}}(y)))} \sum_{n=0}^{m_i-1} l(f^{-n}(J(f^{-n_{i-1}}(y)))) \leq \frac{l(L)}{l(J(f^{-n_{i-1}}(y)))} K_2 K_1.$$

Y definiendo  $K_3 = K_2 K_1$ , se ve que

$$\sum_{n=0}^{m_i-1} l(f^{-n}(f^{-n_{i-1}}(J(y)))) \leq K_3 \frac{l(f^{-n_{i-1}}(J(y)))}{l(J(f^{-n_{i-1}}(y)))}.$$

Hasta el momento no hemos hecho uso de la hipótesis que nos da una cota en la derivada, bueno ahora sera fundamental para poder compararla con la distorsión de la caja  $B_\varepsilon(J)$ .

Como  $f^{-n_{i-1}}(y) = \psi_{i-1} \circ \dots \circ \psi_1$ , tenemos ,por regla de la cadena, que para todo  $z$  en  $J(z)$ ,

$$\|D f|_{\mathbb{F}_z}^{-n_{i-1}}\| \leq \xi^{i-1}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{m_i-1} l(f^{-n}(f^{-n_{i-1}}(J(y)))) \leq K_3 \xi^{i-1} \frac{l(J(y))}{l(J(f^{-n_{i-1}}(y)))} \leq K_3 C \xi^{i-1}.$$

Donde  $C = C(B_\varepsilon(J))$  es la distorsión de la caja  $B_\varepsilon(J)$ .

Sea ahora  $K = \max\{K_1, K_3 C\}$ , tenemos que

$$\sum_{n \geq 0} l(f^{-n}(J(y))) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m_i-1} l(f^{-n}(f^{-n_{i-1}}(J(y)))) \leq \sum_{i=0}^{\infty} K \xi^{i-1} = \tilde{K} < \infty.$$

Con lo que concluimos la primera la parte del Lema. Para finalizar haremos uso, nuevamente, del Lema 5.36. Es decir para todo  $z, w$  contenidos en  $J(y)$  se tiene que

$$\frac{\|D f|_{\mathbb{F}_z}^{-n}\|}{\|D f|_{\mathbb{F}_w}^{-n}\|} \leq \exp \left( K_0 \sum_{j=0}^{n-1} l(f^{-j}(J(y))) \right) \leq \exp(K_0 \tilde{K}).$$

De donde

$$\sum_{n \geq 0} \|D f|_{\mathbb{F}_z}^{-n}\| \leq \frac{\tilde{K}}{l(J(y))} \exp(K_0 \tilde{K}).$$

En particular para  $z = y$  se concluye que

$$\|D f|_{\mathbb{F}_y}^{-n}\| \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

□

El Lema 5.52 nos permite acotar la suma de los largos de los iterados de intervalos contenidos en la variedad centro estable, pero tiene la salvedad que la cota depende de la caja escogida. El siguiente lema nos permitirá, de cierta manera, desprendernos de esa salvedad.

LEMA 5.53. *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja bien adaptada. Existe  $K = K(B_\varepsilon(J))$  tal que, para  $\psi$  en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  y todo  $z$  en  $B_\psi = \text{Im}(\psi)$  se tiene que*

$$\sum_{j=0}^n l(f^{-j}(J_\psi(z))) \leq K.$$

*Cuando  $f^{-j}(z)$  no se encuentre contenida en  $B_\psi$  para  $1 \leq j \leq n$ .*

La demostración sera omitida ya que las técnicas y el esquema de esta es similar a los Lemas anteriores, en particular la demostración sigue la linea de la del Lema 5.52.

El siguiente lema es el ultimo resultado que necesitaremos antes de poder demostrar el Lema Central en el caso en que el conjunto  $\Lambda$  es no minimal.

LEMA 5.54. *Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja bien adaptada tal que la cardinalidad de  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  es infinita. Existe  $\psi_0$  en  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  tal que la caja adaptada  $B_{\psi_0}$  satisface el Lema 5.52.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja dada como en las hipótesis del Lema. Consideremos  $C_1$  la distorsión de la caja  $B_\varepsilon(J)$  y  $K_1, K$  dadas por los Lemas 5.52, 5.53 respectivamente. Sea

$$L := \min\{l(J(z)) \mid z \in B_\varepsilon(J) \cap \Lambda\}.$$

Y  $r$  una constante positiva tal que

$$r \frac{C_1}{L} \exp(K_0 K_1 + K_0 K) < \frac{1}{2}.$$

Por hipótesis sabemos que la cantidad de retornos asociados a la caja  $B_\varepsilon(J)$  es infinita, luego podemos escoger un retorno  $\psi_0$  de manera que

$$l(f^{-j}(J_{\psi_0}(z))) < r \quad \text{para todo } j \geq 0, z \in B_\varepsilon(J) \cap \Lambda.$$

Sea  $k_0$  tal que  $\psi_0 = f|_{S_0}^{-k_0}$  donde  $S_0 = \text{Dom}(\psi_0)$ . Probaremos que la caja adaptada  $B_{\psi_0}$  satisface la tesis del Lema, es decir satisface las hipótesis del Lema 5.52.

Si  $z$  es un punto de  $S_0 \cap \Lambda$  entonces para  $y$  en  $J(z)$  tenemos que

$$\|D f|_{\bar{F}_y}^{-k_0}\| \leq \frac{l(f^{-k_0}(J(z)))}{J(z)} \exp(K_0 K_1).$$

Luego si  $\psi$  en  $\mathcal{R}(B_{\psi_0}, \Lambda)$  es tal que  $\psi = f|_{S_\psi}^{-k}$  con  $S_\psi = \text{Dom}(\psi)$  entonces

$$f^{-n_0}(S_\psi) \subset S_0, \quad \text{donde } \text{paran}_0 = k - k_0, k > k_0.$$

Sea  $z$  contenido en  $\text{Dom}(\psi)$ , luego para  $y$  en  $J_{\psi_0}(z)$  se tiene que

$$\begin{aligned} |\psi'(y)| &= \|Df|_{\mathbb{F}_y}^{-k}\| = \|Df|_{\mathbb{F}_{f^{-n_0}(y)}}^{-k_0}\| \cdot \|Df|_{\mathbb{F}_y}^{-n_0}\|, \\ &\leq \frac{l(f^{-k_0}(J(f^{-n_0}(z))))}{l(J(f^{-n_0}(z)))} \exp(K_0K_1) \cdot \frac{l(f^{-n_0}(J_{\psi_0}(z)))}{l(J_{\psi_0}(z))} \exp(K_0K), \\ &= l(f^{-n_0}(J_{\psi_0}(z))) \frac{l(J_{\psi_0}(f^{-k}(z)))}{l(J_{\psi_0}(z))} \frac{1}{l(J(f^{-n_0}(z)))} \exp(K_0K_1 + K_0K), \\ &\leq rC_1 \frac{1}{L} \exp(K_0K_1 + K_0K) < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

A continuación pasamos a revisar la demostración del Lema Central para el caso en que el conjunto  $\Lambda$  no es minimal. Recordemos que debemos demostrar que  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico, para lo cual haciendo uso del Lema 4.10 nos basta probar que para todo  $z$  en  $\Lambda$

$$(17) \quad \|Df|_{\mathbb{F}_z}^{-n}\| \rightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

En realidad deberíamos demostrar también una condición similar para el fibrado  $E$ , pero la demostración y los resultados necesarios se obtienen de manera similar. Procedamos con la demostración de 17.

Como el conjunto  $\Lambda$  es no minimal, existe  $x$  en  $\Lambda$  tal que  $x$  no pertenece a  $\omega(x)$ . Sea  $B_\varepsilon(J)$  una caja bien adaptada en torno al punto  $x$ , tal que

$$B_\varepsilon(J) \cap \{f^n(x) \mid n \geq 1\} = \emptyset.$$

Como  $\Lambda$  es un conjunto transitivo, tenemos que la cardinalidad de  $\mathcal{R}(B_\varepsilon(J), \Lambda)$  es infinita. Luego por el Lema 5.54 existe una caja,  $B_0$ , que satisface el Lema 5.52, de donde para todo  $y$  en  $B_0 \cap \Lambda$  tenemos que

$$\|Df|_{\mathbb{F}_y}^{-n}\| \rightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

Sea ahora  $z$  un punto arbitrario de  $\Lambda$ . Existen dos opciones a satisfacer por  $z$ , o bien  $\alpha(z)$  es un subconjunto propio de  $\Lambda$  en cuyo caso se satisface 17, o bien  $\alpha(z) = \Lambda$ . En este caso existe  $m_0$  tal que  $f^{-m_0}(z)$  se encuentra contenido en  $B_0$ . Por lo tanto

$$\|Df|_{\mathbb{F}_{f^{-m_0}(z)}}^{-n}\| \rightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

De donde

$$\|Df|_{\mathbb{F}_z}^{-n}\| \rightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow 0.$$

## 6. La Conjetura fuerte de Palis

**6.1. Teorema A.** A continuación revisaremos la demostración de la  $C^1$ -Conjetura fuerte de Palis, para el caso dos dimensional. Este resultado, presentado en [PS1], representa por un lado un importante paso hacia una descripción global del conjunto  $\text{Diff}^k(M)$  y por otro lado representa la conjunción entre lo que llamamos el “enfoque perturbativo” y el estudio de la manera en que la dinámica de  $Df$  determina la dinámica de la función  $f$ .

La demostración de este resultado consiste en demostrar que si un difeomorfismo no es aproximado por tangencias homoclínicas entonces este es aproximado por un difeomorfismo del tipo Axioma A.

En primer lugar se probará que para todo difeomorfismo  $f$  que se encuentre lejos de tangencias homoclínicas existe un difeomorfismo  $g$ , arbitrariamente cercano a  $f$ , para el cual el conjunto,

$$\Omega_0(g) = \Omega(g) \setminus (P_0(g) \cup F_0(g)),$$

admite descomposición dominada. O de manera más precisa se hará uso del siguiente Lema, para el cual debemos recordar que  $\mathcal{U}_t$  denota al complemento de la clausura de los difeomorfismos que presentan una tangencia homoclínica, ver Definición 4.30.

**LEMA 5.55.** *Existe  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_t$  el cual es abierto y denso en  $\mathcal{U}$  tal que, para todo  $g$  en  $\mathcal{U}_t$  el conjunto  $\Omega_0(g)$ , posee descomposición dominada.*

Posteriormente, haciendo uso del Teorema 5.2, se demostrará que  $\Omega_0(g)$  es un conjunto hiperbólico.

Finalmente, ocupando resultados del Capítulo 3 y el hecho que la variedad es de dimensión dos, se demostrará que  $g$  es en efecto un difeomorfismo del tipo Axioma A.

A continuación procedemos a enunciar y demostrar el resultado contenido en [PS1]

**TEOREMA 5.56.** *Sea  $M$  una variedad compacta dos dimensional y sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Luego  $f$  puede ser aproximado, en la topología  $C^1$  o bien por un difeomorfismo que exhibe una tangencia homoclínica o bien por un difeomorfismo del tipo Axioma A.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  contenido en  $\mathcal{U}_t$ , se probará que  $f$  es aproximado por un difeomorfismo del tipo Axioma A.

Consideremos un difeomorfismo  $g$  de clase  $C^2$  y del tipo Kupka-Smale. Por la densidad de los difeomorfismo del tipo Kupka-Smale, en



la topología  $C^2$ ,  $g$  puede ser escogido arbitrariamente cercano a  $f$ , más aún puede ser escogido de manera que se encuentre contenido en  $\mathcal{U}_t$ .

Por el Lema 5.61, el conjunto  $\Omega_0(g)$  posee descomposición dominada y por el hecho de ser del tipo Kupka-Smale todos sus puntos periódicos son del tipo silla. Luego por el Teorema 5.2 se tiene que,

$$\Omega_0(g) = \Lambda_1 \amalg \Lambda_2.$$

Donde  $\Lambda_1$  es un conjunto hiperbólico y  $\Lambda_2$  es una unión finita de curvas irracionales. Como la existencia de tales curvas no es una propiedad genérica, en la topología  $C^2$ , para los difeomorfismos del tipo Kupka-Smale,  $g$  puede ser re-escogido de manera que  $\Lambda_2$  sea un conjunto vacío.

A continuación probaremos que  $g$ , escogido como antes, es un difeomorfismo del tipo Axioma A. Para ello necesitamos demostrar que el conjunto no errante de  $g$  es hiperbólico y que los puntos periódicos son densos en él. Esto se realizará a través del siguiente par de afirmaciones.

**AFIRMACIÓN 5.57.** *El conjunto no errante de  $g$  es un conjunto hiperbólico.*

**DEMOSTRACIÓN.** Probaremos que el conjunto de los pozos,  $P_0(g)$ , es un conjunto finito. De manera análoga se puede comprobar que  $F_0(g)$  es un conjunto finito, de donde se concluye que el conjunto no errante es hiperbólico.

Supongamos que  $P_0(g)$  es un conjunto de cardinalidad infinita. Como  $\Omega_0(g)$  es un conjunto hiperbólico y

$$\overline{P_0(g)} \setminus P_0(g) \subset \Omega_0(g).$$

Tenemos que existe una vecindad  $V$  de  $\Omega_0(g)$  tal que el conjunto invariante maximal de  $g$  en  $V$  es un conjunto hiperbólico, luego todos los pozos, salvo quizás finitos, se encuentran en la vecindad  $V$ , pero esto contradice la hiperbolicidad del conjunto invariante maximal de  $g$  en  $V$ .  $\square$

**AFIRMACIÓN 5.58.**  $\Omega(g) = \overline{Per(g)}$

**DEMOSTRACIÓN.** Como el conjunto límite  $L(g)$  se encuentra contenido en  $\Omega(g)$  se tiene que  $L(g)$  es hiperbólico, luego por la Proposición 3.53, los puntos periódicos son densos en el conjunto límite  $L(g)$ , más aún, en este caso se obtiene que  $L(g)$  admite descomposición espectral.

Si tuviéramos que  $L(g)$  satisface la condición de no ciclos, obtendríamos, por la Proposición 3.54, que

$$\overline{Per(g)} = L(g) = \Omega(g).$$

Pero  $L(g)$  no puede poseer ciclos, ya que en este caso la variedades estables e inestables poseerían intersecciones homoclínicas, lo cual contradice la elección de  $g$  en el conjunto  $\mathcal{U}_t$ .  $\square$

Luego por las Afirmaciones 5.58, 5.57 se concluye que  $g$  es un difeomorfismo del tipo Axioma A, el cual se encuentra tan cercano de  $f$  como queramos, con lo que se concluye la demostración del Teorema 5.56.  $\square$

**6.2. Descomposición dominada lejos de tangencias.** El objetivo de esta sección es la demostración del Lema 5.61, demostración para la cual necesitaremos un par de resultados previos.

LEMA 5.59. *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ ,  $p$  un punto periódico hiperbólico de  $f$  y  $\varepsilon$  una constante positiva. Sean  $\lambda, \sigma$  los autovalores de  $D_p f$  con  $|\lambda| < 1 < |\sigma|$ . Si  $|\lambda\sigma| < 1$  y  $\angle(E_p^s, E_p^u) = \gamma$  cumple con,*

$$\gamma < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|\sigma| - 1}{|\sigma| + 1}.$$

*Entonces existe un difeomorfismo  $g, \varepsilon - C^1$ -cercano a  $f$  para el cual  $p$  es un punto periódico hiperbólico. Además  $g$  posee una tangencia homoclínica asociada a  $p$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una vecindad,  $B(p)$ , del punto  $p$  tal que,

1.  $B(p) \cap \mathcal{O}(p) = \{p\}$ .
2. Si  $n$  es el periodo del punto  $p$  entonces  $f^j(B(p)) \cap B(p) = \emptyset$  para  $1 \leq |j| \leq n$ .
3. Si  $B(0, r)$  es una bola de radio  $r > 0$  centrada en el punto  $p$ , la función  $exp_p : B(0, r) \rightarrow B(p)$  es un difeomorfismo.

La idea de la demostración es realizar una perturbación en el tangente  $T_p M$  y luego, a través, de la aplicación exponencial “devolverse” a la variedad, para ello y a manera de simplificar los cálculos, asumiremos que  $0 < \lambda < 1 < \sigma$ .

Escogemos un sistema de coordenadas locales  $T_p(M) = E_p^u \oplus (E_p^u)^\perp$  para el cual  $E_p^s$  es el gráfico de una función  $L : E_p^u \rightarrow (E_p^u)^\perp$  tal que,

$$E_p^s = \{v + \gamma v \mid v \in E_p^u\}.$$

Consideremos funciones reales  $\phi, \psi$  de clase  $C^\infty$  tales que,

- $0 \leq \phi \leq \varepsilon, |\phi'| \leq \varepsilon, \phi(0) = \varepsilon.$
- $0 \leq \psi \leq 1, |\psi'| \leq 1, \psi(0) = 1.$
- $\phi(x) = 0, \psi(x) = 0,$  para todo  $|x| > 2.$

Se define  $\Phi_a : T_p M \rightarrow T_p M$  como

$$\Phi_a(x, y) = (x, y) + (0, a\phi(x/a)\psi(y/a)).$$

Es claro que

- $d_{C^1}(\Phi_a, Id) \leq \|a\phi(x/a)\psi(y/a)\|_{C^1} \leq \varepsilon$ .
- $\Phi_a(0, 0) = (0, a\varepsilon)$ .
- $\Phi_a = Id$  si  $\min(|x|, |y|) > 2a$ .
- $\Phi_a$  es un difeomorfismo.

Como la aplicación exponencial lleva los sub-espacios estable e inestable de  $D_p f$  tan cerca como se quiera, de las variedades estables e inestables, podemos asumir que efectivamente los mapea de manera que, las respectivas imágenes son inmersiones en las variedades estables e inestables.

Sea  $x_1 \in E_p^u$  un punto cercano al origen. Consideremos el dominio fundamental  $(x_1, \sigma x_1) \subset E_p^u$ . Escojamos el punto,  $x_0 = \frac{\sigma x_1 + x_1}{2}$ , que corresponde al punto medio del dominio escogido anteriormente y sea  $a = \frac{(\sigma-1)x_1}{4}$ .

Para  $t \in [0, 1]$  consideremos la familia de funciones,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{ta} : T_p M &\longrightarrow T_p M, \\ (x, y) &\longrightarrow \Phi_{ta}(x - x_0, y). \end{aligned}$$

Si

$$\min(|x - x_0|, |y|) > \frac{t(\sigma - 1)x_1}{2}.$$

Se tiene que  $\tilde{\Phi}_{ta} = Id$  para todo  $t$  en  $[0, 1]$ .

Para  $t = 1$  se tiene que  $\tilde{\Phi}_a(x_0, 0) = (0, \gamma x_0)$ , luego el conjunto,

$$\{\tilde{\Phi}_a(x, 0) \mid x_1 \leq x \leq \sigma x_1\},$$

interseca a  $E_p^s$ . Y se tiene que para algún  $t_0 \leq 1$  la curva,

$$\{\tilde{\Phi}_{t_0 a}(x, 0) \mid x_1 \leq x \leq \sigma x_1\},$$

es tangente a  $E_p^s$ .

Se define

$$D = \left\{ (x, y) \in T_p M \mid |x - x_0| \leq \frac{(\sigma - 1)x_1}{2}, |y| \leq \frac{(\sigma - 1)x_1}{2} \right\}.$$

Luego en el complemento de  $D$  se tiene que,  $\tilde{\Phi}_{ta} = Id$ . Además  $E^s \cap D$  es un dominio fundamental.

Se define la función  $g : M \rightarrow M$  como,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M/f^{-1}(B(p)). \\ \exp_p \circ \tilde{\Phi}_{t_0 a} \circ (\exp_p)^{-1}(f(x)) & \text{si } x \in f^{-1}(B(p)). \end{cases}$$

Como el origen no pertenece al dominio  $D$ ,  $p$  es un punto periódico hiperbólico para  $g$  el cual es el difeomorfismo  $\varepsilon$ - $C^1$  cercano a  $f$  que buscábamos.

Para finalizar nos basta comprobaremos que  $g$  posee una tangencia homoclínica asociada a  $p$ , para ello nos basta probar que,  $\exp_p(\{\tilde{\Phi}_{t_0 a}(x, 0) \mid x_1 \leq x \leq \sigma x_1\}) \subset W_p^u(g)$  y que  $\exp_p(E_p^s \cap D) \subset W_p^u(g)$ .

- Sea  $y \in \exp_p(E_p^s \cap D)$ . Como  $f^n(y) \cap \exp_p(D) = \emptyset$  para todo  $n \geq 1$  se tiene que  $g^n(y) = f^n(y)$ . Además como  $y \in W_p^s(f)$  se tiene que  $y \in W_p^s(g)$ .
- Por otro lado sean

$$y \in \exp_p\{\tilde{\Phi}_{t_0 a}(x, 0), x_1 \leq x \leq \sigma x_1\},$$

$$y_1 = (\exp_p \circ \tilde{\Phi}_{t_0 a} \circ (\exp_p)^{-1})^{-1}(y).$$

Como los iterados de  $y$  se “escapan” por estar en un dominio fundamental se tiene que  $y_1 \in W_p^u(f)$ . Más aún  $f^{-n}(y_1) \cap \exp_p(D) = \emptyset$  para todo  $n$ , de donde  $g^{-n}(y) = f^{-n}(y_1)$  de donde  $y \in W_p^u(g)$ .

□

LEMA 5.60. *Sea  $f \in \mathcal{U}_t$ , supongamos del tipo Kupka-Smale. Existe una vecindad  $\mathcal{U}(f)$  de  $f$  y una constante  $\gamma > 0$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}(f)$  y todo  $p \in \text{Per}_h(g)$*

$$\angle(E_p^s(g), E_p^u(g)) > \gamma.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_t$  vecindades de  $f$  y escojamos  $\varepsilon_1 > 0$  de manera que si  $\tilde{g}$  se encuentra  $\varepsilon$ - $C^1$  cercano a  $g \in \mathcal{U}_1$  entonces  $\tilde{g} \in \mathcal{U}_0$ . Consideremos  $\mathcal{U}_{2, \varepsilon} > 0$  dados por el Lema de Franks para la vecindad  $\mathcal{U}_1$ . Sean también

$$C := \sup\{\|Dg\| : g \in \mathcal{U}_0\}, \quad \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{C}.$$

La demostración sigue por contradicción. Si el Lema es falso, existen, una sucesión  $\{\gamma_n\}$  convergente a cero, una sucesión  $g_n$  que converge a  $f$  y una sucesión  $p_n \in \text{Per}_h(g_n)$  tal que

$$\angle(E_{p_n}^s(g_n), E_{p_n}^u(g_n)) = \gamma_n.$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión  $\{g_n\}$  se encuentra contenida en  $\mathcal{U}_2$ , que sus respectivos autovalores satisfacen  $\lambda_{p_n} \sigma_{p_n} < 1$  y que

$$\gamma_n = \min\{\angle(E_q^s, E_q^u) \mid q \in \mathcal{O}(p_n)\}.$$

Se probará que bajo estas condiciones, existe  $\tilde{g} \in \mathcal{U}_1$ ,  $p \in Per_h(\tilde{g})$  con  $\lambda_p \sigma_p < 1$  tal que

$$\angle(E_p^u(\tilde{g}), E_p^s(\tilde{g})) = \gamma < \frac{\sigma_p - 1}{\sigma_p + 1} \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Lo cual nos lleva a una contradicción con el Lema 5.59.

Para probar lo anterior nos bastará encontrar un índice  $n_0$ , de manera que,

$$(18) \quad \gamma_n < \frac{\sigma_{p_{n_0}} - 1}{\sigma_{p_{n_0}} + 1} \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Supongamos que 18 es falso para todo índice  $n$ . Sea  $m_n$  el período de  $p_n$ . Como  $f$  es del tipo Kupka-Smale, la sucesión de los períodos es no acotada, de lo contrario se podría lograr que el punto  $p$  posea a 1 como autovalor.

Sea  $\delta_n = \frac{\gamma_n \varepsilon'}{2}$ . Para  $0 \leq i \leq m_n - 1$  consideremos

$$T_i : T_{g_n^i(p_n)} \longrightarrow T_{g_n^i(p_n)}.$$

Tal que

$$T_i|_{E_{g_n^i(p_n)}^s} = (1 - \delta_n) Id.$$

$$T_i|_{E_{g_n^i(p_n)}^u} = (1 + \delta_n) Id.$$

Luego  $\|T_i - Id\| \leq \varepsilon'$ . Se define

$$L_i : T_{g_n^i(p_n)} \rightarrow T_{g_n^{i+1}(p_n)}.$$

Como

$$L_i = \begin{cases} T_{i+1} \circ Dg_n(g_n^i(p_n)) & \text{si } 0 \leq i \leq m_n - 2 \\ T_0 \circ Dg_n(g_n^{m_n-1}(p_n)) & \text{si } i = m_n - 1 \end{cases}$$

Tenemos que  $\|L_i - Dg_n(g_n^i(p_n))\| < \varepsilon$ , por lo tanto haciendo uso del Lema de Franks, obtenemos una sucesión de funciones  $\tilde{g}_n \in \mathcal{U}_1$  tales que  $p_n \in Per(\tilde{g}_n)$  y para las cuales

$$D_{\tilde{g}_n^i(p_n)} \tilde{g}_n = L_i.$$

Se tiene entonces que  $p_n \in Per_h(\tilde{g}_n)$ .

Denotemos por  $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n$ ,  $\tilde{\lambda}_n = (1 - \delta_n)^{m_n} \lambda_n$ ,  $\tilde{\sigma}_n = (1 - \delta_n)^{m_n} \sigma_n$ . Luego para todo  $n$ ,

$$\tilde{\sigma}_n \tilde{\lambda}_n < 1.$$

Veamos que para  $n$  suficientemente grande

$$\frac{\tilde{\sigma}_n - 1}{\tilde{\sigma}_n + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} > \tilde{\gamma}_n.$$

Debemos analizar dos casos:

- La sucesión  $\{\tilde{\sigma}_n\}$  es no acotada. Como sabemos que  $\gamma_n$  tiende a cero, no hay problema en encontrar un índice satisfaga lo que buscamos.
- La sucesión es no acotada. Existe  $K$  tal que para todo  $n$

$$\tilde{\sigma}_n = (1 + \delta_n)^{m_n} \sigma_n \leq K.$$

De donde

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\sigma}_n - 1}{\tilde{\sigma}_n + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} &= \frac{(1 + \delta_n)^{m_n} \sigma_n - 1}{(1 + \delta_n)^{m_n} \sigma_n + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} \geq \frac{(1 + \delta_n m_n) \sigma_n - 1}{(1 + \delta_n)^{m_n} \sigma_n + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} \\ &= \frac{\sigma_n - 1}{(1 + \delta_n)^{m_n} \sigma_n + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{m_n \delta_n \sigma_n}{(1 + \delta_n)^{m_n} \sigma_n + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} \\ &\geq \frac{m_n \delta_n \sigma_n}{K + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} \geq \frac{m_n \delta_n}{K + 1} \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{m_n \varepsilon'_1 \gamma_n}{4(K + 1)} > \gamma_n. \end{aligned}$$

La ultima desigualdad se tiene, ya que los periodos forman una sucesión no acotada.  $\square$

Concluimos esta sección y este capítulo (y está monografía!!) con el Lema 5.61 y su demostración.

LEMA 5.61. *Existe  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_t$  el cual es abierto y denso en  $\mathcal{U}$  tal que, para todo  $g$  en  $\mathcal{U}_t$  el conjunto  $\Omega_0(g)$ , posee descomposición dominada.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función  $\Gamma$  la cual a cada difeomorfismo  $g$  le asocia  $\overline{Per_h(g)}$ . Esta función resulta ser semicontinua inferiormente y por lo tanto el conjunto de sus puntos de continuidad es un conjunto residual, al cual denotaremos por  $\mathcal{C}$ . Por un resultado de Pugh [Pu2], sabemos que existe un conjunto residual,  $\mathcal{P}$  contenido en  $\text{Diff}^1(M)$ , donde para todo  $g \in \mathcal{P}$  se tiene que  $\Omega(g) = \overline{Per(g)}$ . Consideremos también el conjunto  $\mathcal{KS}$  de los difeomorfismos del tipo Kupka-Smale, sabemos que  $\mathcal{KS}$  es un conjunto residual en  $\text{Diff}^1(M)$ .

Sea

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{C} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{KS}.$$

Y se define,

$$\mathcal{R} = \mathcal{U}_t \cap \mathcal{R}_1.$$

Este último es un conjunto residual en el complemento de la clausura de los difeomorfismos que presentan tangencias homoclínicas.

AFIRMACIÓN 5.62. *Si  $f$  pertenece a  $\mathcal{R}$  entonces  $\Omega_0(g) = \overline{Per_h(f)}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para obtener la afirmación debemos comprobar que  $\Omega_0(g) \subset \overline{Per_h(f)}$ . Por contradicción, supongamos que existe un punto  $x \in \Omega_0(f)$ ,  $x \notin \overline{Per_h(f)}$ . Escogemos una vecindad  $U$  de  $\overline{Per_h(f)}$

tal que  $x \notin U$ . Como  $f \in \mathcal{R}$  existe  $\mathcal{U}(f)$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}(f)$ ,  $\overline{Per_h(g)} \subset U$ .

Como  $x$  se encuentra en el complemento de la clausura de los puntos periódicos hiperbólicos, este debe ser aproximado por una sucesión de pozos o fuentes. Entonces aplicando la Proposición 4.14, encontramos  $\tilde{g}$  para el cual  $x$  es un punto periódico del tipo silla, es decir

$$x \in Per_h(\tilde{g}).$$

Lo cual contradice la continuidad de la función  $\Gamma$  en una vecindad del difeomorfismo  $f$ .  $\square$

De los resultados entregados por el Teorema 4.24, Lema 5.60 y la Afirmación precedente podemos concluir que si  $f$  es un difeomorfismo en  $\mathcal{R}$  entonces  $\Omega_0(f)$  posee descomposición dominada.

Consideremos una vecindad admisible  $U$  de  $\Omega_0(f)$  donde  $\mathcal{U}(f)$  será la correspondiente vecindad de  $f$  en  $\text{Diff}^1(M)$ . Escojamos otra vecindad  $U_0$  de  $\Omega_0(f)$  con  $U_0 \subset \overline{U_0} \subset U$  de manera que para todo  $g \in \mathcal{U}(f)$ ,

$$\overline{Per_h(g)} \cap (M \setminus U_0) = \emptyset.$$

A continuación demostraremos que si  $g$  es un elemento de  $\mathcal{U}(f)$  entonces  $\Omega_0(g) \subset U$ . La demostración sigue por contradicción, es decir supongamos que existe  $g$  contenido en  $\mathcal{U}(f)$  tal que

$$(19) \quad \Omega_0(g) \cap (M \setminus U) \neq \emptyset.$$

Consideremos un punto  $x$  contenido en 19. El punto  $x$  es no periódico y pertenece al conjunto no errante de  $g$ . Ocupando la Proposición 4.14 se puede ver que el punto  $x$  no puede ser punto de acumulación de pozos ni fuentes, luego por el  $C^1$ -Closing Lema [**Pu1**], existe  $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$  tal que  $x$  es un punto periódico de  $\tilde{g}$ , (o bajo una perturbación de  $\tilde{g}$ , si es que fuese necesario).

Podemos escoger  $\tilde{g}$  de manera que  $x$  sea un punto periódico hiperbólico de tipo silla, ocupando nuevamente la Proposición 4.14, lo cual contradice la continuidad de la función  $\Gamma$ .

Por lo tanto, para todo  $g \in \mathcal{U}(f)$  se tiene  $\Omega_0(g) \subset U$  y por ende para todo  $g$  en  $\mathcal{U}(f)$  el conjunto  $\Omega_0(g)$  posee descomposición dominada.

Finalmente sea

$$\mathcal{U}_1 := \bigcup_{f \in \mathcal{R}} \mathcal{U}(f).$$

Con lo que obtiene la tesis del Lema.  $\square$





## Bibliografía

- [AS] R. Abraham y S. Smale *Nongenericity of  $\Omega$ -stability*. Global analysis I, Proc. Symp. Pure Math. AMS **14** (1970),56-8.
- [AP] A. Andronov y L. Pontryagin. *Systèmes grossiers*. Dokl. Akad. Nauk. USSR, **14** (1937), 247-251.
- [BCr] C. Bonatti and S. Crovisier. *Recurrence and genericity*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **336** (2003), 357-396.
- [BDV] C. Bonatti, L. Diaz, M. Viana *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: A Global Geometric and Probabilistic Perspective*. Springer. (2004).
- [BS] M. Brin, G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems.*, Cambridge,University Press (2002).
- [C] C. Conley. *Isolated invariant sets and the Morse index*. Regional Conferences Series in Mathematics. American Mathematical Society **38** (1978).
- [Cr] S. Crovisier. *Birth of homoclinic intersections: A model for the central dynamics of partially hiperbolic systems*. Arxiv.math.DS/0605387 (2006).
- [dMS] W de Melo, S. van Strien. *One dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [F] J.Franks. *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*. Trans. A.M.S. **158** (1971), 301-308.
- [H] S. Hayashi, *Connection invariant manifolds and the solution of the  $C^1$ -stability and the  $\Omega$ -stability conjectures for flows.*, Ann. of Math. **145** (1997), 81-137 and Ann. of Math. **150** (1999),353-356.
- [HPS] M.W. Hirsch, C.C.Pugh, M. Shub. *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, **583**, (1977).
- [KH] A. Katok, B. Hasselblat. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encycl. of Math. and its Appl. **54** (1995), Cambridge Univ. Press.
- [K] I. Kupka. *Contribution à la théorie des chaps génériques.*, Cont. Diff. Equ **2** (1963), 457-484.
- [M1] R. Mañe. *A Proof on the  $C^1$  Stability Conjecture.*, Publications Mathematiques I.H.E.S. **66** (1988), 161-210.
- [M2] R. Mañe. *An ergodic closing lemma*. Annals of Mathematics, **116** (1982), 503-540.
- [M3] R. Mañe. *Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics*. Commun. Math. Phys.,**100** (1982), 503-540.
- [M4] R. Mañe. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer Verlag, A Series of Modern Surveys in Mathematics ,**8** (1987).
- [Nw1] S. Newhouse *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*. Topology, **13** (1974), 9-18.

- [Nw2] S. Newhouse. *The abundance of wild hiperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms*. Publications Mathematiques I.H.E.S. **50** (1979), 101-151.
- [Nw3] S. Newhouse. *Nondensity of Axiom A (a) on  $S^2$* . Global analysis, Proc. Sympos. Pure Math. **14** (1968), 191-202.
- [P] J. Palis. *A global view of Dynamics and a conjeture on the denseness of finitud of attractors*. Astérisque. **261** (2000), 335-347. Géometrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay 1995).
- [PdM] J. Palis, W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems, An introduction*. Springer-Verlag, (1982).
- [PT] J. Palis, F.Takens. *Hyperbolicity sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge studies in advanced mathematics **35**, (1993).
- [Pl] V.A.Pliss. *On a conjecture of Smale*. Diif. Uravnenija, **8** (1972), 385-404.
- [Pu1] C. Pugh. *The closing lemma*. Amer. J. Math. **89** (1967), 956-1009.
- [Pu2] C. Pugh. *An improved closing lemma and a general density theorem*. Amer. J. Math. **89** (1967), 1010-1021.
- [PS1] E. Pujals, M. Sambarino. *Homoclinic tangencies and hiperboicity for surface diffeomorphisms*. Annals of Mathematics. **151** (200), 961-1023.
- [PS2] E. Pujals, M. Sambarino. *The dynamics of dominated splitting*. Preprint (201).
- [PS3] E. Pujals, M. Sambarino. *Codimension one dominated splitting*. Bull. Braz. Mat Soc. **38-1**(2007),1-49.
- [PS4] E. Pujals, M. Sambarino. *Homoclinic Bifurcations, Dominated Splitting and Robust transitivity*. Handbook of Dynamical Systems Eds A. Katok, B. Hasselblatt, 1B chapter 4(2006), 327-378.
- [R] J. Robbin. *A structural stability theorem*. Ann.of Math. **94** (1971), 447-493.
- [Ro1] C. Robinson.  *$C^r$  Structural stability implies Kupka-Smale*. Dynamical System,Salvador (1971). Academios Press (1973) 443-449.
- [Ro2] C. Robinson. *Structural stability of  $C^1$  diffeomorphisms*. J. Diff. Equ., **22** (1976), 58-73.
- [Sch] A.J.Schwartz, *A generalization of a Poincare-Bendixon theorem to closed two manifolds*.Amer. J. Math. **85** (1963), 453-458; Errata,ibid **85**(1963), 753.
- [S] M. Shub. *Global Stability of Dynamical System*. Springer-Verlag (1987).
- [Sm] S. Smale. *Diffeomorphisms with many periodic points*. Bull. Am. Math. Soc., **73** (1967), 747-817.
- [W1] L. Wen. *Homoclinic tangencies and dominated splitting*. Nonlinearity, **15** (2002), 1445-1469.
- [W2] L. Wen. *A short course on differentiable dynamical systems*. Liu Bie Ju, Centre for Mathematical Sciences.