PUC

Facultad de Matemáticas

Flujo por Curvatura Media Inversa con termino forzado

Tesis presentada por José Torres
para obtener el grado de Magister en Ciencias

2015

Borrado

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El tema a tratar en este trabajo de investigación, tiene que ver con el estudio del flujo por curvatura media inversa con termino forzado. En efecto, es el estudio de la existencia, la unicidad, la convergencia y las propiedades de una variedad N de codimensión 1 inmersa dentro de una variedad ambiente riemanniana (M, g) que satisface la siguiente ley

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dt}(x,t) & = \left(\dfrac{1}{H(x,t)} - c\right)\nu(x,t) \\ F(x,0) & = F_0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

donde $F : N \times I \to (M, g)$ es un mapa suave tal que para cada $t \in I \subset \mathbb{R}$ $F(\cdot, I)$ es una inmersión, $H(x,t)$ y $\nu(x,t)$ son la curvatura media escalar y el vector normal unitario respectivamente, c es una constante positiva y $F_0 : N \to M$ es la inmersión inicial. La característica más importante de este flujo es que bajo ciertas condiciones iniciales la evolución $N_t := F(N,t)$ de la variedad inicial $N_0 := F_0(N)$ tiende a expandirse o bien tiende a contraerse.

1.1. Motivación

El interés sobre este análisis nace del único resultado de clasificación de superficies en $\mathbb{R}^n$ que evolucionan por el flujo de curvatura media inversa con termino forzado. El resultado fue probado en 2014 por Y. Liu en [11]. Liu demuestra que si la curvatura media escalar de la variedad N_0 satisface $H^{-1} > c$, entonces la evolución $\tilde{N}_t := e^{\frac{t}{n-1}} N_t$ convergería a una esfera que se expande para todo tiempo. Por otro lado, si la curvatura media escalar de N_0 satisface $H^{-1} < c$, entonces la evolución N_t colapsaría a un punto. Todo esto bajo la condición de que N_0 fuese estrictamente convexa[1].

La motivación sobre este trabajo es generalizar el resultado de Liu reduciendo la condición de convexidad a ser solamente H-convexa[2]. Para esto se propuso una versión débil del flujo (1.1) en torno a la descripción por conjuntos de nivel del flujo, obteniendo una generalización parcial del resultado de Liu.

Antes de empezar a exponer la metodología y resultados de esta tesis daremos una pequeña reseña de lo que son los flujos geométricos en general, con un poco de énfasis en los flujos por curvatura media (FCM) y curvatura media inversa (FCMI) por su semejanza a (1.1).

1.1.1. Flujos Geométricos

Un flujo geométrico describe la evolución de cierta cantidad geométrica en terminos de una ecuación diferencial parcial (EDP) como se puede apreciar en (1.1). Este tópico ha sido de gran interés desde los años cincuenta pues no solo tiene aplicaciones dentro de la Geometría Diferencial y las EDP, sino que también involucra otras áreas de la matemática como por ejemplo lo son la Topología, la Física y, en un territorio más aplicado, el procesamiento de imágenes.
Algunas herramientas que están en constante uso dentro de los flujos geométricos son el cálculo de variaciones, la teoría geométrica de la medida y el ánalisis funcional. Pero del punto de vista de las EDP uno puede distinguir dos tipos de flujos geométricos: flujos intrínsecos y flujos extrínsecos.

Un flujo intrínseco está dado por una EDP que solo considera cantidades geométricas intrísecas de una variedad riemanianna. Una familia de este tipo de ecuaciones es modificar la métrica de una variedad riemanniana (M, g) dada por la ley

$$\frac{dg}{dt} = f(g) \, ,$$

[1] Las curvaturas principales de N_0 son todas positivas.
[2] La curvatura media de N_0 es no negativa

donde f es una función que solo depende de g y sus derivadas tensoriales.

Un ejemplo importante de este tipo de flujos es el flujo de Ricci donde $f(g) = -2\text{Ric}_M(g)$ y $\text{Ric}_M(g)$ es el tensor de curvatura de Ricci de M bajo la métrica g. Este flujo fue introducido por R. Hamilton en 1981 como herramienta para probar la conjetura de Geometrización de Thurston, que en pocas palabras es un resultado de clasificación de 3-variedades cerradas[3]. Gracias al trabajo de cirugías de G.Perelman [17] y [18] se pudieron solucionar los problemas de Hamilton, y por tanto pudo probar dicha conjetura en el 2003. Una cirugía a grandes rasgos trata sobre reconocer que cortar y pegar de una variedad para evitar la formación de singularidades dentro de un flujo. Como consecuencia de esto se pudo probar la conjetura de Poincare, un problema abierto desde 1904. Para mayor detalles de lo ya comentado recomendamos al lector los siguientes trabajos [19],[20], [21] y sus referencias.

Por otro lado un flujo extrínseco corresponde a una EDP donde solo aparecen cantidades geométricas extrínsecas de una variedad inmersa dentro de otra variedad ambiente. Según Hamilton en [38] una forma de estudiar la evolución una variedad inmersa dentro de otra es ver como cambia la manera de observar la variedad inmersa dentro de la variedad ambiente. Esto se traduce al problema de encontrar una familia de inmersiones $\{F(\cdot,t)\}_{t\in I}$ donde $F : N \times I \to (M, g)$ satisface la ley

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = f(x,t)\nu(x,t) \\ F(\cdot,0) = F_0 \end{cases}, \tag{1.2}$$

siendo $\nu(x,t)$ es el vector normal unitario exterior de la variedad N dentro de la variedad M, $F_0 : N \to M$ la inmersión original, y f la función velocidad de la evolución $N_t = F(N,t)$. En este caso la función f solo depende de cantidades geométricas extrínsecas.

Un aspecto relevante de este tipo de flujos es que se pueden generar distintas variantes de un mismo problema, ya que al estar una variedad inmersa dentro de otra ambiente se puede cambiar por ejemplo la codimensión de la variedad inicial, o bien cambiar el ambiente Riemanniano por uno semi Riemanniano, o bien exigir que no los $F(\cdot,t)$ sean encages[4] en vez de inmersiones.

[3]Una variedad cerrada es una variedad compacta sin frontera.

[4]Traducción de embbeding que quiere decir que los $F(\cdot,t)$ sean inyectivos para cada t.

1.1.2. Flujo por Curvatura Media

El FCM viene al considerar el flujo extrínseco dado por (1.2) con función velocidad $f = -H$ donde H es la curvatura media escalar de N dentro de M. Este flujo es el correspondiente del flujo de Ricci para variedades inmersas.
Un ejemplo sencillo de como actúa este flujo es la evolución de una esfera de radio r_0 dentro de $\mathbb{R}^n$, o sea $N = S^{n-1}(r_0) \subset M = \mathbb{R}^n$ con su métrica euclidiana.
Por existencia y unicidad de este tipo de flujo basta con encontrar una familia de parametrizaciones de la esfera en M. Por tanto, si consideramos las coordenadas polares $F(x,t) = r(t)x$ con $x \in S^{n-1}(1)$ y $r(0) = r_0$, se tendrá que el flujo equivale a resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{n-1}{r} \\ r(0) = r_0 \end{cases} . \tag{1.3}$$

La solución de (1.3) está dada por $r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2nt}$. Por tanto la evolución corresponde a esferas $N_t = S^{n-1}(r(t))$ que se achican hasta el tiempo $T = r_0^2(2n)^{-1}$ donde la evolución se vuelve singular y colapsa a un punto.

El flujo por curvatura media fue introducido inicialmente por Mullins [22] en 1956 y de manera independiente por Brakke [23] en 1978 bajo el punto de vista de la teoría geométrica de la medida. Desde ese entonces el flujo fue estudiado exahustivamente. Un buen resumen cronológico de FCM se puede encontrar en [24].
Uno de los últimos resultados de clasificación de superficies 2-convexa[5] que dice que toda superficie 2-convexa, suave, cerrada y de codimensión 1 inmersa en $\mathbb{R}^n$ es difeomorfa a S^n o es una suma conexa finita de $S^n \times S^1$. Este resultado fue probado por Huisken y Sinistrari [25] en 2009. El enfoque de su trabajo fue probar un tipo de cirugia para el flujo de curvatura media similar al trabajo de Perelman para el flujo de Ricci. En esta dirección en el 2011 Head en su tesis doctoral [26] probó un resultado de convergencia de las cirugías de soluciones débiles del flujo por cuvatura media descrito por conjuntos de nivel.

La descripción por conjuntos de nivel de FCM viene al considerar la evolución por los conjuntos de nivel de una función $u : M \to \mathbb{R}$. En este caso, si N_t satisface

[5] Solo dos de las curvaturas principales son positivas.

satisface (1.2) y $N_t = \partial\{u < t\}$, entonces la función u satisface

$$\operatorname{div}_{M}\left(\frac{\nabla_M u}{|\nabla_M u|}\right) = -\frac{1}{|\nabla_M u|}\,. \tag{1.4}$$

Obteniendo bajo esta descripción un problema elíptico en algún sentido equivalente al problema parabólico original. La motivación de esta descripción viene dada por un extenso trabajo de Evans y Spruck en [16] dando las equivalencias de ambos problemas.

1.1.3. Flujo por Curvatura Media Inversa

Al igual que FCM el FCMI es un flujo extrínseco dado por (1.2) con función velocidad $f = H^{-1}$. En contraste con el flujo por curvatura media las superficies tienden a expandirse. Un ejemplo en donde esto se puede apreciar fácilmente es considerando el ejemplo de la evolución de una esfera de radio r_0. Al igual que en FCM, el FCMI en este caso se traduce a resolver la EDO

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{r}{n-1} \\ r(0) = r_0 \end{cases}. \tag{1.5}$$

La solución de (1.5) está dada por $r(t) = r_0 e^{\frac{t}{n-1}}$ y se aprecia trivialmente que la evolución estará dada por esferas que se expanden por todo tiempo. Este comportamiento es una caso especial del teorema de Gerhardt [27], que dice que la evolución por FCMI de una superficie en $\mathbb{R}^n$ compacta, estrellada[6] y con curvatura media estrictamente positiva convergerá bajo una reparametrización a una esfera. Sobre soluciones para todo tiempo del flujo por curvatura media inversa se pueden encontrar en el trabajo de Huisken e Ilmanen en [28].

Dentro de la comnidad matemática el FCMI volvió a ganar interés por el resultado de Geroch [29] y Jang y Wald [30] en los setenta, que muestra que la desigualdad de Riemann Penrose se puede probar si el FCMI se mantiene suave. Logrando junto

[6] Traducción de ”Star shape”que quiere decir que existe un punto que conecta cualquier otro por una recta.

con esto la prueba del teorema de la masa positiva[7].

La desigualdad de Reiamann Penrose dice que una 3-variedad (M, g) completa, conexa, asimptóticamente plana[8] con curvatura escalar no negativa y con frontera una superficie mínima[9] compacta N_0 satisface

$$m_{\text{ADM}} \geq \sqrt{\frac{\mathcal{H}^2(N_0)}{16\pi}},$$
$$m_{\text{ADM}} := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int\limits_{\partial B(0,r)} (\partial_j g_{ii} - \partial_i g_{ij}) \nu^i d\mu ,$$

donde ν es el vector normal unitario exterior de la esfera y $d\mu$ la forma de área.

El argumento de Geroch para demostrarlo fue el siguiente:

1. Se demuestra que el funcional de Hawking

$$m_{\text{Haw}}(N_t) := \sqrt{\frac{\mathcal{H}^2(N_t)}{(16\pi)^3}} \left(16\pi - \int\limits_{N_t} H^2 d\mu_t \right)$$

   converge a m_{ADM} si la superficie N_t converge a una esfera en infinito.

2. Se prueba que el funcional $m_{\text{Haw}}(N_t)$ es monótono creciente en t para soluciones suaves de FCMI.

3. Se hace evolucionar la superficie mínima N_0 bajo la condición de que el flujo se mantiene suave. Obteniendo que

$$\sqrt{\frac{\mathcal{H}^2(N_0)}{16\pi}} = m_{\text{Haw}}(N_0) \leq m_{\text{Haw}}(N_t) \to m_{\text{ADM}} ,$$

   asumiendo que la reparametrización ya fue hecha.

Lamentablemente el flujo no siempre se mantiene suave para todo tiempo. Basta con considerar la evolución de un toro encajado en $\mathbb{R}^3$. Si la evolución del toro se mantuviese suave para todo tiempo, es fácil convencerse de que el toro engordará.

[7]Este resultado dice que la cantidad m_{ADM} es positiva.
[8]Esto quiere decir que es difeomorfa a $\mathbb{R} \setminus K$ donde K es un conjunto compacto.
[9]La curvatura media escalar es equivalentemente cero.

Pero sabemos que en este caso aparecerán puntos donde la curvatura media escalar se anulará, y por tanto el flujo no podría seguir actuando obteniendo de esta forma una contradicción.

Afortunadamente en el 2001, Huisken e Ilmanen en [3] dieron una noción débil del FCMI para la descripción por conjuntos de nivel solucionando los problemas de regularidad y extensión a todo tiempo el FCMI. Además demostraron existencia de soluciones débiles del flujo y probaron un tipo de formula de monotonía de Geroch para el funcional de Hawking bajo esta formulación. Gracias a esto probaron la desigualdad de Riemann Penrose y por ende dieron otra demostración del teorema de la masa positiva. Un resumen de este trabajo se puede encontrar en [28] y [32]. El espíritu de su trabajo está en la descripción por conjuntos de nivel propuesta por Gen, Giga y Goto en [31] para el FCM.
En [33], Huisken e Ilamnen probaron mayor regularidad del flujo en el caso de que la variedad ambiente sea $\mathbb{R}^n$, en esta dirección también demostraron que la evolución se vuelve estrellada y suave fuera de un compacto y por el resultado de Gerhart termina convergiendo a una esfera que se expande. Otra demostración de la desigualdad de Riemann Penrose en su aspecto más general fue dada por Bray [34]. Tambien en [35] se puede encontrar un resumen de todos estos hechos. Bray en [36] propuso una noción generalizada del flujo por curvatura media inversa en virtud de probar la desigualdad de Riemann Penrose en su contexto más general, pero sigue siendo un problema abierto.

Otro hecho remarcable del flujo por curvatura media inversa fue la demostración por Bray y Neves [37] de la conjetura de Poincaré para 3-variedades con invariante de Yamabe mayor que $\mathbb{R}P^3$.

1.2. Flujo por Curvatura Media Inversa con termino forzado

Anteriormente el flujo que da origen a este trabajo comparte ciertas propiedades similares a los FCM y FCMI. Una manera de apreciar esto es considerando la evolución de esfera de radio r_0. En este caso el flujo equivale a resolver la EDO:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{r}{n-1} - c \\ r(0) = r_0 \end{cases} . \tag{1.6}$$

La solución de (1.6) está dada por $r(t) = (n-1)e^{\frac{t}{n-1}}\left(\dfrac{r_0}{n-1} - c\right) + c(n-1)$. Notar que si

$$H_0 - c^{-1} = \frac{n-1}{r_0} - c^{-1} > 0,$$

entonces la evolución existirá eternamente mediante esferas pareciéndose al caso de FCMI. Por otra parte, si

$$H_0 - c^{-1} = \frac{n-1}{r_0} - c^{-1} < 0,$$

entonces la evolucicón convergerá a un punto en el tiempo $T = \ln\left(\sqrt[n-1]{\dfrac{-c}{H_0^{-1} - c}}\right)$, obteniendo un resultado análogo al FCM. Este hecho abre la sospecha de querer comparar ambos fenómenos con respecto a los flujos originales, y al menos este es el caso si N_0 es estrictamente convexa. La clasificación dada por Liu es la siguiente: Suponga que la superficie inicial es estrictamente convexa entonces ocurren los siguiente fenómenos para el flujo (1.1):

1. Si la curvatura media escalar inicial es mayor que c^{-1} entonces, modulo una reparametrización, la evolución convergerá a una esfera que se expande de manera suave.

2. Si la curvatura medica escalar inicial es menor que c^{-1} entonces la evolución convergerá a un punto.

1.3. Estructura de la Memoria

El objetivo de este trabajo es dar un estudio general de la existencia, unicidad, regularidad y propiedades del flujo por curvatura media con termino forzado. Por

consiguiente este informe se dividió en dos partes.
La primera parte consiste en un estudio de existencia, unicidad, regularidad del flujo (secciones 2.1 hasta 2.3) donde se demuestra que dada cualquier superficie de codimensión 1 dentro de una variedad riemanniana existe la evolución por el flujo por al menos un tiempo corto finito. Donde la relación de la existencia del tiempo viene dada por "menor tiempo v/s mayor regularidad"del flujo.
Luego tratamos con la evolución de las cantidades geométricas del flujo, donde el resultado más importante es el Corolario 2.4.5, un principio del máximo para la evolución expansiva del flujo.
Despues tratamos un pequeña sección sobre la solución de superficies auto similares en $\mathbb{R}^n$, y finalmente la primera parte termina con los resultados de convexidad dado por Y. Liu en [11].
La razón de por que si hizo un énfasis en el tema de existencia, unicidad y regularidad del flujo por curvatura media inversa con termino forzado fue por el trabajo de T. Marquardt [6] en 2012 donde dio una descripción del FCMI con condición de Newmann. Por tanto queda propuesto para cualquier interesado en dar el seguimiento de su tesis doctoral junto con esta tesis de magister para adaptar el flujo por curvatura media inversa con termino forzado con condición de Newmann.

La segunda parte de esta tesis está en el espiritu del trabajo de Huisken e Ilmanen [3] en $\mathbb{R}^n$. Por ahora solo se pudo analizar el caso en que el flujo se comporta expansivamente ($H_0 > c^{-1}$) obteniendo un resultado similar al de Huisken e Ilmanen: módulo una reparametrización la evolución converge a una esfera que se expande. Con esto obtuvimos una generalización del resultado de Liu pues eliminamos la condición de ser estrictamente convexo. Sobre el caso contractivo ($H_0 < c^{-1}$) creemos poder adaptar la existencia de la evolución por un tiempo finito y así generalizar el resultado de Liu en totalidad. Para el caso límite en donde la curvatura media puede tomar el valor c^{-1} solamente tenemos la conjetura que el flujo convergerá a una esfera de radio $c(n-1)$ pero aún no sabemos como tratarlo.

Capítulo 2

Caso Suave

En esta sección estudiaremos la existencia y unicidad del flujo por curvatura media inversa con termino forzado en el caso suave. Para esto me basaré en las ideas presentadas en los trabajos de [6]y [4].

Definición 2.0.1. Dada una variedad suave compacta y orientable sin frontera N^{n-1} y una inmersión $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ a una variedad riemanniana M, $F_0 : N^{n-1} \to (M^n, \overline{g})$, donde la curvatura media escalar H_0 es positiva. Diremos que $F_0(N)$ evoluciona bajo (FCMItf) si existe una familia de un parámetro de inmersiones suaves $(F_t)_{t\geq 0} : N \to M$ con $F_t(x) := F(x,t)$, tal que satisfagan la ley

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = \left(\dfrac{1}{H(x,t)} - c\right)\nu(x,t), \;\; (x,t) \in N \times (0,T]. \\ F(\cdot,0) = F_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

donde ν y H son es el vector normal y la curvatura media escalar de $F(N,t)$ en M y $c \geq 0$.

Observación 2.0.2. Notemos que con $c = 0$ estamos en el caso del flujo por curvatura media inversa usual del cual conocemos solución por tiempo corto si la curvatura media escalar H_0 es positiva.

2.1. Vecindades Tubulares

Dado que solo pedimos que la familia de un parametro $(F_t)_{t\geq 0}$ sean inmersiones en vez de encajes trabajaremos en N en vez de $F_0(N) := N_0 \subset M$. Por tanto el primer resultado consiste en la existencia de una buena vecindad de N_0 en M en la cual podamos trabajar.

Lema 2.1.1 (Existencia de vecindad Tubular)**.** *Sean $(M, \overline{g})$, N, F_0 como en la Definición 2.1. Entonces existen un abierto $U_\varepsilon \subset (M, \overline{g})$ y una inmersión isométrica*

$$\begin{aligned} \phi : (N \times [-\varepsilon, \varepsilon], g) &\to (U_\varepsilon, \overline{g}) \\ (x, s) &\to \phi(x, s) \end{aligned}$$

tal que $\phi(\cdot, 0) = F_0(\cdot)$ y para cada $x \in N$ fijo $\dfrac{\partial \phi(x,s)}{\partial s}$ es paralelo al vector normal unitario $\nu(x)$ y el largo de la curva $\phi(x, s)$ es s.

Demostración. Sea $x \in N$, como F_0 es una inmersión existen vecindades $U_x \subset N$ y $V_{F_0(x)} \subset N_0$ de x y $F_0(x)$ respectivamente tales que F_0 restringido a U_x es un encaje suave. Esto nos servirá para identificar los puntos de N con N_0 mediante $F_0\big|_{U_x}$.
Por la compacidad de N existen una cantidad finita de puntos $\{x_k\}_{k=1}^m \in N$ y vecindades $U_{x_k} \subset N$ que cubren a N con la propiedad anterior. Llamamos W_{x_k} a las vecindades V_{x_k} en la topologia de M, $W_{x_k} \cap N_0 = V_{x_k}$. Además si es necesario modificar el cubrimiento podemos asumir que existe una vecindad W de N_0 tal que $W \subset \bigcup_{k=1}^{m} W_{x_k}$.
Sean X_k los campos definidos en TW_{x_k} tangentes a los arcos geodésicos $\phi(x, \cdot)$ que parten en x en dirección normal $\nu(x)$. O sea, ϕ satisface

$$\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial t^2} + \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial t} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t} = 0\ ,\ \ \phi(x, 0) = x\ ,\ \ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = \nu(x)\ ,$$

donde $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ son lo simbolos de Christoffel de $(M, \overline{g})$.
Ahora usamos particiones de la unidad subordinadas al cubrimiento $\{W_k\}_{k=1}^m$ de W, esto es

$f_k \in \mathcal{C}_c^\infty(W_k, \mathbb{R})$ tal que $\sum_{k=1}^{m} f_k = 1$ en W, para poder definir el campo

$$
\begin{aligned}
X : N \times [-\varepsilon, \varepsilon] &\to TM \\
(x, s) &\to X(x, s) := \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\phi(x, s)\right) X_k\left(\phi(x, s)\right).
\end{aligned}
$$

Así obtenemos las curvas integrales $\phi : N \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ y definimos

$$
\begin{aligned}
e_k(\phi(x, s)) &:= \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x^k}, \qquad k = 1, \ldots, n-1 \\
e_n(\phi(x, s)) &:= \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial s},
\end{aligned}
$$

donde x^k son coordenadas de N. Notemos que $\phi(\cdot, 0) = F_0$ y por tanto $e_n(x) \in (TN_0)^\perp$, pues para $v \in T_x N_0$,

$$
\langle e_n(x), v\rangle_{\overline{g}} = \langle \lambda(x)\nu(x), v\rangle_{\overline{g}} = 0.
$$

Luego, como F_0 es un inmersión tenemos que $\phi(\cdot, 0)$ posee rango máximo n. Así para cada $x \in N$ y s muy pequeño tenemos que $\phi(x, s)$ tambien posee rango máximo n, y por tanto ϕ es un inmersión. Finalmente dotamos a $N \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ con la métrica

$$
g_{ij}(x, s) := \left(\phi^* \overline{g}\right)(x, s) = \overline{g}\left(e_i(\phi(x, s), e_j(\phi(x, s))\right), \;\; 1 \leq i, j \leq n-1,
$$

y tenemos la inmersión isométrica deseada. $\square$

Observación 2.1.2. En el caso que F_0 fuese un encaje tendremos que las coordenadas dadas por ϕ serían las coordenadas de Fermi.

Observación 2.1.3. Como $\phi(\cdot, 0) = F_0$ la métrica en N_0 está dada por $g_{ij}(x) := \overline{g}\left(e_i(p), e_j(p)\right)$ con $p = \phi(x, 0)$ y por tanto en $t = 0$ tenemos

$$
g(x, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c}
 & & & 0 \\
 & \overline{g}_{ij}(x) & & \vdots \\
 & & & 0 \\
\hline
0 & \ldots & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

para $1 \leq i, j \leq n-1$.

Observación 2.1.4. La idea de trabajar en una vecindad tubular es que podemos describir los puntos de las hipersuperfices N_t como $\phi(x, u(x,t))$ donde u es una función escalar definida en $N \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. En efecto, como ϕ es una inmersión isométrica podemos identificar $(N \times [-\varepsilon, \varepsilon], g)$ con $(U_\varepsilon, \overline{g})$. Mas aún podemos identificar localmente $(N, g|_N)$ con $\left(N_0, \overline{g}|_{N_0}\right)$. En este sentido, para cada t fijo describiremos las hipersuperficies $N_t := F_t(N)$ donde

$$\begin{aligned} F_t : N &\to N \times [-\varepsilon, \varepsilon] \\ x &\to (x, u(x,t)) \ . \end{aligned}$$

El proximo resultado tratará sobre los aspectos geométricos de los grafos de u. En lo que sigue D_k y D_{ij} denotaran las derivadas parciales y ∇ la conexión de Levi-Civita con respecto a g.

Lema 2.1.5. *Para $t \geq 0$ fijo, sean $u(\cdot, t) : N \to [-\varepsilon, \varepsilon]$ una función $\mathcal{C}^2(N)$ y $N_t \subset (N \times [-\varepsilon, \varepsilon], g)$ como en la observación 2.1.4. Dado $p = (x, u(x,t))$ y e_α la base estandar de $T_p(N \times [-\varepsilon, \varepsilon])$, tenenmos la siguientes formulas para p.*

1. *La base estandar para T_pN_t está dada por:*

$$\tau_k = e_k + D_k u e_n, \;\; 1 \leq k \leq n-1 \, .$$

2. *El normal unitario en N_t está dado por:*

$$\nu := v^{-1} g^{-1} \begin{pmatrix} -Du \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $v^2 := g^{nn} - 2g^{kn} D_k u + g^{kl} D_k u D_l u$.

3. *Tenemos las siguientes relaciones para ν:*

$$\begin{aligned} \langle e_k, \nu \rangle_g &= -v^{-1} D_k u, \;\; 1 \leq k \leq n \, . \\ \langle e_n, \nu \rangle_g &= v^{-1}. \end{aligned}$$

4. *La métrica y la segunda forma fundamental en T_pN_t están dadas por:*

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + g_{in}D_ju + g_{nj}D_iu + g_{nn}D_iuD_ju \,.$$
$$\hat{h}_{ij} = -v^{-1}\left(D_{ij}u - \Gamma^k_{\alpha\beta}\tau^\alpha_i\tau^\beta_j D_ku + \Gamma^n_{\alpha\beta}\tau^\alpha_i\tau^\beta_j\right) \,,$$

donde Γ son los coeficientes de Christoffel con respecto a la métrica g.

Demostración. 1. Notemos que por definición $\tau_k := (F_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ donde $F_t : N \to N \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ donde $F_t(x) = (x, u(x,t))$. Así,

$$\tau_k := (F_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) := \frac{\partial F_t}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + D_ku\frac{\partial}{\partial x^n} = e_k + D_kue_n \,.$$

2. Llamamos a $\hat{\nu} := (-Du, 1)$ escrita en la base e_α. Entonces,

$$\langle \tau_k, \nu\rangle_g = g_{\alpha\beta}\tau^\alpha_k\nu^\beta = \frac{1}{v}g_{\alpha\beta}\tau^\alpha_k g^{\beta\gamma}\hat{\nu}_\gamma$$

Como $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ con δ^γ_α el delta de kronecker, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \tau_k, \nu\rangle_g &= \frac{1}{v}\delta^\gamma_\alpha\tau^\alpha_k\hat{\nu}_\gamma \\ &= \frac{1}{v}\tau^\alpha_k\hat{\nu}_\alpha = \frac{1}{v}\left(e^\alpha_k\hat{\nu}_\alpha + D_kue_n\hat{\nu}_\alpha\right) = \frac{1}{v}\left(\hat{\nu}_k + D_ku\hat{v}_n\right) \\ &= \frac{1}{v}\left(-D_ku + D_ku\right) = 0 \,.\end{aligned}$$

Por tanto $\nu \perp T_pN_t$. Luego $\nu = \frac{1}{v}g^{-1}\hat{\nu}$ tendrá norma unitaria si $v := |g^{-1}\hat{\nu}|_g$, o sea

$$\begin{aligned}v^2 &= \left|g^{-1}\hat{\nu}\right|^2_g = \left\langle g^{-1}\hat{\nu}, g^{-1}\hat{\nu}\right\rangle_g \\ &= g_{\alpha\beta}g^{\alpha\eta}\hat{\nu}_\eta g^{\beta\gamma}\hat{\nu}_\gamma = g^{\beta\gamma}\hat{\nu}_\beta\hat{\nu}_\gamma \\ &= g^{nn} - 2g^{kn+1}D_ku + g^{kl}D_kuD_lu \,.\end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\langle e_k, \nu\rangle_g = \frac{1}{v} g_{\alpha\beta} e_k^\alpha g^{\beta\gamma} \hat{\nu}_\gamma = \frac{1}{v} e_k^\alpha \hat{\nu}_\alpha = \frac{1}{v} \hat{\nu}_k \ ,$$

así el resultado sigue de la definición de $\hat{\nu}$.

4. La métrica en $T_p N_t$ viene dada por la relación

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij} := \langle \tau_i, \tau_j\rangle_g = g_{\alpha\beta}\tau_i^\alpha \tau_j^\beta &= g_{\alpha\beta}\left(e_i^\alpha + D_i u e_n^\alpha\right)\left(e_j^\beta + D_j u e_n^\beta\right) \\ &= g_{\alpha\beta}\left(e_i^\alpha e_j^\beta + D_i u e_n^\alpha e_j^\beta + D_j u e_n^\beta e_i^\alpha + D_i u D_j u e_n^\alpha e_n^\beta\right) \\ &= g_{ij} + g_{nj} D_i u + g_{in} D_j u + g_{nn} D_i u D_j u \ . \end{aligned}$$

Para la segunda forma fundamental usamos la relación

$$-\hat{h}_{ij}\nu := \nabla_{\tau_i}\tau_j - \hat{\nabla}_{\tau_i}\tau_j = D_{ij}F_t + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\tau_i^\alpha \tau_j^\beta e_\gamma - \hat{\Gamma}^k_{ij}\tau_k \ ,$$

donde $\hat{\nabla}$ y $\hat{\Gamma}$ son la conexión de Levi-Civita y los simbolos de Christoffel de la métrica $\hat{g}$.
Luego tomando producto con ν en lo anterior, nos queda

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ij} = \left\langle \hat{h}_{ij}\nu, \nu\right\rangle_g &= -\langle D_{ij}F_t, \nu\rangle_g - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\tau_i^\alpha\tau_j^\beta \langle e_\gamma, \nu\rangle_g + \hat{\Gamma}^k_{ij}\langle \tau_k, \nu\rangle_g \\ &= -D_{ij}u \langle e_n, \nu\rangle_g - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\tau_i^\alpha\tau_j^\beta\langle e_\gamma, \nu\rangle_g \\ &= \frac{-1}{v}\left(D_{ij}u - \Gamma^k_{ij}\tau_i^\alpha\tau_j^\beta D_k u + \Gamma^n_{\alpha\beta}\tau_i^\alpha\tau_j^\beta\right) \ . \end{aligned}$$

□

2.2. Problema escalar asociado

Partiremos esta sección deduciendo la ecuación que satisface la función escalar u si las hipersuperficies $N_t = F_t(N)$ evolucionan por el flujo (2.1), donde $F_t(x) := (x, u(x,t))$.
Como $(F_t)_{t\geq 0}$ satisface (2.1), tenemos que la condición inicial del flujo $F_0(x) = (x, 0)$

implica que $u(\cdot,0)=0$. Por otro lado al derivar $F(x,t)$ con respecto a t nos queda

$$\frac{d}{dt}F(x,t)=\frac{d}{dt}\left(x,u(x,t)\right)=\frac{\partial u}{\partial t}e_n\,.$$

Así tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}e_n=\left(\frac{1}{H}-c\right)\nu\,,$$

donde $H:=\hat{g}^{ij}\hat{h}_{ij}$ es la curvatura media escalar de N_t en $(N\times[-\varepsilon,\varepsilon],g)$.
Luego tomando producto con ν y usando que $\langle e_n,\nu\rangle_g=v^{-1}$ nos queda

$$\frac{\partial u}{\partial t}v^{-1}=\left(\frac{1}{H}-c\right)\,.$$

Así la ecuación que satisface u es

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\left(\dfrac{1}{H}-c\right)v(\cdot,u,Du,D^2u)=0, & \text{en } N\times(0,T)\,.\\ u(\cdot,0)=0, & \text{en } N\,.\end{cases}\tag{2.2}$$

Por tanto el propósito de esta sección será el estudio de existencia y unicidad del problema escalar (2.2), que en la siguiente sección veremos como se relaciona con el problema de existencia y unicidad del flujo (2.1).

Observación 2.2.1. La solubilidad de (2.2) está en correspondencía con la invertibilidad en 0 del operador

$$A:X\to Y,\;\; u\to Au:=\frac{\partial u}{\partial t}-Qu\,,\tag{2.3}$$

donde

$$\begin{aligned}X&:=\left\{u\in\mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(N\times[0,T]\right)\;:\;u(x,0)=0\,\text{para todo}\;x\in N\right\}\,,\\ Y&:=\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(N\times[0,T]\right)\,,\\ Qu&:=\left(\frac{1}{H}-c\right)v\left(x,u,Du,D^2u\right)\,.\end{aligned}$$

Anunciaremos el Teorema que nos dará la estrategia para probar la invertibilidad de (2.3).

Teorema 2.2.2 (Teorema de la Función Inversa)**.** *Dados dos espacios de Banach E, F, un abierto $\Omega \subset E$ y $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ con $k \geq 1$. Sea $x_0 \in \Omega$ tal que $Df(x_0)$ es un homeomofismo entre E y F. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f\big|_{B_\varepsilon(x_0)}$ es un difeomorfismo con su imagen.*

Demostración. Referimos al lector a [2] capítulo 8. □

Observación 2.2.3. La estrategia a seguir será encontrar una función $u_0 \in X$ tal que nos asegure las siguientes condiciones:

1. El operador linearizado de A en u_0,

$$DA(u_0) : X \to Y \, , \tag{2.4}$$

   sea un homeomorfismo.

2. Para cada $T' > 0$ exista $\varepsilon(T') > 0$ tal que

$$||Au_0||_Y < \varepsilon(T') \, . \tag{2.5}$$

   Notamos que esta ultima condición es la traducción de que $A|_{B_\varepsilon(u_0)}$ sea un difeomorfismo cerca del 0, o sea que halla solución única de $Au = 0$ con $u \in X$.

Este método lo podemos encontrar en [6], [1] y [4] para flujos del tipo curvatura media inversa. La elección de la función u_0 aparece en [6] Lema 2.6, sección 2, capítulo 2 y en flujos más generales [1]capítulo 2, Teorema 2.5.7.

En el siguiente Lema probaremos la existencia y unicidad de la buena función u_0 mencionada en la observación 2.2.3.

Lema 2.2.4. *Sea N_0 una hipersuperficies inmersa con curvatura media escalar $H_0 \in \mathcal{C}^{0+\alpha}(N)$ positiva. Entonces el problema auxiliar*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \left(\dfrac{1}{H_0} - c\right) & \text{en } N \times (0, T) \, . \\ w(\cdot, 0) = 0 & \text{en } N \, . \end{cases} \tag{2.6}$$

posee solución única $w \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$.

Demostración. Primero veamos unicidad. Sea w_1 y w_2 dos soluciones de (2.6), consideramos $w = w_1 - w_2$. Notamos que w satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{en } N \times (0,T)\ . \\ w(\cdot, 0) = 0 & \text{en } N\ . \end{cases}$$

Afirmamos que $w \leq 0$, en efecto si $w(x_t, t) = \max\limits_{N} w(x,t)$ tenemos que $\Delta w(x_t, t) \leq 0$ y por tanto $\dfrac{\partial w}{\partial t}(x_t, t) \leq 0$. Así w es decreciente en t en los máximos espaciales, luego como $w(x,0) = 0$, tenemos que $w(x,t) \leq 0$. De manera análoga mostramos que $w \geq 0$ cambiando máximos por mínimos. Por ende $w \equiv 0$ y $w_1 = w_2$.
Mostremos ahora existencia. Sea $f = \dfrac{1}{H_0} - c$. Como N es una variedad cerrada existe solución única $v \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$ del problema homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{en } N \times (0,T)\ . \\ v(\cdot, 0) = -f & \text{en } N\ . \end{cases}$$

Para la demostración de la solubilidad de la ecuación del calor en variedades riemannianas referimos al lector a [7] y [8].
Sea $w = \int\limits_0^t v(x,s)ds$, notamos que $w \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$ y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= v(x,t) - v(x,0) = v(x,t) + f\ , \\ \Delta w &= \int\limits_0^t \Delta v(x,s)ds = \int\limits_0^t \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{(x,s)} ds = v(x,t)\ , \end{aligned}$$

así w sastisface (2.6). □

Observación 2.2.5. De la demostración del Lema 2.2.4 observamos que en los puntos $x \in N$ en que $\dfrac{1}{H_0(x)} = c$ se tendrá que $w(x,t) = 0$. Por tanto si $\dfrac{1}{H_0} \equiv c$, entonces $w \equiv 0$.

En los siguientes resultados dividiremos el problema de probar que u_0 satisface la observación 2.2.3 en: Invertibilidad del operador $DA(u_0) : X \to Y$, $DA(u_0)$ es efectivamente un homeomorfismo, y la condición de existencia y unicidad del problema $Au = 0$ con $u \in X$.

Ahora mostraremos que si u_0 es solución de (2.6) entonces para cada $g \in Y$ existe una única solución $w \in X$ de $DA(u_0)w = g$.

Lema 2.2.6. *Sean $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$ la solución de (2.6) y $g \in \mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$. Entonces existe $T > 0$ tal que en una vecindad de u_0 el problema escalar linearizado*

$$\begin{cases} D(u_0)w = g & \text{en } N \times [0,T] \, . \\ w(\cdot,0) = 0 & \text{en } N \, . \end{cases} \tag{2.7}$$

posee solución única $w \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$.

Demostración. Recordemos que el operador Q viene dado por

$$\begin{aligned} Q : N \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1\times n-1} &\to \mathbb{R} \\ (x,z,p,A) &\to \left(\frac{1}{\hat{g}^{ij}(x,z,p)\hat{h}_{ij}(x,z,p,A)} - c \right) v(x,z,p) \, , \end{aligned}$$

donde $\hat{g}$, $\hat{h}$ y v son los terminos calculados en el Lema 2.1.5.
El operador linearizado de A cerca de u_0 viene dado por

$$\begin{aligned} DA(u_0)w :&= \frac{d}{d\varepsilon} A\left(u_0 + \varepsilon w\right)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - Q\left(x, u_0 + \varepsilon w, Du_0 + \varepsilon Dw, D^2 u_0 + \varepsilon D^2 w\right)\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial w}{\partial t} - Q_{A_{ij}} D_{ij} w - Q_{p_k} D_k w - Q_z w \, , \end{aligned}$$

donde los sub-ínidces en Q denotan las dérivadas con respecto a los índices de las variables y todas las dérivadas están evaluadas en $(x, u_0, Du_0, D^2 u_0)$.
Dada la regularidad de u_0 tenemos que los coeficientes de $DA(u_0)$ están en Y. Más

aún, los coeficientes $Q_{A_{st}}\left(x, u_0, Du_0, D^2 u_0\right)$ satisfacen

$$
\begin{aligned}
Q_{A_{sr}}\left(\cdot, x, z, p, A_{ij}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial A_{sr}}\left(\frac{1}{\hat{g}^{ij}\hat{h}_{ij}} - c\right) v\right) = \left(\frac{-v}{\hat{g}^{ij}\hat{h}^2_{ij}}\right)\frac{\partial \hat{h}_{ij}}{\partial A_{sr}} \\
&= \left(\frac{-v}{\hat{g}^{ij}\hat{h}^2_{ij}}\right)\frac{\partial}{\partial A_{sr}}\frac{-1}{v}\left(A_{ij} - \Gamma^k_{\alpha\beta}\tau^\alpha_i\tau^\beta_j p_k + \Gamma^n_{\alpha\beta}\tau^\alpha_i\tau^\beta_j\right) \\
&= \left(\frac{-v\hat{g}^{ij}}{H^2}\right)\left(\frac{-1}{v}\delta^{ij}_{sr}\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{\hat{g}^{ij}}{H^2}, & (s,r) = (i,j) \\ 0, & (s,r) \neq (ij) \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos que en $t = 0$ los coeficientes $Q_{A_{ij}}(x, u_0, Du_0, D^2u_0) = \dfrac{g^{ij}}{(H_0)^2}$ donde $H_0 > 0$, así tenemos que $DA(u_0)$ es un operador lineal uniformemente parabólica en un pequeño intervalo de tiempo $[0, T]$. Por tanto el resultado se sigue de la teoría clásica de las ecuaciones parabólicas lineales ([T1] Apendice A Teorema A.4). $\square$

Observación 2.2.7. Dada la teoría clásica de la ecuaciones parabólicas ([T1] Apendice A Teorema A.6) tenemos las siguientes cotas para la solución de (2.7): si u es solución de (2.7) para $g \in Y$, entonces

$$
||u||_{\mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} \leq C\,||g||_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} ,
$$

donde C es una constante que depende solo de N_0.

Observación 2.2.8. Con el resultado del Lema 2.2.6 y la observación 2.2.7 tenemos que $DA(u_0)$ es invertible y que $(DA(u_0))^{-1}$ es continuo entre Y y X.

Por otro lado X es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$. En efecto si $u_n \in X$ tal que $u_n \to u$ en $\mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T])$, entonces

$$
|u(x,0)| = |u(x,0) - u_n(x,0)| \leq ||u - u_n||_{\mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega}_T\right)} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty .
$$

Así como X e Y son espacios de Banach podemos aplicar el Teorema de la Aplicación Abierta y tener que $DA(u_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, y por tanto se cumple (2.4).

Nos falta mostrar que la función u_0 satisface (2.5). Para esto mostraremos un resultado clásico de espacio de Hölder con dominios parabólicos.

Lema 2.2.9. *Sea $f \in \mathcal{C}^{\beta,\frac{\beta}{2}}(N \times [0,\infty))$ con $\beta > \alpha$ y $f(x,0) = 0$ en N. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $T' > 0$, tal que si $T \leq T'$ entonces*

$$||f||_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} \leq \varepsilon\,.$$

Demostración. Definimos las funciones $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $g_{_T} : N \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}\lambda(t) :&= \sup_{\{(x,y)\in N\times N\,:\,x\neq y\}} \frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{d(x,y)^\alpha}\,.\\ g_{_T}(x) :&= \sup_{\{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]\,:\,t\neq s\}} \frac{|f(x,t)-f(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}}\,.\end{aligned}$$

Con esto tenemos que por definición

$$||f||_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} := ||f||_{\mathcal{C}(N\times[0,T])} + ||\lambda||_{\mathcal{C}([0,T])} + ||g_{_T}||_{\mathcal{C}(N)}\ .$$

(i) El primer termino del lado derecho tiende a 0 cuando $T \to 0$ pues $f(x,0) = 0$.

(ii) El segundo termino del lado derecho lo podemos acotar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}||\lambda||_{\mathcal{C}([0,T])} &= \sup_{[0,T]} \sup_{\{(x,y)\in N\times N\,:\,x\neq y\}} \left(\frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{d(x,y)^\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} |f(x,t)-f(y,t)|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\\ &\leq ||f||^{\frac{\alpha}{\beta}}_{\mathcal{C}^{\beta,\frac{\beta}{2}}(N\times[0,T])}\, 2\left(\sup_{[0,T]}\sup_{N} |f(x,t)|\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\\ &\leq 2\,||f||^{\frac{\alpha}{\beta}}_{\mathcal{C}^{\beta,\frac{\beta}{2}}(N\times[0,\infty))}\, ||f||^{1-\frac{\alpha}{\beta}}_{\mathcal{C}(N\times[0,T])} \longrightarrow 0 \text{ cuando } T \to 0\,,\end{aligned}$$

por (i) y que $1 - \frac{\alpha}{\beta} > 0$.

(iii) Acotando de la misma manera que en (ii) tenemos que el tercer termino del lado derecho está acotado por

$$||g_{_T}||_{\mathcal{C}(N)} \leq ||f||_{\mathcal{C}^{\beta,\frac{\beta}{2}}(N\times[0,\infty)}\, |T|^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } T \to 0\,.$$

Finalmente por (i), (ii) y (iii) se tiene el resultado del Lema 2.2.9. □

Observación 2.2.10. Notemos que por el Lema 2.2.9 u_0 satisface (2.5).
En efecto como u_0 satisface (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} ||Au_0||_Y &= \left|\left|\frac{\partial u_0}{\partial t} - Q(\cdot, u_0, Du_0, D^2u_0)\right|\right|_Y \\ &= \left|\left|\left(\Delta u_0(x,t) + \frac{1}{H_0(x)} - c\right) - \left(\frac{1}{H} - c\right) v(x,t)\right|\right|_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} < \infty\,. \end{aligned}$$

Además como $u_0(x,0) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} Au_0(x,0) &= \left(\Delta u_0(x,0) + \frac{1}{H_0(x)} - c\right) - \left(\frac{1}{H(x,0)} - c\right) v(x,0) \\ &= \left(\frac{1}{H_0(x)} - c\right) - \left(\frac{1}{H_0(x)} - c\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Por tanto, como $Au_0 \in \mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])$ y $Au_0(x,0) = 0$ podemos aplicar el Lema 2.2.9 a Au_0, esto es para cada $\varepsilon > 0$ existe T' tal que para $T \leq T'$ se cumple que $||Au_0||_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} < \varepsilon$.

Resumiremos lo expuesto anteriormente en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.11. *Sean N una variedad cerrada. Suponga que N_0 posee curvatura media escalar H_0 estrictamente positiva. Entonces existe $T > 0$ y una única solución $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])$ de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{1}{H} - c\right) v(\cdot, u, Du, D^2u) = 0, & \textit{en } N\times(0,T)\,. \\ u(\cdot,0) = 0, & \textit{en } N\,. \end{cases}$$

Demostración. Procedemos como en la observacón 2.2.1. Por el Lema 2.2.4 existe solución única u_0 de 2.6. Por el lema 2.2.5 y la observación 2.2.8 $DA(u_0) : X \to Y$ es un homeomorfismo. Así podemos aplicar el Teorema 2.2.2 y poder afirmar que $A|_{B_\varepsilon(u_0)}$ es un difeomorfismo con su imagen. Finalmente por las observaciones 2.2.3

y 2.2.10, tenemos que existe $T > 0$ tal que

$$||Au_0||_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T])} < \varepsilon \,.$$

Por tanto el problem $Au = 0$ con $u(\cdot, 0) = 0$ posee solución única $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\,(N \times [0,T])$.
□

Observación 2.2.12. Notar que en todos los resultados obtenidos hemos elegido distintos $T > 0$ implicitamente para asegurar existencia y unicidad de las soluciones.

Aplicando la Teoría de Regularidad clásica de ecuaciones parabólicas obtenemos que la regularidad de la solución de (2.2) es $\mathcal{C}^\infty$ hasta el tiempo $t = 0$. Formalmente,

Lema 2.2.13. *Sea $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T))$ la solución de (2.2). Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T)) \cap \mathcal{C}^{2m+\alpha,m+\frac{\alpha}{2}}(N \times [\varepsilon,T)) \,.$$

Demostración. (Incompleta)
Primero mostraremos que tenemos mayor regularidad espacial en $N \times [0,T)$.
Consideremos una bola abierta $B_\rho \subset N$ tal que $B_{3\rho}$ esta cubierta por un sistema de coordenadas de N y sea $Z := \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{B_{2\rho}} \times [0,T)\right)$.
Primero queremos mostrar que la solución u de (2,2) es $\mathcal{C}^{3+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{B_\rho} \times [0,T)\right)$. Notamos que basta mostrar que $v := D_k u \in Z$ donde D_k es la derivada parcial con respecto a la direcció e_k.
En efecto, definimos el cuociente diferencial de u

$$v_h(x,t) := h^{-1}\left(u(x+\vec{h},t) - u(x,t)\right) \,,$$

donde $\vec{h} = he_k$ y $|h|$ suficientemente pequeño para que $v_h \in Z$.
Luego, como u resuelve (2,2), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_h}{\partial t} &= h^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x+\vec{h},t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)\\ &= h^{-1}\left(Q\left(x+\vec{h}, u(x+\vec{h}), Du(x+\vec{h}), D^2u(x+\vec{h}\right) - Q(x,u,Du,D^2u)\right) \,,\end{aligned}$$

y que $v_h(x,0) = 0$. Por tanto v_h satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_h}{\partial t} - h^{-1}\left(Q\left(x+\vec{h}, u(x+\vec{h}), \ldots\right) - Q(x,u,\ldots)\right) = 0, & \text{en } B_{2\rho}\times[0,T) \\ v_h(\cdot,0) = 0, & \text{en } B_{2\rho}\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Afirmamos que (2,8) es una ecuación lineal parabólica con coeficientes en $\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(B_{2\rho}\times[0,T)\right)$. En efecto, si consideramos la combinación convexa

$$u_\lambda(x,t) := \lambda u(x+\vec{h},t) + (1-\lambda)u(x,t)\ , \ \ \lambda\in[0,1]\ ,$$

con $|h|$ suficientemente pequeño para que los u_λ sean funciones admisible para el operador Q.
Tendremos que

$$\begin{aligned} h^{-1}\left(Q\left(x+\vec{h}, u(x+\vec{h}), \ldots\right) - Q(x,u,\ldots)\right) &= h^{-1}\int_0^1 \frac{d}{d\lambda}Q(x+\lambda\vec{h}, u_\lambda, \ldots)d\lambda \\ &= \int_0^1 \left(Q_{A_{ij}}D_{ij}v_h - Q_{p_i}D_iv_h + Q_zv_h + Qe_k\right)d\lambda\ , \end{aligned}$$

donde las derivadas de Q y Q estan evaluados en $\left(x+\lambda\vec{h}, u_\lambda, Du_\lambda, D^2u_\lambda\right)$. Por los calculos hechos en la demostración del Lema 2.2.6 tenemos que los coeficientes

$$a^{ij}(h) := \int_0^1 Q_{A_{ij}}\left(x+\lambda\vec{h}, u_\lambda, Du_\lambda, D^2u_\lambda\right)d\lambda\ , \ \ b^i(h) := \int_0^1 Q_{p_i}\left(x+\lambda\vec{h}, u_\lambda, Du_\lambda, D^2u_\lambda\right)d\lambda\ ,$$

$$c(h) := \int_0^1 Q_z\left(x+\lambda\vec{h}, u_\lambda, Du_\lambda, D^2u_\lambda\right)d\lambda\ , \ \ d(h) := \int_0^1 Q\left(x+\lambda\vec{h}, u_\lambda, Du_\lambda, D^2u_\lambda\right)d\lambda\ ,$$

son $\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{B_{2\rho}}\times[0,T)\right)$ en h, los coeficientes (a_{ij}) uniformemente parabólicos y

$$||d(h)||_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{B_{2\rho}}\times[0,T))} \leq C\ ,$$

con $C = C(\rho) > 0$. Por tanto v_h satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_h}{\partial t} - a^{ij}(h) D_{ij} v_h - b_i(h) D_i v_h - c(h) v_h - d(h) = 0 & \text{en } \overline{B_{2\rho}} \times (0,T) \\ v(\cdot,0) = 0 & \text{en } \overline{B_{2\rho}}\,. \end{cases}$$

Luego por la teoría clásica de las ecuaciones lineales parabólicas tenemos que $v_h \in Z$ y $||v_h||_Z \leq C$, donde C solo depende de ρ. Finalmente por argumentos del tipo Arzela-Ascoli y pasando a una subsucesión si es necesario podemos afirmar que $v_h \to v$ en Z cuando $|h| \to 0$. Por tanto tenemos que $u \in \mathcal{C}^{3+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{B_{2\rho}} \times [0,T)\right)$.
Ahora usaremos una función de corte para extender este resultado a todo $N \times [0,T)$.
Sea $\eta \in \mathcal{C}_c^{2+\alpha}\left(\overline{B_{2\rho}}\right)$ una función de corte tal que $\eta = 1$ en $\overline{B_\rho}$ y consideramos $w = \eta v$.
Notamos que $w \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T))$ pues resuelve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - a^{ij}(h) D_{ij} w - b^i(h) D_i w - c(h) w = f & \text{en } N \times (0,T) \\ w(\cdot,0) = 0 & \text{en } N\,. \end{cases}$$

con $f \in \mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T))$ que es combinación de η, v y derivadas de ambas.
Con esto mostramos que $D_k u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T))$ y por tanto $u \in \mathcal{C}^{3+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T))$.
Además por la regularidad de u y el operador Q tenemos que si tomamos derivada con respecto la dirección e_k de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Q(x,u,Du,D^2u) = 0\,,$$

obtenemos que $\dfrac{\partial D_k u}{\partial t} \in \mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T))$ y por tanto

$$u \in \mathcal{C}^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(N \times [0,T))\,.$$

Notamos que podemos proceder inductivamente este procedimiento y obtener que para cualquier $m \geq 1$, $D_k^m u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(N \times [0,T))$ para $k = 1,\ldots,n-1$.
Ahora estudiaremos las derivadas temporales de u.
Consideremos el caso $m = 2$. Dado que tenemos la regularidad espacial deseada,

si derivamos dos veces (2.2) con respecto a la variable espacial obtendremos que $\dfrac{\partial D^2 u}{\partial t} \in \mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T))$ y que para cada $t\in[0,T)$ fijo $\dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\in\mathcal{C}^{2+\alpha}(N)$. Entonces podemos repetir el argumento del cuociente diferencial para $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ en la variable t. Por tanto para cada $\varepsilon>0$ tendremos que

$$u\in\mathcal{C}^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{2}}(N\times[\varepsilon,T-\varepsilon])\,.$$

$\square$

2.3. Existencia por tiempo corto

Supongamos que $N_0 := F_0(N)$ evoluciona por (2.1) en M. Por tanto, existe una familia de un parametro de inmersiones suaves $(F_t)_{t\geq 0} : N\to M$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = \left(\dfrac{1}{H(x,t)} - c\right)\nu(x,t), & (x,t)\in N\times(0,T) \\ F(\cdot,0) = F_0\,. \end{cases}$$

Supongamos además que tenemos una familia de un parámetro de difeomorfismos $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ de N, esto es un mapa $\varphi : N\times[0,T)\to N$ suave tal que $\varphi(\cdot,0)=id_N$, y para cada t el mapa φ_t es un difeomorfismo de N.
Con esto podemos calcular la evolución del flujo (2.1) vista por la nueva parametrización φ. Llamamos $\tilde{F}_t := (F\circ\varphi)_t$, y notamos que satisface

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{F}(x,t) :&= \frac{d}{dt}F\left(\varphi(x,t),t\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}F\left(\varphi(x,t),t\right) + D_xF\left(\varphi(x,t),t\right)\frac{d\varphi}{dt}(x,t) \\ &= \left(\frac{1}{H(\varphi(x,t),t)} - c\right)\nu(\varphi(x,t),t) + \underbrace{D_xF\left(\varphi(x,t),t\right)\frac{d\varphi}{dt}(x,t)}_{\text{(componente tangencial extra)}}\quad, \end{aligned}$$

y $\tilde{F}(x,0) = F(\varphi(x,0),0) = F_0(\varphi(x,0)) = F_0(x)$.
Con esto tenemos que el flujo (2.1) no es invariante bajo reparamatrizaciones tan-

genciales pues aparece una componente extra.
Por otro lado la ecuación

$$\left\langle \nu, \frac{d}{dt}F \right\rangle_g = \left(\frac{1}{H} - c \right) \tag{2.9}$$

si es invariante bajo reparametrizaciones tangenciales. En efecto, según lo mostrado antes tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \nu \circ \varphi, \frac{d}{dt}\tilde{F}(x,t) \right\rangle_g := & \left\langle \nu(\varphi(x,t),t), \left(\frac{1}{H(\varphi(x,t),t)} - c \right) \nu(\varphi(x,t),t) \right. \\ & \left. + D_x F\left(\varphi(x,t),t\right) \frac{d\varphi}{dt}(x,t) \right\rangle_g \\ = & \left(\frac{1}{H} - c \right) \circ \varphi \,. \end{aligned}$$

Observación 2.3.1. Notamos que la ecuación (2.9) es justamente la ecuación que satisface u cuando la evolución viene dada por los grafos de una función esclar. Por tanto el propósito de esta sección será mostrar la relación de los problemas (2.1) y (2.9).

Lo primero que haremos será mostrar la existencia del cambio de ansatz que nos asegure como pasar de un problema a otro.

Lema 2.3.2. *Sea $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T]) \cap \mathcal{C}^\infty(N \times (0,T))$ una solución de (2.2) y F definida como en la observación 2.1.4. Si $(\cdot)^T$ denota la proyección sobre el espacio tangente de $N_t := F(N,t)$. Entonces existe un único mapa $\varphi \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N \times [0,T]) \cap \mathcal{C}^\infty(N \times (0,T))$ que satisface el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \left(-\left(D_x F\right)^{-1} \left(\dfrac{\partial F}{\partial t} \right)^T \right)(\varphi, t) & en\ N \times (0,T)\,. \\ \varphi(\cdot, 0) = id & en\ N\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Además se cumple que $\varphi : N \times [0,T] \to N$ es un difeomorfismo para cada t.

Demostración. Podemos escribir el sistema (2.10) de la forma

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= -\left(D_x F\right)^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}e_n\right)^T(\varphi,t)\\ &= \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\left(D_x F\right)^{-1}e_n^T\right)(\varphi,t)\,.\end{aligned}$$

Como el lado derecho es suave en x para tiempo $t \neq 0$ y en $t = 0$ tenemos regularidad $\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2}}$ en x, tenemos por la teoría de existencia y regularidad de sistema de ecuaciones el resultado deseado. Aún más tenemos que para cada t, $\varphi(x,t)$ es un difeomorfismo ([G2] Teorema 9.4.10 capítulo 9). $\square$

Proposición 2.3.3 (Equivalencia entre (2.9) y (2.1))**.** *Dada una solucíon $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T))\cap\mathcal{C}^{\infty}(N\times(0,T))$ de (2.2) existe un único mapa $\varphi \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T))\cap\mathcal{C}^{\infty}(N\times(0,T))$ que satisface (2.10) tal que*

$$\begin{aligned}\tilde{F} : N\times[0,T] &\to N\times[-\varepsilon,\varepsilon]\\ (x,t) &\to \tilde{F}(x,t) := \left(\varphi(x,t), u\left(\varphi(x,t),t\right)\right)\,,\end{aligned}$$

satisface (2.1).
Por otro lado, dada una solución

$$F \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(N\times[0,T),N\times[-\varepsilon,\varepsilon]\right)\cap\mathcal{C}^{\infty}\left(N\times(0,T),N\times[-\varepsilon,\varepsilon]\right)$$

de (2.1) existen únicos mapas $\varphi \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(N\times[0,T)\right)\cap\mathcal{C}^{\infty}\left(N\times(0,T)\right)$ y $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(N\times[0,T)\right)\cap\mathcal{C}^{\infty}\left(N\times(0,T)\right)$ definidos implicitamente por F tal que satisfacen (2.10) y (2.2) respectivamente.

Demostración. Primero mostraremos que $\tilde{F}$ es solución de (2.1).
En efecto, sea u una solución de (2.2). Por el Lema 2.3.1 existe una única solución $\varphi \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T))\cap\mathcal{C}^{\infty}(N\times(0,T))$ que satisface (2.10). Consideramos $F(x,t) = (x, u(x,t))$ y así $\tilde{F} = F\circ\varphi$.
Llamamos $\tilde{\nu}(x,t) := \nu(\varphi(x,t),t)$ y $\tilde{H}(x,t) := H(\varphi(x,t),t)$ a las cantidades geométri-

cas de $\tilde{F}$. Además notamos que

$$\tilde{F}(x,0) = (\varphi(x,0), u(\varphi(x,0),0)) = (x, u(x,0)) = (x,0) = F_0(x) \ ,$$

por tanto $\tilde{F}$ satisface la condición inicial.
Luego, por los calculos hechos al inicio de las secciones 2.2 y 2.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{F}(x,t) &= D_x F(\varphi,t)\frac{d\varphi}{dt}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi,t) = -D_x F (D_x F)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^T(\varphi,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi,t) \\
&= -\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^T(\varphi(x,t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(x,t),t) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \nu\right\rangle_g \nu(\varphi(x,t),t) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}\langle e_n, \nu\rangle_g \nu(\varphi(x,t),t) = \left(\frac{1}{H} - c\right)\nu(\varphi(x,t),t) \\
&= \left(\frac{1}{\tilde{H}} - c\right)\tilde{\nu}(x,t) \ .
\end{aligned}$$

Con esto mostramos que $\tilde{F}$ satisface (2.1) y notamos que la regularidad de $\tilde{F}$ viene dada por la regularidad de φ y u.
Por otro lado si $F \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T), N\times[-\varepsilon,\varepsilon]) \cap \mathcal{C}^\infty(N\times(0,T), N\times[-\varepsilon,\varepsilon])$ satisface (2.1) tenemos que por compacidad de N podemos describir el flujo implícitamente por las funciones u y ψ tal que

$$F(x,t) := (\psi(x,t), u(\psi(x,t),t)) \ .$$

Además, dada la regularidad de F tenemos que $\psi \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T), N) \cap \mathcal{C}^\infty(N\times(0,T), N)$ y por tanto $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T)) \cap \mathcal{C}^\infty(N\times(0,T))$.
Dada la condición inicial de F, tenemos que

$$(x,0) = F_0(x) = F(x,0) = (\psi(x,0), u(\psi(x,0),0)) \ ,$$

y por tanto $\psi(x,0) = x$ lo que implica que $u(x,0) = 0$.
Hasta el momento tenemos que se satisfacen las condiciones iniciales correctas.

Calculamos la evolución de u utilizando los resultados del Lema 2.1.5

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(\psi,t) &= \frac{du}{dt}(\psi,t) - D_i u(\psi,t)\left(\frac{d\psi}{dt}(x,t)\right)^i = \left(\frac{d}{dt}F(x,t)\right)^n - D_i u(\psi,t)\left(\frac{d}{dt}F(x,t)\right)^i \\ &= \left(\frac{1}{H}-c\right)\left(\nu^n - D_i u \nu^i\right)(\psi,t) = \left(\frac{1}{H}-c\right) v \left\langle v^{-1} g^{-1} \begin{pmatrix} -Du \\ 1 \end{pmatrix}, \nu \right\rangle_g (\psi,t) \\ &= \left(\frac{1}{H}-c\right) v(\psi,t)\ .\end{aligned}$$

Y como (2.9) es invariante bajo parametrizaciones tangenciales, tenemos que u (2.2). Notamos que por la unicidad de $u(x,t)$, ψ satisface (2.10) y en este caso $\psi=\varphi$. □

Terminamos esta sección con el resultado de existencia y unicidad por tiempo corto para (2.1).

Teorema 2.3.4 (Existencia por tiempo corto)**.** *Sean N una variedad cerrada suave, $(M,\overline{g})$ una variedad riemanniana suave y $F_0 : N \to M$ una inmersión de clase $\mathcal{C}^{2+\alpha}$. Entonces existe $T>0$ y una única solución $F \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T),M) \cap \mathcal{C}^{\infty}(N\times(0,T),M)$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = \left(\dfrac{1}{H(x,t)} - c\right)\nu(x,t), \ \ (x,t)\in N\times(0,T) \\ F(\cdot,0) = F_0\ . \end{cases}$$

Demostración. Por la observación (2.1.4) usaremos ϕ para identificar una vecindad tubular de $N_0 \subset M$ con $N\times[-\varepsilon,\varepsilon]$. Por tanto basta encontrar el mapa F entre $N\times[0,T)$ y $N\times[-\varepsilon,\varepsilon]$ que satisface (2.1).
Por la Proposición 2.2.11 existe solución única de (2.2)

$$u \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T)) \cap \mathcal{C}^{\infty}(N\times(0,T))\ .$$

Luego, por la Proposición 2.3.3 existe un único difeomorfismo

$$\varphi \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(N\times[0,T),N) \cap \mathcal{C}^{\infty}(N\times(0,T),N)\ ,$$

tal que el mapa F definido por

$$\begin{aligned} F : N \times [0,T] \to & N \times [-\varepsilon, \varepsilon] \\ (x,t) \to & F(x,t) := (\varphi(x,t), u\left(\varphi(x,t), t\right)) \ , \end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}\left(N \times [0,T), N \times [-\varepsilon, \varepsilon]\right) \cap \mathcal{C}^{\infty}\left(N \times (0,T), N \times [-\varepsilon, \varepsilon]\right)$ y satisface (2.1).
Supongamos que tenemos dos soluciones de (2.1), F_1 y F_2. Por la Proposición 2.3.3 existen difeomorfismo φ_1 y φ_2, y soluciones de (2.2) u_1 y u_2 tales que

$$F_1(x,t) = (\varphi_1(x,t), u_1\left(\varphi_1(x,t), t\right)), \quad F_2(x,t) = (\varphi_2(x,t), u_2\left(\varphi_2(x,t), t\right)) \ .$$

Pero por la Proposición 2.3.3 se tiene que $u_1 = u_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$, y por tanto $F_1 = F_2$. $\square$

2.4. Evolución de las cantidades geométricas

En la sección anterior demostramos que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = \left(\dfrac{1}{H(x,t)} - c\right)\nu(x,t), & (x,t) \in N \times (0,T). \\ F(\cdot, 0) = F_0. \end{cases}$$

siempre tiene solución única (salvo reparametrizaciones) $F : N \times [0,T) \to M$ si la curvatura media escalar H_0 de la superficie inicial $N_0 := F(N,0)$ es estricatamente positiva.

Observación 2.4.1. A lo largo de esta sección siempre supondremos que T es el tiempo maximal en donde la solución de (2.1) se mantiene suave. La discusión sobre exitencia y regularidad para $T = \infty$ la dejaremos para la última sección del capítulo.

Partiremos estudiando como evolucionan algunas de las cantidades geométricas de las hipersuperficies $N_t := F(N,t) \subset (M, \overline{g})$.

Observación 2.4.2. Apriori los cáculos que haremos a continuación son solo puntuales. En el caso en que resulten ser invarientes bajo reparametrizaciones los podemos tomar globales para N_t. Ejemplos de estos son contracciones y trazas con respecto

a la métrica inducida de las curvaturas extrínsecas. Por tanto en lo que sigue de la sección fijaremos (x_0, t_0) y tomaremos un sistema de coordenadas normales en $F_{t_0}(x_0) \in M$, pues las coordenadas de x_0 en N serán normales con respecto a la métrica inducida por F_t en el instante t_0. Denotaremos por x^i los coordenadas normales en (x_0, t_0) y todas las derivadas estaran evaluadas en (x_0, t_0).
La razón de esta elección es porque los cálculos se reducen bastante. En efecto, los simbolos de Christoffel con respecto a $(M, \overline{g})$ y $\left(N, \left(F_{t_0}^* \overline{g}\right)\right)$, $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(F_{t_0}(x_0))$ y $\Gamma^k_{ij}(x_0, t_0)$ respectivamente, son todos cero. Además las ecuaciones de Gauss y Weingarten se reducen a

$$\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i x^j} = -A_{ij}\nu^\alpha, \qquad \frac{\partial \nu^\alpha}{\partial x^i} = A^i_j \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \, .$$

El siguiente Lema es clásico en el contexto del álgebra lineal y nos ayudará para calcular como evoluciona la forma de volumen por el flujo.

Lema 2.4.3 (Formula de Jacobi)**.** *Dada una matriz de $n \times n$ simétrica definida positiva $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij}(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entonces*

$$\frac{d}{dt}\det(A) = Tr\left(A^* \frac{dA}{dt}\right) = \det(A)\, Tr\left(A^{-1}\frac{dA}{dt}\right) \, ,$$

donde $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{ij}$ *y A^* es la matriz adjunta de A.*

Demostración. Primero notamos que podemos escribir $\det(A) = a_{ik}a^*_{ki}$, donde $(a^*_{ik}) = A^*$ y la suma es sobre cualquier i-ésima columna.
Por otro lado, $\det(A)$ lo podemos pensar como una función polinomial evaluda en los coeficientes de A. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det(A) &= \frac{\partial a_{ik}a^*_{ki}}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt} = \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{ij}} a^*_{ki} + a_{ik}\frac{\partial a^*_{ki}}{\partial a_{ij}}\right)\frac{da_{ij}}{dt} \\ &= \left(\delta^k_j a^*_{ki} + a_{ik}\frac{\partial a^*_{ki}}{\partial a_{ij}}\right)\frac{da_{ij}}{dt} \, . \end{aligned}$$

Como por definición a^*_{ki} no posee el termino a_{ij} para todo i, tenemos que $\frac{\partial a^*_{ki}}{\partial a_{ij}} = 0$.

Por tanto, tenemos la formula $\dfrac{d}{dt}\det(A) = a^*_{ji}\dfrac{da_{ij}}{dt} = \mathrm{Tr}\left(A^*\dfrac{dA}{dt}\right)$. □

La siguiente proposición contiene la evolución de las cantidades geométricas que nos interesan para flujos por curvatura extríseca. Referimos al lector a [4] captítulo 2 para mayor discusión de estos flujos.

Proposición 2.4.4. *La evolución de algunas cantidades geométricas para flujos del tipo*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = f\nu(x,t), \ \ (x,t) \in N \times (0,T]. \\ F(\cdot,0) = F_0 \ , \end{cases} \tag{2.11}$$

donde $f(x,t)$ es la velocidad del flujo (2.11), son

1. *Evolución de la métrica y su inversa:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g_{ij} &= 2fA_{ij} \ , \\ \frac{\partial}{\partial t}g^{ij} &= -2fA^{ij} \ . \end{aligned}$$

2. *Evolución de la forma de área y el vector normal:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}d\mu_t &= fHd\mu_t \ , \\ \frac{\partial}{\partial t}\nu &= \nabla f \ . \end{aligned}$$

3. *Evoluciòm de la segunda forma fundamental y su contracción con respecto a g, la curvatura media escalar y la norma de la segunda forma fundametal:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}A_{ij} &= -\nabla_i\nabla_j f - f\left(-A_{ik}A^k_j + R_{Mi\nu j\nu}\right) \ , \\ \frac{\partial}{\partial t}A^j_i &= -\nabla_i\nabla^j f - f\left(A_{ik}A^{kj} + R_{Mi\nu^j\nu}\right) \ , \\ \frac{\partial}{\partial t}H &= -\Delta f - f\left(|A|^2 + Ric_M(\nu,\nu)\right) \ , \\ \frac{\partial}{\partial t}|A|^2 &= -2A^{ij}\nabla_i\nabla_j f - 2f\left(Tr\left(A^3\right) + g^{ij}R_{Mi\nu j\nu}\right) \ . \end{aligned}$$

Demostración. 1. Recordemos que la métrica en N_t es la métrica inducida por F, o sea $g_{ij} = \overline{g}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right)$. Luego la evolución se calcula facilmente pues es simétrica y no posee derivada covariante como tensor. Además como el corchete de lie entre $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial F}{\partial t}$ es 0, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right\rangle_{\overline{g}} = 2\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right\rangle_{\overline{g}} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right\rangle_{\overline{g}} - 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^j x^i}\right\rangle_{\overline{g}} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial x^i} f \underbrace{\left\langle \nu, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right\rangle_{\overline{g}}}_{=0} -2f\left\langle \nu, -A_{ij}\nu\right\rangle_{\overline{g}} = 2fA_{ij}\ .
\end{aligned}$$

La inversa de la métrica saldrá de diferenciar la relación $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$. En efecto

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}g^{ik}g_{kl} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial t}g_{kl} + g^{ik}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial t}g_{kl} + 2fg^{ik}A_{kl} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial t}g_{kl} + 2fA^i_l\ ,$$

tomando producto con g^{lj} en lo anterior, nos queda

$$0 = \frac{\partial g^{ik}}{\partial t}\delta^j_k + 2fg^{lj}A^i_l = \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} + 2fA^{ij}\ .$$

2. Recordemos que la forma de volumen de N_t viene dada por

$$d\mu_t = \sqrt{\det(g_{ij})}dx\ .$$

Por tanto, gracias a la formula de Jacobi, la evolución de la forma de volumen será

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t &= \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det(g_{ij})}dx = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial t}\det(g_{ij})dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\mathrm{Tr}\left(g^*_{il}\frac{\partial}{\partial t}g_{lj}\right)dx = \frac{f}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\mathrm{Tr}\left(\det(g_{ij})g^{il}A_{lj}\right)dx \\
&= f\mathrm{Tr}\left(A^i_j\right)\sqrt{\det(g_{ij})}dx = fHd\mu_t.
\end{aligned}$$

Ahora calcularemos la evolución del vector normal ν.
Como $\overline{g}(\nu,\nu)=1$ para todo punto, tenemos que cualquier derivada tiene que ser normal a ν. Por tanto las derivadas del vector normal son tangenciales a $F(N,t)$. Por tanto podemos representar $\dfrac{\partial\nu}{\partial t}$ como

$$\frac{\partial}{\partial t}\nu = g^{ij}\left\langle \frac{\partial\nu}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle \frac{\partial F}{\partial x^j}\ .$$

Ahora si diferenciamos $\overline{g}\left(\nu, \dfrac{\partial F}{\partial x^i}\right)=0$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{\partial\nu}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}} + \left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}} \\
&= \left\langle \frac{\partial\nu}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}} + \left\langle \nu, \frac{\partial f\nu}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}} \\
&= \left\langle \frac{\partial\nu}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}} + \frac{\partial}{\partial x^i} f\,\langle \nu,\nu\rangle_{\overline{g}} - f\underbrace{\left\langle \nu, \frac{\partial\nu}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}}}_{=0} \\
&= \left\langle \frac{\partial\nu}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle_{\overline{g}} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\ .
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial\nu}{\partial t} = -g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial x^j} = -\nabla f\ .$$

3. Notemos que por definición la segunda forma fundamental es

$$A_{ij} = -\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}}\frac{\partial F}{\partial x^j}, \nu\right\rangle_{\overline{g}}\ .$$

Al diferenciar esta expresión tenemos

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = -\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}}\frac{\partial F}{\partial x^j}\right), \nu\right\rangle_{\overline{g}} - \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}}\frac{\partial F}{\partial x^j}, \frac{\partial\nu}{\partial t}\right\rangle_{\overline{g}}\ .$$

Ahora usamos que en coordenadas normales los simbolos Christoffel son todos cero y por tanto $\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \dfrac{\partial F}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \dfrac{\partial F}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i x^j}$. Luego, como $\dfrac{\partial \nu}{\partial t}$ es tangencial y $\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \dfrac{\partial F}{\partial x^j}$ es normal, nos queda

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} &= -\left\langle f \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^j}, \nu \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -f \left\langle R_M \left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right) \frac{\partial F}{\partial x^j} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \overline{\nabla}_\nu \frac{\partial F}{\partial x^j}, \nu \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -f \left\langle R_M \left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^i}\right) \frac{\partial F}{\partial x^j}, \nu \right\rangle_{\overline{g}} - \left\langle \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nu, f\nu \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -f R_{M \frac{\partial F}{\partial x^i} \nu \frac{\partial F}{\partial x^j} \nu} - \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} f + f \left\langle \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nu, \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \nu \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -f R_{M \frac{\partial F}{\partial x^i} \nu \frac{\partial F}{\partial x^j} \nu} - \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} f + f \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x^j}, \frac{\partial \nu}{\partial x^i} \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -f R_{M \frac{\partial F}{\partial x^i} \nu \frac{\partial F}{\partial x^j} \nu} - \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} f + f \left\langle A_k^j \frac{\partial F}{\partial x^k}, A_l^i \frac{\partial F}{\partial x^l} \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -f R_{M \frac{\partial F}{\partial x^i} \nu \frac{\partial F}{\partial x^j} \nu} - \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} f + f g_{kl} A_k^j A_l^i \\
&= -f R_{M \frac{\partial F}{\partial x^i} \nu \frac{\partial F}{\partial x^j} \nu} - \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} f + f A_{ik} A_j^k \,.
\end{aligned}
$$

Para la evolución de la contracción de la segunda forma fundamental recordamos que $A_i^j = g^{jk} A_{ik}$, luego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_i^j}{\partial t} &= \frac{\partial g^{jk}}{\partial t} A_{ik} + g^{jk} \frac{\partial A_{ik}}{\partial t} \\
&= -2f A^{jk} A_{ik} + g^{jk} \left(-\nabla_i \nabla_k f - f \left(-A_{il} A_k^l + R_{Mi\nu k\nu}\right)\right) \\
&= -\nabla_i \nabla^j f - f \left(R^j_{M\nu i\nu} + A_{ik} A^{jk}\right) \,.
\end{aligned}
$$

La evolución de la curvatura media escalar viene de tomar traza de esta última ecuación,

$$
\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial A_i^i}{\partial t} = -\Delta f - f \left(A_{ik} A^{ik} + R^i_{M\nu i\nu}\right) = -\Delta f - f \left(\left|A^2\right| + \mathrm{Ric}_M(\nu, \nu)\right) \,.
$$

Finalmente, la evolución de la norma de la segunda forma fundamental viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = \frac{\partial A_i^j A_j^i}{\partial t} &= 2A_j^i \left(\frac{\partial A_i^j}{\partial t}\right) \\
&= 2A_j^i \left(-g^{jk}\nabla_i\nabla_k f - f\left(g^{jk}R_{Mi\nu k\nu} + A_{ik}A^{jk}\right)\right) \\
&= -2\left(A^{ik}\nabla_i\nabla_k f + f\left(A^{ik}R_{Mi\nu k\nu} + A_j^i A_{ik}A^{jk}\right)\right) \\
&= -2\left(A^{ik}\nabla_i\nabla_k f + f\left(A^{ik}R_{Mi\nu k\nu} + A_j^i A_i^k A_k^j\right)\right) \\
&= -2\left(A^{ik}\nabla_i\nabla_k f + f\left(A^{ik}R_{Mi\nu k\nu} + \mathrm{Tr}(A^3)\right)\right) \,.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.4.5. *Algunas de las ecuaciones de evolución para el flujo (2.1):*

1. *Variación del volumen:* $\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = (1 - cH)d\mu_t$.
2. *Variación de la curvatura media escalar:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &= -\Delta\frac{1}{H} - \left(\frac{1}{H} - c\right)\left(|A|^2 + Ric_M\nu, \nu\right) \\
&= \frac{\Delta H}{H^2} - 2\frac{|\nabla H|^2}{H^3} - \left(\frac{1}{H} - c\right)\left(|A|^2 + Ric_M(\nu,\nu)\right) \,.
\end{aligned}$$

Demostración. 1. Notamos que es trivial pues $f(x,t) = \left(\frac{1}{H(x,t)} - c\right)$.

2. Basta calcular $\Delta\frac{1}{H}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{H} &= \mathrm{div}_N\left(\nabla\frac{1}{H}\right) = \mathrm{div}_N\left(-\frac{1}{H^2}\nabla H\right) \\
&= -\nabla\frac{1}{H^2} - \frac{\mathrm{div}_N(\nabla H)}{H^2} = -\frac{\Delta H}{H^2} + \frac{2|\nabla H|^2}{H^3} \,.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.4.6. *Si la curvatura de Ricci de M satisface*

$$Ric_M(\nu,\nu) = 0 \,.$$

Entonces se cumplen las siguientes estimaciones:

1. *La velocidad del flujo* $f(x,t) := \left(\frac{1}{H} - c\right)$ *comparte el mismo signo de* $\left(\frac{1}{H_0} - c\right)$.
2. *Si* $f(x,0) > 0$*, entonces existe* $k \in \mathbb{R}$ *que solo depende* n, c *y* N *tal que*

$$e^{\frac{k}{n-1}t} \min_N H_0 \leq \min_{N_t} H \leq H \leq \max_{N_t} H \leq e^{\frac{k}{n-1}t} \max_N H_0 \, .$$

Demostración. 1. En este caso H satisface

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta \frac{1}{H} - \left(\frac{1}{H} - c\right) |A|^2 \, .$$

Por otro lado tenemos que si $\{\lambda_i\}$ son las curvaturas principales de N_t en M, entonces

$$|A|^2 = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 \geq \frac{1}{n-1} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})^2 = \frac{1}{n-1} H^2 \, .$$

Luego H satisface la inecuación diferencial

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq -\Delta \frac{1}{H} - (1 - cH) \frac{H}{n-1} \, . \tag{2.12}$$

Con esto podemos calcular la ecuación que satisface f,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{H} = -H^{-2} \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = -H^2 \left(-\Delta f - f |A|^2\right) \, .$$

Así f satisface la inecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} \geq H^{-2} \Delta f + \frac{f}{n-1} \, .$$

Supongamos que $f(x,0) > 0$ y que $f(x_t, t) = \min_{N_t} f(x,t) = 0$, en este caso tendremos que $\frac{\partial f}{\partial t}(x_t, t) \leq 0$. Pero por la inecuación que satisface f, tendríamos que $\Delta f \leq 0$ y por tanto no sería un mínimo local de f. Así por la continuidad de f, $f(x,t) \geq 0$. Análogamente si $f(x,0) < 0$, entonces $f(x,t) < 0$.

2. Si $f(x,0) > 0$, entonces por lo demostrado en la parte anterior $f(x,t) > 0$ y

por tanto $H^{-1} > c$.
Consideremos $g(x,t) = e^{\frac{k}{n-1}t}H^{-1}$ con $k \in \mathbb{R}$ por fijar. Notamos que $g > 0$.
Como H satisface (2.12), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{k}{n-1}g - e^{\frac{k}{n-1}t}H^{-2}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) \\
&\geq \frac{k}{n-1}g + e^{\frac{k}{n-1}t}H^{-2}\left(\Delta\frac{1}{H} + (1-cH)\frac{H}{n-1}\right) \\
&= \frac{k}{n-1}g + H^{-2}\Delta g + (1-cH)\frac{g}{n-1} \\
&\geq H^{-2}\Delta g + g\left(\frac{k+1-c(n-1)\,||H||_{\mathcal{C}(N\times[0,T])}}{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Escogemos $k := -\left(1 - c(n-1)\,||H||_{\mathcal{C}(N\times[0,T])}\right)$. Como $H^{-2} > c^2$ tenemos que g es super solución del problema uniformemente parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - H^{-2}\Delta u = 0\,.$$

Luego, tenemos el principio del mínimo para g,

$$\min_{N_t} g(x,t) \geq \min_{N_0} g(x,0) = \min_{N}\frac{1}{H_0}\,.$$

Por tanto,

$$\max_{N_t} H \leq e^{\frac{k}{n-1}t}\max_{N} H_0\,.$$

De la misma forma si reemplazamos $g(x,t)$ por $-g(x,t)$ tendremos

$$\min_{N_t} H \geq e^{\frac{k}{n-1}t}\min_{N} H_0\,.$$

□

Observación 2.4.7. Bajo las hipótesis del Corolario 4.6 tenemos dos fenómenos interesantes del flujo (2.1). Si $\left(\frac{1}{H_0} - c\right) > 0$ (< 0) el área de la evolución de la hipersuperficies N_t se incrementará (disminuirá) en función del tiempo.

En efecto, si $\left(\frac{1}{H_0} - c\right) > 0\ (< 0)$ entonces por el Corolario 4.6 $\left(\frac{1}{H} - c\right) > 0\ (< 0)$. Luego, por el Corolario 4.5, tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial t} |N_t| = \int_{N_t} \frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = \int_{N_t} \underbrace{(1 - cH)}_{>0\,(<0)} d\mu_t > 0\ (< 0)\ .$$

Por tanto $|N_t|$ es una función creciente (decreciente) en t.
Vale la pena recordar que en los puntos en que $\left(\frac{1}{H_0} - c\right) = 0$ el flujo es contante y por tanto el área satisface $|N_t| = |N|$.

2.5. Soluciones Auto Similares

En esta sección estudiaremos el flujo (2.1) de hipersuperficies en $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Los ejemplos más sencillos del flujo son los que mantienen su forma a lo largo que el flujo exista, estos son llamados soluciones auto similares del flujo.

Definición 2.5.1. Una familia de un parámetro de hipersuperficies $(N_t)_{t\geq 0}$ se dice auto similar si para cada t, N_t es una rotación, traslación, dilatación o contracción de la hipersuperficie inicial N_0.
Formalmente, si F_0 es la parametrización de $N_0 = F_0(N)$ en $\mathbb{R}^n$ entonces la familia de un parámetro de hipersuperficies está parametrizada por $(F_t)_{t\geq 0} : N \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x,t) = \lambda(t) O(t) F(x) + w(t)\ , \tag{2.13}$$

donde $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$, $O : [0,T] \to SO(n)$ y $w : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ son funciones suaves tal que $\lambda(0) = 1$, $O(0) = Id$ y $w(0) = 0$.

Observación 2.5.2. Por lo discutido en la sección 2.3, sabemos que $(F_t)_{t\geq 0}$ satisfacerá (2.1) (salvo por difeomorfismos tangenciales) si, y solo si, para todo $x \in N$ y $t \in [0,T]$ se satisface

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}(x,t), \nu(x,t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{1}{H(x,t)} - c \right)\ . \tag{2.14}$$

Por otro lado podemos calcular el vector normal y la curvatura media escalar de N_t a partir de N_0 dado que F_t satisface (2.13). En efecto, el normal viene dado por $\nu(x,t) = O(t)\nu(x)$ pues

$$\left\langle \frac{\partial F_t}{\partial x^i}(x), O(t)\nu(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda(t) \left\langle O(t)\frac{\partial F}{\partial x^i}, O\nu \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda(t) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \nu \right\rangle = 0\,.$$

En este caso la métrica en N_t viene dada por la relación $g_t = \lambda^2 g$ y la segunda forma fundamental $A_t = \lambda A$. Por tanto la curvatura media escalar viene dada por

$$H_t(x) = \operatorname{Tr}\left(g_t^{-1}A_t\right) = \operatorname{Tr}\left(\lambda^{-2}g^{-1}\lambda A\right) = \lambda^{-1}H(x)\,.$$

Con esto (2.14) es equivalente a

$$\begin{aligned} \lambda'(t)\left\langle F(x),\nu(x)\right\rangle + \lambda(t)\left\langle O^*(t)O'(t)F(x),\nu(x)\right\rangle + \left\langle O^*(t)w'(t),\nu(x)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ = \left(\frac{\lambda(t)}{H(x)} - c\right) \end{aligned}$$

y evaluando esta ecuación en $t = 0$ nos queda la relación que debe satisfacer N_0 para ser solución auto similar del flujo (2.1)

$$b\left\langle F,\nu\right\rangle + \left\langle CF,\nu\right\rangle + \left\langle a,\nu\right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{1}{H} - c\right)\,, \tag{2.15}$$

donde $b = \lambda'(0)$, $C = O'(0)$ es anti simétrica y $a = w'(0)$.

Ahora mostraremos que la ecuación (2.15) es suficiente para que exista una solución auto similar del flujo (2.1).

Proposición 2.5.3. *Si N_0 satisface (2.15), entonces F_t es solución de (2.1).*

Demostración. Tenemos que N_0 satisface,

$$b\left\langle F,\nu\right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle CF,\nu\right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle a,\nu\right\rangle = \frac{1}{H} - c\,.$$

Entonces F_t satisfacerá (2.1) si, y solo si, se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} b\dfrac{d\lambda}{dt}(t) = \lambda(t) - c\,, \\ \lambda(t)O^t(t)\dfrac{dO}{dt}(t) = C\,, \\ O^t(t)w'(t) = a\,. \end{cases}$$

Si imponemos la condición que las traslaciones y las rotaciones esten en direcciones ortogonales, $Ca = 0$. Tendremos que las soluciones del sistema anterior son

$$\lambda(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{b}}\,(1-c) + c,\ b \neq 0 \\ c,\ b = 0\,. \end{cases}$$
$$O(t) = \begin{cases} \exp C\sqrt{\frac{2t}{c} - \frac{2b}{c}\ln\left(e^{\frac{t}{b}}(1-c)+c\right)},\ c > 0, b \neq 0 \\ \exp(-2b\left(e^{\frac{-t}{2b}} - 1\right)C),\ c = 0, b \neq 0 \\ \exp(ctC),\ b = 0\,. \end{cases}$$
$$w(t) = ta\,.$$

□

Observación 2.5.4. Con la observación 2.5.2 y la Proposición 2.5.3 tenemos una descripción total de las soluciones auto similares del flujo (2.1).
En efecto, si trasladamos N_0 en v entonces la nueva hipersuperficies $\tilde{N}_0$ satisfacerá

$$b\left\langle \tilde{F}, \tilde{\nu}\right\rangle + \left\langle C\tilde{F}, \tilde{\nu}\right\rangle + \langle a - (C + bI)\, v, \tilde{\nu}\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{1}{\tilde{H}} - c\right)\,.$$

Por otro lado, como C es una matriz anti simétrica, no posee valores propios reales distintos de 0 y $\ker A = (\mathrm{Im}A)^{\perp}$. Entonces podemos hace la siguiente elección de v:

1. Si $b \neq 0$, escogemos v como la única solución de $(A + bI)\, v = a$. Entonces $\tilde{N}_0$ satisface (2.15) sin termino de traslación. Por tanto N_0 se dilata con tasa $\lambda(t)$ dada por la Proposición 2.5.3 y rota alrededor de v.

2. Si $b = 0$, escogemos v tal que $a = Cv + a_0$ con $Ca_0 = 0$. Entonces $\tilde{N}_0$ satisface

(2.15) sin termino de dilatación. Por tanto N_0 se traslada y rota alrededeor de v.

Ejemplo 2.5.5 (Evolución de la Esfera). Consideramos $N = S^{n-1}(r_0)$ la esfera de radio r_0. Usamos la familia $F(x,t) = r(t)x$ con $|x| = 1$ y $r(0) = r_0$ para parametrizar la evolución.
Entonces, como la curvatura media escalar de la esfera S^{n-1} es $H(x) = n-1$, por (**??**) la evolución se reduce a resolver

$$\begin{cases} r'(t) = \dfrac{r(t)}{n-1} - c \\ r(0) = r_0 \,. \end{cases}$$

La solución de esta EDO es

$$\begin{aligned} r(t) &= (r_0 - c(n-1))\, e^{\frac{t}{n-1}} - c(n-1) \\ &= (n-1)\left[\left(\frac{1}{H_0} - c\right) e^{\frac{t}{n-1}} - c\right] . \end{aligned}$$

Observación 2.5.6. Del ejemplo podemos observar dos fenómenos

1. Si la velocidad inicial $\left(\dfrac{1}{H_0} - c\right) > 0$ y $r_0 > 2c(n-1)$ entonces el flujo existe para todo $t \in \mathbb{R}$ y la evolución son esferas que se dilatan.

2. Si $\left(\dfrac{1}{H_0} - c\right) < 0$ tendremos que la evolución serán esferas que se coomprimen hasta el tiempo $T = \ln\left(\sqrt[n-1]{\frac{c(n-1)}{c(n-1)-r_0}}\right)$ que es cuando çolapsa.ª un punto.

Ejemplo 2.5.7 (Evolución del Cilindro). Consideramos un cilindro esférico $N = S^{n-k}(r_0) \times \mathbb{R}^k$ con $r_0 > 0$. Al igual que en el ejemplo anterior usamos la familia $F((x,y),t) = (r(t)x, y)$ con $(x,y) \in S^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ y $r(0) = r_0$ para parametrizar la evolución.
Entonces, como la curvatura media escalar de la esfera $S^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ es $H(x) = n-k$,

por (**??**) la evolución se reduce a resolver

$$\begin{cases} r'(t) = \dfrac{r(t)}{n-k} - c \\ r(0) = r_0 \, . \end{cases}$$

La solución de esta EDO es

$$\begin{aligned} r(t) &= (r_0 - c(n-k))\, e^{\frac{t}{n-k}} - c(n-k) \\ &= (n-1)\left[\left(\frac{1}{H_0} - c\right) e^{\frac{t}{n-k}} - c\right] . \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.8 (Evolución del Toro de revolución)*.* Se conoce la existencia de soluciones auto similares de un toro de revoluciones bajo el flujo de curvatura media [SA]. En este caso la dona converge a un círculo si F_0 es un encage.
Por tanto podríamos esperar que para el flujo por curvatura media inversa ($c = 0$) suceda el fenómeno inverso. Partir con un toro parecido a un aro, para que la curvatura media sea positiva.
Notamos que van a haber puntos de las hipersuperficies de evolución en que la curvatura media escalar se anule, por el principio del maximo que satisface H. Con esto la evolución será un aro que engorda hasta la auto intersecatarse.
En el caso del flujo (2.1) habría que ver cuanto afecta la constante c bajo el trabajo de [SA].

Ejemplo 2.5.9 (Evolución de dos Esferas)*.* Consideremos $N_0 = \partial B(x_0, r_0) \cap \partial B(x_1, r_1) \subset \mathbb{R}^n$, donde $|x_0 - x_1| = d > 0$ y $c < \text{mín}\{r_0, r_1\}$. Con esto la evolución de N_0 será $N_t = \partial B(x_0, r_0(t)) \cap \partial B(x_1, r_1(t))$, donde

$$r_i(t) = (n-1)\left[\left(\frac{r_i}{n-1} - c\right) e^{\frac{t}{n-1}} - c\right],\ i = 1, 2 \, .$$

Por simple inspección y dado que $c < \text{mín}\{r_0, r_1\}$ tendremos que cada esfera se dilata hasta el tiempo $T = \ln\left(\sqrt[n-1]{\frac{d}{|r_0 - r_1|}}\right)$ que es justo cuando las esferas se tocan entre sí.

Observación 2.5.10. Con estos ejemplos podemos esperar que el flujo necesite de condiciones extras para que exista para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Por lo visto en la esfera la necesidad de convexidad pareciera ser necesaría.

2.6. Resultados de Convexidad

En esta sección mostraremos los resultados conocidos sobre el flujo de curvatura media inversa con termino forzado dado por la familia $F_t : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, con F_t satisfaciendo (2.1).

Definición 2.6.1. Una inmersión $\mathcal{C}^2$, $F_0 : N \to (M, \overline{g})$, de una variedad suave a una variedad riemanniana se dice estrictamente convexa si las curvaturas principales son estrictamente positivas para todo punto.

Observación 2.6.2. Es bien sabido que en este caso hay una parametrización dada por el mapeo de Gauss $\nu^{-1} : S^{n-1} \to N_0$. En efecto, como las curvaturas principales son los valores propios de la matriz dada por las derivadas covariantes del mapeo de Gauss, tenemos que ν es no singular en N_0 y por tanto un difeomorfismo.

De ahora en adelante mostraremos los resultado recopilatorios de [YL].

Definición 2.6.3. Definimos la función soporte de N_t dada por $s_t(x) := \langle x, F_t\left(\nu^{-1}(x)\right)\rangle_{\mathbb{R}^n}$ con $x \in S^{n-1}$.

Proposición 2.6.4. *F_t satisface (2.1) si, y solo si, la función soporte satisface*

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{H(s)} - c\,, \tag{2.16}$$

donde H, como función de s, es la curvatura media de N_t.

Lema 2.6.5. *Si N_0 es una hipersuperficie estrictamente convexa entonces existe un tiempo maximal $T \in (0, \infty]$ tal que el flujo (2.1) admite una solución suave en $[0, T)$.*

De hecho un podemos demostrar un poco más sobre la evolución.

Teorema 2.6.6 (Y. Liu). *Si N_0 es estrictamente convexa entonces para cada $t \in [0, T)$, N_t es estrictamente convexa.*

Y por ultimo el Teorema de Clasificación de Hipersuperficies extrictamente convexas bajo la evolución del flujo (2.1) probado en [YL].

Teorema 2.6.7 (Y. Liu)**.** *Suponga que N_0 es un hipersuperficies estrictamente convexa. Entonces tenemos dos fenómenos para el flujo (2.1).*

1. *Si $\dfrac{1}{H_0} > c$ en N. Entonces F_t es una solución auto similar del flujo que se dilatará. Y bajo la reparametrización dada por $\tilde{N}_t = e^{\frac{-t}{n}} N_t$, se tendrá que $\tilde{N}_t$ convergerá en la topología $\mathcal{C}^\infty$ en una esfera.*

2. *Si $\dfrac{1}{H_0} < c$ en N. Entonces el flujo (2.1) contraerá la evolución a un punto en tiempo finito.*

Capítulo 3

Caso Débil

3.1. Descripción por Conjuntos de Nivel

En el capítulo anterior se mostró en la Proposición 3.3 que la evolución de una variedad cerrada $N_0 = F_0(N)$ inmersa en una variedad riemanniana $(M, \overline{g})$ por el flujo (2.1) es equivalente a entender el flujo cuando viene dada por el gráfico de una función escalar, esto es $F_t(x) = x + u(x,t)\nu_0$ con $u : N \times [0,T) \to \mathbb{R}$ y ν_0 el vector normal unitario de N_0.

Por otro lado, se puede demostrar que cuando el flujo viene dado por la evolución de conjuntos de nivel es equivalente (salvo reparametrizaciones) a la evolución de la familia de inmersiones del flujo (2.1). Esta afirmación utiliza el Teorema de la Función Implícita y los resultados de la sección 2 del Capítulo 1, pero no se dará mayor información al respecto.

De todas formas, la descripción del flujo por conjuntos de nivel si es relevante por los trabajos de Huisken e Ilamaen [HI1], y recientemente por Streets [JS] para flujos del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) = \dfrac{\nu}{f(H)}(x,t), \;\; (x,t) \in N \times [0,T) \\ F(\cdot, 0) = F_0\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

con $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Como nuestro interés es dar una versión variacional del flujo (2.1) y extender los resultados de Liu[11], trabajaremos con la variedad base $M = \mathbb{R}^n$

con métrica euclideanda por comodidad.

Definición 3.1.1. De ahora en adelante describiremos el flujo (2.1) como (3.1) donde la función a considerar es

$$f(x) := \frac{x}{1-cx}, \;\; c > 0 \,.$$

Tambien para la descripción que haremos en las proximas secciones nos interezará su función inversa $g(x) := f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+cx}$.

Partiremos estudiando la evolución de conjuntos de nivel por el flujo (3.1). Foralmente, consideramos los conjuntos de nivel

$$N_t := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; w(x,t) = 0\} \;,$$

dados por $w : N \times [0,T) \to \mathbb{R}$ donde la variable x se identifica con la curva $F(x,t)$ y F la inmersión (3.1). Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, si tomamos la derivada total con respecto a la variable t se obtendrá que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} w(x,t) = 0 \\
\Rightarrow &\frac{\partial w}{\partial t} + Dw\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0 \\
\Rightarrow &\frac{\partial w}{\partial t} + \left\langle \nabla w, \frac{dF}{dt}\right\rangle = 0 \\
\Rightarrow &\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{f(H)}\left\langle \nabla w, \nu\right\rangle = 0 \,.
\end{aligned}$$

Notar que el vector normal unitario exterior de N_t y la curtura media escalar vienen dados por $\nu = \dfrac{\nabla w}{|\nabla w|}$ y $H = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(\nu)$ respectivamente. Por tanto obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{|\nabla w|}{f(H)} = 0 \,. \tag{3.2}$$

Ahora, como el flujo (3.2) solo tiene sentido cuando $H > 0$, podemos considerar el siguiente problema elíptico asociado al problema parabólico (3.2).

Lema 3.1.2. *Si F satisface (3.1) y el flujo está dado por los conjuntos de nivel $N_t = \partial \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u(x) < t\}$ con $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces u satisface la ecuación quasi-lineal elíptica*

$$\begin{cases} |\nabla u| = f\left(div_{\mathbb{R}^n}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right), & en\ M \setminus \overline{E_0} \\ u = 0, & en\ \partial E_0\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

donde $E_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u(x) < 0\}$ si $H(x,t) > 0$ para $x \in N_t$.

Demostración. Consideremos $w(x,t) = u(x) - t$, entonces la condición inicial satisface $N_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, w(x,0) = 0\} = \partial E_0$. Además tenemos los siguientes cálculos,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -1,\ \nabla_{\mathbb{R}^n} w = \nabla u,\ H = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \Rightarrow \frac{1}{f(H)}\,|\nabla w| = \frac{\partial w}{\partial t} \Leftrightarrow |\nabla u| = f(H)\,.$$

Ahora mostraremos que en los puntos donde $\nabla u \neq 0$ la ecuación linearizada de (3.3) es elíptica. En efecto, sea $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ una variación de u con $u_0 = u$ y $\left.\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[f\left(\operatorname{div}_M\left(\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}\right)\right) - |\nabla u_\varepsilon|\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = f'(H)\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\operatorname{div}_M\left(\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\,|\nabla u_\varepsilon|\Bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Notamos que para los puntos $x \in N_t$ se tendrá que

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\,|\nabla u_\varepsilon|\Bigg|_{\varepsilon=0} = \left\langle \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla v\right\rangle = 0\,.$$

Calculando el termino que acompaña a $f'(H)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left\langle \nabla\frac{1}{|\nabla u_\varepsilon|}, \nabla u_\varepsilon\right\rangle + \frac{1}{|\nabla u_\varepsilon|}\Delta u_\varepsilon\Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \left\langle \nabla\frac{1}{|\nabla u|}, \nabla v\right\rangle + \frac{1}{|\nabla u|}\Delta v + \text{ terminos de primer orden en } v \\ &= \operatorname{div}_M\left(\frac{\nabla v}{|\nabla u|}\right) + \text{ t.p.o. en } v\,. \end{aligned}$$

Así, en los puntos done $\nabla u \neq 0$, se tendrá que

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[f\left(\operatorname{div}_M\left(\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}\right)\right)-|\nabla u_\varepsilon|\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = f'(H)\operatorname{div}_M\left(\frac{\nabla v}{|\nabla u|}\right) + \text{ t.p.o. en } v\,.$$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{(1-cx)^2} > 0$, la ecuación linearizada de (3.3) es elíptica y por tanto la ecuación (3.3) es quasi-lineal elíptica. □

Observación 3.1.3.

1. Notemos que no toda solución del flujo se puede escribir de la forma $N_t := \{w(x,t) = 0\}$ con $w(x,t) = u(x) - t$. Ahora bien, si se cumple que $H > 0$ para todo $x \in N_t$ y $t \in [0, T)$, se puede demostrar que el problema parabólico (3.2) posee unicidad geométrica.
   Esto es, si el conjunto de nivel inicial $\{w(x,t) = 0\}$ coincide con la hipersuperficie de $\{u(x) = 0\}$ donde u satisface (3.3) entonces la evolución como conjunto será la misma independientemente que w no se pueda escribir de a forma $u - t$. Para mayor información se recomienda al lector revisar el trabajo de Evans y Spruck ([16], capt. 7) para el flujo de curvatura media por conjuntos de nivel.

2. No daremos la demotración de existencia y unicidad del flujo (3.3), pero si recalcamos el usó de que $H > 0$. En efecto, como u satisface (3.3), en los puntos donde $H = 0$ se tiene que u es constante. Así $\partial\{u < t\}$ no coincide con $\{u = t\}$. Más encima, en los puntos donde $|\nabla u| > 0$, se tiene que

$$\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{-1}{|\nabla u|^3}D^i u D^j u D_{ij}u + \frac{\delta^i_j D_{ij}u}{|\nabla u|} = a^{ij}(Du)D_{ij}u\,,$$
$$a^{ij}(v) = \frac{1}{|v|}\left(\delta^i_j - \frac{v^i v^j}{|v|^2}\right),\ v \in \mathbb{R}^n\,.$$

   Pero desafortunadamente la matriz (a^{ij}) es degenerada, ya que el valor propio que va en la dirección de ∇u es 0. Por tanto no podemos esperar resultados razonables si H cambia de signo.

De ahora en adelante trabajaremos con la formulación $N_t := \partial\{u < t\}$ donde u satisface (3.3). La razón de esto es porque seguiremos con la adaptación del trabajo de Huisken e Ilmanen para el flujo de curvatura media inversa con termino forazdo. Recordemos que del capítulo anterior conocemos la evolución de una esfera en $\mathbb{R}^n$, como ejemplo daremos la evolución de una esfera según esta descripción.

Ejemplo 3.1.4. Sea $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| < 1\}$ la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$. Como ya conocemos su evolución, consideramos la función

$$u(x) = (n-1)\ln\left(\frac{|x| - c(n-1)}{1 - c(n-1)}\right),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x : \, |x| > 1\}\ .$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{n-1}{|x| - c(n-1)}\frac{x}{|x|},\ \ \mathrm{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \mathrm{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{n-1}{|x|} \text{ y} \\ |\nabla u| &= \frac{n-1}{|x| - c(n-1)} = f(H) = \frac{n-1}{|x| - c(n-1)}\ . \end{aligned}$$

Luego la evolución de $N_0 = \partial E_0$ vendrá dada por los conjuntos de nivel

$$\begin{aligned} N_t : &= \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, u(x) = t\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| = (1 - c(n-1))e^{\frac{t+s}{n-1}} + c(n-1)\right\} \\ &= \partial B(0, (1 - c(n-1))e^{\frac{t}{n-1}} + c(n-1)). \end{aligned}$$

3.2. Formulación Variacional

En [3] y [12] se propuso una descripción variacional de flujos del tipo curvatura media inversa. Por tanto nuestro interés será replicar dicha formulación para el flujo de curvatura media inversa con termino forzado (3.3).

Definición 3.2.1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Se define el funcional $J_u : \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$J_u(v) := J_u^K(v) = \int\limits_K |\nabla v| + vg(|\nabla u|)dx\ , \tag{3.4}$$

donde $K \subset \Omega$ es cualquier compacto tal que $\{u \neq v\} \subset K$ y $|\partial K| = 0$.

Observación 3.2.2. 1. Pedimos que $u, v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ pues necesitamos la existecia c.t.p de los gradientes de u, v ([13], capt. 3) para que el funcional J_u tenga sentido.

2. La dependencia del conjunto K no se hará explicita en el funcional J_u, pues basta cualquier compacto que cumpla las condiciones: $\{u \neq v\}$ sea precompacto en K y $|\partial K| = 0$.

3. Recalcamos que sin la condición $|\partial K| = 0$ del conjunto K, no podemos asegurar la convergencia débil de medidas de radon y por tanto resultados de convergencia para el funcional J_u.

Observación 3.2.3. El funcional J_u aparece como el funcional de Euler-Lagrange de la ecuación

$$g(|\nabla u|) = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right) \text{ o bien } |\nabla u| = f\left(\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right)\right) .$$

En efecto, si se considera una variación $(v_s)_{s\geq 0} \subset \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ de $v_0 = v$ con $w = \left.\frac{d}{ds} v_s\right|_{s=0} \in \mathcal{C}^{\infty}_c(\Omega)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds} J_u(v_s)\right|_{s=0} &= \int_K \left.\frac{d}{ds}\left(|\nabla v_s| + v_s g(|\nabla u|)\right)\right|_{s=0} dx \\
&= \int_K \left\langle \frac{\nabla v}{|\nabla v|}, \nabla w \right\rangle + w g(|\nabla u|) dx \\
&= \underbrace{\int_K \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{w \nabla v}{|\nabla v|}\right) dx}_{(*)} + \int_K w \left(-\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right) + g(|\nabla u|)\right) dx ,
\end{aligned}$$

pero $(*)$ es 0 por el teorema de la divergencia y que $|\partial K| = 0$. Luego, si v es un punto crítico de J_u, entonces $\left.\frac{d}{ds} J_u(v_s)\right|_{s=0} = 0$. Por tanto, para casi todo punto $x \in \Omega$, se tendrá

$$-\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right) + g(|\nabla u|) = 0 .$$

Lema 3.2.4. *El funcional J_u es semicontinuo inferior con respecto a la convergencia L^1_{loc} en $\mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Más aún si $v, w \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ son tales que el conjunto $\{v \neq w\}$ es precompacto, entonces*

$$J_u\left(\text{mín}(v,w)\right) + J_u\left(\text{máx}(v,w)\right) = J_u\left(v\right) + J_u\left(w\right).$$

Demostración. Sea $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y K un compacto que contenga precompactamente a $\{u \neq v\}$ tal que $|\partial K| = 0$. Notamos que el funcional se descompone en

$$J_u(v) = \underbrace{\int\limits_K |\nabla v|\, dx}_{(1)} + \underbrace{\int\limits_K vg\left(|\nabla u|\right) dx}_{(2)},$$

donde los funcionales (1) y (2) son semicontinuo inferior y continuo con respecto a la convergencia L^1_{loc} respectivamente. En efecto, la semicontinuidad inferior de (1) es conocida (Teorema 1 sección 5.2.1, [13]) por la condición $|\partial K| = 0$. Mientras que la continuidad de (2) viene dada por la desigualdad

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{x}{1+cx} &\leq x,\ c > 0 \\ \Rightarrow |g(|\nabla u|)| &\leq |\nabla u| \leq ||\nabla u||_\infty = \text{Lip}\left(u\right). \\ \Rightarrow \int\limits_K vg(|\nabla u|)dx &\leq \text{Lip}\left(u\right) ||v\chi_{K}||_{L^1}. \end{aligned}$$

Luego, para una sucesión $(v_n)_n \subset \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ que converge a $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ en L^1_{loc}, se tendrá que

$$\begin{aligned} J_u(v) = \int\limits_K |\nabla v| + vg(|\nabla u|)dx &= \int\limits_{\mathring{K}} |\nabla v| + vg(|\nabla u|)dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathring{K}} |\nabla v_n| + v_n g(|\nabla u|)dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_K |\nabla v_n|\, dx = \liminf_{n\to\infty} J_u(v_n). \end{aligned}$$

Por tanto J_u es semicontinuo inferior con la convergencia L^1_{loc}. Ahora, sean $v, w \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ tales que $\{v \neq w\}$ es precompacto.
Entonces por el Teorema 4 de la sección 4.2.2 de [13], tenemos que para

$$\text{máx}(v, w) = v + (w - v)_+ \ \text{ y } \ \text{mín}(v, w) = w - (w - v)_+ \,,$$

se cumple que

$$\nabla\, \text{máx}(v, w) = \nabla v + \begin{cases} \nabla(w - v), & \text{c.t.p } x \in \{w > v\} \\ 0, & \text{c.t.p } x \in \{w \leq v\} \end{cases} = \begin{cases} \nabla w, & \text{c.t.p } x \in \{w > v\} \\ \nabla v, & \text{c.t.p } x \in \{w \leq v\} \end{cases}$$

$$\nabla\, \text{mín}(v, w) = \nabla w - \begin{cases} \nabla(w - v), & \text{c.t.p } x \in \{w > v\} \\ 0, & \text{c.t.p } x \in \{w \leq v\} \end{cases} = \begin{cases} \nabla v, & \text{c.t.p } x \in \{w > v\} \\ \nabla w, & \text{c.t.p } x \in \{w \leq v\} \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} J_u(\text{mín}(v, w)) + J_u(\text{máx}(v, w)) &= \int_K |\nabla\, \text{máx}(v, w)| + |\nabla\, \text{mín}(v, w)| \\ &\quad + (\text{mín}(v, w) + \text{máx}(v, w))\, g\,(|\nabla u|)\, dx \\ &= \int_K (|\nabla v| + |\nabla w|) \underbrace{\left(\chi_{\{w \leq v\}} + \chi_{\{w > v\}}\right)}_{=1} + (v + w) g(|\nabla u|) dx. \\ &= J_u(v) + J_u(w)\,. \end{aligned}$$

Yse concluye el resultado. □

Definición 3.2.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

1. La función $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es una subsolución débil de (3.3) en Ω si se cumple que

$$J_u(u) \leq J_u(v)\,, \forall v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega) \text{ con } \{u \neq v\} \subset\subset \Omega \tag{3.5}$$

   con $v \leq u$. La integración es sobre cualquier compacto K que contenga a $\{u \neq v\}$.

2. La función $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es una supersolución débil de (3.3) en Ω si se cumple

(3.5) con $v \geq u$. La integración es sobre cualquier compacto K que contenga a $\{u \neq v\}$.

3. La función $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es solución débil de (3.3) en Ω si es subsolución y supersolución débil de (3.3).

4. La función $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es solución débil de (3.3) con condición inicial $E_0 \subset \Omega$ si $E_0 := \{u < 0\}$ y u es solución débil de (3.3) en $\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{E_0}$.

Corolario 3.2.6. *La función $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es solución débil de (3.3) en Ω si, y solo si, se satisface (3.5).*

Demostración. Supongamos que que se satisface (3.5). Entonces como estamos minimizando para cualquier competidor $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$, en particular se tendrá para los competidores que cumplan $u \leq v$ o $v \geq u$. Así soluciones débiles de (3.3) son subsoluciones y supersoluciones débiles de (3.3).
Para la otra dirección, sea $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y un compacto K tal que $\{u \neq v\} \subset\subset K$. Luego, como u es subsolución y supersolución de (3.3) podemos usar los competidores $\min(u, v) \leq u \leq \max(u, v)$. Luego por el Lema 3.2.5 tenemos que

$$\begin{aligned} &J_u(u) \leq J_u\left(\min(u, v)\right),\ J_u(u) \leq J_u\left(\max(u, v)\right) \\ \Rightarrow &2J_u(u) \leq J_u(\max(u, v)) + J_u(\min(u, v)) = J_u(u) + J_u(v)\ , \end{aligned}$$

y por tanto $J_u(u) \leq J_u(v)$. □

3.3. Reformulación Isoperimétrica

En esta sección se volverán a adaptar los resultados de [3] y [12] para el flujo (3.1) con respecto al problema isoperimétrico asociado al flujo.

Observación 3.3.1. Recomendamos al lector revisar el Apéndice A sec. 2. para la definición y propiedades de conjuntos de Caccioppoli.

Partiremos definiendo un funcional para conjuntos de Caccioppoli que se relaciona con el perímetro en Ω más un termino de energía extra.

Definición 3.3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Definimos el funcional $\mathcal{J}_u : \mathcal{C}a(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{J}_u(F) := \mathcal{J}_u^K(F) = |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} g\left(|\nabla u|\right) dx \,, \tag{3.6}$$

donde K es un conjunto compacto tal que $|\partial^* F \cap \partial K| = 0$.

Lema 3.3.3. *El funcional $\mathcal{J}_u$ es semicontinuo inferior con respecto a la convergencia L^1_{loc}. Además si $E, F \in \mathcal{C}a(\Omega)$ tal que $E \Delta F \subset\subset \Omega$ entonces*

$$\mathcal{J}_u(F \cup E) + \mathcal{J}_u(F \cap E) \leq \mathcal{J}_u(F) + \mathcal{J}_u(E) \,.$$

Demostración. Procederemos de igual manera que en el Lema 3.2.4. Dado $F \in \mathcal{C}a(\Omega)$ notamos que el funcional se puede separar en un funcional semicontinu inferior más un funcional continuo,

$$\mathcal{J}_u(F) = \underbrace{|\partial^* F \cap K|}_{(1)} + \underbrace{\int\limits_{F \cap K} g(|\nabla u|) dx}_{(2)} \,.$$

Notamos que por el Lema 3.2.4 el funcional (2), $\chi_F \to \int\limits_K \chi_F g\left(|\nabla u|\right) dx$, es continuo con respecto a la convergencia L^1_{loc}.
Por otro lado, dado $A \subset \Omega$ un abierto acotado y una familia $(F_n)_n \subset \mathcal{C}a(\Omega)$ que converge a $F \in \mathcal{C}a(\Omega)$ en la topología L^1_{loc} (esto es $\chi_{F_n} \to \chi_F$ en L^1_{loc}). Como la aplicación $\chi_F \to ||\partial F||\,(A) = |\partial^* F \cap A|$ es semicontinuo inferior con respecto a la convergencia L^1_{loc} (Apendice A, A.14.), obtenemos que

$$|\partial^* F \cap K| = \left|\partial^* F \cap \mathring{K}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \left|\partial^* F_n \cap \mathring{K}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |\partial^* F_n \cap K| \,,$$

si K es compacto y $|\partial^* F \cap \partial K| = 0$. Así el funcional (1) es semicontinuo inferior con respecto a la convergencia L^1_{loc} y por tanto el funcional $\mathcal{J}_u$ es smicontinuo inferior con respecto a la convergencia L^1_{loc}.
Ahora sean $E, F \in \mathcal{C}a(\Omega)$ tales que $E \Delta F \subset\subset K$. Entonces se tendrá que (Apendice

A, Lema A.2.5.),

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_u(F \cup E) + \mathcal{J}_u(F \cap E) &= \|\partial(F \cup E)\|(K) + \|\partial(F \cap E)\|(K) \\ &\quad - \int\limits_{(F\cap K)\cup(E\cap K)} g(|\nabla u|)dx - \int\limits_{(F\cap K)\cap(E\cap K)} g(|\nabla u|)dx \\ &\leq \|\partial F\|(K) + \|\partial E\|(K) - \int\limits_{F\cap K} g(|\nabla u|)dx - \int\limits_{E\cap K} g(|\nabla u|)dx \\ &= \mathcal{J}_u(F) + \mathcal{J}_u(E)\,.\end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{J}_u(F \cup E) + \mathcal{J}_u(F \cap E) \leq \mathcal{J}_u(F) + \mathcal{J}_u(E)$. □

Observación 3.3.4.
1. Al igual que en la sección 3.2 la dependencia de K en el funcional $\mathcal{J}_u$ no la harémos explicita.
2. Notamos que la condición que debe cumplir el conjunto K, $|\partial^* F \cap \partial K| = 0$, no es suficiente para que sea un conjunto de Caccioppoli a diferencia de la condición que debe satisfacer para el funcional J_u defeinido en 3.2.1.

Ahora daremos las definiciones alternativas sobre ser solución débil para (3.3) según $\mathcal{J}_u$.

Definición 3.3.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

1. Sean $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y $E \in \mathcal{C}a(\Omega)$. El conjunto E minimiza a $\mathcal{J}_u$ por fuera de Ω si

$$\mathcal{J}_u(E) \leq \mathcal{J}_u(F),\;\; F \in \mathcal{C}a(\mathbb{R}^n) \text{ y } E\Delta F \subset\subset \Omega \tag{3.7}$$

para todo $E \subset F$. La integración es realizada sobre cualquier compacto que contenga $E\Delta F$.

2. Sean $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y $E \in \mathcal{C}a(\Omega)$. El conjunto E minimiza a $\mathcal{J}_u$ por dentro de Ω si E satisface (3.7) para todo $F \subset E$. La integración es realizada sobre cualquier compacto que contenga $E\Delta F$.

3. Sean $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y E un conjunto de perímetro finito local. Diremos que E minimiza $\mathcal{J}_u$ en Ω si minimiza tanto por dentro y por fuera de Ω respectivamente.

4. Sea $(E_t)_{t\geq 0} \subset \Omega$ una familia de conjuntos de perímetro finito local cerrada bajo uniones ascendentes. Sea u la función que se define por $E_t = \{u < t\} \subset \Omega$. Entonces la familia $(E_t)_{t>0}$ se llama una solución débil de (3.3) con condición inicial $E_0 \subset \Omega$ si $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y E_t minimiza $\mathcal{J}_u$ en $\Omega_0 = \Omega \setminus E_0$ para todo $t > 0$.

Corolario 3.3.6. *Si E tiene perímetro finito local, entonces E minimiza J_u en Ω si, y solo si, se satisface (3.7) para cualquier F que tenga perímetro finito local. La integración se realiza sobre cualquier compacto K que contenga $E\Delta F$.*

Demostración. Sea E un conjunto de perimetro finito local y K un compacto. Supongamos que E satisface (3.7) para todo F de perimetro finito local tal que $E\Delta F \subset\subset K$. En particular E minimiza $\mathcal{J}_u$ por dentro $(F \subset E)$ y por fuera $(E \subset F)$. Así E minimiza $\mathcal{J}_u$ en Ω.
Para la otra implicancia sea F un conjunto de perimetro finito local tal que $E\Delta F$ es precompacto en K. Usando como competidores de E, $E \cap F$ y $E \cup F$, y que miniza a $\mathcal{J}_u$ tanto por fuera y por dentro respectivamente, se tendrá que por el Lema 3.3.3

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_u(E) \leq \mathcal{J}_u(E \cup F),\ \ \mathcal{J}_u(E) \leq \mathcal{J}_u(E \cap F)\,, \\
\Rightarrow\, &2J_u(E) \leq \mathcal{J}_u(E \cup F) + \mathcal{J}_u(E \cap F) \leq \mathcal{J}_u(E) + \mathcal{J}_u(F) \\
\Rightarrow\, &\mathcal{J}_u(E) \leq \mathcal{J}_u(F)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto E satisface (3.7) para todo F. □

Ahora mostraremos la equivalencia entre las definiciones de J_u y $\mathcal{J}_u$.

Lema 3.3.7. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para cada $t > 0$, $E_t := \{u < t\}$ minimiza $\mathcal{J}_u$ en (resp. por fuera de, por dentro de) Ω.*

2. *u es solución (resp. subsolución, supersolución) débil de (3.3) en Ω.*

Demostración. Primero demostraremos que si E_t minimiza a $\mathcal{J}_u$ entonces u es solución débil de (3.3). Esta demostración la dividiremos en cuatro pasos.

1. Sean $u, v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ tal que $\{u \neq v\} \subset K$ y K un conjunto compacto. Definimos $F_t := \{v < t\}$ y $E_t := \{u < t\}$.
   Notar que por la compacidad de K, existen $a \leq b$ tales que $a \leq u, v \leq b$ en K. Por tanto, haciendo uso de la formula de co-área para funciones Lipschitz, tendremos que

$$
\begin{aligned}
J_u(v) &= \int_K |\nabla v|\, dx + \int_K v g(|\nabla u|) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \{v = t\}\right) dt + \int_K v g(|\nabla u|) dx \\
&= \int_a^b \mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \{v = t\}\right) dt - \int_K (b - v) g(|\nabla u|) dx + b \int_K g(|\nabla u|) dx \, .
\end{aligned}
$$

2. Ahora escribiremos las funciones que estan siendo integradas en el paso 1 de manera conveniente.
   Notar que como $(b - v) \geq 0$ podemos escribir c.t.p. $x \in \Omega$,

$$
\begin{aligned}
b - v(x) &= \int_0^{b-v(x)} ds = \int_0^{\infty} \chi_{\{b-v(x)>s\}} ds = \int_0^{\infty} \chi_{\{-v(x)>-(b-s)\}} ds \\
&= \int_{-\infty}^{b} \chi_{\{-v(x)>-t\}} ds = \int_a^b \chi_{\{v(x)<t\}} dt = \int_a^b \chi_{F_t} dt \, .
\end{aligned}
$$

   Por otro lado tenemos que

$$
\mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \{v = t\}\right) = \mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \partial^* F_t\right) \, , \text{ c.t.p. } t \in [a, b] \, .
$$

   En efecto, como $\mathcal{H}^{n-1}\left(\partial F_t \setminus \partial^* F_t\right) = 0$ y el conjunto $\{v = t\} \setminus \partial F_t$ son los punto donde v se mantiene constante igual a t. Se tendrá que

$$
0 = \int_{\{v=t\}} |\nabla v|\, dx = \int_a^b \mathcal{H}^{n-1}\left(\{v = t\}\right) dt \, .
$$

Por tanto la última integral no mira dichos conjunto para los $t \in [a,b]$, y así $\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \{v=t\} \setminus \partial F_t) = 0$ c.t.p. $t \in [a,b]$.
Luego,

$$\int_a^b \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \{v=t\})\, dt = \int_a^b \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial^* F_t)\, dt\,.$$

Reemplazamos estos cálculos en el paso 1 y nos queda que

$$J_u(v) = \int_a^b |\partial^* F_t \cap K|\, dt - \int_K \left(\int_a^b \chi_{F_t} dt \right) g(|\nabla u|) dx + b \int_K g(|\nabla u|) dx\,.$$

Ahora, usando el teorema de Fubini, se tendrá que

$$\begin{aligned} J_u(v) &= \int_a^b \left(|\partial^* F_t \cap K|\, dt - \int_{K \cap F_t} g(|\nabla u|) dx \right) dt + b \int_K g(|\nabla u|)\, dx \\ &= \int_a^b \mathcal{J}_u(F_t) dt + b \int_K g(|\nabla u|)\, dx\,. \end{aligned}$$

Por tanto obtenemos la formula

$$J_u(v) = \int_a^b \mathcal{J}_u(F_t) dt + b \int_K g(|\nabla u|)\, dx\,. \tag{3.8}$$

Hacemos notar que esta formula tambien es valida para u.

3. Notemos que $E_t \Delta F_t \subset \{u \neq v\} \subset K$, así podemos considerar F_t como un competidor de E_t para el funcional $\mathcal{J}_u$.
   Por tanto si E_t minimiza a J_u en Ω, entonces para el competidor F_t tendremos que $\mathcal{J}_u(E_t) \leq \mathcal{J}_u(F_t)$. Así, por (3.8) se tendrá que

$$J_u(u) = \int_a^b \mathcal{J}_u(E_t) dt + b \int_K g(|\nabla u|)\, dx \leq \int_a^b \mathcal{J}_u(F_t) dt + b \int_K g(|\nabla u|)\, dx = J_u(v)\,.$$

Por tanto u es solución débil de (3.3) en Ω.

4. Notemos que por (3.8) podemos mostrar que si E_t minimiza por fuera (resp. por dentro) entonces u es subsolución (resp. supersolución) débil de (3.3).
En efecto, si v es un competidor para u tal que $v \leq u$ (resp. $u \leq v$) entonces se tendrá que $E_t \subset F_t$ (resp. $F_t \subset E_t$). Entonces, usando que E_t minimiza $\mathcal{J}_u$ por dentro (resp. por fuera) y (3.8) se tendrá finalmente que u es subsolución (resp. supersolución) débil de (3.3) en Ω.

Para mostrar la otra dirección mostraremos primero que si u es una supersolución de (3.3) en Ω, entonces E_t minimiza por dentro a J_u en Ω. Al igual que en la parte anterior dividiremos la demostración en varios pasos. Recordemos que para un $t_0 > 0$ fijo, queremos demostrar que $\mathcal{J}_u(E_{t_0}) \leq \mathcal{J}_u(F)$ para cualquier conjunto $F \in \mathcal{C}a(\Omega)$ de perimetro finito local tal que $F \subset E_{t_0},\ E_{t_0} \setminus F \subset\subset \Omega$.

1. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos la familia de conjuntos $F_m := \{x \in \Omega :\ \operatorname{dist}(x, F) < a_m\}$ donde $a_m = m^{-1}\operatorname{dist}(\partial F, \partial E_{t_0})$. Notar que para cada m, $F \subset F_m$, $F_{m+1} \subset F_m$, $F_m \Delta E_{t_0} \subset E_{t_0}\Delta F$ y $F_m \to F$ en L^1_{loc}. Esto último pues para un compacto K conteniendo a $E_{t_0} \setminus F$, se tendrá que
$$\int\limits_K |\chi_{F_m} - \chi_F|\, dx = \int\limits_K \chi_{F_m \setminus F} dx \leq C\mathcal{H}^{n-1}\left(\partial^* F_m \cap K \cap F^c\right) \leq (Ca_m)^{\frac{n}{n-1}} \to 0\,.$$
Luego, por la semicontinuidad inferior de $\mathcal{J}_u$ y que u este fija, se tendrá que
$$\mathcal{J}_u(F) \leq \liminf_{m\to\infty} \mathcal{J}_u(F_m) \leq \mathcal{J}_u(F_m)\,.$$
Por tanto, podemos asumir que
$$\mathcal{J}_u(F) \leq \mathcal{J}_u(G),\ \ \forall\, G \text{ tal que } F \subset G,\ G\Delta E_{t_0} \subset F\Delta E_{t_0}\,. \tag{3.9}$$

2. Definimos la familia de conjuntos F_t dada por
$$F_t := \begin{cases} F \cap E_t, & t \leq t_0 \\ E_t, & t > t_0 \end{cases}\,.$$

Afirmamos que la familia F_t satisface que $J_u(F_t) \leq J_u(E_t)$ para todo $t > 0$. Notar que basta probar lo anterior para los $t \leq t_0$. Luego, por el Lema 3.3.3,

$$J_u(F_t) := J_u\left(F \cap E_t\right) \leq J_u(E_t) + J_u(F) - J_u\left(F \cup E_t\right) \,.$$

Pero como $\left(F \cup E_t\right) \Delta E_t = F \setminus E_t \subset F \Delta E_t$, por (3.9) se tiene que

$$J_u(F) \leq J_u\left(F \cup E_t\right) \,, \tag{3.10}$$

y por tanto

$$J_u(F_t) \leq J_u(E_t) + J_u(F) - J_u\left(F \cup E_t\right) \leq J_u(E_t)\,.$$

3. Ahora caracterizamos los conjuntos F_t por la función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) := \begin{cases} t_0, & x \in E_{t_0} \setminus F \\ u(x), & x \notin E_{t_0} \setminus F \end{cases} \,.$$

Afirmamos que $F_t = \{v < t\}$.

a) $F_t \subset \{v < t\}$: Si $x \in F_t$ con $t \leq t_0$, entonces $x \in F \cap E_t$. Luego $x \notin E_{t_0} \setminus F$ y así $v(x) = u(x)$. Como $x \in E_t$, se tendrá que $v(x) < t$ y por tanto $x \in \{v < t\}$.
Por otro lado, si $t > t_0$ entonces $x \in E_t$ y surgen dos casos. Primero si $u(x) \geq t_0$, tendremos que $x \notin E_{t_0} \setminus F$ y por tanto $v(x) = t_0 < t$. En cambio, si $u(x) < t_0$, se tendrá que $x \in E_{t_0} \setminus F$ y por tanto $v(x) = t_0 < t$. Por tanto en cualquier caso $x \in \{v < t\}$.

b) $\{v < t\} \subset F_t$: Sea $x \in \{v < t\}$. Entonces, si $x \in E_{t_0} \setminus F$, se tendrá que $v(x) = t_0 < t$ y que $u(x) < t_0$. Por tanto $x \in E_t = F_t$.
Por otro lado, si $x \notin E_{t_0} \setminus F$ entonces $t_0 \leq u(x) < t$ o bien $x \in E_t \cap F$. En cualquier caso $x \in F_t$.

Luego, como $F_t = \{v < t\}$, se tendrá que $\{u \neq v\} = E_{t_0} \setminus F \subset\subset \Omega$.
Notemos que v no es necesariamente continua dado el salto que tiene en F,

pero si $v \in \mathcal{BV}_{loc}(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$ con $|\varphi| \leq 1$ luego la acción de $\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(v)$ sobre φ nos queda

$$\int\limits_{\Omega} v\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(\varphi)\, dx = t_0 \int\limits_{E_{t_0}\setminus F} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(\varphi)\, dx + \int\limits_{\Omega\setminus E_{t_0}\setminus F} u\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(\varphi)\, dx\ ,$$

y ambas integrales son finitas pues E_{t_0} es un conjunto de perímetro finito local y $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$.

4. Como v no es continua entonces a priori no sirve como competidor de u. Pero si podemos aproximar por funciones $(v_n) \subset \mathcal{BV}_{loc}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} & v_n \to v \ \text{ en } L^1_{loc}(\Omega)\ , \\ & ||\nabla v_n||\,(E_{t_0}) \to ||\nabla v||\,(E_{t_0}) \ \text{ en la convergencia debil * }, \end{aligned}$$

apendice teorema [x]. Con esto tenemos que

$$J_u(v) = \lim_{n\to\infty} J_u(v_n).$$

Luego, como $u \leq v$, tenemos que $J_u(u) \leq J_u(v)$. Más aún, como (3.8) se satisface para cada v_n tomando límites tambien se cumplirá para v. Por tanto

$$\int\limits_a^b \mathcal{J}_u(E_t)dt \leq \int\limits_a^b \mathcal{J}_u(F_t)dt\ .$$

Pero como $\mathcal{J}_u(F_t) \leq \mathcal{J}_u(E_t)$ tenemos que la integrales valen igual y por tanto $J_u(F_t) = J_u(E_t)$ para casi todo t.

5. Luego, por el Lema 3.3.3, se tendrá que para casi todo $t \leq t_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_u\left(F \cup E_t\right) &\leq \mathcal{J}_u(F) + \mathcal{J}_u(E_t) - \mathcal{J}_u(F \cap E_t) = \mathcal{J}_u(F) + \mathcal{J}_u(E_t) - \mathcal{J}_u(F_t) \\ &= \mathcal{J}_u(F) + \mathcal{J}_u(E_t) - \mathcal{J}_u(E_t) = J_u(F)\ . \end{aligned}$$

Entonces por (3.10), para casi todo $t \leq t_0$ se cumple que $\mathcal{J}_u\left(F \cup E_t\right) = \mathcal{J}_u(F)$.

Luego, al tomar $t \nearrow t_0$ y usando la semicontinuidad inferior, obtenemos que

$$\mathcal{J}_u(E_{t_0}) = \mathcal{J}_u(E_{t_0} \cup F) \leq \liminf_{t \nearrow t_0} \mathcal{J}_u(E_t \cup F) \leq \liminf_{t \nearrow t_0} \mathcal{J}_u(F) = \mathcal{J}_u(F) \,,$$

y por tanto $\mathcal{J}_u(E_{t_0}) \leq \mathcal{J}_u(F)$ para cada $F \subset E_{t_0}$ tal que $E_{t_0} \setminus F \subset\subset \Omega$. Así probamos que para cada t_0, E_{t_0} minimiza al funcional $\mathcal{J}_u$ por dentro de Ω.

De manera análoga procedemos para mostrar que si u es subsolución débil de (3.3) entonces para cualquier t_0, E_{t_0} minimiza $\mathcal{J}_u$ por fuera de Ω.
Consideramos F un conjunto de perímetro finito local tal que

$$E_{t_0} \subset F, \;\; F \setminus E_{t_0} \subset\subset \Omega \,.$$

1. Al igual que para supersoluciones se define la familia de conjuntos

$$F_t := \begin{cases} F \cap E_t, & t \leq t_0 \\ E_t, & t > t_0 \,. \end{cases}$$

   Entonces por (3.9) se cumplirá que para todo t,

$$\mathcal{J}_u(F_t) \leq J_u(E_t) \text{ y } \mathcal{J}_u(F) \leq J_u(F \cup E_t) \,.$$

2. Consideramos $v : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x) := \begin{cases} t_0, & x \in F \setminus E_{t_0} \\ u(x), & x \notin F \setminus E_{t_0} \,. \end{cases}$$

   Entonces al igual que antes, $F_t = \{v < t\}$ y $\{u \neq v\} = F \setminus E_{t_0} \subset\subset \Omega$. Además por construcción se tendrá que $v \in \mathcal{BV}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$.

3. Repetiendo los argumentos de densidad por funciones suaves y convergencia débil* de las medidas respectivas, más el hecho que $v \leq u$, se tendrá que

$J_u(u) \leq J_u(v)$. Pero por (3.8), volvemos a obtener que

$$\int_a^b \mathcal{J}_u(E_t)dt \leq \int_a^b \mathcal{J}_u(F_t)dt \ .$$

O sea, $\mathcal{J}_u(F_t) = \mathcal{J}_u(E_t)$ para casi todo t. Gracias a esto, para casi todo $t \leq t_0$, $J_u\left(F \cup E_t\right) = J_u(F)$. Luego por la semicontinuidad inferior de $\mathcal{J}_u$ obtenemos

$$\mathcal{J}_u(E_{t_0}) = \mathcal{J}_u(E_{t_0} \cup F) \leq \liminf_{t \nearrow t_0} \mathcal{J}_u(E_t \cup F) \leq \liminf_{t \nearrow t_0} \mathcal{J}_u(F) = \mathcal{J}_u(F) \ ,$$

y por tanto $\mathcal{J}_u(E_{t_0}) \leq \mathcal{J}_u(F)$ para cada $E_{t_0} \subset F$ tal que $F \setminus E_{t_0} \subset\subset \Omega$. Por tanto E_t minimiza el funcional $\mathcal{J}_u$ por fuera de Ω.

Finalmente si u es solución débil de (3.3) en Ω, usando los Corolarios 3.3.6 y 3.2.6. tendremos que E_t minimiza $\mathcal{J}_u$ para los $t > 0$ en Ω. □

Gracias al resultado del Lema 3.3.7 podemos obtener las siguientes equivalencias para los problemas con condiciones iniciales.

Lema 3.3.8. *Sea $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Para cada $t > 0$, $E_t := \{u < t\}$ minimiza $\mathcal{J}_u$ en $\Omega \setminus E_0$.*
2. *Para cada $t \geq 0$, $\{u \leq t\}$ minimiza J_u en $\Omega \setminus E_0$.*
3. *$E_0 = \{u < 0\}$ y u es solución débil de (3.3) en $\Omega \setminus \overline{E_0}$.*

Demostración.

1. (1) $\rightarrow$ (3): Si u fuese constante en $\Omega \setminus E_0$ el Lema 3.3.8 se cumple trivialmente por tanto se procederemos para el otro caso. Entonces, si para cada $t > 0$, E_t minimiza $\mathcal{J}_u$ en $\Omega \setminus E_0$. Se tendrá que E_t minimiza a $\mathcal{J}_u$ en $\Omega \setminus \overline{E_0}$. Luego por el Lema 3.3.7, se tendrá que $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es solución débil de (3.3) en $\Omega \setminus \overline{E_0}$. Con esto queda probar que la condición inicial E_0 coincide con $\{u < 0\}$.

   Afirmamos que si $u \leq 0$ en $\Omega \setminus E_0$, entonces u no minimiza a J_u en $\Omega \setminus \overline{E_0}$. Con esto tendríamos que $\{u < 0\} = E_0$, ya que al ser u solución débil de (3.3) en $\Omega \setminus \overline{E_0}$, u está obligada a ser positiva en $\Omega \setminus E_0$ y por tanto $\Omega \setminus \overline{E_0} = \Omega \setminus \overline{\{u < 0\}}$.

En efecto, consideremos $v = u - t \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y sea $F_t := \{v < t\}$. Entonces, como $u \leq 0$ en $\Omega \setminus E_0$,

$$F_t \setminus E_t = \{t \leq u < 2t\} = \{u = 0\} \subset\subset \Omega \setminus E_0, \; \forall\, t > 0\,.$$

Luego podemos usar F_t como competidor de E_t, y por tanto $\mathcal{J}_u(E_t) \leq \mathcal{J}_u(F_t)$ para todo $t > 0$. Entonces por (3.8) tendremos que para $\{u = 0\} \subset K$ que

$$J_u(u) \leq J_u(v) = J_u(u) - t \int_K g\left(|\nabla u|\right)\, dx \Rightarrow \int_K g\left(|\nabla u|\right)\, dx \leq 0\,.$$

Pero como $g\left(|\nabla u|\right) \geq 0$, tenemos que $|\nabla u| = 0$ para casi todo $\Omega \setminus E_0$. Así $u = 0$ para casi todo $\Omega \setminus E_0$ contradiciendo que u no es constante en $\Omega \setminus E_0$, probando así la afirmación. Por tanto $E_0 = \{u < 0\}$.

2. (3) $\rightarrow$ (1): Si u es solución débil de (3.3) en $\Omega \setminus \overline{E_0}$ con $E_0 = \{u < 0\}$. Sea $F \in \mathcal{C}a(\Omega \setminus E_0)$ tal que $F \Delta E_t \subset\subset \Omega \setminus E_0$. Queremos mostrar que

$$\mathcal{J}_u(E_t) \leq \mathcal{J}_u(F)\,.$$

Escribiendo $F = \left(F \cap \left(\Omega \setminus \overline{E_0}\right)\right) \cup \left(F \cap \{u = 0\}\right)$ y usando que

$$\int_{F \cap \left(\Omega \setminus \overline{E_0}\right) \cap K} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(\varphi)\, dx \leq \int_{F \cap K} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(\varphi)\, dx\,,$$

se tendrá que,

$$\left|\partial^*(F \cap \Omega \setminus \overline{E_0}) \cap K\right| \leq \left|\partial^* F \cap K\right|\,. \tag{3.11}$$

Además como $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ se tiene que para casi todo punto en $\{u = 0\}$, $\nabla u = 0$. Luego

$$\int_{F \cap K} g(|\nabla u|) dx = \int_{\left(F \cap \Omega \setminus \overline{E_0}\right) \cap K} g(|\nabla u|) dx\,. \tag{3.12}$$

Entonces por (3.12) y (3.11) se tiene que $\mathcal{J}_u(F) \geq \mathcal{J}_u(F \cap \Omega \setminus \overline{E_0})$. Ahora, por el Lema 2.3.7 y que $F \cap \left(\Omega \setminus \overline{E_0}\right) \Delta E_t \subset\subset \Omega \setminus \overline{E_0}$ se tiene que

$$\mathcal{J}_u(E_t) \leq \mathcal{J}_u(F \cap \Omega \setminus \overline{E_0}) \leq \mathcal{J}_u(F) \, \forall \, t > 0 \, .$$

3. (1)⇔(2): Viene de aproximar $s \searrow t$ y notar que $\{u = t\}$ desparecen en $\mathcal{J}_u$.

□

El siguiente resultado muestra que la reformulación isoperimétrica del problema (3.3) tambien se satisface por soluciones clásicas del flujo (3.3). Obtiendo así una generalización del flujo (3.3) usual.

Proposición 3.3.9. *Sea $(N_t)_{a \leq t < b} \subset \Omega$ una familia suave de hipersuperficies cerradas con curvatura media escalar positiva que resuelven (3.3) de manera clásica. Sea $u = t$ en N_t y $u < c$ en la región acotada por N_c, y $E_t := \{u < t\} \subset \Omega$. Entonces, E_t minimiza J_u en $E_d \setminus \overline{E_c}$ para cada $t \in (c, d)$*

Demostración. Sea $t \in (c, d)$. Queremos demostrar que $E_t := \{u < t\}$ minimiza $\mathcal{J}_u$ en $E_d \setminus \overline{E_c}$. Esto es,

$$|\partial^* E_t \cap K| - \int\limits_{E_t \cap K} g(|\nabla u|) \, dx \leq |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} g(|\nabla u|) \, dx \, , \tag{3.13}$$

para cualquier F conjunto de perimetro finito local satisfaciendo $F \Delta E_t \subset\subset E_d \setminus \overline{E_c}$. Sean r, s tales que $c < r < t < s < d$ y $K := \overline{E_s \setminus E_r}$. Reemplzando K en (3.13) se traduce a

$$|\partial^* E_t| - \int\limits_{E_t \setminus E_r} g(|\nabla u|) \, dx \leq |\partial^* F| - \int\limits_{F \setminus E_r} g(|\nabla u|) \, dx \, . \tag{3.14}$$

Sea $X = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ el campo de clase $\mathcal{C}^1$ lejos de ∂E_c y ∂E_d. Más aún, por el teorema de la Divergencia y que $\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(X) = H = g(|\nabla u|)$, se tiene que

$$\int\limits_{\partial A} \langle \nu_A, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int\limits_A \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}(X) \, dx = \int\limits_A g\left(|\nabla u|\right) \, dx \, , \tag{3.15}$$

para cualquier subconjunto $A \subset \Omega$. Dado esto podemos estimar (3.14),

$$|\partial^* E_t| - \int\limits_{E_t \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx = \int\limits_{\partial^* E_t} \langle \nu_{E_t}, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) - \int\limits_{E_t \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx$$
$$= \int\limits_{\partial^*(E_t \setminus E_r)} \left\langle \nu_{E_t \setminus E_r}, X \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) - \int\limits_{E_t \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx + \int\limits_{\partial^* E_r} \langle \nu_{E_r}, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \ .$$

Notar que por (3.15) los primeros dos suamndo de la ultima igualdad se cancelan, teniendo que

$$|\partial^* E_t| - \int\limits_{E_t \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx = \int\limits_{\partial^* E_r} \langle \nu_{E_r}, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \ .$$

Luego, agregando vía (3.15) con $A = F \setminus E_r$ a lo anterior, tenemos que

$$|\partial^* E_t| - \int\limits_{E_t \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx = \int\limits_{\partial^* E_r} \langle \nu_{E_r}, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$
$$= \int\limits_{\partial^*(F \setminus E_r)} \left\langle \nu_{F \setminus E_r}, X \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) - \int\limits_{F \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx + \int\limits_{\partial^* E_r} \langle \nu_{E_r}, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$
$$= \int\limits_{\partial^* F} \underbrace{\langle \nu_{\partial^* F}, X \rangle}_{\leq 1} d\mathcal{H}^{n-1}(x) - \int\limits_{F \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx$$
$$\leq |\partial^* F| - \int\limits_{F \setminus E_r} g(|\nabla u|)\, dx \ .$$

Por tanto E_t minimiza $\mathcal{J}_u$ en $E_d \setminus \overline{E_c}$. □

3.4. Regularidad

En esta ección nos basaremos en el trabajo de Tamanini [14] para mostra un resultado de regularidad para los conjuntos minimizantes del funcional $\mathcal{J}_u$.

El resultado que obtuvimos viene de la teoría de regularidad de superficies mínimas. Primero definiremos un funcional de área con condición de borde y luego se daremos el resultado de regularidad asociado a minimizar dicho funcional.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Se define el funcional de área con condición de borde $\varphi(\cdot, G) : \mathcal{C}a(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(E,G) := ||\partial E||\,(G) - \text{ínf}\,\{||\partial F||\,(G)\ :\ E\Delta F \subset\subset G\}\ ,$$

donde G es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$.
Tamanini en [14] obtuvo el siguiente resultado sobre la regularidad de conjuntos de área minimizantes para funcional ψ basandose en el trabajo de De Giorgi.

Teorema 3.4.1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ y $E \in \mathcal{C}a(\Omega)$ tal que*

$$\psi\left(E, B_\rho(x)\right) \leq c\rho^{n-1+2\alpha} \tag{3.16}$$

para todo $x \in \Omega$, $\rho \in (0,R)$, $\alpha \in (0,1)$ donde $c, R > 0$ son constantes locales. Entonces la frontera reducida $\partial^* E$ es una hipersuperficie de clase $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ en Ω y

$$\mathcal{H}^s\left((\partial E \setminus \partial^* E) \cap \Omega\right) = 0,\ \forall\, s > n-8\,.$$

Más aun si (3.16) se mantiene uniformente para una familia $(E_t)_{t>0}$ que converge localmente a un conjunto E_∞ en Ω. Entonces, si $x_t \in \partial E_t$ es una familia de puntos que converge a $x_\infty \in \Omega$, se tendrá que $x_\infty \in \partial E_\infty$. Por otro lado si $x_\infty \in \partial^* E_\infty$, entonces existen $\bar{t}$ y puntos $x_t \in \partial^* E_t$ tal que para cada $t \geq \bar{t}$ el vector normal unitario exterior de E_t en x_t converge al vector normal unitario de E_∞ en x_∞.

Ahora mostraremos los resultados sobre los conjuntos minimizantes del funcional $\mathcal{J}_u$.

Definición 3.4.2. Adoptaremos la siguiente notación para las familias de conjuntos dadas por

$$E_t := \{u < t\}\,,\ E_t^+ := int\{u \leq t\},\ N_t := \partial E_t,\ N_t^+ := \partial E_t^+\,.$$

Corolario 3.4.3. *Sea $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Si $E \subset \Omega$ es un conjunto minimizante del funcional $\mathcal{J}_u$ en Ω. Entonces $\partial^* E$ es un subconjunto de una hipersuperficie de clase $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ y $\mathcal{H}^s\left(\partial E \setminus \partial^* E\right) = 0$ para todo $s > n-8$.*

Más aún, N_t y N_t^+ poseen estimaciones locales uniformes $C^{1,\alpha}$ dependiendo localmente de cotas de Lip(u). Además para cada $t > 0$,

$$\lim_{s \nearrow t} N_s = N_t, \quad \lim_{s \searrow t} N_s = N_t^+,$$

localmente en $\mathcal{C}^{1,\beta}$ con $0 \leq b < \alpha$. Si ∂E_0 es $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, entonces esto tambien ocurre cuando $s \searrow 0$.

Demostración. Sea E un conjunto minimizante del funcional $\mathcal{J}_u$ en Ω. Entonces para cada F conjunto de perimetro finito local tal que $E\Delta F \subset\subset \Omega$ se tendrá que

$$|\partial^* E \cap B_R(x)| - \int_{E\cap B_R(x)} g(|\nabla u|)dy \leq |\partial^* F \cap B_R(x)| - \int_{F\cap B_R(x)} g(|\nabla u|)dy \, .$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\partial^* E \cap B_R(x)| &\leq |\partial^* F \cap B_R(x)| + \int_{E\Delta F\cap B_R(x)} g(|\nabla u|)dy \\ &\leq |\partial^* F \cap B_R(x)| + \int_{B_R(x)} |\nabla u(y)|\, dy \\ &\leq |\partial^* F \cap B_R(x)| + C(\mathrm{Lip}\,(u)\,, n)R^n \, . \end{aligned}$$

Con esto $\psi(E, B_R)$ satisface (3.16) y el resultado se sigue del Teorema 3.4.3. □

Ahora daremos la noción de curvatura media débil que satisfacen los conjuntos minizantes del funcional $\mathcal{J}_u$.

Definición 3.4.4. Una hipersuperficie $N \subset \mathbb{R}^n$ posee curvatura media débil en L^p si existe un campo vecotrial $\vec{H} \in L^p_{loc}(N, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_N \left(\mathrm{div}_{_N}(X) - \langle H, X\rangle\right) d\mu = 0, \;\; \forall\, X \in \mathcal{C}_c^\infty(TN)\,,\; spt(X) \cap \partial N = \emptyset \, .$$

Lema 3.4.5. *Sean $0 < a < b$ y suponga que E_t minimiza $\mathcal{J}_u$ en $A := E_b \setminus E_a$ con $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(A)$. Entonces, módulo un conjunto de dimensión menor o igual que $n-8$,* *se tiene que N_t es una hipersuperficie de clase $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ que posee curvatura media débil en L^∞ dada por*

$$\vec{H}(x) = g\left(|\nabla u(x)|\right)\nu(x) \;\; con \; \nu(x) = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\,,$$

para casi todo $t \in (a,b)$ y casi todo punto $x \in N_t$.

Demostración. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $\Omega \cap A \neq \emptyset$ y $K \subset U$ un compacto tal que $K \cap N_t \neq \emptyset$. Se considera una familia de un parámetro de difeomorfismos $\phi : U \times [-1,1] \to U$ tal que

$$\phi_0 = id, \quad \phi_s\big|_{U\setminus K} = id\big|_{U\setminus K}, \quad \left.\frac{\partial \phi(x,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \phi_0^* X = X(x)\,,$$

donde X es un campo vectorial suave con soporte en K. Notar que

$$\left.\frac{\partial \phi_s^{-1}(y)}{\partial s}\right|_{s=0} = -X\left(\phi_0^{-1}(y)\right) = -X(y)\,.$$

Entonces, por el Lema 3.3.8, u minimiza a J_u en $E_b \setminus \overline{E_a}$. Con esto la primera variación de J_u se anula, o sea

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{ds} J_u(u \circ \phi_s^{-1})\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{d}{ds} \int\limits_{\phi_s(U)} \left|\nabla(u \circ \phi_s^{-1})(y)\right| + (u \circ \phi_s^{-1})(y) g(|\nabla u(y)|) dy \right|_{s=0} . \end{aligned}$$

Luego, por la formula de co-área y área, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\left.\left(\int\limits_U |\nabla u(x)|\,|\det D\phi_s(x)|\,dx + \int\limits_a^b \int\limits_{N_t \cap \phi_s(U)} \frac{(u \circ \phi_s^{-1})(y)}{1 + c\,|\nabla u(y)|} d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,dt \right)\right|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\left.\left(\int\limits_a^b \int\limits_{N_t \cap U} |\det D\phi_s(x)|\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,dt + \int\limits_a^b \int\limits_{N_t \cap \phi_s(U)} \frac{(u \circ \phi_s^{-1})(y)}{1 + c\,|\nabla u(y)|} d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,dt \right)\right|_{s=0} \end{aligned}$$

Como estamos integrando funciones C^1 c.t.p sobre conjuntos de medida finita, podemos pasar la derivada dentro de las integrales gracias al Teorema de convergencia dominada. Por tanto lo anterior nos queda

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \int_{N_t \cap U} \operatorname{div}_{N_t}(X(x)) - \frac{1}{1 + c\,|\nabla u(x)|} \left\langle \nabla u(\phi_0^{-1}(x)), X(\phi^{-1}(x)) \right\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, dt \\
&= \int_a^b \left(\int_{N_t \cap U} \operatorname{div}_{N_t}(X) - \langle g(|\nabla u|)\nu, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dt \, .
\end{aligned}
$$

Notar que la función

$$
h(t) := \int_{N_t \cap U} \operatorname{div}_{N_t}(X) - \langle g(|\nabla u|)\nu, X \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, , \; \nu := \frac{\nabla u}{|\nabla u|}
$$

pertenece a $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}, \lambda\lfloor_{(a,b)}\right)$. Entonces por el Teorema de diferenciación de Lesbegue, para casi todo $t \in (a,b)$ se tendrá que

$$
h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)} h(s)\, d\lambda\lfloor_{(a,v)}(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b h(s) ds = 0 \, .
$$

Por tanto N_t posee curvatura media débil $g(|\nabla u|)\nu \in L^\infty$ y el resto se sigue por el Corolario 3.4.4. $\square$

Observación 3.4.6. Notar que por la formula de co-área en la demostración del Lema 3.4.4 los valores de t donde $|\nabla u| = 0$ fueron excluidos.

3.5. Cascos Minimizantes

En esta sección se estudiarán los saltos de las soluciones débiles de (3.3).

Definición 3.5.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

1. Un conjunto E se llama un casco minimizante en Ω si para todo F tal que

$E \subset F$, $F \setminus E \subset\subset \Omega$ y todo compacto K que contiene a $F \setminus E$ se cumple que

$$|\partial^* E \cap K| \leq |\partial^* F \cap K| \ .$$

2. Un casco minimizante E se dice estricto si para todo conjunto que cumple $|\partial^* E \cap K| = |\partial^* F \cap K|$ se tiene que $E \cap \Omega = F \cap \Omega$.

3. Sea $E \subset \Omega$ un conjuto medible. Se define el casco estrictamente minimizante de E en Ω como

$$E' = \bigcap_{j \in J} E_j \ ,$$

donde $(E_j)_{j \in J}$ es la familia de puntos de Lebesgue de los casco minimizantes estrictos de Ω que contienen a E.

Algunas propiedades de los cascos minimizantes.

Proposición 3.5.2.

1. *Sea $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de cascos minimizantes (resp. estrictamente minimizantes), entonces $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_n$ es un casco minimizante (resp. estrictamente minimizante).*

2. *El conjunto de punto de Lebesgue de un casco minimizante forma un conjunto abierto en Ω.*

3. *E' es el casco minimizante abierto más pequeño que contiene a E. Además $E'' = E'$.*

Demostración.

1. Sean $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una familia de cascos minimizantes en Ω y $E = \cap E_j$. Entonces, dados F tal que $E \subset F$, $F \setminus E \subset\subset \Omega$ y un compacto K que contiene a $F \setminus E$, se tiene que

$$|\partial^* E \cap K| \leq \liminf_{j \to \infty} ||\partial E_j|| \, (K) \leq \liminf_{j \to \infty} ||\partial F|| \, (K) = |\partial^* F \cap K| \, , \qquad (3.17)$$

pues para cada j, $F \setminus E_j \subset\subset \Omega$ y $F \setminus E_j \subset K$. Ahora si los E_j son cascos estrictamente minimizantes y F es tal que

$$|\partial^* E \cap K| = |\partial^* F \cap K| \ .$$

Se tendrá que por (3.17) , $F \cap \Omega = E_j \cap \Omega$ para todo j.

2. En efecto, sea E un casco minimizante en Ω. Módulo un conjunto de medida de Lebesgue 0, podemos describir el conjunto E como

$$E = \left\{ x \in E \ : \ \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^n \left(E \cap B_r(x)\right)}{\mathcal{H}^n \left(B_r(x)\right)} = 1 \right\} \ .$$

Sea $x \in \partial^* E \cap E$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{H}^n \left(E \cap B_r(x)\right)}{\mathcal{H}^n \left(B_r(x)\right)} &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}(n-1)} \int\limits_{B_r(x) \cap E} \frac{n-1}{r} dy \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}(n-1)} \int\limits_{B_r(x) \cap E} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n} \left(\nu_{\partial B_r(x)}\right) dy \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}(n-1)} \int\limits_{B_r(x)} \left\langle \nu_{\partial B_r(x)}, \nu_E \right\rangle d\left|\left|\partial E\right|\right|(y) \ .
\end{aligned}$$

Luego, como $|\nu_e(x)| = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{H}^n \left(E \cap B_r(x)\right)}{\mathcal{H}^n \left(B_r(x)\right)} &\leq \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}(n-1)} \int\limits_{B_r(x)} \left|\left\langle \nu_{\partial B_r(x)}, \nu_E \right\rangle\right| d\left|\left|\partial E\right|\right|(y) \\
&\leq \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}(n-1)} \int\limits_{B_r(x)} d\left|\left|\partial E\right|\right|(y) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\sqrt{\pi}(n-1)\Gamma(\frac{n+1}{2})} \fint\limits_{B_r(x)} d\left|\left|\partial E\right|\right|(y) \ .
\end{aligned}$$

Pero como $x \in \partial^* E$, se tiene que $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\mathcal{H}^{n-1}\left(\partial^* E \cap B_r(x)\right)}{\mathcal{H}^{n-1}\left(B_r(x)\right)} = 1$. Además, para todo $n > 1$ se conoce la desigualdad

$$\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} < \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,.$$

Por tanto, luego de hacer tender r a 0, se obtiene el siguiente absurdo $1 \leq \sqrt{\frac{n+1}{2\pi}}\frac{1}{n-1}$.
Con esto se tiene que $\partial^* E \cap E = \emptyset$, y como $||\partial E||\,(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$, se tiene finalmente que E es abierto en Ω.

Por tanto se trabajará con este único representante abierto en vez del conjunto E.

3. Como el casco minimizantes de E se realiza, módulo una familia de conjuntos de Lebesgue cero, como una intersección numerable de cascos estrictamente minimizantes. Se tiene que E' es el casco estrictamente minimizante abierto que contiene a E en Ω. Además trivialmente se tiene que $E'' = E'$.

$\square$

Observación 3.5.3. En el caso en que ∂E sea de clase C^2 el Lema 3.5.6 da el siguiente resultado sobre la curvatura media débil de E' con respecto a la de E,

$$\begin{cases} H_{E'} = 0 & \text{en } \partial E' \setminus \partial E \\ H_{E'} = H_E \geq 0 & \mathcal{H}^{n-1}\text{c.t.p en } \partial E' \cap \partial E \end{cases}$$

donde la igualdad es en el sentido distribucional.

Ahora estudiaremos las propiedades de los cascos minimizantes con respecto a la formulación débil de (3.3).

Proposición 3.5.4. *Sea $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ una solución débil de (3.3) con condición inicial $E_0 = \{u < 0\}$ en Ω. Entonces*

1. *Para cada $t > 0$, E_t es un casco minimizante en Ω.*

2. *Para cada $t \geq 0$, E_t^+ es un casco estrictamente minimizante en Ω.*

3. Para cada $t \geq 0$, $E_t' = E_t^+$ si E_t^+ es precompacto.

4. Para cada $t > 0$, $|\partial E_t'| = \left|\partial E_t^+\right|$ si E_t^+ es precompacto. Esto se extiende a $t = 0$ solo si E_0 es un casco minimizante.

Demostración.

1. Por el Lema 3.4.8 se tiene que para cada $t > 0$, E_t minimiza a J_u en $\Omega \setminus E_0$. Entonces, para cada F tal que $F \Delta E_t \subset\subset \Omega \setminus E_0$ y cada compacto K que contenga a $F \Delta E_t$, tenemos que

$$|\partial^* E_t \cap K| - \int\limits_{E_t \cap K} g(|\nabla u|)dx \leq |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} g(|\nabla u|)dx \,. \tag{3.18}$$

En particular para los competidores F conteniendo a E_t y $F \setminus E_t \subset\subset \Omega$, se tendrá que $F \setminus E_t \subset\subset \Omega \setminus E_0$ ya que $E_0 = \{u < 0\}$. Luego, de (3.18) obtenemos que

$$|\partial^* E_t \cap K| \leq |\partial^* E_t \cap K| + \int\limits_{(F \setminus E_t) \cap K} g(|\nabla u|)dx \leq |\partial^* F \cap K| \ . \tag{3.19}$$

Por tanto E_t es un casco minimizante para $t > 0$.

2. Por el Lema 3.4.8, se tiene que $t \geq 0$ $\{u \leq t\}$ minimiza J_u en $\Omega \setminus E_0$. Entonces, para cada F tal que $F \Delta \{u \leq t\} \subset\subset \Omega \setminus E_0$ y cada compacto K que contenga a $F \Delta \{u \leq t\}$, tenemos que

$$|\partial^* \{u \leq t\} \cap K| - \int\limits_{\{u \leq t\} \cap K} g(|\nabla u|)dx \leq |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} g(|\nabla u|)dx \,. \tag{3.20}$$

Ahora, como E_t^+ y $\{u \leq t\}$ solo difieren en $\partial \{u \leq t\}$, podemos reemplazar E_t^+ por $\{u \leq t\}$ en (3.20). Procediendo al igual que en (3.19) se obtiene que E_t^+ es un casco minimizante.
Ahora se mostrará que E_t^+ es un casco minimizante estricto. Si F es tal que

$$\left|\partial^* E_t^+ \cap K\right| = |\partial^* F \cap K| \ , \tag{3.21}$$

entonces por (3.20), se tendrá que

$$\int_{(F\setminus E_t^+)\cap K} g(|\nabla u|)dx \leq 0\,.$$

Por tanto $\nabla u = 0$ para casi todo punto en $\left(F \setminus E_t^+\right) \cap K$. Además por (3.21), F es tambien un casco minimizante. Por tanto, módulo un conjunto de medida de Lebesgue cero, podemos asumir que F es un conjunto abierto. Así $\nabla u = 0$ en el abierto $F \setminus \overline{E_t^+}$, o sea, u es constante en cada componente conexa de $F \setminus \overline{E_t^+}$. Pero como F es un casco minimizante ninguna componente puede tener clausura disjunta de $\overline{E_t^+}$. En efecto, si C es una componente conexa de $F\setminus\overline{E_t^+}$ tal que $C\cap\overline{E_t^+} = \emptyset$, entonces para cada compacto K tal que $K\cap\partial C \neq \emptyset$ se tendrá que

$$0 = \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial^* E_t^+ \cap (\partial C \cap K)\right) = \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial^* F \cap (\partial C \cap K)\right)\ ,$$

o sea, C no posee perímetro en $F \setminus E_t^+$ y por tanto sería un conjunto abierto cerrado en Ω lo cual no puede ocurrir ya que Ω un abierto conexo. Luego, cada componente conexta intersecta a $\overline{E_t^+}$ y por tanto $u = t$ en $F\setminus E_t^+$. Así $F \subset E_t^+$. Pero como $E_t^+ \subset F$ tenemos que E_t^+ es un casco estrictamente minimizante.

3. Como $\{u < t\} \subset int\,\{u \leq t\}$, tenemos que $E_t \subset E_t^+$. Por 2. E_t^+ es casco estrictamente minimizante, luego $E_t' \subset E_t^+$.
   Para probar la otra inclusión supondremos que E_t^+ es precompacto y que $E_t^+ \not\subset E_t'$. Así, $E_t'\Delta E_t^+ \subset\subset \Omega$ y como E_t' es un casco estrictamente minimizante tenemos dos casos:

$$|\partial^* E_t' \cap K| = \left|\partial^* E_t^+ \cap K\right|,\ \ |\partial^* E_t' \cap K| < \left|\partial^* E_t^+ \cap K\right|$$

   Se hace notar que el primer caso implica que $E_t^+ = E_t'$ y por tanto se descarta. Ahora si se reemplaza E_t por E_t^+ y F por E_t' en (3.18), entonces se tendría que $\left|\partial^* E_t^+ \cap K\right| \leq |\partial^* E_t' \cap K|$ que contradice el segundo caso. Por tanto $E_t^+ \subset E_t'$, se obtiene el resultado.

4. Si E_t^+ es precompacto entonces E_t tambien lo es. Luego podemos usar $F = E_t^+$ como competidor en (3.18), y por tanto

$$|\partial^* E_t \cap K| \leq \left|\partial^* E_t^+ \cap K\right| .$$

Tambien podemos usar el competidor $F = E_t$ en (3.20), y por tanto

$$\left|\partial^* E_t^+ \cap K\right| \leq |\partial^* E_t \cap K| .$$

Obteniendo el resultado para $t > 0$, y para E_0 si es un casco minimizante.

$\square$

Corolario 3.5.5. *E_t minimiza J_u en $\Omega \setminus E_0$ para todo $t \geq 0$ si, y solo si, E_t minimiza J_u en $\Omega \setminus E_0$ para todo $t > 0$, E_0 es un casco minimizante y E_0^+ es precompacto.*

Demostración. Esta afirmación se obtiene de la Proposición 3.6.4 parte 4. En efecto,

$$\begin{aligned}
J_u(E_0) &= |\partial^* E_0 \cap K| - \int\limits_{E_0 \cap K} g(|\nabla u|)\, dx \\
&= \left|\partial^* E_0^+ \cap K\right| - \int\limits_{\{u<0\} \cap K} g(|\nabla u|)\, dx \\
&= |\partial^* \{u \leq 0\} \cap K| - \int\limits_{\{u \leq 0\} \cap K} g(|\nabla u|)\, dx \\
&= J_u(\{u \leq 0\}) .
\end{aligned}$$

O sea $\{u \leq 0\}$ minimiza J_u en $\Omega \setminus E_0$. $\square$

El siguiente resultado muestra la evolución del área de los conjuntos de nivel por el flujo débil.

Lema 3.5.6. *Sea $(E_t)_{t>0}$ una solución débil de (3.3) con condición inicial $E_0 \subset \Omega$. Entonces para cada $t > 0$, y E_t se mantenga precompacto, se tendrá que*

$$\frac{d}{dt} |\partial^* E_t| = \int\limits_{E_t} \frac{1}{1 + c\,|\nabla u|} dx . \tag{3.22}$$

Demostración. Se asumirá que E_t es solución débil de (3.3) y que E_t es precompacto para todo $t > 0$. Dada esta suposición se fija t_0, entonces como E_t minimiza el funcional J_u, se tendrá que $J_u(E_t) \leq J_u(E_{t_0})$. Pero como tambien E_{t_0} minimiza J_u se tendrá finalemente que $J_u(E_t) = J_u(E_{t_0})$.
Ahora como $J_u(E_t)$ no depende del nivel t en que se encuentre, tenemos que para $t \in (0, T]$ y K compacto conteniendo a E_T,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} J_u(E_t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(|\partial^* E_t \cap K| - \int\limits_{E_t \cap K} g(|\nabla u|) dx \right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(|\partial^* E_t \cap K| - \int\limits_0^t \int\limits_{\partial^* E_t \cap K} \frac{1}{1 + c\,|\nabla u|} dx dt \right).
\end{aligned}
$$

Pero como K fue elegido arbitrariamente se sigue (3.22) para todo $t > 0$. $\square$

3.6. Resultados de compacidad y unicidad de soluciones débiles

El siguiente resultado muestra que la convergencia de soluciones débiles una solución débil del problema.

Proposición 3.6.1. *Sean $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}, A \subset \Omega$ abiertos en Omega. Sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(A_i)$ una sucesión de soluciones débiles de (3.3) en A_i tal que*

$$
A_i \to A, \quad u_i \to u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(A)
$$

localmente uniforme cuando $i \to \infty$. Si además se cumple que existe constante $C = C(K)$ tal que

$$
ess \sup_K |Du_i| \leq C
$$

para cada compacto $K \subset A$ e i suficientemente grande. Entonces u es solución débil *de (3.3) en A.*

Demostración. Se desea probar que $J_u(u) \leq J_u(v)$ para cualquier función $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(A)$ tal que $\{u \neq v\} \subset\subset A$. Primero esto se probará para $v < u + 2^k$ por inducción sobre k con caso base $k = 0$, o sea $v < u + 1$.
Sea $\phi \in \mathcal{C}^1_c(A, [0,1])$ una función de corte tal que $\phi\big|_{\{u \neq v\}} = 1$ y se definen los competidores

$$v_i = \phi v + (1-\phi)u_i \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(A_i)\ .$$

Luego, como u_i es solución débil de (3.3) en A_i, se tiene que

$$\begin{aligned}\int\limits_U |\nabla u_i| + u_i g(|\nabla u_i|)dx &\leq \int\limits_U |\nabla v_i| + v_i g(|\nabla u_i|)dx \\ &= \int\limits_U |\phi \nabla v + (1-\phi)\nabla u_i + (v-u_i)\nabla\phi| + (\phi v + (1-\phi)u_i) g(|\nabla u_i|)dx\ ,\end{aligned}$$

para un conjunto U apropiado. De esto se tiene que

$$\int\limits_U \phi\left(|\nabla u_i| + (u_i - v)g(|\nabla u_i|)\right)dx \leq \int\limits_U \phi\,|\nabla v|\,dx + \sup_U |v-u_i| \int\limits_U |\nabla\phi|\,dx\ .$$

Ahora, como $\phi\big|_{\{u\neq v\}} = 1$ y $u_i \to u$ uniformemente en U se tendrá que el termino $\sup_U |v-u_i| \int\limits_U |\nabla\phi|\,dx \to 0$ cuando $i \to \infty$.
Además, como $g(x) \leq x$ para $x \geq 0$, se tendrá que

$$\begin{aligned} v &< u + 1 \\ &\leq u + \frac{|\nabla u|}{g(|\nabla u|)}\ .\end{aligned}$$

Por tanto, para i suficientemente grandes $1 + (u_i - v)\dfrac{g(|\nabla u_i|)}{|\nabla u_i|}$ será positivo. Luego por la semicontinuidad inferior del funcional J_u, se tendrá que

$$\begin{aligned}\int\limits_U \phi\,|\nabla u|\,(1+(u-v)g(|\nabla u|))\,dx &\leq \liminf_{i\to\infty} \int\limits_U \phi\,|\nabla u|\,(1+(u_i-v)g(|\nabla u_i|))\,dx \\ &\leq \int\limits_U \phi\,|\nabla v|\,dx\,,\end{aligned}$$

o sea $J_u(u) \leq J_u(v)$ para $k=0$ y con esto se probó el caso base.
Por tanto ahora se asumirá el paso inductivo. Esto es que la desigualdad se cumple para cualquier $w < u+2^k$ y se desea mostrar que se cumple para cualquier $v < u+2^{k+1}$.
Para los $v < u+2^{k+1}$ y $\eta > 0$ se definen los competidores

$$v_1 := \min\left\{v, u+2^k-\eta\right\}, \quad v_2 := \max\left\{v-2^k, u\right\}\ .$$

Como $v_1 < u+2^k$, se tiene que $J_u(u) \leq J_u(v_1)$. Con esto se tiene que

$$\begin{aligned}&\int\limits_U |\nabla u| + ug(|\nabla u|)dx \leq \int\limits_U |\nabla v_1| + v_1 g(|\nabla u|)dx \\ &= \int\limits_{U\cap\left\{v\leq u+2^k-\eta\right\}} |\nabla v| + vg(|\nabla u|)dx + \int\limits_{U\cap\left\{v>u+2^k-\eta\right\}} |\nabla u| + (u+2^k-\eta)g(|\nabla u|)dx\,.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $v < u+2^{k+1}$ se tiene que $v_2 < u+2^k$, $J_u(u) \leq J_u(v_2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}&\int\limits_U |\nabla u| + ug(|\nabla u|)dx \leq \int\limits_U |\nabla v_2| + v_2 g(|\nabla u|)dx \\ &= \int\limits_{U\cap\left\{v\leq u+2^k\right\}} |\nabla u| + ug(|\nabla u|)dx + \int\limits_{U\cap\left\{v>u+2^k\right\}} |\nabla v| + (v-2^k)g(|\nabla u|)dx\,.\end{aligned}$$

Luego de sumar estas ultimas desigualdades y hacer tender η a 0 se obtiene que $2J_u(u) \leq J_u(v) + J_u(u)$ y se conluye la demostración. □

Lema 3.6.2. *Sea $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ una solución débil de (3.3) con condición inicial E_0. Entonces la función $\widehat{u}(x) := \min\{u(x), t\}$ es solución débil de (3.3) en Ω para cada*

$t > 0$.

Demostración. Por el Lema 3.4.8 es suficiente mostrar que para todo $s > 0$ $\widehat{E}_s := \{\widehat{u} < s\}$ minimiza a $J_{\widehat{u}}$ en $\Omega \setminus E_0$. Sea F un conjunto de perimetro finito local tal que $\widehat{E_s} \Delta F \subset\subset \Omega \setminus E_0$. Luego, como u es olución débil de (3.3) en Ω, se tiene que para los $0 < s \leq t$ que

$$\begin{aligned}
J_{\widehat{u}}(\widehat{E_s}) &= J_u(E_s) \leq J_u(F) \\
&\leq |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{(F \cap E_t) \cap K} g(|\nabla u|)dx = |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} g(|\nabla \widehat{u}|)dx \\
&= J_{\widehat{u}}(F)\,.
\end{aligned}$$

Ahora para los $s > t$, se tiene que

$$\begin{aligned}
J_{\widehat{u}}(\widehat{E_s}) &= J_{\widehat{u}}(\Omega) = |\partial^* \Omega \cap K| - \int\limits_{\Omega \cap K} g(|\nabla \widehat{u}|)dx \\
&= -\int\limits_{K} g(|\nabla \widehat{u}|)dx \leq |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} g(|\nabla \widehat{u}|)dx \\
&= J_{\widehat{u}}(F)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto $\widehat{E}_s$ minimiza J_u en $\Omega \setminus E_0$. □

Ahora se mostraran las condiciones de unicidad de soluciones débiles.

Proposición 3.6.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.*

1. *Sean $u, v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ soluciones débiles de (3.3) en Ω y $\{v > u\} \subset\subset \Omega$, entonces $v \leq u$ en Ω.*

2. *Si $(E_t)_{t>0}$, $(F_t)_{t>0}$ son minimizadores de J_u en Ω y las condiciones iniciales satisfacen $E_0 \subset F_0 \subset \Omega$. Entonces mientras E_t se mantenga precompacto $E_t \subset F_t$.*

3. *Dada $E_0 \subset \Omega$ existes al menos una solución débil $(E_t)_{t>0} \subset \Omega$ de (3.3) tal que E_t es precompacto.*

Demostración.

1. Primero se supondrá que u es una supersolución débil estricta de (3.3) en el sentido que para toda $w \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ tal que $u \leq w$ y $\{w \neq u\} \subset\subset \Omega$ se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$J_u(u) + \varepsilon \int_K g(|\nabla u|)(w-u)dx \leq J_u(w) \, . \tag{3.23}$$

Se escogemos el competidor $w = u + (v-u)_+$ para J_u. Notar que w diefere solo con u en $\{v > u\}$ donde $w = v$. Luego,

$$\int_{\{v>u\}} |\nabla u| + ug(|\nabla u|) + \varepsilon g(|\nabla u|)(w-u)dx \leq \int_{\{v>u\}} |\nabla v| + vg(|\nabla u|)dx \tag{3.24}$$

Por otro lado, como v es en particular subsolución débil de (3.3), usando como competidor $w = v - (v-u)_+$ para J_v, se tiene que

$$\int_{\{v>u\}} |\nabla v| + vg(|\nabla v|)dx \leq \int_{\{v>u\}} |\nabla u| + ug(|\nabla v|)dx \, , \tag{3.25}$$

ya que w solo difiere con v en el conjunto $\{v > u\}$ donde $w = u$.
Sumando (3.24) con (3.25) se obtiene que

$$\int_{\{v>u\}} \left(g(|\nabla v|) - g(|\nabla u|)\right)(v-u)dx + \varepsilon \int_{\{v>u\}} g(|\nabla u|)(v-u)dx \leq 0 \, . \tag{3.26}$$

Por otra parte, para todo $x, y \geq 0$ se tiene que

$$|g(x) - g(y)| \geq |x - y| \, . \tag{3.27}$$

Por tanto para tener mayor control en (3.26) se necesitará acotar el segundo sumando. En efecto, volviendo a utilizar la propiedad minimizadora de u para J_u con respecto a la familia $w_s := u + (v - s - u)_+$ para $s > 0$. Se tiene que, como w_s difiere de u en $\{v-s>u\}$ donde $w_s = v-s$,

$$\int\limits_{\{v-s>u\}} |\nabla u| + ug(|\nabla u|)dx \ \leq \int\limits_{\{v-s>u\}} |\nabla v| + (v-s)g(|\nabla u|)dx \ .$$

Intedrando con respecto a s, se tiene que

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\{v-s>u\}} |\nabla u| + ug(|\nabla u|)dxds \ \leq \int\limits_0^\infty \int\limits_{\{v-s>u\}} |\nabla v| + (v-s)g(|\nabla u|)dxds \ .$$

Esto es igual a

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\Omega} \chi_{\{s>0\}} \chi_{\{v-s>u\}} \left(|\nabla u| + g(|\nabla u|)(u-v+s)\right) dxds \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\Omega} \chi_{\{s>0\}} \chi_{\{v-s>u\}} \left|\nabla v\right| dxds, \end{aligned}$$

cambiando los ordendes de intragración tenemos que,

$$\int\limits_{\{v>u\}} |\nabla u| \left(\int\limits_0^{v-u} 1 + \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}(u-v+s)ds \right) dx \ \leq \int\limits_{\{v>u\}} |\nabla v| \left(\int\limits_0^{v-u} ds \right) dx.$$

O sea,

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\{v>u\}} |\nabla u| \left((v-u) + \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \left(\frac{(v-u)^2}{2} - (v-u)^2 \right) \right) dx \\ &\leq \int\limits_{\{v>u\}} \left|\nabla v\right| (v-u) dx \ . \end{aligned}$$

Reordenando los terminos se obtiene que,

$$\int\limits_{\{v>u\}} -g(|\nabla u|)\frac{(v-u)^2}{2}dx \ \leq \int\limits_{\{v>u\}} \left(|\nabla v| - |\nabla u|\right)(v-u)dx \ . \tag{3.28}$$

Utilizando (3.28) y (3.27) en (3.26), se tendrá que

$$\int\limits_{\{v>u\}} g(|\nabla u|)\left(-\frac{(v-u)^2}{2}+\varepsilon(v-u)\right)dx \leq 0\,.$$

Notar que sin perdida de generalidad se puede suponer que $v \leq u+\varepsilon$ pues sino se puede restar una constante de v tal que $0<\sup(v-u)\leq \varepsilon$. De esto obtenemos que

$$\int\limits_{\{v>u\}} \underbrace{g(|\nabla u|)}_{\geq 0}\underbrace{\left(-\frac{(v-u)^2}{2}+\varepsilon(v-u)\right)}_{>0}dx \leq 0\,,$$

o sea $g(|\nabla u|)=0$ para casi todo punto en $\{v>u\}$. Dado esto, por (3.26), se tiene que

$$\int\limits_{\{v>u\}} g(|\nabla v|)(v-u)dx \leq 0\,.$$

O sea $g(|\nabla v|)=0$ en casi todo punto de $\{v>u\}$. Por tanto se tiene que u, v son funciones localmente constante para casi todo punto de $\{v>u\}$. Pero como $\{v>u\}$ es precompacto en Ω no tiene componentes conexas compactas, lo que significa que $u=a$ y $v=b$ para casi todo punt de $\{v>u\}$ donde $a<b$. Luego, tomando $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$ en la supocisión $v\leq u+\varepsilon$ tendremos una contradicción salvo que $v\leq u$. Con esto probamos el resultado para supersoluciones débiles estrictas.

Ahora se analizará el caso general. Para una supersolución débil u de (3.3), se considera la familia $u^\varepsilon := \dfrac{u}{1-\varepsilon}$. Se hace notar que para cada $\varepsilon>0$, u^ε es una supersolución débil estricta de (3.3). En efecto, como

$$J_{u^\varepsilon}(w) - J_{u^\varepsilon}(u^\varepsilon) = \int |\nabla w| - |\nabla u^\varepsilon| + g(|\nabla u^\varepsilon|)(w - u^\varepsilon)dx$$
$$\geq \int |\nabla w| - |\nabla u| - |\nabla u| \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + g(|\nabla u|)(w-u) - ug(|\nabla u|)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}dx$$
$$= J_u(w) - \frac{1}{1-\varepsilon}J_u(u) > J_u(w) - J_u(u) \geq 0\,,$$

elgiendo $\delta := \frac{J_{u^\varepsilon}(w) - J_{u^\varepsilon}(u^\varepsilon)}{2\int g(|\nabla u^\varepsilon|)(w-u^\varepsilon)dx}$ donde $w \geq u^\varepsilon$ y $\{w \neq u^\varepsilon\} \subset\subset \Omega$ se tendrá que

$$J_{u^\varepsilon}(u^\varepsilon) + \delta \int g(|\nabla u^\varepsilon|)(w - u^\varepsilon)dx \leq J_{u^\varepsilon}(w)\,.$$

Como además $\{v > u^\varepsilon\}$ es precompacto en Ω, por lo demostrado para supersoluciones estrictas, se tiene que $u^\varepsilon \leq v$. Ahora haciendo tender ε a 0 se sigue el resultado.

2. Sean u y v las funciones de los conjuntos de nivel E_t y F_t respectivamente, o sea $E_t = \{u < t\}$ y $F_t = \{v < t\}$.
   Por el Lema 2.7.2 se sabe que $v^t := \min(v, t)$ minimiza J_u en $\Omega \setminus \overline{F_0}$. Sea $W = E_t \setminus \overline{F_0}$, como $E_0 \subset F_0$, se tendrá que la frontera de W será $\partial W = A \cup B$ donde $A = \partial W \cap \partial F_0$ y $B = \partial W \cap \partial E_t$.
   Con esto se tendrá que para todo $\varepsilon > 0$

   $$v^t = v = 0 < u + \varepsilon \text{ en } A, \quad v^t = t = u < u + \varepsilon \text{ en } B,$$

   y por tanto $v^t < u + \varepsilon$ cerca de ∂W. Luego, como E_t es precompacto se tendrá que $\{v^t > u + \varepsilon\} \subset\subset W$ y por la parte anterior se tendrá que $v^t \leq u + \varepsilon$ en W. Haciendo tender ε a 0 obtenemos que $v^t \leq u$ en W, pero como $u < t$ en W, se tendrá que $v \leq u$ en W. O sea $E_t \subset F_t$.

3. Trivial de la parte anterior.

$\square$

3.7. Existencia de soluciones débiles

En esta sección probaremos la existencia de soluciones débiles expansivas de (3.3) mediante las técnicas de regularización elíptica.

Definición 3.7.1. Una solución clásica expansiva del flujo (3.3) es una solución suave de (3.3) que satisface $\frac{1}{H_{N_0}} - c > 0$.

Observación 3.7.2. Recordamos que por el corolario 2.4.6 una solución clásica expansiva del flujo satisface

1. Para todo $t \geq 0$ se cumple que $\dfrac{1}{H_{N_t}} - c > 0$.
2. Existe $k(n, c, N_0) < 0$ tal que $\text{máx}_{N_t} H_{N_t} \leq e^{k\frac{t}{n-1}} \text{máx}_{N_0} H_{N_0}$ para todo $t \geq 0$.

Definición 3.7.3.

1. Para cada $x \in \Omega$ se define $\sigma(x) := \sup\{r > 0 : B_r(x) \subset\subset \Omega\}$.
2. Una función u se dice propia si para cada $s, t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{s \leq u \leq t\}$ es compacto en Ω.

Los resultados que obtendremos a continuación dependen de la existencia de una subsolución débil $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ propia de (3.3). La estrategía que usaremos para mostrar existencia de soluciones débiles de (3.3) está en el espiritu de [3] y consiste en el metodo de aproximación por promedios de regularización elíptica:

1. Dada una condición inicial $E_0 \subset \Omega$. Consideramos la familia de conjuntos $F_t := \{v < t\}$ donde $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ es una subsolución débil propia de (3.3) con condición inicial $E_0 \subset F_0$.
2. Sean $L > 2$ y $\Omega_L := F_L \setminus \overline{E_0}$. Definimos una familia de funciones $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que sastifagan el siguiente problema

$$\begin{cases} Q^\varepsilon u^\varepsilon := f\left(\text{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\dfrac{\nabla u^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u^\varepsilon|^2}}\right)\right) - \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u^\varepsilon|^2} = 0 & \text{en } \Omega_L \\ u^\varepsilon = 0 & \text{en } \partial E_0 \\ u^\varepsilon = L - 2 & \text{en } \partial F_L \end{cases} . \tag{3.29}$$

3. Las soluciones de (3.29) vendrán de aproximaciones $(u^{\varepsilon,\tau})$ que satisfacen

$$\begin{cases} Q^\varepsilon u^{\varepsilon,\tau} = 0 & \text{en } \Omega_L \\ u^{\varepsilon,\tau} = 0 & \text{en } \partial E_0 \\ u^{\varepsilon,\tau} = \tau & \text{en } \partial F_L \end{cases} \tag{3.30}$$

donde $\tau \in [0, L-2]$. La razón de volver a aproximar viene de que el problema (3.30) es más facil de tratar y las convergencias hacia las soluciones u^ε son lo suficientemente buenas.

Observación 3.7.4. Notamos que el operador Q^ε del problema (3.29) viene de hacer evolucionar los grafos

$$N_t^\varepsilon := \mathrm{G}\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon}\right) \subset \Omega \times \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

por el flujo (3.3). En efecto, notar que podemos describir N_t^ε por los conjuntos de nivel de la función $U(x,z) := u^\varepsilon(x) - \varepsilon z$ con $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Luego,

$$\nabla_{\Omega\times\mathbb{R}} U = (\nabla u^\varepsilon, -\varepsilon) \to |\nabla_{\Omega\times\mathbb{R}} U| = \sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2}\,,$$
$$H_{N_t^\varepsilon} = \mathrm{div}_{\Omega\times\mathbb{R}}\left(\frac{\nabla_{\Omega\times\mathbb{R}} U}{|\nabla_{\Omega\times\mathbb{R}} U|}\right) = \mathrm{div}_\Omega\left(\frac{\nabla u^\varepsilon}{\sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2}}\right).$$

Entonces N_t^ε satisface (3.3) si, y solo si,

$$f(H_{N_t^\varepsilon}) = |\nabla U| \Leftrightarrow Q^\varepsilon u^\varepsilon = 0\,.$$

Observación 3.7.5. Notar que el operador Q^ε equivale al operador

$$\mathcal{Q}^\varepsilon u := \mathrm{div}_\Omega\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}}\right) - g\left(\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}\right)$$

ya que g es la función inversa de f. Por tanto dependiendo el contexto preferiremos trabajar con el operador Q^ε o con $\mathcal{Q}^\varepsilon$. Además para $\varepsilon = 0$, $\mathcal{Q}^0 v = 0$ corresponde a la solución suave del flujo (3.3).

Ahora trataremos estimaciones apriori del problema (3.30) para luego seguir con la invertibilidad del operador Q^ε.

Lema 3.7.6. *Sea v una subsolución débil propia de (3.3) suave con condición inicial precompacta tal que $\nabla v \neq 0$. Si $F_t := \{v < t\}$ para $t \in [0, L]$. Entonces para cada $L > 0$ existe $\varepsilon(L) > 0$ tal que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon(L)]$ y $\tau \in [0, L-2]$, una solución clásica expansiva de (3.30) en $\overline{\Omega}_L$ satisface las siguientes estimaciones:*

$$u^{\varepsilon,\tau} \geq -\varepsilon \text{ en } \overline{\Omega_L},\ u^{\varepsilon,\tau} \geq v + \tau - L \text{ en } \overline{F_L} \setminus F_0 \tag{3.31}$$

$$|\nabla u^{\varepsilon,\tau}| \leq f(H_{\partial E_0}) + \varepsilon \text{ en } \partial E_0,\ |\nabla u^{\varepsilon,\tau}| \leq C(L) \text{ en } \partial F_L \tag{3.32}$$

$$|\nabla u^{\varepsilon,\tau}(x)| \leq \max_{\partial\Omega_L} |\nabla u^{\varepsilon,\tau}| + \varepsilon + \frac{1}{c},\ x \in \overline{\Omega}_L \tag{3.33}$$

$$||u^{\varepsilon,\tau}||_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega_L)} \leq C(\varepsilon, L)\,. \tag{3.34}$$

Demostración. A lo largo de la demostración llamaremos $u := u^{\varepsilon,\tau}$ y recordamos que una solución expansiva es tal que $f(H_+) \geq 0$. Diviremos la demostración en varios pasos.

1. El primer paso consistrá en encontrar un subsolución de (3.30) que llene el espacio entre $E_0 \subset F_0$ y F_0.

   Para esto definimos la familia de conjuntos dada por $G_0 := E_0$ y $G_s := \{x \in \Omega :\ \mathrm{dist}(x, G_0) < s\}$. Afirmamos que existe $s_L > 0$ tal que $F_L \subset G_{s_L}$. En efecto, como Ω es conexo podemos escribir,

   $$F_L = \{0 \leq v < L\} \cup F_0\,.$$

   Como F_0 y $\{0 \leq v < L\}$ son pre compactos, F_L tambien lo será. Luego, podemos cubrir F_L por la familia de abiertos $\{G_s\}_{s>0}$ y extraer una subfamilia finita que lo cubra. Pero como los $G_s \subset G_{s'}$ si $s < s'$, entonces existe $s(L) > 0$ tal que $F_L \subset G_{s_L}$.

   Consideremos $F(x, s) = x + s\nu_{G_0}$ con $x \in G_0 = E_0$ y ν_{G_0} es el vector normal unitario de ∂G_0 y $s \in [0, s_L]$. Notamos que esta es una variación normal de

∂G_0 hasta ∂F_L. Entonces por la Proposición 2.4.4 se tendrá que

$$\frac{\partial}{\partial s} H_{\partial G_s} = -\Delta s - s\,|A|^2 = -s\,|A|^2 \leq C_1(L) \text{ en } \partial G_s,\ s \in [0, s_L]\,,$$

donde $H_{\partial G_s}$ es la curvatura media escalar de ∂G_s. Integrando esta última relación con respecto a s se tendrá que

$$H_{\partial G_s} \leq \max_{\partial E_0} H_{\partial E_0} + C_1(L)s \leq C_2(L, c) \text{ en } \partial G_s,\ s \in [0, s_L]\,.$$

Ahora procederemos a construir la subsolución de (3.30). Sea

$$w_1(x) := \phi(s) = \phi\left(\operatorname{dist}(x, G_0)\right), \quad \text{para } x \in \overline{G_{s_L}} \setminus E_0\,,$$

donde ϕ es una función por determinar tal que $\phi' < 0$.
Gracias a la observación 3.1.3 tenemos las siguientes formulas para w_1,

$$\begin{aligned}
&\nabla w_1 = \phi' \nu_{G_s}\,,\ |\nabla w| = -\phi',\\
&\phi' H_{\partial G_s} = \phi' \operatorname{div}_\Omega\left(\nu_{G_s}\right) = -\phi' \operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\phi' \nu_{G_s}}{-\phi'}\right) = -\phi' \operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla w_1}{|\nabla w_1|}\right)\\
&\qquad = \frac{-\phi'}{|\nabla w|}\left(\delta^i_j - \frac{\nabla_i w_1 \nabla_j w_1}{|\nabla w|^2}\right)\nabla^2_{ij} w_1 = \left(\delta^i_j - \nu^i_{G_s}\nu^j_{G_s}\right)\nabla^2_{ij} w_1\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, como $\phi' < 0$, se tendrá que

$$\left(\delta^i_j - \nu^i_{G_s}\nu^j_{G_s}\right)\nabla^2_{ij} w_1 = \phi' H_{\partial G_s} \geq C_2 \phi'\,. \tag{3.35}$$

Recordemos que estamos buscando una función w tal que $\mathcal{Q}^\varepsilon w \geq 0$. Esto es equivalente a que $\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\,\mathcal{Q}^\varepsilon w_1 \geq 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\,Q^\varepsilon w_1 = \sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\left(\operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla w_1}{\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}}\right) - g\left(\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\right)\right)\\
&= \sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\left(\left(\frac{\delta^i_j}{\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}} - \frac{(\phi')^2}{((\phi')^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\nu^i \nu^j\right)\nabla^2_{ij} w_1 - g\left(\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\right)\right)\\
&= \left(\delta^i_j - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\right)\nu^i \nu^j\right)\nabla^2_{ij} w_1 - \sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\,g\left(\sqrt{(\phi')^2 + \varepsilon^2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Por (3.35) y que $\nu^i\nu^j\nabla^2_{ij}w_1 \geq \phi''$ se tendrá que

$$\begin{aligned}\sqrt{(\phi')^2+\varepsilon^2}Q^\varepsilon w_1 &\geq C_2\phi' + \frac{\varepsilon^2\phi''}{(\phi')^2+\varepsilon^2} - \sqrt{(\phi')^2+\varepsilon^2}g\left(\sqrt{(\phi')^2+\varepsilon^2}\right)\\ &\geq C_2\phi' + \frac{\varepsilon^2\phi''}{(\phi')^2+\varepsilon^2} - (\phi')^2 - \varepsilon^2\,.\end{aligned}$$

Por tanto, en virtud de encontrar una función ϕ que satisfaga

$$\varepsilon^2\phi'' \geq \left((\phi')^2+\varepsilon^2\right)\left((\phi')^2+\varepsilon^2 - C_2\phi'\right),$$

consideramos $\phi(s) := \dfrac{\varepsilon}{A}\left(-1+e^{-As}\right)$ donde A una constante por fijar. Notar que para $\varepsilon \leq e^{-As_L}$ se tendrá que $\varepsilon^2 \leq |\phi'| \leq \varepsilon$.
Por tanto si esogemos $A = A(L) := 4 + 2C_2$ y $\varepsilon \leq 1$, tendremos que

$$\begin{aligned}\left((\phi')^2+\varepsilon^2\right)\left((\phi')^2+\varepsilon^2-C_2\phi'\right) &\leq 2\varepsilon^2\left(2\varepsilon^2 + C_2\,|\phi'|\right)\\ &\leq \varepsilon^2\left(4+2C_2(\varepsilon e^{-(4+2C_2)s})\right)\\ &\leq \varepsilon^2\left((4+2C_2)(\varepsilon e^{-(4+2C_2)s})\right) = \varepsilon^2\phi''\,.\end{aligned}$$

Con esto tenemos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño la función

$$w_1(x) := \frac{\varepsilon}{4+2C_2}\left(-1+e^{s(4+2C_2)}\right),\ s := dist\,(x, \partial G_0)\,,$$

es una subsolución suave de $\mathcal{Q}^\varepsilon$ en $G_{s_L} \setminus E_0$. Aún más, w_1 es una subsolución viscosa de $\mathcal{Q}^\varepsilon$ en $G_{s_L} \setminus \overline{E_0}$. Ahora como se cumple que

$$u(x) = 0 \geq w_1(x) = \frac{-\varepsilon}{4+2C_2},\ \frac{\partial w_1}{\partial\nu} \geq -\varepsilon \text{ en } \partial E_0,$$

por el principio del máximo para soluciones viscosas tendremos que

$$u \geq w_1 \geq -\varepsilon \text{ en } \overline{\Omega}_L\,,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu} \geq -\varepsilon \text{ en } \partial E_0\,. \tag{3.36}$$

2. Ahora consideramos la función:

$$w_2 := \frac{L-1}{L} v + \tau - (L-1)\,.$$

Esta función viene de trasladar y reescalar la subsolución de (3.3) dada en el enunciado. Por tanto se tendrá que $Q^0 w_2 > 0$ en $\overline{F}_L \setminus F_0$ ya que

$$\begin{aligned} Q^0 w_2 &= f\left(\operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla w_2}{|\nabla w_2|}\right)\right) - |\nabla w_2| \\ &= f\left(\operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right)\right) - \frac{L-1}{L}|\nabla v| \\ &> f\left(\operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right)\right) - |\nabla v| \geq 0\,, \end{aligned}$$

ya que v es subsolución de (3.3). Además, como el dominio es compacto y $\nabla v \neq 0$, se tendrá que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $Q^\varepsilon w_2 > 0$.
Notar que para $\tau \in [0, L-2]$,

$$\begin{aligned} &u \geq -\varepsilon \geq -1 \geq w_2 \text{ en } \partial F_0\,, \quad u = \tau = w_2 \text{ en } \partial F_L\,, \\ &\frac{\partial w_2}{\partial \nu} = -\frac{L-1}{L}|\nabla v| \geq -\frac{L-1}{L} f\left(H_{\partial F_L}\right) \geq -C(L) \text{ en } \partial F_L\,. \end{aligned}$$

Entonces por el principio del maximo se tendrá que:

$$u \geq w_2 \geq v + \tau - L \text{ en } \overline{F}_L \setminus F_0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq -C(L) \text{ en } \partial F_L\,. \tag{3.37}$$

Por otro lado, como cualquier función constante es una supersolución (3.30), por el principio del máximo se tendrá que

$$u \leq \tau \text{ en } \Omega_L\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ en } \partial F_L\,. \tag{3.38}$$

Probando así la estimación (3.31) y la segunda parte de la estimación (3.32).

3. Ahora construiremos una supersolución que comience en ∂E_0. Sea w_3 una fun-

ción suave que se anule en ∂E_0 tal que

$$0 < f(H_+) < \frac{\partial w_3}{\partial \nu} \leq f(H_+) + \varepsilon, \ \text{ en } \partial E_0 \ .$$

Por tanto, en ∂E_0, se tendrá que $\nabla w_3 \neq 0$ y

$$Q^0 w_3 = f\left(H_+\right) - |\nabla w_3| < f(H_+) - f(H_+) = 0 \ .$$

Luego para $\delta > 0$ suficientemente chico tendremos que $Q^0 w_3 < 0$ y $|\nabla w_3| > 0$ en $U := \{0 \leq w_3 \leq \delta\}$.
Consideremos ahora una reparametrización de w_3 dada por

$$w_4 := \frac{w_3}{1 - \delta^{-1} w_3}, \ x \in U \ .$$

Notar que $w_3 = w_4 = 0$ en ∂E_0 y $\nabla w_4 = \dfrac{\nabla w_3}{(1-\delta^{-1}w_3)^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} Q^0 w_4 &= \frac{1}{(1-\delta^{-1}w_3)^2}\left(f\left(\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\nabla w_3}{|\nabla w_3|}\right)\right)(1-\delta^{-1}w_3)^2 - |\nabla w_3|\right) \\ &\leq \frac{1}{(1-\delta^{-1}w_3)^2} Q^0 w_3 < 0 \ . \end{aligned}$$

Además $w_4 \to \infty$ en $\partial U \setminus \partial E_0$. Por tanto para $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño se tendrá que $Q^\varepsilon w_4 < 0$ en $V = \{0 \leq w_4 \leq L\}$.
Notar que por (3.38),

$$u \leq \tau \leq L - 2 \leq L \ ,$$

así $u \leq w_4$ en ∂V y por el principio del máximo $u \leq w_4$ en V. Con esto se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq \frac{\partial w_4}{\partial \nu} = \frac{\partial w_3}{\partial \nu} \leq f(H_+) + \varepsilon \text{ en } \ \partial E_0 \ , \tag{3.39}$$

para $\varepsilon > 0$ pequeño. Con esto hemos probado la estimación (3.32).

4. Ahora probaremos (3.33). Como u es una solución suave de (3.30) se tendrá

que

$$g\left(\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2}\right)=H_{N_t^{\varepsilon,\tau}}\ .$$

Además, combinando los resultados de la observación 3.7.2 se tendrá que

$$\begin{aligned}
\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2} &\leq \sup_t \max_{N_t^{\varepsilon,\tau}}\left(1+c\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2}\right)H_{N_t^{\varepsilon,\tau}}\\
&\leq \max_{\partial\Omega_L}\left(1+c\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2}\right)H_{N_t^{\varepsilon,\tau}}\\
&\leq \max_{\partial\Omega_L}\left(1+c\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2}\right)c^{-1}e^{\frac{kL}{n-1}}\\
&= e^{\frac{kL}{n-1}}\max_{\partial\Omega_L}\left(\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2}+\frac{1}{c}\right)\\
&\leq e^{\frac{kL}{n-1}}\max_{\partial\Omega_L}\left(|\nabla u|+\varepsilon+\frac{1}{c}\right)\ .
\end{aligned}$$

Además, como $k<0$ y $|\nabla u(x)|\leq\sqrt{|\nabla u(x)|^2+\varepsilon^2}$, se tendrá que

$$|\nabla u(x)|\leq \max_{\partial\Omega_L}|\nabla u|+\varepsilon+\frac{1}{c}\ ,\ \forall\, x\in\overline{\Omega}_L\ .$$

Con esto probamos la estimación (3.33).

5. Notar que por (3.32) y (3.33) se tendrá que $||u||_{\mathcal{C}^{0+1}\left(\overline{\Omega}_L\right)}\leq C(L,c)$ para ε suficientemente pequeño. Reeplicando el método de ([15], 13.2), se tendrá que por la estimaciones de Nash-De Giorgi-Moser que $||u||_{\mathcal{C}^{1+\alpha}\left(\overline{\Omega}_L\right)}\leq C(L,c,\varepsilon)$ con $\alpha=\alpha(\Omega_L)$. Luego (3.34) finaliza con las estimaciones de tipo Schauder de [15].

□

Observación 3.7.7. Notar que de la demostración del Lema 3.7.6 tenemos que para todo $L>2$ y $\varepsilon\in(0,\varepsilon(L)]$,

$$|\nabla u(x)|\leq e^{\frac{kL}{n-1}}\left(\max_{\partial\Omega_L}|\nabla u|+\varepsilon+\frac{1}{c}\right),\ \forall x\in\overline{\Omega}_L\ .$$

Dandonos así un comportamiento $\nabla u\to 0$ cuando $L\to\infty$.

Lema 3.7.8. *Bajo las hipotesis del Lema 3.7.6 existe solución suave de (3.29).*

Demostración. Dividiremos la demostración en varios pasos.

1. Primero notamos que el operador $Q^\varepsilon u$ tiene la siguente forma para $u := \varepsilon w$

$$Q^\varepsilon u = f\left(\operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{|\nabla w|^2+1}}\right)\right) - \varepsilon\sqrt{|\nabla w|^2+1}$$

para $\varepsilon > 0$. Por tanto, si definimos el operador $F : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_L)\times\mathbb{R} \to \mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}_L)$ por

$$F(w,\varepsilon) := f\left(\operatorname{div}_\Omega\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{|\nabla w|^2+1}}\right)\right) - \varepsilon\sqrt{|\nabla w|^2+1}\,,$$

tendremos que (3.30) es equivalente a $F(w,\varepsilon) = 0$. Notemos que estamos interezados en que $w = 0$ en $\partial\Omega_L$. Por otro lado, como f es $\mathcal{C}^1$ y $f(0) = 0$, se tendrá que F es $\mathcal{C}^1$ y tenemos la solución trivial $F(0,0) = 0$. Por tanto seguiremos la estrategia de la sección 2.2 para mostrar que $F(w,\varepsilon) = 0$ posee solución única.

Primero calcularemos el operador linealizado de F en $w = 0$. En efecto sea $(w_s)_s \subset \mathcal{C}_c^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_L)$ tal que $w_0 = 0$ y $\left.\frac{dw_s}{ds}\right|_{s=0} = \varphi \in \mathcal{C}_c^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_L)$. Entonces calculamos el termino

$$\left.\frac{d}{ds}\sqrt{|\nabla w_s|^2+1}\right|_{s=0} = -\left(|\nabla w_s|^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}\left.\left\langle\nabla\frac{dw_s}{ds},\nabla w_s\right\rangle\right|_{s=0} = \langle\nabla\varphi, 0\rangle = 0\,.$$

Luego el termino

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\left\langle\nabla\frac{1}{\sqrt{|\nabla w_s|^2+1}},\nabla w_s\right\rangle\right|_{s=0} &= \left\langle\nabla\left.\frac{d}{ds}\left(|\nabla w_s|^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}\right|_{s=0}, 0\right\rangle + \langle 0,\nabla\varphi\rangle\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Finalmente el termino

$$\frac{d}{ds}\frac{\Delta w_s}{\sqrt{|\nabla w_s|^2+1}}\Bigg|_{s=0} = \Delta\varphi + 0\,\frac{d}{ds}\left(|\nabla w_s|^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}\Bigg|_{s=0} = \Delta\varphi\,.$$

Entonces como $f'(0)=1$, se tendrá que

$$DF(0,0)\varphi = \frac{d}{ds}F(0+w_s,0)\Bigg|_{s=0} = \Delta\varphi\,.$$

Por tanto, como $DF(0,0)=\Delta : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_L)\to\mathcal{C}^{0+\alpha}(\overline{\Omega}_L)$ es un isomorfismo, se tendrá que por el Teorema 3.2.2 para ε suficientemente pequeño $F(w,\varepsilon)=0$ posee solución única. Con esto probamos que (3.30) posee solución para $\tau=0$.

2. Sea $\varepsilon>0$ fijo. Definimos el conjunto

$$I_\varepsilon := \{\tau\in\mathbb{R}\ : \text{el problema (3.30) posee solución para } \varepsilon\}\ .$$

Por el paso anterior tenemos que $0\in I$. Queremos demostrar que $I=[0,L-2]$. Primero mostraremos que el conjunto $I\cap[0,L-2]$ es cerrado.
En efecto sea $(\tau_n)\subset I$ tal que $\tau_n\to\tau$. Entonces para cada τ_n existe solución $u^{\tau_n,\varepsilon}\in\mathcal{C}_c^{2+\alpha}(\Omega_L)$ de (3.30). Notemos que por el Lema 3.7.6 $(u^{\tau_n,\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en $C_c^{2+\alpha}$. Luego por el Teorema de Arzela Ascoli existe una subsucesión $(u^{\tau_{n_k},\varepsilon})$ que converge a una función u en $\mathcal{C}_c^2(\overline{\Omega}_L)$. Ahora como F es C^1 tenemos que

$$F(u,\varepsilon)=\lim_{k\to\infty}F(u^{\tau_{n_k},\varepsilon},\varepsilon)=0\,,$$

además como $u^{\tau_{n_k},\varepsilon}|_{\partial F_L}=\tau_{n_k}$ se tendrá que $u|_{\partial F_L}=\tau$. Por tanto u es solución de (3.30) para τ y ε. Así $I\cap[0,L-2]$ es cerrado.

Ahora mostraremos que I es abierto. Para esto definimos el operador G : $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_L)\times\mathbb{R}\to\mathcal{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}_L)\times\mathcal{C}^{2+\alpha}(\partial\Omega_L)$ dado por

$$G(u,\tau) := \Big(\mathcal{Q}^\varepsilon u,\ \pi(u)-\tau\chi_{\partial F_L}\Big)\ ,$$

donde $\pi(u) = u|_{\partial\Omega_L}$. Notar además que G es $\mathcal{C}^1$ y que (3.30) es equivalente a $G(u,\tau) = (0,0)$.
Calculamos el operador linearizado de G en una solución u de (3.30) con $\varepsilon > 0$ y τ fijos,

$$DG(u,\tau) := \begin{pmatrix} D\mathcal{Q}^\varepsilon(u) \\ \pi \end{pmatrix} : \mathcal{C}^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}_L\right) \to \mathcal{C}^{0+\alpha}\left(\overline{\Omega}_L\right) \times \mathcal{C}^{2+\alpha}\left(\partial\Omega_L\right) .$$

Notar que podemos escribir

$$\mathcal{Q}^\varepsilon(u) = \nabla_i A^i\left(\nabla u\right) - g\left(B(\nabla u)\right)$$
$$A(p) = A^i(p_i) := \frac{p_i}{\sqrt{|p|^2 + \varepsilon^2}}, \;\; B(p) := \sqrt{|p|^2 + \varepsilon^2}\,.$$

Por tanto, como $g'(x) = (1+cx)^{-2}$, tendremos que el siguiente operador elíptico

$$D\mathcal{Q}^\varepsilon u(\varphi) = \nabla_i A^i_{p_j}\left(\nabla u\right)\nabla_j\varphi - g'\left(\left(B(\nabla u)\right)\right) B_{p_j}(\nabla u)\nabla_j\varphi$$

solo posee la solución cero. Por tanto usando la teoría clásica de existencia y unicidad de ecuaciones elípticas tendremos que $DG(u,\tau)$ es un isomorfismo. Finalmente citamos el Teorema 2.2.2 para tener que el conjunto I es abierto. Así por conexidad $I = [0, L-2]$ y en particular para $\tau = L-2$ el problema (3.29) posee solución $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_L)$. La regularidad se sigue de las estimaciones clásicas de tipo Schauder.

□

Ahora tenemos todos los ingredientes para probar la existencia de minimizadores del funcional J_u dada una condición inicial E_0.

Teorema 3.7.9. *Sea v una subsolución débil propia de (3.3) con condición inicial F_0 precompacta en Ω. Entonces para cualquier conjunto no vacio abierto suave $E_0 \subset \Omega$ existe una solución propia $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ con condición inicial E_0 única en $\Omega \setminus E_0$ que* *satisface*

$$|\nabla u(x)| \le \sup_{\partial E_0} f(H_+) + c^{-1} \ \ c.t.p \ \ x \in \Omega \setminus E_0\, . \tag{3.40}$$

Demostración.

1. Primero asumiremos que la subsolución v de (3.3) es suave con $\nabla v \neq 0$. Entonces por el Lema 3.7.8 se tendrá que para cada $L > 0$ existen $\varepsilon = \varepsilon(L)$ y una solución $u^\varepsilon = u^{\varepsilon, L-2}$ de (3.29) en Ω_L donde $\varepsilon \to 0$ cuando $L \to \infty$.
   Luego por las estimaciones (3.32) y (3.33) del Lema 3.7.6 y la observación 3.7.7 se tendrá que

   $$|\nabla u^\varepsilon(x)| \le \sup_{\partial E_0} f(H_+) + 2\varepsilon + c^{-1}. \tag{3.41}$$

   para L suficientemente grande tal que ∂F_L no influya en ∇u. Como los gradientes de u^ε estan uniformemente acotados podemos extraer gracias al Teorema de Arzela Ascoli las siguientes subsucesiones:
   $L_i \to \infty$, $\varepsilon_i \to 0$ y u_i tal que los u_i resuelven (3.29), satisfacen (3.39) y $u_i \to u$ uniforme en compactos de $\Omega \setminus E_0$ con $u \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega \setminus E_0)$.
   Notar que en los puntos donde u es diferenciable se satisface,

   $$|\nabla u(x)| \le \sup_{\partial E_0} f(H_+) + c^{-1}\, .$$

   Además por la estimación (3.31) del Lema 3.7.6 se tiene que con $\tau = L - 2$,

   $$u \ge 0 \text{ en } \Omega \setminus E_0,\ u \to \infty \text{ cuando } x \to \infty\, .$$

2. Ahora consideramos el problema en una dimensión más. Sean $U_i(x,z) = u_i(x) - \varepsilon_i z$ como en la observación 3.7.4 y $U(x,z) = u(x)$, entonces por el paso anterior

   $$U_i \to U$$

   uniformemente en compactos de $\Omega \setminus E_0 \times \mathbb{R}$ con cotas Lipschitz locales. Con esto tenemos que las hipersuperficies $N^i_t = \{U_i = t\}$ satisfacen de manera clásica

el flujo expansivo de (3.3) en $\Omega_{L_i} \times \mathbb{R}$. Luego por la Proposición 3.3.9 las hipersuperficies N_t^i minimizan el funcional $\mathcal{J}_u$ en $\Omega_{L_i} \times \mathbb{R}$.
Notar que para los compactos K de $\Omega \setminus E_0 \times \mathbb{R}$ se tendrá que

$$ess \sup_K \left|\nabla_{\Omega \setminus E_0 \times \mathbb{R}} U\right| \leq C(K) \,.$$

Entonces por la Proposición 3.6.1 y el Lema 3.3.8 tendremos que U es solución débil de (3.3) en $\Omega \setminus \overline{E}_0 \times \mathbb{R}$.

3. Afirmamos que u es solución débil de (3.3) en $\Omega \setminus \overline{E}_0$. En efecto sea $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega \setminus \overline{E}_0)$ con $\{v \neq u\} \subset\subset \Omega \setminus \overline{E}_0$ un competidor para u del funcional J_u. Consideramos la siguiente función de corte $\phi_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi_s(z) := \begin{cases} 1, & \text{para } z \in [0, s] \\ \phi(s), & \text{para } z \in [-1, 0] \\ \phi(s - z), & \text{para } z \in [s, s+1] \\ 0, & \text{para } z \in \mathbb{R} \setminus [-1, s+1] \end{cases} \,,$$

donde ϕ es tal que $\phi_s \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con $\phi_s(z) \in [0, 1]$ y $|\phi_s'| \leq 2$ para todo z.
Definimos el siguiente competidor para la función $U(x, z) = u(x)$,

$$\begin{aligned} V(x, z) :&= v(x)\phi_s(z) + (1 - \phi_s(z))\, u(x) \,. \\ \Rightarrow \left|\nabla_{\Omega \setminus \overline{E}_0 \times \mathbb{R}} V\right| &= \left(|\phi_s \nabla v + (1 - \phi_s)\nabla u|^2 + |\phi_s'|\, |v - u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \phi_s\, |\nabla v| + (1 - \phi_s)\, |\nabla u| + |\phi_s'|\, |v - u| \end{aligned}$$

Sea K un comapcto conteniendo a $\{u \neq v\}$. Notar que

$$\{V \neq U\} \subset K \times [-1, s+1] \subset\subset \Omega \setminus \overline{E}_0 \times \mathbb{R} \,.$$

Entonces de $J_U(U) \leq J_U(V)$ se tendrá que

$$\int\limits_{K\times[-1,s+1]} |\nabla u| + ug\left(|\nabla u|\right) d(x,z) \leq$$

$$\int\limits_{K\times[-1,s+1]} \phi_s\,|\nabla v| + (1-\phi_s)\,|\nabla u| + |\phi_s'|\,|v-u| + \left(v\phi_s + (1-\phi_s)\,u\right) g\left(|\nabla u|\right) d(x,z)$$

$$= \int\limits_{K\times[-1,s+1]} \phi_s\left(|\nabla v| + vg\left(|\nabla u|\right)\right) + (1-\phi_s)(|\nabla u| + ug(|\nabla u|)) + |\phi_s'|\,|v-u|\,d(x,z)\,.$$

Por tanto obtenemos que

$$\int\limits_{K\times[-1,s+1]} \phi_s\left(|\nabla u| + ug\left(|\nabla u|\right)\right) d(x,z)$$
$$\leq \int\limits_{K\times[-1,s+1]} \phi_s\left(|\nabla v| + vg\left(|\nabla u|\right)\right) + |\phi_s'|\,|v-u|\,d(x,z)\,.$$

De esto se tendrá que

$$\begin{aligned}
sJ_u(u) &= s\int\limits_K |\nabla u| + ug\left(|\nabla u|\right) dx \\
&\leq \int\limits_{K\times[-1,s+1]} \phi_s\left(|\nabla u| + ug\left(|\nabla u|\right)\right) d(x,z) \\
&\leq \int\limits_{K\times[-1,s+1]} \phi_s\left(|\nabla v| + vg\left(|\nabla u|\right)\right) + |\phi_s'|\,|v-u|\,d(x,z) \\
&\leq (s+2)\int\limits_K |\nabla v| + vg\left(|\nabla u|\right) dx + \int\limits_{K\times[-1,0]\cup[1,2]} |\phi_s'|\,|v-u|\,d(x,z) \\
&\leq (s+2)J_u(v) + 4\int\limits_K |v-u|\,dx.
\end{aligned}$$

Luego diviendo por s y tomando $s\to\infty$ se tendrá que $J_u(u) \leq J_u(v)$. Finalmente extendemos u negativamente a E_0 para obtener que $E_0 = \{u < 0\}$.

Ahora analizaremos el caso donde el gradiente de la subsolución v puede anularse.

1. Sea $L > 0$ fijo y escogemos un abierto U_L con frontera suave tal que $F_L \subset\subset U_L \subset\subset$.

   Haciendo un cambio de coordenadas si es necesario tenemos que la función $\alpha \ln(s)$ es una subsolución del flujo débil de (3.3) suave en $\partial U_L \times [C, \infty)$ con $\alpha > 0$ y $C \in \mathbb{R}$.
   En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}_{\partial U_L \times [C,\infty)} \left(\frac{\nabla_{\partial U_L \times [C,\infty)} \alpha \ln(s)}{\left|\nabla_{\partial U_L \times [C,\infty)} \alpha \ln(s)\right|} \right) = \operatorname{div}_{\partial U_L \times [C,\infty)} \left(\frac{s}{\alpha} (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1\text{-veces}}, \frac{\alpha}{s}) \right) = 0 \,, \\
&g \left(\left|\nabla_{\partial U_L \times [C,\infty)} \alpha \ln(s)\right| \right) = g \left(\frac{\alpha}{s} \right) = \frac{\alpha}{s + c\alpha} \,.
\end{aligned}$$

   Para que lo anterior quede no negativo se tiene que cumplir que $\alpha \geq -cC^{-1}$ si $C < 0$ o $\alpha > 0$ si $C \geq 0$. Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
&g \left(\left|\nabla_{\partial U_L \times [C,\infty)} \alpha \ln(s)\right| \right) - \operatorname{div}_{\partial U_L \times [C,\infty)} \left(\frac{\nabla_{\partial U_L \times [C,\infty)} \alpha \ln(s)}{\left|\nabla_{\partial U_L \times [C,\infty)} \alpha \ln(s)\right|} \right) \geq 0 \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} J_{\alpha \ln(s)} \left(w_t \right) \bigg|_{t=0} \geq 0 \,,
\end{aligned}$$

   donde $w_t \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc} \left(\partial U_L \times [C, \infty) \right)$ es cualquier familia tal que $w_t \geq \alpha \ln(s)$. Con esto se tendrá que

$$J_{\alpha \ln(s)} \left(\alpha \ln(s) \right) \leq J_{\alpha \ln(s)} \left(w_t \right)$$

   para cualquier competidor w_t que cumpla $\alpha \ln(s) \leq w_t$ cumpliendose lo afirmado.

2. Usando $\alpha \ln(s)$ como en el caso anterior tendremos que por el paso anterio existe una solución débil de (3.3) propia u_L en Ω_L con condición inicial E_0. Notar que u_L satisface (2.39).

3. Por otro lado, por el Lema 3.6.2 tenemos que $\min\{v, L\}$ es subsolcuión débil de (3.3) en U_L. Luego por la Proposición 3.6.3 parte (2) tendremos que $u_L \geq v$ en $F_L = \{v < L\}$.

4. Ahora haciendo tender $L \to \infty$ y ocupando el Lema 3.6.1 podremos extraer una subsucesión que converge a una función u en todo Ω con $u \geq v$. Luego volviendo a usar el Lema 3.6.2 parte (3) tendremos que u es única y satisface la estimación (3.39). Concluyendo la demostración.

□

Observación 3.7.10. Para efectos del teorema de existencia necesitamos una subsolución débil propia de (3.3) v con condición precompacta F_0 que contenga la condición inicial dada E_0 del problema original. Para el caso de $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ con K compacto podemos utilizar la subsolución dada por las esferas que se expande vista en el ejemplo 2.1.4.

3.8. Resultados Topológicos

En esta sección discutiremos sobre algunos resultados topológicos del flujo (3.3) en su versión débil.

Proposición 3.8.1.

1. *Una solución débil de (3.3) no posee máximos ni mínimos estrictos locales.*

2. *Supongamos que el dominio Ω es simplemente conexo. Sea $(E_t)_{t>0}$ un minimizador del funcional $\mathcal{J}_u$ con condición inicial E_0 tal que ∂E_0 es conexo. Entonces N_t se mantendrá conexo si se mantiene compacto.*

Demostración.

1. Hacemos notar que si u posee un mínimo (resp. máximo) estricto local en Ω, entonces existirá una componente precompacta $E \subset\subset \Omega$ de $\{u < t\}$ (resp. $\{u > t\}$) para algún t. Luego, si este fuese el caso, sea

$$v = \begin{cases} v = u, & \text{en } \Omega \setminus E \\ v = t, & \text{en } E \end{cases}.$$

Notamos que $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$ y por tanto es un competidor de u para el funcional J_u. Como u es solución débil de (3.3) y $\{u \neq v\} \subset\subset E \subset\subset \Omega$, se tendrá que

$$\begin{aligned}
&J_u(u) \leq J_u(v) \\
&\Rightarrow \int_E |\nabla u| + ug\left(|\nabla u|\right) dx \leq \int_E |\nabla v| + vg\left(|\nabla u|\right) dx = \int_E tg\left(|\nabla u|\right) dx \\
&\Rightarrow \int_E |\nabla u| + (u-t)g\left(|\nabla u|\right) dx \leq 0\,.
\end{aligned}$$

Si u tuviese un mínimo estricto local entonces $E \subset\subset \{u > t\}$, tendríamos que

$$\begin{aligned}
&\int_E |\nabla u| + \underbrace{(u-t)}_{>0} g\left(|\nabla u|\right) dx \leq 0 \\
&\Rightarrow |\nabla u| + (u-t)g\left(|\nabla u|\right) = 0 \text{ c.t.p } x \in E \\
&\Rightarrow u \geq t, |\nabla u| = 0 \text{ c.t.p } x \in E \\
&\Rightarrow u = t \text{ en } E\,.
\end{aligned}$$

Una contradicción. Por otro lado, si u tuviese un máximo estricto local entonces $E \subset\subset \{u < t\}$. Escogemos t tal que $u > t-1$ en E. Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_E \underbrace{|\nabla u| - g\left(|\nabla u|\right)}_{\geq 0} dx \leq \int_E |\nabla u| + \underbrace{(u-t)}_{>-1} g\left(|\nabla u|\right) dx \leq 0 \\
&\Rightarrow |\nabla u| + (u-t)g\left(|\nabla u|\right) = 0 \text{ c.t.p } x \in E \\
&\Rightarrow (u-t) = -\frac{|\nabla u|}{g(|\nabla u|)} = -(1 + c\,|\nabla u|) \leq -1 \;\text{ c.t.p } x \in E \\
&\Rightarrow u \leq t-1 \text{ en } E\,.
\end{aligned}$$

Una contradicción. Por tanto una solución débil de (3.3) no puede tener mínimos ni máximos estrictos locales.

2. Sean $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{E}_0$ y $t > 0$. Por el Corolario 2.4.3 se tiene que cada hipersuperficie N_t puede ser aproximada por una familia de hipersuperficies N_{s_i} de clase $\mathcal{C}^1$ sin saltos. Por tanto asumiremos que las hipersuperficies N_t vienen dadas por

los conjuntos de nivel $\{u = t\}$.

Sea $A = \{u < t\}$. Como u es propia tenemos que $A \cap \Omega_0 = \{0 < u < t\}$ es acotado. Pero por la parte anterior ninguna componente de A puede estar compactamente metida en Ω. Luego cada componente de A intersecta a $\partial\Omega_0 = \partial E_0$. Pero como ∂E_0 es conexo se tendrá que A también es conexo. Análogamente el conjunto $B = \{u > t\}$ también será conexo.

Entonces si N_t posee más de una componente conexa, por la conexidad de A y B, existirá una curva cerrada γ que parte en ∂E_0 curza N_t por la primera componente conexa y retorna por la segunda componente conexa. Por tanto γ no puede ser homótopa a cero contradiciendo la simple conexidad de Ω.

□

Ahora probaremos el resultado de convergencia de soluciones débiles expansivas del flujo (3.3) en $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Definición 3.8.2. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $N \subset \mathbb{R}^n$ una superficie. Definimos la excentrizidad de N en como

$$\theta(N) := \frac{R(N)}{r(N)}$$

donde $[r(N), R(N)]$ es el intervalo más pequeño tal que $N \subset \overline{B_{R(M)}(0)} \setminus B_{r(N)}(0)$.

Lema 3.8.3. *La única solución expansiva del flujo (3.3) en su versión débil en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con conjuntos de nivel compactos es la esfera que se expande.*

Demostración. Sea v una solución débil expansiva de (3.3) en $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sean $P_t = \{v = t\}$ los conjuntos de nivel asociados.
Sea $\rho(h)$ la solución del flujo expansivo de la esfera de radio $\rho(0) = R(P_t)$. Entonces por comparación existe una constante $k < 0$ tal que la curvatura media de la evolución de la esfera satisface

$$H(x,h) \geq e^{\frac{kh}{n-1}} \min_{B_{R(P_t)}(0)} H(x,0) \Rightarrow \rho(h) \leq e^{-\frac{kh}{n-1}} R(P_t)\,.$$

Ahora, como $\rho(h) \geq R\left(P_{t+h}\right)$, se tendrá que

$$R\left(P_{t+h}\right) \leq e^{Ah} R\left(P_t\right) \ \ \forall\, t, h > 0\,. \tag{3.42}$$

De esto obtenemos que la excentricidad $\theta\left(P_t\right)$ es dreciente en función de t.
En efecto, usando las esferas con radios $R(P_t)$ y $r(P_t)$ que se expanden por el flujo como barreras para P_t tendremos que para todo $s > t$

$$R(P_s) \leq e^{As} R(P_t), \ \ r(P_s) \geq e^{As} r(P_t)\,.$$

Luego,

$$R(P_s) r(P_t) - R(P_t) r(P_s) \leq e^{As} R(P_t) r(P_t) - e^{As} R(P_t) r(P_t) = 0\,.$$

Obteniendo así que $\theta(P_s) \leq \theta(P_t)$ para todo $s > t$.

Por otro lado recordemos que $P_t \subset \overline{B_{R(M)}(0)} \setminus B_{r(N)}(0)$ de esto se cumple que $P_t \cap \partial B_{P_{r(P_t)}} \neq \emptyset$. Además existe R_0 tal que

$$|\nabla v(x)| \leq C e^{\frac{|x|k}{n-1}}, \ \ \forall\ |x| \geq R_0\,. \tag{3.43}$$

Sea t_1 tal que $r(P_t) \geq R_0$ para $t \geq t_1$. Como los P_t son compactos, se tendrá que existe una constante C_1 tal que $v > t - C_1$ en $\partial B_{r(P_t)}(0)$. Por tanto $P_{t-C_1} \cap \partial B_{r(P_t)}(0) = \emptyset$, pero P_{t-C_1} no puede tener componentes fuera de $B_{r(P_t)}(0)$ pues contradice el Lema 3.8.4. Luego $R\left(P_{t-C_1}\right) < r(P_t)$. Combinando esto con (3.42) se tendrá que

$$R\left(P_t\right) \leq e^{AC_1} R\left(P_{t-C_1}\right) \leq e^{AC_1} r\left(P_t\right), \ \ \forall\, t \geq t_1\,.$$

Por tanto

$$\theta(P_t) \leq e^{AC_1} \tag{3.44}$$

para todo $t \geq t_1$.

Sea λ_i una sucesión de números reales que tienda a infinito. Consideremos las siguientes reparametricaciones

$$P_t^{\lambda_i} := \lambda_i P_t = \{\lambda x : \, x \in P_t\} \, , \; v^{\lambda_i}(x) := v\left(\frac{x}{\lambda_i}\right) \, .$$

Como $H_{P_t^{\lambda_i}} = \lambda_i^{-1} H_{P_t}$, se tendrá que $v^{\lambda_i}(x)$ satisface

$$f\left(\lambda_i^{-1} H_{P_t}\right) = \lambda_i^{-1}\left|\nabla v^{\lambda_i}\right| \Leftrightarrow \mathrm{div}_\Omega\left(\frac{\nabla v^{\lambda_i}}{\left|\nabla v^{\lambda_i}\right|}\right) = \frac{\left|\nabla v^{\lambda_i}\right|}{1 + c\lambda_i^{-1}\left|\nabla v^{\lambda_i}\right|} \, . \tag{3.45}$$

Notar que por (3.43)

$$\left|\nabla v^{\lambda_i}(x)\right| \leq \lambda_i e^{\frac{|x|k}{n-1}}\left(C + \frac{\lambda_i}{c}\right), \; \forall \; |x| \geq R_0 \, .$$

Luego se puede modificar la demostración de la Proposición 3.6.1 para mostrar que existe una subsucesión λ_{i_k} de (λ_i) tal que $\left(P_t^{\lambda_{i_k}}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ converge a una solución $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de (3.45).

Como (3.45) y (3.44) son ivariantes bajo re escalamientos, también se satisfacen para cada Q_t. De esto obtenemos que cada Q_t es no vacío y compacto. Además se cumplen que

$$\theta\left(Q_t\right) = \theta_0 := \sup_t \theta\left(P_t\right), \; \forall \, t \in \mathbb{R} \, .$$

Afirmamos que $\theta_0 = 1$. En efecto, si $\theta_0 > 1$ tendríamos que Q_0 estaría contenido entre $\partial B_r(0)$ y $\partial B_{r\theta_0}(0)$ para algún $r > 0$, siendo tangente en cada uno y pero sin coincidir con ninguna de las esferas. Haciendo una perturbación por el flujo suave apuntando hacia a fuera (resp. apuntando hacia dentro) para la esfera $\partial B_r(0)$ (resp. $\partial B_{r\theta_0}(0)$) se tendrá por el principio del máximo y por el principio de comparación para el flujo débil de Q_t que $\theta(Q_t)$ también decrece contradiciendo el hecho que $\theta(Q_t)$ es constante. Por tanto $\theta(Q_t) = 1$, teniendo así que P_t es una esfera para todo t. □

Teorema 3.8.4. *Sea u una solución débil expansiva de (3.3) en $\mathbb{R}^n \setminus K$ con K compacto. Suponga además que $\{u = t\}$ son compactos para todo $t \geq t_0$. Entonces bajo una reparametrización $\{u = t\}$ converge a una esfera que se expande.*

Demostración. Pendiente!**??** □

Apéndice A

Funciones de variación acotada y conjuntos de Caccioppoli

A.1. Funciones de variación acotada

Esta sección está planificada, a modo recopilatorio, para el entendimiento de los resultados de la sección 2.3. del capítulo 2. Los resultados y definiciones están basados en [13].

Definición A.1.1.

1. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in L^1(\Omega)$. Se definen los símbolos

$$||Df||\,(\Omega) : = \sup \left\{ \int\limits_{\Omega} f \mathrm{div}_{\mathbb{R}^n}\,(\varphi)\, dx \;:\; \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n),\ |\varphi| < 1 \right\},$$

$$||f||_{\mathcal{BV}(\Omega)} : = ||f||_{L^1(\Omega)} + ||Df||\,(\Omega)\,.$$

2. Definimos el espacio de las funciones de variación acotada en Ω como

$$BV(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega) \;:\; ||f||_{\mathcal{BV}(\Omega)} < \infty \right\}.$$

3. Además se define el espacio de las funciones de variación local acotada como

$$\mathcal{BV}_{loc}(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) \ : \ ||f||_{\mathcal{BV}(V)} < \infty \,, \forall\, V \subset\subset \Omega \right\} .$$

Observación A.1.2. Hacemos notar que por el Teorema de Arzela-Ascoli el espacio $BV(\Omega)$ junto con la norma $||\cdot||_{\mathcal{BV}}$ es un espacio de Banach.

Ejemplo A.1.3. Si $f \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$, entonces $||Df||\,(\Omega) = \int\limits_{\Omega} |Df|\, dx$.

El siguinte lema es sobre la convergencia de la seminorma en $\mathcal{BV}$.

Lema A.1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, si $(f_n)_n \subset \mathcal{BV}(\Omega)$ converge a $f \in \mathcal{BV}(\Omega)$ en $L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces*

$$||Df||\,(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||\,(\Omega).$$

Lema A.1.5. *Se tienen las siguientes inclusiones*

$$\mathcal{W}^{1,1}(\Omega) \subset \mathcal{BV}(\Omega), \;\; \mathcal{W}^{1,1}_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{BV}_{loc}(\Omega)$$

Observación A.1.6. Las inclusiones del Lema A.1.4 son extrictas, como ejemplo basta considerar la función característica de un conjunto acotado F con frontera $\mathcal{C}^2$ y con $|\partial F \cap \Omega| < \infty$. Luego,

$$||\chi_F||_{\mathcal{BV}(\Omega)} := ||\chi_F||_{L^1(\Omega)} + ||D\chi_F||\,(\Omega) = \lambda\,(F \cap \Omega) + |\partial F \cap \Omega| < \infty.$$

Pero $\chi_F \notin \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$.
En efecto supongamos que $0 \in F$ y sea $g = \chi_F$. Entonces, si $g \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$, tendremos que su derivada distribucional $g' = 0$ conicidiría con su derivada débil en $L^1(\Omega)$. Por tanto para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tendríamos que

$$\int\limits_{\Omega} g \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial x^i} dx = 0\,. \tag{A.1}$$

Luego bastaría tomar una función de corte $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\eta(x) \begin{cases} 0, & |x| < \frac{1}{2} \\ 1, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

y considerar $\varphi(x)$ como $g_\varepsilon(x) := g(x)\eta(\varepsilon x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varepsilon > 0$ en (A.1). Obtenieno así que $\left|F \cap B(0, \frac{1}{\varepsilon})\right| = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Contradiciendo que F no es de medida nula.

El siguiente Teorema muestra la estructura de las funciones de variación localmente acotoda.

Teorema A.1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in \mathcal{BV}_{loc}(\Omega)$. Entonces existe una medida de Radon μ en Ω y función $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ μ-medible tal que $|\sigma(x)| = 1$ c.t.p $x \in \Omega$ y*

$$\int_\Omega f(x) div_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x))\, dx = \int_\Omega \langle \varphi(x), \sigma(x) \rangle \, d\mu(x), \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Observación A.1.8. La medida μ del Teorema 2.3.7 se llama medida de variación de f y se denota $\mu := ||Df||$.

A.2. Conjuntos de Caccioppoli

Definición A.2.1.

1. Dado un conjunto medible $F \subset \mathbb{R}^n$, si $\chi_F \in \mathcal{BV}_{loc}(\Omega)$ entonces diremos que F posee perimetro finito local en Ω.

2. Si además $\chi_F \in \mathcal{BV}_{loc}(\Omega)$ para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces diremos que F es un conjunto de Caccioppoli. Denotaremos por la familia de conjuntos de Caccioppoli en Ω por $Ca(\Omega)$.

Observación A.2.2. En el caso en que $f = \chi_F$ con F conjunto de perimetro finito local en Ω. Se adopta la siguiente notación $||\partial F|| := ||D\chi_F||$ y $\nu_F := \sigma$. Así, para toda función $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se tendrá

$$\int_F \operatorname{div}_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x))\, dx = \int_\Omega \langle \varphi(x), \nu_F(x) \rangle \, d\, ||\partial F||\, (x)\, .$$

Notar que esta notación está en el espiritu del teorema de la divergencia para conjuntos con frontera suave. La medida $||\partial F||$ se llama la medida perímetro de F y $||\partial F||\,(\Omega)$ se llama el perimetro de F en Ω.

Definición A.2.3. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de perímetro finito local en $\mathbb{R}^n$. Se define la frontera reducida de F como los puntos x tales que satisfacen

1. Para todo $r > 0$, $||\partial F||\,(B(x,r)) > 0$.

2. $\nu_F(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \nu_F(y)\, d\, ||\partial F||\,(y)$.

3. $|\nu_F(x)| = 1$.

La frontera reducida de un conjunto de perimetro finito local se denota por $\partial^* F$.

El siguiente resultado nos da la estructura de los conjuntos con frontera reducida.

Teorema A.2.4. *Suponga que $F \subset \mathbb{R}^n$ posee perimetro finito local en Ω. Entonces*

$$\partial^* F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k \cup N\, ,$$

donde $||\partial F||\,(N) = 0$ y K_k son subconjuntos compactos de superficies S_k de clase $\mathcal{C}^1$. Mas aún, $\nu_F\big|_{S_k}$ es el vector normal clásico de S_k y

$$||\partial F||\,(\cdot) = \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\partial^* F}(\cdot) = |\partial^* F \cap (\cdot)|\ . \tag{A.2}$$

Lema A.2.5. *Para cada $x \in \partial^* F$ se tiene que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}\left(\partial^* E \cap B_r(x)\right)}{\alpha(n-1) r^{n-1}} = 1\, . \tag{A.3}$$

Donde $\alpha(n)$ representa la medida de Lebesgue n-dimensional de la bola unitaria. Formalmente para $s \geq 0$, $\alpha(s)$ se define como

$$\alpha(s) := \frac{\sqrt{\pi^s}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \, ,$$

donde $\Gamma(s) := \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{s-1}$ es la función gamma usual.

Corolario A.2.6. *Sea F un conjunto de perimetro finito local, entonces $\partial^* F \subset \partial F$ y $\mathcal{H}^{n-1}(\partial F \setminus \partial^* F) = 0$.*

Lema A.2.7. *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y E, F son conjuntos de perimetro finito local. Entonces,*

$$||\partial(E \cup F)||\,(U) + ||\partial(E \cap F)||\,(U) \leq ||\partial E||\,(U) + ||\partial F||\,(U)$$

con igualdad si, y solo si la distancia euclideana de E y F es estrictamente positiva. Notar además que en este caso $||\partial E||\,(U) = |\partial^* E \cap U|$.

Observación A.2.8. Notar que si K es un compacto tal que $|\partial K| = 0$, entonces $K \in \mathcal{C}a(\Omega)$.

El siguiente resultado es un criterio para que un conjunto tenga perímetro finito local.

Teorema A.2.9. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto $\mathcal{H}^n$-medible. Entonces F posee perímetro finito local si, y solo si, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ se cumple que*

$$\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial^* E) < \infty \, .$$

Corolario A.2.10. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $v \in \mathcal{C}^{0,1}_{loc}(\Omega)$. Entonces el conjunto $F_t := \{x \in \Omega : \; v(x) < t\}$ posee peímetro finito local.*

Demostración. Dado un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ queremos estimar $\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial^* F_t)$. Notemos que por el Corolario A.2.6, tenemos que $\partial^* F_t \subset \partial F$ y

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial F_t \setminus \partial^* F_t) = 0 \, .$$

Además por la continuidad de v tenemos que $\partial F_t \subset \{v = t\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \partial^* F_t\right) \leq \mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \{v = t\}\right) \leq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}\left(K \cap \{v = t\}\right) dt \\ = \int_K |\nabla v| \, dx \leq \operatorname{Lip}(v)\, \mathcal{H}^n(K) < \infty \, .\end{aligned}$$

En la segunda línea hemos utilizado la formula de la co-área para funciones Lipschitz.

$\square$

Bibliografía

[1] C. Gerhardt. *Curvature Problems*. International Press, Somerville, MA, 2006.

[2] C. Gerhardt. *Analysis II*. International Press, Somerville, MA, 2006.

[3] G. Huisken and T. Ilmanen.*The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*. J. Diff. Geom., 59:353-437, 2001.

[4] F. Bethuel, G. Huisken, S. Müller, and K. Steffen.*Calculus of Variations and Geometric Evolutions Problems*. Springer Science & Business Media, 1999.

[5] A. Stone. *The mean curvature evolution of graphs*. Honours thesis at the Dep. of Math., Fac. of Sci., ANU, 1989.

[6] T. Marquardt. *The inverse mean curvature flow for hypersurfaces with boundary*. Diss. Freie Universität Berlin, Germany, 2012.

[7] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Springer Science & Business Media, 1992.

[8] D. Grieser. *"Notes on heat kernel asymptotics"*. Available on his website: http://www. staff. unioldenburg. de/daniel.grieser/wwwlehre/Schriebe/heat. pdf (2004).

[9] H. Halldórsson. Self-similar solutions to the mean curvature flow in Euclidean and Minkowski space. Diss. Massachusetts Institute of Technology, 2013.

[10] F. Schulze. Evolution of convex hypersurfaces by powers of the mean curvature. Mathematische Zeitschrift 251.4 (2005):721-733.

[11] Y Liu. Inverse mean curvature flow with forced term. Journal of Mathematical Analysis and Applications 410.2 (2014): 918-931.

[12] J. Streets. "Quasi-local mass functionals and generalized inverse mean curvature flow." Omitted from published version (2006).

[13] L. C. Evans, and Ronald F. Gariepy. "Measure theory and fine properties of functions". CRC press, 2015.

[14] I. Tamanini. Boundaries of Caccioppoli sets with Holder-continuous normal vector. Libera Universita di Trento. Dipartimento di Matematica, 1981.

[15] D. Gilbarg, N. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. springer, 2015.

[16] L. Evans, J. Spruck. "Motion of level sets by mean curvature I." J. Diff. Geom 33.3 (1991): 635-681.

[17] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. arXiv preprint math/0303109, 2003.

[18] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, 2003. arXiv preprint math.DG/0307245.

[19] H. D. Cao, X. P. Zhu. A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures-application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. Asian Journal of Mathematics, 10(2), 165-492. (2006)

[20] B.Kleiner, J. Lott. Notes on Perelman?s papers. Geom. Topol, 12(5), 2587-2855. (2008).

[21] P. Topping. Lectures on the Ricci flow (Vol. 325). Cambridge University Press. (2006).

[22] W. W. Mullins. Two?Dimensional Motion of Idealized Grain Boundaries. Journal of Applied Physics, 27(8), 900-904. (1956).

[23] K. A. Brakke. The motion ofa surface by its mean curvature. Mathematical Notes Series, Princeton University Press, Princeton, NJ. (1978).

[24] T. Ilmanen. Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature (Vol. 520). American Mathematical Soc. (1993).

[25] G. Huisken, C. Sinestrari. Mean curvature flow with surgeries of two?convex hypersurfaces. Inventiones mathematicae, 175(1), 137-221. (2009)

[26] J. Head, G. Huisken. The surgery and level-set approaches to mean curvature flow (Doctoral dissertation, Freie Universität Berlin). (2011).

[27] C. Gerhardt. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. Centre for Mathematical Analysis, Australian National University. (1989).

[28] G. Huisken, T. Ilmanen. A Note on Inverse Mean Curvature Flow. In Proc. of the Workshop on Nonlinear Part. Diff. Equ.(Saitama Univ.). (1997)

[29] R. Geroch. ENERGY EXTRACTION. Annals of the New York Academy of Sciences, 224(1), 108-117. (1973).

[30] P. S. Jang, R. M. Wald. The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis. Journal of Mathematical Physics, 18(1), 41-44. (1977).

[31] Y. G. Chen,Y. Giga, S. I. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. J. Differential Geom, 33(3), 749-786. (1991).

[32] G. Huisken, T. Ilmanen. The riemannian penrose inequality. International Mathematics Research Notices, 1997(20), 1045-1058. (1997).

[33] G. Huisken, T. Ilmanen. Higher regularity of the inverse mean curvature flow. Journal of Differential Geometry, 80(3), 433-451. (2008).

[34] H. L. Bray. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. Journal of Differential Geometry, 59(2), 177-267. (2001).

[35] H. L. Bray. Black holes, geometric flows, and the Penrose inequality in general relativity. Notices of the AMS, 49(11), 1372-1381. (2002).

[36] H. Bray, S. Hayward, M Mars, W. Simon. Generalized inverse mean curvature flows in spacetime. Communications in mathematical physics, 272(1), 119-138. (2007).

[37] H. L. Bray, A. Neves. Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than. Annals of mathematics, 407-424. (2004).

[38] M. Gage, R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. Journal of Differential Geometry, 23(1), 69-96. (1986).