PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Acciones de los Grupos Semidiedrales sobre Variedades Jacobianas

por

JUAN ANDRES ESTAY SOTO

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
como requisito para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Ángel Carocca - Pontificia Universidad Católica de Chile.

Comisión Informante: Rubí E. Rodríguez - Pontificia Universidad Católica de Chile.
Anita María Rojas Rodriguez - Universidad de Chile.

Septiembre, 2008
Santiago, Chile

A Susana y Juan Carlos

Sin ellos, nada hubiese sido posible

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento por todos mis años en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sin duda, casi toda mi formación profesional es fruto de lo que aprendí aquí. Agradezco en general a la Facultad de Matemáticas, la que fue mi segundo hogar por siete años; a todas las personas que ayudaron en mi formación matemática y humana.

Agradezco especialmente al Profesor Ángel Carocca; quien con mucha paciencia ha sido mi Director de Tesis, siempre alentándome en las dificultades que ésta me generó. Agradezco el tiempo y la dedicación que emplearon las Profesoras Rubí E. Rodríguez y Anita Rojas, en las revisiones finales de esta Tesis. Agradezco también al Profesor Renato Lewin, por sus consejos y su apoyo durante todos estos años.

Más allá del importante apoyo académico antes mencionado, no puedo olvidar a aquellas personas que conforman mi núcleo más cercano, y que han sido un gran sustento anímico. Agradezco a mi novia Daniela, a mi familia, amigos y compañeros, quienes en distintos momentos fueron partícipes de este largo proceso, aportando datos, dándome ánimo, o simplemente preguntando: *"Juan...¿Cómo va tu Tesis?"*

Introducción

El estudio de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann compactas ha sido considerado por varios autores y son conocidos interesantes resultados. La estructura del grupo de automorfismos de tales superficies, particularmente sus representaciones irreducibles complejas y racionales, nos permite entender con más detalles algunos aspectos importantes de la Variedad Jacobiana asociada a la superficie. Desde este punto de vista, la teoría de Representaciones de Grupos finitos se ha aplicado al estudio de acciones de grupos en Variedades Abelianas, obteniendose resultados generales, que, aplicados a Jacobianas han permitido establecer interesantes resultados sobre descomposición de éstas como producto de subvariedades y relaciones entre estos factores y variedades asociadas a cubrimientos intermedios de la Superficie, a partir de determinados subgrupos de automorfismos.

En este trabajo estudiaremos la acción de grupos Semidiedrales sobre Superficies de Riemann y su Variedad Jacobiana. Para este objetivo nuestro trabajo seguirá la siguiente estructura.

1. En el capítulo 1, presentamos definiciones y resultados básicos de Aciones de Grupos sobre Superficies de Riemann, Jacobianas y Variedades Abelianas.

2. En el capítulo 2, presentamos más resultados sobre Variedades Abelianas con acción de un grupo. Estudiamos el álgebra racional de grupos, idempotentes racionales primitivos y la Descomposición Isotípica de Variedades Abelianas.

3. En el capítulo 3, estudiamos detalladamente los grupos Semidiedrales, sus Representaciones complejas y presentamos idempotentes racionales primitivos.

4. En el capítulo 4, hacemos la aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para la acción de grupos Semidiedrales en Variedades Abelianas. Nuestro interés en este capítulo se concentra en Variedades Jacobianas y Variedades de Prym.

5. En el capítulo 5, presentamos varios ejemplos de Superficies de Riemann con acción de grupos semidiedrales y hacemos un análisis detallado de la descomposición de la Variedad Jacobiana para cada una de estas acciones.

ÍNDICE GENERAL

apítulo 1. Acciones de Grupo sobre Superficies de Riemann 3
1. Conceptos Básicos 3
2. Variedades Jacobianas 9
apítulo 2. Acción de Grupos Finitos sobre Variedades Abelianas 15
1. Descomposición de Variedades Abelianas, bajo la acción de un grupo finito G 15
2. Descomposición de Variedades Jacobianas, bajo la acción de un grupo finito G 18
apítulo 3. Representaciones de Grupos Semidiedrales 22
1. Grupos Semidiedrales 22
2. Representaciones Complejas Irreducibles de los Grupos Semidiedrales 25
3. Construcción Idempotentes Racionales Primitivos para G 29
apítulo 4. Descomposición de una Variedad Jacobiana bajo la acción de los Grupos ɜmidiedrales 37
1. Subvariedades provocadas por la acción de $\mathbf{SD}_n$, vistas como Variedades de Prym 37
apítulo 5. Ejemplos especiales de acciones de $\mathbf{SD}_n$ de género 0 44
1. Fórmulas y cálculos preliminares 44
2. Ejemplos en que dim $B_{U_i} > 0$ para $2 \leq i \leq 4$, y dim $B_{W_k} > 0$ para $1 \leq k \leq n-1$ 50
3. Ejemplos en que dim $B_{U_i} = 0$ para 2 < i < 4, y dim $B_{W_k} = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$ 54
4. Ejemplos en que B ó B son Variedades Jacobianas para 2 < i < 4, $1 \leq k \leq n-1$ 56

ːbliografía 74

CAPÍTULO

UNO

ACCIONES DE GRUPO SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

1.1. Conceptos Básicos

En esta sección, revisaremos algunas definiciones y resultados básicos sobre automorfismos de superficies, ya conocidos para el lector familiarizado con esta área, pero necesarios para contextualizar los objetivos de esta tesis. Comenzaremos recordando la definición de una Superficie de Riemann y la Acción de un Grupo sobre ésta, pasando por varios resultados clásicos, hasta llegar a los teoremas de Riemann-Hurwitz, y de Existencia de Riemann; los que nos permitián encontrar los ejemplos de acciones particulares en las que estamos interesados.

Definición 1.1.1. *Diremos que X es Superficie de Riemann, si X es una variedad compleja, 1-dimensional, conexa; esto es un espacio topológico conexo, Hausdorff, 2 numerable, con estructura compleja de dimensión 1*

Definición 1.1.2. *Un cubrimiento ramificado $P : X \longrightarrow Y$, es una función holomorfa, epiyectiva. Un punto en X es un punto de ramificación para P, si P no es localmente 1-1 en ese punto. La imagen de un punto de ramificación será llamado un valor de ramificación de P.*

De aquí en adelante, en este trabajo, consideraremos Superficies de Riemann compactas, lo que permite que dichas superficies puedan ser clasificadas según el Teorema general de clasificación de Superficies topológicas. Debido a la orientabilidad en el caso de las Superficies de Riemann, nuestras únicas opciones son la Esfera de Riemann y los Toros analíticos. Recordamos que para toda superficie podemos determinar su Característica de

Euler χ. Usando que $\chi = 2 - 2g$, donde g es el género de la superficie. De esta forma, podemos decir que la Esfera de Riemann tiene género 0, y los toros analíticos tienen género ≥ 1.

Proposición 1.1.1. *En los términos de la Definición 1.1.2, el conjunto de los puntos de ramificación es discreto en X. Si X e Y son Superficies de Riemann compactas, entonces el conjunto de puntos y valores de ramificación, es finito.*

Definición 1.1.3. *Sea G grupo finito, y X una Superficie de Riemann*

Una acción de G sobre X, es un mapeo $G \times X \longrightarrow X$, que denotamos por

$$(g, p) \mapsto g \cdot p$$

que satisface:

i) $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) \qquad \forall g, h \in G,\ \forall p \in X$

ii) $1_G \cdot p = p \qquad \forall p \in X,\ 1_G = \textit{identidad} \in G$

Observación 1.1.1. *Notemos que si fijamos $g \in G$, la función $p \mapsto g \cdot p$ es biyección. Su inversa es el mapeo que asigna, a cada p, el elemento $g^{-1} \cdot p$.*

Definición 1.1.4. *Sean X una Superficie de Riemann, $p \in X$, y $A \subseteq X$. Definimos:*

i) La órbita de un punto $p \in X$ es el conjunto

$$G \cdot p = \{g \cdot p \quad / \quad g \in G\}$$

ii) El conjunto de puntos en X de la forma:

$$G \cdot A = \{g \cdot a \quad / \quad g \in G, \quad a \in A\}$$

conforman la órbita del conjunto A.

iii) El estabilizador de un punto $p \in X$ es el subgrupo

$$G_p = \{g \in G \quad / g \cdot p = p\}$$

Observación 1.1.2. *Notemos que puntos en la misma órbita, tienen estabilizadores conjugados. De hecho, $G_{g \cdot p} = g\, G_p\, g^{-1}$. Más aún, si $|\, G \,|$ es finito, entonces*

$$|G| = |G \cdot p||G_p|$$

Definición 1.1.5. *Sea X una Superficie de Riemann, G un grupo actuando sobre X. Diremos que la acción de G en X es efectiva si*

$$K := \{g \in G \quad / g \cdot p = p, \ \forall p \in X\} = \bigcap_{p \in X} G_p = \{1_G\}$$

Definición 1.1.6. *Sea X una Superficie de Riemann, G un grupo actuando sobre X. Diremos que la acción de G es holomorfa, si para cada g en G, la biyección que asigna p el elemento $g \cdot p$ es una función holomorfa de X en X. A una biyección holomorfa, la llamaremos automorfismo de X.*

La siguiente definición nos permite construir nuevas Superficies de Riemann, que se obtienen a partir de la acción de un grupo. Primero le daremos estructura topolólgica, y luego, por medio de los resultados posteriores, concluiremos que también tiene una estructura compleja:

Definición 1.1.7. *Sea X una Superficie de Riemann, G un grupo actuando sobre X. El espacio topológico (topología cuociente) cuociente $X/G = X_G$ es el conjuto de órbitas de la acción de G sobre X.*

Note que este conjunto es un espacio topológico, con la topología cuociente usual, donde

$$\pi : X \longrightarrow X_G, \quad \pi(p) = G \cdot p$$

es el mapeo cuociente.

Lema 1.1.1. *Sea G grupo actuando holomorfa y efectivamente sobre una Superficie de Riemann X, y sea $p \in X$. Si $|G_p|$ es finito, entonces G_p es cíclico. En particular, si $|G|$ es finito, todos los G_p son subgrupos cíclicos finitos.*

Demostración: [6] pág 76.

Lema 1.1.2. *Sea G grupo finito, actuando holomorfa y efectivamente sobre una Superficie de Riemann X. Entonces, el conjunto de los puntos de X con estabilizador no trivial, es discreto.*

Demostración: [6] pág 76.

Definición 1.1.8. *Sean X e Y Superficies de Riemann. $f : X \longrightarrow Y$ función meromorfa. Definimos la multiplicidad de f en un punto p de X, denotado por $mult_p(f)$, como el único entero m tal que existen coordenadas locales de una vecindad de p y de $f(p)$ tal que en estas coordenadas, f tiene la forma $z \longrightarrow z^m$*

Teorema 1.1.1. *Sea G grupo finito, actuando holomorfa y efectivamente sobre una Superficie de Riemann X. Entonces existe un conjunto de cartas complejas para X_G, de modo que X_G es una Superficie de Riemann. Además, el mapeo cuociente $\pi : X \longrightarrow X_G$ es holomorfo, de grado $\mid G \mid$, y $mult_p(\pi) = \mid G_p \mid$, $\forall p \in X$.*

Demostración: [10] pág 78.

Una consecuencia del Teorema 1.1.1 es la información acerca de la multiplicidad de las pre-imágenes de los valores de ramificación; lo que nos dará la información necesaria para caracterizar una acción dada. ¿Cómo realizar esta caracterización? Es el principal objetivo de esta sección.

Proposición 1.1.2. *Sea G grupo finito, actuando holomorfa y efectivamente sobre una Superficie de Riemann compacta X, con el mapeo cuociente $\pi : X \longrightarrow Y = X_G$. Entonces para todo valor de ramificación $y \in Y$, existe un entero $r \geq 2$ tal que $\pi^{-1}(y)$ consiste de, exactamente, $\mid G \mid / r$ puntos de X. Además, en cada una de estas pre-imágenes, π tiene multiplicidad r.*

Observación 1.1.3. *El número r es igual al orden del estabilizador de un punto de ramificación en $\pi^{-1}(y)$, para $y \in Y$.*

Llegamos entonces al primer resultado de gran importancia, cuya demostración está ligada a la Topología Algebraica, y que nos dará, finalmente, una manera de clasificar diferentes acciones de grupo, dadas ciertas premisas.

Corolario 1.1.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz *Sea G grupo finito, actuando holomorfa y efectivamente sobre una Superficie de Riemann compacta X, con el mapeo cuociente $\pi : X \longrightarrow X_G$. Supongamos que existen t valores de ramificación $y_1, \ldots, y_t \in X_G$, donde π tiene multiplicidad r_j en los $\mid G \mid / r_j$ puntos pre-imágenes de y_j. Entonces*

$$2g(X) - 2 = \mid G \mid \left(2g(X/G) - 2 + \sum_{j=1}^{t} (1 - \frac{1}{r_j}) \right)$$

La ecuación anterior impone restricciones sobre el orden de un grupo finito que actúa sobre una superficie de género dado; así como también, dado el grupo G, establece restricciones sobre el género de la superficie donde se realiza la acción. Además, como veremos en los siguientes resultados, esta ecuación también impone restricciones sobre la estructura del grupo. Entonces, dado el género de una Superficie de Riemann cuociente Y, no tenemos arbitrariamente cualquier superficie X con acción de grupo tal que $G/X = Y$.

Por el contrario, si conocemos los r_j, la Fórmula de Riemann-Hurwitz nos da la ecuación que nos otorga el género de dicha superficie. Posteriormente, nos concentraremos en las acciones, cuya superficie cuociente tiene género 0.

<u>Definición</u> **1.1.9. Vector generador** *Una $2\gamma + t$-tupla $(a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\gamma, c_1, \dots c_t)$ de elementos de G se dice un vector generador del tipo $(\gamma, m_1, \dots m_t)$ si se cumple:*

i) G es generado por los elementos $\{a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\gamma, c_1, \dots c_t\}$

ii) $| c_j | = m_j$

iii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\gamma}[a_k, b_k]\prod_{j=1}^{t} c_j = 1$. Donde $[a, b]$ significa el conmutador de a y b.

<u>Observación</u> **1.1.4.** *Dado un cubrimento ramificado $\pi : X \longrightarrow X_G$. Con g el género de X. Entonces π puede ser parcialmente caracterizado por un vector de números $(\gamma, m_1, \dots m_t)$, llamado la Signatura de G sobre X, donde γ es el género de X_G, $t \leq 2g+2$ es el número de valores de ramificación del cubrimiento, y los m_j son enteros positivos, asociados a los valores de ramificación de X_G (ellos representan el grado de inyectividad de π en esos puntos).*

El siguiente resultado es una versión simplificada de un resultado clásico de la Teoría de Superficies.

<u>Teorema</u> **1.1.2. Teorema de existencia de Riemann** *Un grupo finito G actúa sobre una Superficie de Riemann X de género g, con signatura de G sobre X dada por $(\gamma; m_1, \dots m_t)$ si y sólo si se cumple la ecuación de Riemann-Hurwitz, y el grupo G tiene un vector generador del tipo $(\gamma; m_1, \dots m_t)$.*

<u>Demostración:</u> [1]

<u>Ejemplo</u> **1.1.1.** *Determinación del género de una Superficie de Riemann X, con $\gamma = g(X_G) = 0$, dada la Signatura del Grupo Diedral $\mathbf{D}_4$ sobre ella.*

Sea el grupo diedral $\mathbf{D}_4 :=< x,\ \ y\ /\ x^4,\ y^2,\ xyxy\ \ >$

Consideremos el vector generador $(y, y, xy, xy, x, x, x, x)$ del tipo $(\gamma = 0; 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4)$

Luego, aquellas Superficies de Riemann de género g que admiten la acción de $\mathbf{D}_4$ con la signatura anterior, deben cumplir la fórmula de Riemann-Hurwitz. Entonces:

$$2g - 2 = 8(2 \cdot 0 - 2 + \sum_{j=1}^{4}(1 - \frac{1}{2}) + \sum_{j=1}^{4}(1 - \frac{1}{4}))$$

$$\Rightarrow 2g - 2 = 16 \cdot 0 - 16 + 40$$

$$\Rightarrow g = 8 \cdot 0 + 13 = 13$$

Por lo tanto, aquellas Superficies de Riemann, que admiten la acción de $\mathbf{D}_4$, bajo la signatura anterior, están condicionadas por el género de la superficie cuociente. Luego, como $\gamma = 0$, necesariamente $g = 13$.

Ejemplo 1.1.2. *Determinación de posibles Signaturas de $G = \mathbf{D}_4$ sobre una Superficie de Riemann X, dados el género g de X y $\gamma = 0$ como género de X_G.*

Primero recordemos que los generadores de los subgrupos cíclicos de $\mathbf{D}_4$ (módulo conjugación) son:

1) Un generador del subgrupo cíclico $< x >$ de orden 4.

2) Un generador del subgrupo cíclico $< y >$ de orden 2.

3) Un generador del subgrupo cíclico $< xy >$ de orden 2.

4) Un generador del subgrupo cíclico $< x^2 >$ de orden 2.

Luego, la ecuación de Riemann-Hurwitz para este caso, tiene la siguiente forma:

$$2g - 2 = 8\left(2\gamma - 2 + \alpha_1(1 - \frac{1}{4}) + \alpha_2(1 - \frac{1}{2}) + \alpha_3(1 - \frac{1}{2}) + \alpha_4(1 - \frac{1}{2})\right)$$

Como los elementos del vector generador deben efectivamente ser generadores, α_2 y α_3 no pueden ser simultáneamente 0.

$$\Rightarrow g = 4\left(2 \cdot 0 - 2 + \frac{3\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{4} + \frac{\alpha_4}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow g = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 - 7$$

Esta ecuación, junto al Teorema de Existencia de Riemann, determina cuántos generadores de cada clase de conjugación deben aparecer en la ecuación, una vez que tenemos dados los géneros de X y de la superficie cuociente.

Por ejemplo, podemos encontrar todas las combinaciones de los α_i tales que $g = 0 = \gamma$.

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, y $\alpha_4 = 0$ tenemos el vector (y, xy, x) (u otros, conjugados a éste).

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 1$, y $\alpha_3 = 0$, no es posible encontrar vector generador.

Si $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$, y $\alpha_2 = 0$, no es posible encontrar vector generador.

Si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$, no es posible encontrar vector generador.

Si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_3 = 2$, no es posible encontrar vector generador.

Si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_4 = 2$, no es posible encontrar vector generador.

Por lo tanto, módulo conjugación, sólo existe un único vector generador que representa la acción de $\mathbf{D}_4$ tal que $g = 0 = \gamma$. Así, el vector generador (y, xy, x) nos da la Signatura $(0; 2, 2, 4)$.

1.2. Variedades Jacobianas

En esta sección, revisaremos algunos resultados sobre una variedad, naturalmente asociada a una Superficie de Riemann, llamnada Variedad Jacobiana. Los resultados van dirigidos a probar que una Variedad Jacobiana es una Variedad Principalmente Polarizada. El lector interesado podrá encontrar los resultados en [8] y [15]

Definición 1.2.1. *Sean X una Superficie de Riemann de género g, una base de curvas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}\}$ de $\mathbf{H}_1(X, \mathbb{Z})$ (primer grupo de homología de X, de dimensión $2g$ como $\mathbb{Z}$-módulo), y una base de diferenciales $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ de $\mathbf{H}^{1,0}(X, \mathbb{C})$(espacio de diferenciales analíticas de X, de dimensión compleja g). Diremos que la matriz:*

$$\prod := \left(\pi_{ij} = \int_{\alpha_j} \omega_i\right), \qquad 1 \leq i \leq g,\ 1 \leq j \leq 2g$$

es la matriz período de X, en relación a las bases dadas.

Observación 1.2.1. *Notamos que las columnas de cualquier matriz período son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$*

Proposición 1.2.1. *Si X es una Superficie de Riemann de género g, y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ es una base canónica de $\mathbf{H}_1(X, \mathbb{Z})$; es decir, con intersección de curvas dada por la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

entonces existe una única base dual $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ *de* $\mathbf{H}^{1,0}(X, \mathbb{C})$*, tal que*

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}, \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, g\}$$

Más aún, la matriz:

$$\tau := \left(\tau_{ij} = \int_{\beta_i} \omega_j\right) \qquad\qquad i, j \in \{1, \ldots, g\}$$

llamada una Matriz de Riemann de X*, es simétrica con parte imaginaria positiva definida*

Demostración: [6] pág 61.

Definición 1.2.2. *Sean* V *un espacio vectorial de dimensión compleja* g*, y* L *un subgrupo discreto de rango* $2g$ *de* V *(diremos entonces que* L *es un reticulado en* V*), que es isomorfo a* $\mathbb{Z}^{2g}$*. El cuociente* $T = V/L$ *se llama toro analítico.*

Definición 1.2.3. *Sea* $\mathbf{H}^{1,0}(X, \mathbb{C})^*$ *el espacio de los funcionales complejos lineales de* $\mathbf{H}^{1,0}(X, \mathbb{C})$*,y sea* L *el subgrupo discreto (de rango* $2g$*) de todos los funcionales del tipo* $\int_\alpha$*, con* $\alpha \in \mathbf{H}_1(X, \mathbb{Z})$*. El toro analítico*

$$JX := \mathbf{H}^{1,0}(X, \mathbb{C})^*/L$$

se llama Variedad Jacobiana de X

A continuación, desarrollaremos los resultados necesarios de la teoría de variedades abelianas, en búsqueda de conocer más acerca de las Variedades Jacobianas.

Definición 1.2.4. *Dado* $T = V/L$ *un Toro analítico de dimensión* g*; donde* V *es un espacio vectorial complejo de dimensión* g*, y* L *un reticulado en* V*. Diremos que una forma real alternante* E *en* V *es una polarización en* T*, si se cumple:*

i) $E(iu, iv) = E(u, v)$, $\forall u, v \in V$

ii) $E(L \times L) \subset \mathbb{Z}$ *y* $\det(E(L \times L)) \neq 0$.

En este caso, diremos que el par (T, E) es una Variedad abeliana polarizada

Observación 1.2.2. *Sea $(T = V/L, E)$ una Variedad Abeliana Polarizada. Dado un reticulado L, siempre existe una base smpléctica para L; es decir, una base de L, con respecto a la cual, la matriz de E se escribe como*

$$[E] = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix}$$

y los d_i son números enteros positivos, tales que d_i/d_{i+1}, $\forall i \in \{1, \ldots, g-1\}$. Al número d_g, lo llamamos el exponente de la polarización.

Demostración: [15] pág 15.

Definición 1.2.5. *Sea el par (T, E) una Variedad Abeliana Polarizada. Si E tiene exponente 1, entonces se dice que la polarización es principal, y la variedad abeliana (T, E) se llama Variedad abeliana principalmente polarizada. (v.a.p.p)*

Definición 1.2.6. *Sea $T = V/L$ toro analítico. Decimos que $S = W/M$ es un subtoro de T, si W es un subespacio de V, y M es un reticulado en W tal que $M \subseteq W \cap L$*

Definición 1.2.7. *Sean T_1 y T_2 dos toros analíticos, y $f : T_1 \longrightarrow T_2$ un homomorfismo de toros; es decir, una función analítica compatible con la estructura de grupo. Decimos que f es una isogenia de toros, si es un homomorfismo que cumple al menos dos de las siguientes afirmaciones. (Basta con esto, pues dos de ellas, siempre implican la tercera)*

(1) $\dim T_1 = \dim T_2$.

(2) f es sobreyectiva.

(3) El núcleo de f es finito.

Para una isogenia f, se define el grado de f, $gr(f)$, como la cardinalidad de su núcleo, y la notación $T_1 \sim T_2$ significará que los toros son isógenos.

Observación 1.2.3. *Sea $f : T_1 \longrightarrow T_2$ un homomorfismo de toros analíticos. Entonces se tiene que:*

(1) $\operatorname{Im} f$ *es un subtoro de* T_2

(2) $\ker f$ *es un subgrupo compacto de T_1. Su componente conexa que contiene a 0, denotada por* $(\ker f)_0$*, es un subtoro de T_1, de índice finito en* $\ker f$.

Definición 1.2.8. *Sea $T = V/L$ toro analítico de dimensión g. Considere $\{v_1, \ldots, v_g\}$ base de V y $\{l_1, \ldots l_{2g}\}$ base de L.*

Definimos

$$\prod := (\pi_{i,j}) = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,2g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{g,1} & \cdots & \pi_{g,2g} \end{pmatrix}_{g\times 2g}$$

como la matriz periodo de T, con respecto a dichas bases; donde el j-ésimo vector columna de $\prod$ corresponde a las coordenadas de l_j la base $\{v_1, \ldots, v_g\}$ de V.

Proposición 1.2.2. *Sea $T = V/L$ un toro analítico de dimensión g, con bases $\{v_1, \ldots, v_g\}$ de V y $\{l_1, \ldots l_{2g}\}$ de L, $\prod$ la matriz periodo de T con respecto a estas bases y $P = (\prod\ \overline{\prod}^{t})$. Si J es una matriz $2g \times 2g$, con coeficientes enteros y determinante 1, entones las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) J es la matriz de una forma E tal que (T, E) es una v.a.p.p.

(2) $iPJ^{-1}P^{t} = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ M^{t} & 0 \end{pmatrix}$ *donde M es Hermitiana positiva definida.*

(3) $\prod J^{-1}\prod^{t}=0$ *y* $-i\prod J^{-1}\overline{\prod}^{t}$ *es Hermitiana positiva definida.*

Demostración: [8] Capítulo 4.

Corolario 1.2.1. *Sea (T, E) una v.a.p.p. de dimensión g y $\prod = (\prod_1\ \ \prod_2)$ su matriz período. Si* $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$*, entonces*

(1) $\prod_2\prod_1^{t}-\prod_1\prod_2^{t}=0$

(2) $-i(\prod_2 \overline{\prod_1}^{\,t} - \prod_1 \overline{\prod_2}^{\,t})$ *es positiva definida.*

En particular, $\prod_1$ *y* $\prod_2$ *son no singulares.*

Demostración: [8] Capítulo 4.

Corolario 1.2.2. *Sea* (T, E) *una v.a.p.p. de dimensión* g*. Entonces, existen bases de* V *y* L *con respecto a las cuales* $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\prod = (I_g \quad \tau)$ *cumplen que*

(1) $\tau^t = \tau$

(2) La parte imaginaria de $\tau = \mathfrak{Im}(\tau)$ *es positiva definida.*

Demostración: [8] Capítulo 4.

El siguiente resultado es el más importante en esta sección:

Teorema 1.2.1. *Si* X *es una Superficie de Riemann de género* g*, entonces su Variedad Jacobiana* JX *es una v.a.p.p. de dimensión* g*.*

Demostración: Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots \beta_g\}$ una base canónica de $\mathbf{H}_1(X, \mathbb{Z})$, y $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ la base de $\mathbf{H}^{1,0}(X, \mathbb{C})$ descrita en la Proposición 1.2.1. Luego, la matriz período de X es

$$\prod = (I_g \quad \tau)$$

con τ matriz simétrica, y con parte imaginaria simétrica positiva definida. Sea JX la Jacobiana de X. Si tomamos la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

entonces notamos que se cumple la condición (3) de la Proposición 1.2.2, pues

$$\prod J^{-1} \prod^t = \begin{pmatrix} I_g & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_g \\ \tau \end{pmatrix} = \tau - \tau = 0$$

y

$$-i \prod J^{-1} \overline{\prod}^t = -i \begin{pmatrix} I_g & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_g \\ \overline{\tau} \end{pmatrix} = 2\mathfrak{Im}\tau$$

es positiva definida, según la Proposición 1.2.1. Luego JX es una *v.a.p.p.*

□

Observación 1.2.4. *Sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un cubrimiento de Superficies de Riemann. Entonces existe un homomorfismo natural de toros, asociado a f, $f^* : JX_2 \longrightarrow JX_1$.*

Demostración: [15] pág 25

Proposición 1.2.3. *Sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un cubrimiento de Superficies de Riemann de géneros g_1 y g_2 respectivamente, y $f^* : JX_2 \longrightarrow JX_1$ el homomorfismo asociado a f. Si $g_2 > 0$, entonces $f^*(JX_2)$ es un subtoro de JX_1*

Demostración: [15] pág 26

El siguiente teorema nos permite definir la Variedad de Prym de un cubrimiento. En los capítulos 2 y 5 estudiaremos más propiedades sobre esta variedad.

Teorema 1.2.2. de Reducibilidad de Poincaré *Sea $(T = V/L, E)$ una v.a.p, y sea S un subtoro de T. Entonces existe un subtoro R de T, tal que $T = S + R$ y tal que $S \cap R$ es finito.*

Demostración: [15] pág 20.

Definición 1.2.9. *En los términos del Teorema 1.2.2, R se dice el complemento de S.*

Definición 1.2.10. *Sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un cubrimiento de Superficies de Riemann, y $f^* : JX_2 \longrightarrow JX_1$ su homomorfismo asociado entre las correspondientes Variedades Jacobianas. Definimos la Variedad de Prym del cubrimiento f como el complemento de $f^*(JX_2)$ en JX_1 con respecto a su polarización, y lo denotamos por $P(X_1/X_2)$*

Observación 1.2.5. *Notamos que la Variedad de Prym de un cubrimiento es efectivamente una v.a.p.. Si JX_1 tiene la polarización principal dada por la forma real E, entonces $P(X_1/X_2)$ es una variedad con la polarización inducida por E, dada por la restricción a $P(X_1/X_2)$. Dicha polarización la denotamos por E_P.*

CAPÍTULO

DOS

ACCIÓN DE GRUPOS FINITOS SOBRE VARIEDADES ABELIANAS

2.1. Descomposición de Variedades Abelianas, bajo la acción de un grupo finito G

Para comenzar este capítulo, primero definiremos el significado de la acción de un grupo finito sobre una Variedad Abeliana, lo que producirá sobre ésta una descomposición asociada, que será un análolgo a lo que vimos al final del capítulo anterior con el Teorema de Reducibilidad de Poincaré.

Proposición 2.1.1. *Sean T_1 un Toro analítico, (T_2, E) una v.a.p., y $f : T_1 \longrightarrow T_2$ un homomorfismo con $\ker(f)$ finito. Entonces existe una polarización en T_1, denotada por $f^\star(E)$, definida por*

$$f^\star(E)(v_1, v_2) = E(\rho(f)(v_1), \rho(f)(v_2))$$

donde $\rho(f)$ es la representación analítica del homomorfismo f.

Definición 2.1.1. *Un homomorfismo entre Variedades Abelianas polarizadas (T_1, E_1) y (T_2, E_2) es un homomorfismo $f : T_1 \longrightarrow T_2$ de toros complejos tal que $E_1 = f^\star(E_2)$*

Definición 2.1.2. *Sean (T_1, E_1) y (T_2, E_2) v.a.p.*

i) Escribiremos $Hom((T_1, E_1), (T_2, E_2))$ para denotar al grupo aditivo de homomorfismos entre dichas Variedades Abelianas.

ii) Si $f : T_1 \longrightarrow T_1$ es un homomorfismo de v.a.p. , decimos que f es un endomorfismo de v.a.p.

iii) $\mathrm{End}((T, E))$ *denota al grupo aditivo de endomorfismos de (T, E).*

Definición 2.1.3. *Decimos que un grupo finito G actúa sobre una v.a.p. (T, E), si existe un monomorfismo de grupos $G \longrightarrow \mathrm{End}((T, E))$.*

Con la definición anterior, estamos en condiciones de realizar la descomposición de una *v.a.p.*, inducida por la acción de un grupo finito G.

De aquí en adelante, $\mathbf{A}$ representará una Variedad Abeliana Polarizada y $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}(\mathbf{A})$

Observación 2.1.1. *Sea $\mathbf{A}$ una variedad abeliana (v.a.p.) sobre $\mathbb{C}$, y sea G un grupo finito, actuando sobre $\mathbf{A}$. La acción de G sobre $\mathbf{A}$ induce un homomorfismo de álgebras:*

$$\rho : \mathbb{Q}[G] \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A})$$

Consideraremos $\alpha \in \mathbb{Q}[G]$ como elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A})$, así definimos:

$$\mathrm{Im}(\alpha) := \mathrm{Im}(\rho(m\alpha)) \subseteq \mathbf{A}$$

donde $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $m\alpha \in \mathbb{Z}[G]$

Como $\mathbb{Q}[G]$ es un álgebra semisimple, de dimensión finita, se tiene que

$$\mathbb{Q}[G] \simeq Q_1 \oplus ... \oplus Q_r$$

donde $Q_1, ..., Q_r$ son álgebras simples.

Sea $1 = e_1 + ... + e_r$ la descomposición del elemento 1 de $\mathbb{Q}[G]$, donde los e_i son las respectivas identidades multiplicativas de las subálgebras Q_i. Notamos que estos elementos son centrales, y mutuamente ortogonales.

Escribiremos $\mathbf{A}_i := \mathrm{Im}(e_i)$, para $i = 1, ..., r$.

Demostración: [4] pág. 165.

Proposición 2.1.2. *Sea G un grupo finito, actuando sobre una v.a.p. Entonces, con la notación de la proposición anterior, tenemos:*

1. *$\mathbf{A}_i$ es una subvariedad abeliana, G-invariante de $\mathbf{A}$, con $Hom_G(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j) = 0$, para $i \neq j$*

2. *La función adición induce una isogenia*

$$\mu : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times ... \times \mathbf{A}_r \longrightarrow \mathbf{A}$$

(es decir $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \cdots \times \mathbf{A}_r$)

Esta descomposición es llamada la ***descomposición isotípica de A***

Demostración: [9]

Observación 2.1.2. *Sea G un grupo finito.*

i) La descomposición

$$\mathbb{Q}[G] \simeq Q_1 \oplus ... \oplus Q_r$$

donde $Q_1, ..., Q_r$ son álgebras simples, está asociada al conjunto $\{\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_r\}$ de todas la representaciones racionales irreducibles no-isomorfas de G. Es decir r es el número de subgrupos cíclicos no conjugados del grupo G.

ii) Una expresión para los e_j de la observación anterior es dada por

$$e_j := \frac{dim(\mathcal{V}_j)}{|G|} \sum_{g \in G} tr_{K|\mathbb{Q}}(\chi_j(g^{-1}))g$$

donde $\mathcal{V}_j$ es una representación compleja irreducible, asociada a $\mathcal{W}_j$, que es la representación racional irreducible, correspondiente a la subálgebra Q_j

iii) Cada factor Q_j es suma directa de ideales izquierdos minimales, isomorfos entre sí.

$$Q_j \cong {D_1}^j \oplus {D_2}^j \oplus \cdots \oplus {D_{n_j}}^j.$$

De esta forma obtenemos

$$e_j = f_1^j + ... + f_{n_j}^j$$

Con f_i^j idempotentes primitivos, tales que $f_i^j f_k^l = \delta_{ij}$, $n_j = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_j / m_{\mathcal{V}_j}$, donde $m_{\mathcal{V}_j}$ es el índice de Schur de $\mathcal{V}_j$.

Demostración: [4] págs 174, 236 y [18] pág 49.

Proposición 2.1.3. *Sea G un grupo finito, actuando sobre una v.a. $\mathbf{A}$, entonces, con la notación anterior se tiene*

i) Para cada l, k se tiene que $\mathrm{Im}(f_k^j) \sim \mathrm{Im}(f_l^j)$

ii) Si $B_j \sim \mathrm{Im}(f_1^j)$, $B_j^{n_j}$ es invariante por G. Además $\mathbf{A}_j \sim B_j^{n_j}$

iii) La descomposición dada en la Proposición 2.1.2 para la variedad $\mathbf{A}$ está dada por:

$$\mathbf{A} \sim B_1^{n_1} \times \cdots \times B_s^{n_s}$$

Demostración: [2]

2.2. Descomposición de Variedades Jacobianas, bajo la acción de un grupo finito G

En esta sección, veremos los principales resultados descritos en [2] y [9], que estudian la descomposición isotípica de Variedades Jacobianas, relacionando los factores que aparecen en tal descomposición con Variedades de Prym de cubrimientos intermedios.

Proposición 2.2.1. *Sean X e Y dos Superficies de Riemann compactas, $f : X \longrightarrow Y$ un cubrimiento, posiblemente ramificado. Entonces f induce un homomorfismo entre las Variedades Jacobianas denotado por:*

$$f^* : JY \longrightarrow JX$$

Demostración: [8] capítulo 11.

Proposición 2.2.2. *Sea X una Superficie de Riemann, y G un grupo finito actuando sobre ella. Dado un cubrimiento Galois $\pi : X \longrightarrow X_G$, considere la descomposición isotípica de JX dada por*

$$JX \sim B_1 \times B_2^{n_2} \times \ldots \times B_r^{n_r}$$

donde B_1 es la subvariedad correspondiente a la representación trivial.

Sea $H \leq G$, y denotamos por $\pi_H : X \longrightarrow X_H = X/H$ la correspondiente función cuociente. Entonces la descomposición isotípica de JX_H está dada por

$$JX_H \sim B_1 \times B_2^{\frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_2}{m_{\mathcal{V}_2}}} \times \ldots \times B_r^{\frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_r}{m_{\mathcal{V}_r}}}$$

donde $\mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_j$ *es el subespacio de* $\mathcal{V}_j$ *fijo por* H.

Demostración:

Consideremos $p_H = \frac{1}{H}\sum_{h\in H} h$, y $f_H^j = p_H e_{\mathcal{W}_j}$.

Note que $\mathrm{Im}(p_H)$ es la componente conexa que contiene al origen, de la subvariedad JX^H, fija por H, y entonces igual a $\pi_H^*(JX_H) \sim JX_H$.

Considerando el Cuerpo de definición L, y el Cuerpo de caracteres K de $\mathcal{V}_j$, tenemos que

$$L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{W}_j \simeq \bigoplus_{\varphi\in Gal(K|\mathbb{Q})} \varphi(m_j \mathcal{V}_j)$$

por la Reciprocidad de Frobenius, tenemos que

$$\begin{aligned} < \mathrm{Ind}_{1_H^G}, \mathcal{V}_j > &=< 1_H, \mathcal{V}_j|_H > \\ &= \text{número de veces que aparece } 1_H \text{ en la descomposición de } \mathcal{V}_j|_H \\ &= \dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_j \end{aligned}$$

Luego, si queremos ver cuantás veces aparece en $\mathrm{Ind}_{1_H^G}$ la representación irreducible $\mathcal{W}_j$, basta saber cuántas veces aparece 1_H en $\mathcal{V}_j|_H$, y como este último está con multiplicidad m_j, debemos dividir por m_j. Luego, este número de veces está dado por:

$$a_j = \frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_j}{m_{\mathcal{V}_j}}$$

Con esta notación,

$$\mathrm{Ind}_{1_H^G} = a_1\mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus a_r\mathcal{W}_r \tag{2.1}$$

Ahora, $\mathbb{Q}[G]f_H^j = \mathbb{Q}[G]p_H \cap \mathbb{Q}[G]e_{\mathcal{W}_j} =$ suma directa de $\dfrac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_j}{m_{\mathcal{V}_j}}$ ideales minimales izquierdos, cada uno de ellos, correspondiente a $\mathcal{W}_j$.

Finalmente, la igualdad

$$p_H = \sum_{j\in\{1,\ldots,r\}} f_H^j$$

induce la isogenia

$$B_1 \times B_2^{\frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_2}{m_{\mathcal{V}_2}}} \times \cdots \times B_r^{\frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_r}{m_{\mathcal{V}_r}}} \longrightarrow JX_H$$

que nos da la descomposición de JX_H

□

<u>Corolario</u> 2.2.1. *Sea X una Superficie de Riemann con acción de un grupo finito G. Considere la descomposición isotípica asociada de JX dada por:*

$$JX \sim JX_G \times B_2^{\frac{\dim \mathcal{V}_2}{m_{\mathcal{V}_2}}} \times \cdots \times B_r^{\frac{\dim \mathcal{V}_r}{m_{\mathcal{V}_r}}}$$

Entonces para cualesquiera subgrupos $H \leq N \leq G$, la correspondiente descomposición de $P(X_H/X_N)$, está dada por

$$P(X_H/X_N) \sim B_2^{s_2} \times \cdots \times B_r^{s_r}$$

donde

$$s_j = \frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_j}{m_{\mathcal{V}_j}} - \frac{\dim \mathrm{Fix}_N \mathcal{V}_j}{m_{\mathcal{V}_j}}$$

<u>Demostración</u>: [2] Corolario 5.4

<u>Corolario</u> 2.2.2. *Sea X una Superficie de Riemann, y G un grupo finito actuando sobre ella. Consideremos la descomposición isotípica asociada de JX, dada por:*

$$JX \sim JX_G \times B_2^{\frac{\dim \mathcal{V}_2}{m_{\mathcal{V}_2}}} \times \cdots \times B_r^{\frac{\dim \mathcal{V}_r}{m_{\mathcal{V}_r}}}$$

Suponga que existen subgrupos $H \leq N \leq G$, y una representación racional irreducible $\mathcal{W}$ de G, tal que

$$\mathrm{Ind}_{1_H^G} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ind}_{1_N^G} \tag{2.2}$$

Entonces, para la subvariedad B_W asociada a W en la descomposición isotípica, vale

$$B_{\mathcal{W}} \sim P(X_H/X_N) \tag{2.3}$$

Recíprocamente, si para alguna representación racional irreducible $\mathcal{W}$ de G, existen subgrupos $H \leq N \leq G$, tales que $B_{\mathcal{W}} \sim P(X_H/X_N)$, entonces (2.2) se cumple.

Demostración:

Para los subgrupos $H \leq N \leq G$, consideremos los enteros no-negativos $s_j = \frac{\dim \mathrm{Fix}_H \mathcal{V}_j}{m_{\mathcal{V}_j}} - \frac{\dim \mathrm{Fix}_N \mathcal{V}_j}{m_{\mathcal{V}_j}}$, para $j \in \{2, \ldots, r\}$, y observemos que de la primera parte de la demostración de la Proposición 2.2.2, que

$$\mathrm{Ind}_{1_H^G} - \mathrm{Ind}_{1_N^G} = \bigoplus_{j=2}^{r} s_j \mathcal{W}_j \tag{2.4}$$

Pero esto implica, gracias al Corolario 2.2.1 que $B_{\mathcal{W}} \sim P(X_H/X_N)$ si y sólo si el único s_j, correspondiente a $B_{\mathcal{W}}$, es igual a 1; y el resto de los s_j, igual a 0.

$\square$

CAPÍTULO

TRES

REPRESENTACIONES DE GRUPOS SEMIDIEDRALES

3.1. Grupos Semidiedrales

Esta sección será dedicada a estudiar la estructura de los Grupos Semidiedrales. De acuerdo a los capítulos anteriores, para estudiar la acción de estos grupos en Superficies de Riemann y Variedades Jacobianas, será necesario el conocimiento de sus representaciones irreducibles complejas y racionales.

En esta sección denotamos por $\mathbf{K}$ al grupo de Klein, $\mathbf{Z}_m$ al grupo cíclico de orden m,

$$\mathbf{D}_m := < a,\ b\ /\ a^m,\ b^2,\ abab >$$

al grupo diedral de orden $2m$,

$$\mathbf{Q}_m := < a,\ b\ /\ a^{2m},\ b^4,\ a^m = b^2\ aba = b >$$

el grupo cuaternio generalizado de orden $4m$.

Consideremos para $n \geq 3$ y $d = 2^{n-1} - 1$ el Grupo Semidiedral, definido por:

$$\mathbf{SD}_n := < x,\ y\ /\ x^{2^n},\ y^2,\ yxy = x^d\ >$$

$\mathbf{SD}_n$ es un grupo no conmutativo, de orden 2^{n+1}.

Describiremos los subgrupos no triviales de $\mathbf{SD}_n$, módulo conjugación. La siguiente proposición es de fácil demostración.

Proposición 3.1.1. *Módulo conjugación, $\mathbf{SD}_n$ tiene los subgrupos no-triviales descritos en la Tabla 3.1*

Orden	Cantidad	Subgrupo isomorfo a	Representantes de clase
2^n	1	$\mathbf{Z}_{2^n}$	$< x >$
	1	$\mathbf{D}_{2^{n-1}}$	$< x^2,\ y >$
	1	$\mathbf{Q}_{2^{n-2}}$	$< x^2,\ xy >$
2^{n-1}	1	$\mathbf{Z}_{2^{n-1}}$	$< x^2 >$
	1	$\mathbf{D}_{2^{n-2}}$	$< x^4,\ y >$
	1	$\mathbf{Q}_{2^{n-3}}$	$< x^4,\ xy >$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^r	1	$\mathbf{Z}_{2^r}$	$< x^{2^{n-r}} >$
	1	$\mathbf{D}_{2^{r-1}}$	$< x^{2^{n-(r-1)}},\ y >$
	1	$\mathbf{Q}_{2^{r-2}}$	$< x^{2^{n-(r-1)}},\ xy >$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^4	1	$\mathbf{Z}_{2^4}$	$< x^{2^{n-4}} >$
	1	$\mathbf{D}_{2^3}$	$< x^{2^{n-3}},\ y >$
	1	$\mathbf{Q}_{2^2}$	$< x^{2^{n-3}},\ xy >$
2^3	1	$\mathbf{Z}_{2^3}$	$< x^{2^{n-3}} >$
	1	$\mathbf{D}_{2^2}$	$< x^{2^{n-2}},\ y >$
	1	$\mathbf{Q}_2$	$< x^{2^{n-2}},\ xy >$
2^2	2	$\mathbf{Z}_{2^2}$	$\{< x^{2^{n-2}} >, < xy >\}$
	1	$\mathbf{K}$	$\{Id,\ x^{2^{n-1}},\ y,\ x^{2^{n-1}}y\}$
2	2	$\mathbf{Z}_2$	$\{< x^{2^{n-1}} >, < y >\}$

Tabla 3.1: Subgrupos no triviales (módulo conjugación) de $\mathbf{SD}_n$

$\mathcal{CL}_1$	$\{1\}$
$\mathcal{CL}_x$	$\{x, x^{2^{n-1}-1}\}$
$\mathcal{CL}_{x^2}$	$\{x^2, x^{-2}\}$
$\mathcal{CL}_{x^3}$	$\{x^3, x^{2^{n-1}-3}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{CL}_{x^r}$	$\{x^r, x^{2^{n-1}-r}\}$ si $r < 2^{n-1}$, impar
	$\{x^r, x^{-r}\}$ si $r < 2^{n-1}$,par
$\mathcal{CL}_{x^{2^{n-1}}}$	$\{x^{2^{n-1}}\}$
$\mathcal{CL}_{x^{2^{n-1}+1}}$	$\{x^{2^{n-1}+1}, x^{-1}\}$
$\mathcal{CL}_{x^{2^{n-1}+2}}$	$\{x^{2^{n-1}+2}, x^{-(2^{n-1}+2)}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{CL}_{x^r}$	$\{x^r, x^{-s}\}$ si $r = 2^{n-1} + s$, r impar
	$\{x^r, x^{-r}\}$ si $r = 2^{n-1} + s$, r par
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{CL}_y$	$\{y, x^2y, x^4y, ..., x^{2^n-2}y\}$
$\mathcal{CL}_{xy}$	$\{xy, x^3y, x^5y, ..., x^{2^n-1}y\}$

Tabla 3.2: Clases de conjugación de $\mathbf{SD}_n$

Demostración: La construcción de la Tabla 3.1 está estrechamente ligada al estudio de los grupos Diedrales y Quaternios, definidos anteriormente. El algoritmo es el siguiente: Tomamos el subgrupo $< x^2, y >$, y vemos que $(x^2)^{2^{n-1}} = id$, $y^2 = id$ y además, gracias a que $yx^2 = x^{-2}y$, tenemos que $x^2yx^2y = id$, por lo tanto $< x^2, y >\cong \mathbf{D}_{2^{n-1}}$. Ahora, por inducción, es posible demostrar que este comportamiento se repite para los subgrupos $< x^r, y >$, con r potencia de 2, $< 2^{n-1}$. Análogamente, si cambiamos y en el análisis anterior, por xy, tenemos que ahora $(xy)^4 = id$, $(x^2)^{2^{n-2}} = x^{2^{n-1}} = (xy)^2$. Por lo tanto, $< x^2, xy >\cong \mathbf{Q}_{2^{n-2}}$. También por inducción, es posible determinar que este comportamiento se repite para subgrupos de la forma $< x^r, xy >$, con r potencia de 2, $< 2^{n-1}$.

Observación 3.1.1. *La relación $yxy = x^d$ nos permite decidir qué elementos componen las clases de conjugación de $\mathbf{SD}_n$. Las clases de conjugación de $\mathbf{SD}_n$ están descritas en la Tabla 3.2:*

El propósito de determinar las clases de conjugación de elementos y subgrupos de $\mathbf{SD}_n$ es para estudiar diferentes acciones de este grupo en Superficies de Riemann.

3.2. Representaciones Complejas Irreducibles de los Grupos Semidiedrales

En esta sección, aplicaremos la teoría de representaciones complejas para determinar las representaciones complejas irreducibles de $\mathbb{SD}_n$.

Primero, recordemos que la cantidad de representaciones complejas unidimensionales de cualquier grupo G está dado por $|\, G : G' \,|$, donde G' es el subgrupo conmutador de G.

En lo que queda de este capítulo, sea $G := \mathbb{SD}_n$

Proposición 3.2.1. $|\, G : G' \,| = 4$

Demostración :
Dado que G/G' es abeliano, tenemos que $G' \subseteq < x >$.
Tenemos que

$$x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}yxy = x^{d-1}$$

Luego $G' \geq \langle x^{2^{n-1}-2} \rangle$. Como

$$2^{n-1} - 2 = 2(2^{n-2} - 1)$$

, tenemos que

$$\left| x^{2^{n-1}-2} \right| = 2^{n-1}$$

Ahora lo que sabemos es que $|G : G'| \leq 4$. Como G no es abeliano, finalmente obtenemos que $|G : G'| = 4$

$\square$

Proposición 3.2.2. *Sea G un grupo finito, $H \leq G$, H abeliano. Entonces cada representación compleja irreducible de G tiene grado $\leq |G : H|$*

Demostración: [18] pág 25.

Corolario 3.2.1. *El grupo $G = \mathbb{SD}_n$ tiene 4 representaciones irreducibles complejas unidimensionales, y $2^{n-1} - 1$ representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales no isomorfas*

Demostración:

Sabemos que $\mid G : G' \mid = 4$, y que G tiene $2^{n-1}+3$ elementos (o equivalentemente, G tiene $2^{n-1}+3$ representaciones complejas irreducibles no isomorfas). Además, por la Proposición 3.2.2, el grado de cualquier representación compleja irreducible de G es ≤ 2, eligiendo como subgrupo abeliano H a $< x >$.

Por lo tanto,

$$2^{n+1} = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + (2^{n-1}-1)2^2$$

Luego, hay 4 representaciones irreducibles complejas 1-dimensionales de G, y $2^{n-1}-1$ representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales de G.

□

Tales representaciones irreducibles complejas 1-dimensionales de G están dadas por:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{U}_1: \; x \mapsto 1 & \mathcal{U}_2: \; x \mapsto 1 & \mathcal{U}_3: \; x \mapsto -1 & \mathcal{U}_4: \; x \mapsto -1 \\ \quad\;\; y \mapsto 1 & \quad\;\; y \mapsto -1 & \quad\;\; y \mapsto 1 & \quad\;\; y \mapsto -1 \end{array}$$

Para poder describir las $2^{n-1}-1$ representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales de G, procederemos como sigue:

Construcción de las representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales de G

Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2^n}} = e^{\frac{\pi i}{2^{n-1}}}$ solución de la ecuación $p_n(z) = z^{2^n} - 1 = 0$. Definimos

$$\mathcal{V}_{n,k,j} := \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} & 0 \\ 0 & \omega^{d\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix} \qquad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para $0 \leq j \leq 2^{k-1}-1$ y $1 \leq k \leq n-1$; donde $d = 2^{n-1}-1$.

Proposición 3.2.3. *i) $\mathcal{V}_{n,k,j}$ es representación compleja irreducible de G*

ii) Recorriendo los valores de k y j, obtenemos todas las representaciones complejas 2-dimensionales irreducibles de G

Demostración: Primero, las matrices x e y, deben cumplir las relaciones de G:

$$x^{2^n} = \begin{pmatrix} \omega^{2^n\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} & 0 \\ 0 & \omega^{2^n\, d\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} yxy &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} & 0 \\ 0 & \omega^{d\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^{d\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} & 0 \\ 0 & \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pero por otro lado, si $k < n-1$, tenemos que $\omega^{d\, 2^{n-(k+1)}} \cdot \omega^{2^{n-(k+1)}} = 1$, y si $k = n-1$, tenemos que $\omega^{d\, 2^{n-(k+1)}} \cdot \omega^{2^{n-(k+1)}} = -1$. En cualquiera de estos dos casos, obtenemos que $\omega^{d^2\, 2^{n-(k+1)}} = \omega^{2^{n-(k+1)}}$. Luego:

$$x^d = \begin{pmatrix} \omega^{d\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} & 0 \\ 0 & \omega^{d^2\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{d\, 2^{n-(k+1)}(2j+1)} & 0 \\ 0 & \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se cumple que $yxy = x^d$. Luego, la primera parte de la Proposición es cierta.

Para demostrar la segunda parte de la Proposición, es claro que para distintos k y j, obtenemos representaciones no-isomorfas, pues no son conjugadas entre sí; y son irreducibles, pues no es posible encontrar representaciones equivalentes que se escriban como suma directa de las representaciones 1-dimensionales descritas anteriormente.

Para mostrar que, efectivamente, estas representaciones son las $2^{n-1}-1$ representaciones complejas irreducibles 2-dimensionales de G, vemos que, para cada k, hay 2^{k-1} representaciones no-isomorfas. (una para cada j). Luego, recorriendo los valores de k, obtenemos en total que hay

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1$$

por tratarse de una suma geométrica. Esto demuestra la Proposición.

□

Definición 3.2.1. *Sea V una representación compleja irreducible de un grupo G, y sea $\chi_V:=\{\chi(a),\ a\in V\}$. Definimos*

1. *El cuerpo de caracteres $K:=\mathbb{Q}(\chi_V)$.*
2. *El cuerpo de definición L, como la extensión de menor grado sobre $\mathbb{Q}$, tal que la representación V es equivalente a una representación irreducible sobre L.*

Lema 3.2.1. *Sean $L_{n,k,j}$ y $K_{n,k,j}$ los cuerpos de definición y de caracteres, para la representación $\mathcal{V}_{n,k,j}$. Entonces $L_{n,k,j}=K_{n,k,j}=\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)}+\omega^{d\,2^{n-(k+1)}(2j+1)})$*

Demostración: Tenemos que, en una primera instancia, la representación $\mathcal{V}_{n,k,j}$ está definida en $\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)})$; pero , conjugando las matrices de esta representación por la matriz:

$$P_{n,k,j}:=\begin{pmatrix}1 & \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)}\\ 1 & \omega^{d\,2^{n-(k+1)}(2j+1)}\end{pmatrix}$$

encontraremos matrices equivalentes, definidas en el cuerpo de caracteres $\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)}+\omega^{d\,2^{n-(k+1)}(2j+1)})$.

Dicha conjugación otorga dos resultados, dependiendo de k.

1. Si $k < n-1$

$$(P_{n,k,j}^{-1})\,x\,(P_{n,k,j}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} + \omega^{d\,2^{n-(k+1)}(2j+1)} \end{pmatrix}$$

$$(P_{n,k,j}^{-1})\,y\,(P_{n,k,j}) = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} + \omega^{d\,2^{n-(k+1)}(2j+1)} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Si $k = n-1$

$$(P_{n,n-1,j}^{-1})\,x\,(P_{n,n-1,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega^{(2j+1)} + \omega^{d\,(2j+1)} \end{pmatrix}$$
$$(P_{n,k,j}^{-1})\,y\,(P_{n,k,j}) = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{(2j+1)} + \omega^{d\,(2j+1)} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En cualquiera de estos casos, obtenemos finalmente que $L_{n,k,j} = K_{n,k,j}$

□

Observación 3.2.1. *No es difícil ver que $K_{n,k,j_1} = K_{n,k,j_2}$, para distintos $0 \leq j_1, j_2 \leq 2^{k-1} - 1$; así que, de aquí en adelante denotaremos por $K_{n,k}$ al Cuerpo de Caracteres de la representación $V_{n,k,j}$.*

3.3. Construcción Idempotentes Racionales Primitivos para G

En esta sección contaremos cuántas representaciones racionales irreducibles tiene G, y daremos una fórmula explícita para los idempotentes racionales primitivos, derivados de dichas representaciones.

Para ello, usaremos que

Teorema 3.3.1.

$$\left\{\begin{matrix} \textit{Cantidad de representaciones} \\ \textit{racionales irreducibles de } G \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \textit{Cantidad subgrupos cíclicos} \\ \textit{módulo conjugación en } G \end{matrix}\right\}$$

Demostración: [18] pág 103.

Corolario 3.3.1. *G tiene $n+3$ representaciones racionales irreducibles*

Demostración: Lo visto en la Tabla 3.1, nos dice que $< x > = < x^r >$, para r impar, y que $\{< x^{2^r} >\}_{r=0}^{n}$, son subgrupos cíclicos de distinto orden, y por lo tanto, no conjugados entre ellos, ni tampoco conjugados a $< x >$.

Por otro lado, $< y >$ es conjugado sólo a los subgrupos $< x^r y >$, para r par, ya que todos estos generadores, pertenecen a la misma clase de conjugación en G. De la misma forma $< xy >$ es conjugado sólo a los subgrupos $< x^r y >$, para r impar.

Concluimos entonces que hay $n+3$ clases de subgrupos cíclicos, módulo conjugación en G, y por ende, G tiene $n+3$ representaciones racionales irreducibles.

□

Para calcular una fórmula explícita para los idempotentes racionales primitivos, derivados de dichas representaciones, denotaremos por $Gal(L|K)$ al Grupo de Galois del cuerpo L sobre el cuerpo K. Con dicha notación, usaremos que dado un grupo G, una representación racional irreducible $\mathcal{W}$, asociada a una representación compleja irreducible $\mathcal{V}$, se descompone en el cuerpo de caracteres de $\mathcal{V}$ de la siguiente forma:

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{W} = \bigoplus_{\varphi \in Gal(K|\mathbb{Q})} \varphi(U) \tag{3.1}$$

con

$$U = \bigoplus_{\tau \in Gal(L|K)} \tau(\mathcal{V}) \simeq m\mathcal{V}$$

donde L y K son, respectivamente, los cuerpos de definición y de caracteres, de la representación compleja irreducible $\mathcal{V}$, y $m = [L : K]$ es el índice de Schur de $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{Q}$.

En nuestro caso, tenemos que, para todas las representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales de G, $L = K$, así que $U \simeq \mathcal{V}$; y, siguiendo la notación de la sección 3.2:

$$K_{n,k} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{W}_{n,k} \simeq \bigoplus_{\varphi \in Gal(K_{n,k}|\mathbb{Q})} \varphi(\mathcal{V}_{n,k,j}) \tag{3.2}$$

o mejor,

$$K_{n,k} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{W}_{n,k} \simeq \bigoplus_{j=0}^{|Gal(K_{n,k}|\mathbb{Q})|-1} \varphi(\mathcal{V}_{n,k,j}) \tag{3.3}$$

Lema 3.3.1.

$$|Gal(K_{n,k}|\mathbb{Q})| = 2^{k-1} \qquad para \quad 1 \leq k \leq n-1$$

Demostración: De la sección 3.2, concluimos que cada polinomio irreducible en $\mathbb{Q}$ $p_k(z) := z^{2^k} + 1$, tiene por cuerpo de descomposición a $\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}})$ para $1 \leq k \leq n-1$

Pues bien, debido a que $[\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}}) : K_{n,k}] = 2$ para $1 \leq k \leq n-1$, tenemos que:

$$|Gal(K_{n,k}|\mathbb{Q})| = \frac{[\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}}) : K_{n,k}]} = \frac{2^k}{2} = 2^{k-1} \qquad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

$\square$

Observación 3.3.1. *Podemos ver que $Gal(K_{n,k}|\mathbb{Q})$ está compuesto por los siguientes elementos:*

$$\varphi_j : \omega^{2^{n-(k+1)}} + \omega^{d\,2^{n-(k+1)}} \mapsto \omega^{2^{n-(k+1)}(2j+1)} + \omega^{d\,2^{n-(k+1)}(2j+1)}$$

para $0 \leq j \leq 2^{k-1} - 1$, cuando $0 \leq k \leq n-1$

Ahora que hemos identificado el comportamiento de Gal$(K_{n,k}|\mathbb{Q})$, estamos en condiciones de hacer los cálculos necesarios para encontrar los idempotentes racionales primitivos de G. A continuación volveremos la mirada sobre la teoría de álgebras simples (ver [4])

Recordemos que $\mathbb{Q}[G]$ es álgebra semisimple, de dimensión finita. Entonces

$$\mathbb{Q}[G] \simeq Q_1 \oplus ... \oplus Q_r$$

donde $Q_1, ..., Q_r$ son álgebras simples.

Sea $1 = e_1 + ... + e_r$ la descomposición del elemento 1. Los elementos e_i son los elemenos unidad de las subálgebras Q_i, y forman un grupo de idempotentes ortogonales centrales.

Por otro lado, sabemos que cada idempotente complejo central $e_{\mathcal{V}_i}$ de $K[G]$ que genera la subálgebra simple asociada a $\mathcal{V}_i$ (representación compleja irreducible de G), y cada idempotente racional central $e_{\mathcal{W}_i}$ de $\mathbb{Q}[G]$ que genera la subálgebra simple asociada a $\mathcal{W}_i$ (representación racional irreducible de G);se descomponen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{V}_i} &= l_1 + \cdots + l_n \quad \text{en} \quad L[G] \\ e_{\mathcal{V}_i} &= k_1 + \cdots + k_{\frac{n}{m}} \quad \text{en} \quad K[G] \\ e_{\mathcal{W}_i} &= f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{m}} \quad \text{en} \quad \mathbb{Q}[G] \end{aligned} \tag{3.4}$$

con $n = \dim(\mathcal{V}_i)$, m el índice de Schur de $\mathcal{V}_i$; y con $l_s := \frac{n}{|G|} \sum_{g \in G} a_{ss}(g^{-1})g$, para $s = 1, \ldots, n$. Donde $a_{st}(g)$ es la (s,t)-ésima entrada de la representación matricial, asociada a g.

En nuestro caso, para $G := \mathbf{SD}_n$:

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{V}_{n,k,j}} &= (l_{n,k,j})_1 + (l_{n,k,j})_2 \quad en \quad K_{n,k}[G] \\ e_{\mathcal{W}_{n,k}} &= (f_{n,k})_1 + (f_{n,k})_2 \quad en \quad \mathbb{Q}[G] \end{aligned}$$

con $(l_{n,k,j})_s := \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} a_{ss}(g^{-1})g$, para $s = 1, 2$.

Para obtener los $(f_{n,k})_s$, considerando lo dicho en la ecuación 3.3, tenemos que:

$$(f_{n,k})_s = \sum_{\varphi \in \mathrm{Gal}(K_{n,k}|\mathbb{Q})} \varphi((l_{n,k,j})_s) \qquad s = 1, 2$$

y por lo visto en la Observación 3.3.1, obtenemos finalmente que:

$$(f_{n,k})_s = \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} (l_{n,k,j})_s \qquad s = 1, 2 \tag{3.5}$$

Para obtener los $(l_{n,k,j})_s$, necesitamos calcular las entradas de las matrices x^r, $x^r y$, vistas en $K_{n,k}$, lo que resultaría extremadamente complicado, por la forma de las entradas de las matrices en dicho cuerpo. Por ello, usaremos las expresiones de estas matrices en $\mathbb{Q}(\omega^{2^{n-(k+1)}})$,donde sólo son potencias (o permutaciones de potencias) de matrices diagonales), y usaremos que

$$(P_{n,k,j}^{-1} x P_{n,k,j})^r = P_{n,k,j}^{-1} x^r P_{n,k,j} \quad ; \quad (P_{n,k,j}^{-1} x P_{n,k,j})^r y = P_{n,k,j}^{-1} x^r y P_{n,k,j}$$

Recordamos que si $k < n-1$, tenemos que $\omega^{d\, 2^{n-(k+1)}} \cdot \omega^{2^{n-(k+1)}} = 1$, y si $k = n-1$, tenemos que $\omega^{d\, 2^{n-(k+1)}} \cdot \omega^{2^{n-(k+1)}} = -1$. Así que para efectuar explícitamente las anteriores conjugaciones de matrices, nuevamente las separaremos en dos casos:

1. $\underline{1 \leq k < n-1}$

   Según la explicación anterior, obtenemos una caracterización explícita de las matrices de $\mathcal{V}_{n,k,j}$, con entradas en $K_{n,k}$

$$x^r = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \omega^{(r-1)a} - \omega^{-(r-1)a} & \omega^{ra} - \omega^{-ra} \\ \omega^{-ra} - \omega^{ra} & \omega^{-(r+1)a} - \omega^{(r+1)a} \end{pmatrix}$$

$$x^r y = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \omega^{(r-1)a} - \omega^{-(r-1)a} & \omega^{(r-2)a} - \omega^{-(r-2)a} \\ \omega^{-ra} - \omega^{ra} & \omega^{-(r-1)a} - \omega^{(r-1)a} \end{pmatrix}$$

   con $c = \omega^{-a} - \omega^{a}$ y $a = 2^{n-(k+1)}(2j+1)$

   De esta forma

$$(l_{n,k,j})_1 = \frac{1}{2^n c} \Big(\sum_{r=0}^{2^n-1} (\omega^{(r-1)a} - \omega^{-(r-1)a})(x^{-r} + (x^r y)^{-1}) \Big)$$

$$(l_{n,k,j})_2 = \frac{1}{2^n c} \Big(\sum_{r=0}^{2^n-1} (\omega^{(r+1)a} - \omega^{-(r+1)a}) x^{-r} + \sum_{r=0}^{2^n-1} (\omega^{(r-1)a} - \omega^{-(r-1)a})(x^r y)^{-1} \Big)$$

   Con lo que obtenemos

$$(f_{n,k})_1 = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \frac{1}{c} \sum_{r=0}^{2^n-1} (\omega^{(r-1)a} - \omega^{-(r-1)a})(x^{-r} + (x^r y)^{-1})$$

$$(f_{n,k})_2 = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \frac{1}{c} \Big(\sum_{r=0}^{2^n-1} (\omega^{(r+1)a} - \omega^{-(r+1)a}) x^{-r} + \sum_{r=0}^{2^n-1} (\omega^{(r-1)a} - \omega^{-(r-1)a})(x^r y)^{-1} \Big)$$

o mejor

$$(f_{n,k})_1 = \frac{1}{2^n} \Big(1 + y + \sum_{r=2}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \sum_{s=0}^{r-2} (-\omega^{a(r-2-2s)})(x^{-r} + (x^r y)^{-1}) \Big)$$

$$(f_{n,k})_2 = \frac{1}{2^n} \Big(\sum_{r=0}^{2^n-1} \Big(\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \sum_{s=0}^{r} (\omega^{a(2s-r)}) x^{-r} \Big) - y - \sum_{r=2}^{2^n-1} \Big(\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \sum_{s=0}^{r-2} (-\omega^{a(r-2-2s)})(x^r y)^{-1} \Big) \Big)$$

Finalmente, usando propiedades de las raíces de la unidad, obtenemos las fórmulas de los idempotentes, con coeficientes racionales:

$$(f_{n,k})_1 = \frac{1}{2^{n-(k-1)}} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} (-1)^{T_E(r)} (x^{-2(r+1)} + x^{2(r+1)} y)$$

$$(f_{n,k})_2 = \frac{1}{2^{n-(k-1)}} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} (-1)^{T_E(r)+1} (x^{-2r} + x^{2(r+1)} y)$$

donde para el conjunto de números

$$E = \{2^k q, 2^k q + 1, \ldots, 2^k q + 2^{k-1} - 1\}_{q=0}^{2^{n-(k+1)}-1}$$

$$T_E(r) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad r \in E \\ 0, & \text{si} \quad r \notin E \end{cases}$$

2. $\underline{k = n-1}$

Hacemos el mismo método que en el caso anterior

$$x^r = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \omega^{(r-1)a} + (-1)^r\omega^{-(r-1)a} & \omega^{ra} - (-1)^r\omega^{-ra} \\ \omega^{ra} - (-1)^r\omega^{-ra} & \omega^{(r+1)a} + (-1)^r\omega^{-(r+1)a} \end{pmatrix}$$

$$x^r y = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \omega^{(r-1)a} + (-1)^r\omega^{-(r-1)a} & (-1)^r\omega^{-(r-2)a} - \omega^{(r-2)a} \\ \omega^{ra} - (-1)^r\omega^{-ra} & -(\omega^{(r-1)a} + (-1)^r\omega^{-(r-1)a}) \end{pmatrix}$$

con $c = \omega^a + \omega^{-a}$ y $a = 2j+1$

De esta forma

$$(l_{n,n-1,j})_1 = \frac{1}{2^n c}\Big(\sum_{r=0}^{2^n-1}(\omega^{(r-1)a} + (-1)\omega^{-(r-1)a})(x^{-r} + (x^r y)^{-1})\Big)$$

$$(l_{n,n-1,j})_2 = \frac{1}{2^n c}\Big(\sum_{r=0}^{2^n-1}(\omega^{(r+1)a} + (-1)^r\omega^{-(r+1)a})x^{-r} - \sum_{r=0}^{2^n-1}(\omega^{(r-1)a} + (-1)^r\omega^{-(r-1)a})(x^r y)^{-1}\Big)$$

Con lo que obtenemos

$$(f_{n,n-1})_1 = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\frac{1}{c}\sum_{r=0}^{2^n-1}(\omega^{(r-1)a} + (-1)^r\omega^{-(r-1)a})(x^{-r} + (x^r y)^{-1})$$

$$(f_{n,n-1})_2 = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\frac{1}{c}\Big(\sum_{r=0}^{2^n-1}(\omega^{(r+1)a} + (-1)^r\omega^{-(r+1)a})x^{-r} - \sum_{r=0}^{2^n-1}(\omega^{(r-1)a} + (-1)^r\omega^{-(r-1)a})(x^r y)^{-1}\Big)$$

o mejor

$$(f_{n,n-1})_1 = \frac{1}{2^n}\Big(1 + y + \sum_{r=2}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{s=0}^{r-2}((-1)^s\omega^{a(r-2-2s)})(x^{-r} + (x^r y)^{-1})\Big)$$

$$(f_{n,n-1})_2 = \frac{1}{2^n}\Big(\sum_{r=0}^{2^n-1}\Big(\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{s=0}^{r}((-1)^s\omega^{a(r-2s)})x^{-r}\Big) - y - \sum_{r=2}^{2^n-1}\Big(\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{s=0}^{r-2}((-1)^s\omega^{a(r-2-2s)})(x^r y)^{-1}\Big)\Big)$$

Finalmente, usando propiedades de las raíces de la unidad, obtenemos las fórmulas de los idempotentes, con coeficientes racionales:

$$(f_{n,n-1})_1 = \frac{1}{2^2}\sum_{r=0}^{2^{n-2}-1}(-1)^r(x^{-2(r+1)} + x^{2(r+1)}y - x^{-2(r+1+2^{n-2})} - x^{2(r+1+2^{n-2})}y)$$

$$(f_{n,n-1})_2 = \frac{1}{2^2}\sum_{r=0}^{2^{n-2}-1}(-1)^r(x^{-2r} - x^{2(r+1)}y - x^{-2(r+2^{n-2})} + x^{2(r+1+2^{n-2})}y)$$

CAPÍTULO

CUATRO

DESCOMPOSICIÓN DE UNA VARIEDAD JACOBIANA BAJO LA ACCIÓN DE LOS GRUPOS SEMIDIEDRALES

4.1. Subvariedades provocadas por la acción de $\mathbf{SD}_n$, vistas como Variedades de Prym

A continuación, aplicaremos la teoría descrita en el Capítulo 2 para el caso de los grupos semidiedrales $\mathbf{SD}_n$, los cuales, en esta sección, también serán nombrados como el grupo G.

Las acciones de otros grupos fueron estudiadas, por ejemplo, por Recillas, quien en [11] descompuso la Variedad Jacobiana del cubrimiento Galois de un cubrimiento trigonal simple; por Ries, quien en [14] descompuso la Variedad Jacobiana de una curva D_p-gonal; por Recillas-Rodríguez, en [12] para el grupos simétrico S_3 y en [13] para el grupo simétrico S_4; por Donagi-Markman en [5] para los grupos S_3, S_4 y WD_4; por Carocca-Recillas-Rodríguez en [3] para los Grupos Diedrales; y por Sánchez-Argáez en [17] para el grupo alternante A_5.

Considerando también los resultados de la sección 2.3, obtenemos lo siguiente:

Proposición 4.1.1. *Dado un cubrimiento Galois $X \longrightarrow Y := X_G = X/G$, la descomposición isotípica asociada de JX, está dada por:*

$$JX \sim JY \times B_{\mathcal{U}_2} \times B_{\mathcal{U}_3} \times B_{\mathcal{U}_4} \times B^2_{\mathcal{W}_{n,1}} \times \cdots \times B^2_{\mathcal{W}_{n,n-1}} \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{U}_i$, $2 \leq i \leq 4$, y $\mathcal{W}_{n,k}$, $1 \leq k \leq n-1$ son las representaciones racionales irreducibles de G

Demostración: **Resultados de las secciones 2.2 y 3.2**

Ahora, justificaremos el trabajo hecho en la sección 2.3. Cada uno de los idempotentes calculados en dicha sección son tales que cumplen con la Proposición 2.1.3

Teorema 4.1.1. *Según la notación de la sección 2.3. Si* $(f_{n,k})_1$ *es un idempotente racional primitivo, asociado a la representación racional irreducible* $\mathcal{W}_{n,k}$*, entonces*

$$\begin{aligned}
B_{\mathcal{U}_1} &\sim \mathrm{Im}(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{g\in G} g)\\
B_{\mathcal{U}_2} &\sim \mathrm{Im}(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{2^n-1}(x^r - x^r y))\\
B_{\mathcal{U}_3} &\sim \mathrm{Im}(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{2^n-1}(-1)^n(x^r + x^r y))\\
B_{\mathcal{U}_4} &\sim \mathrm{Im}(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{2^n-1}(-1)^n(x^r - x^r y))\\
B_{\mathcal{W}_{n,k}} &\sim \mathrm{Im}\{(f_{n,k})_1\} \qquad \textit{para} \quad 1\le k\le n-1
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Teorema 4.1.2. *Cada* $B_{\mathcal{U}_i}$*,* $2\le i\le 4$*, y cada* $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$*,* $1\le k\le n-1$ *es isógeno a alguna Variedad de Prym intermedia.*

Demostración: Según lo visto en el Corolario 2.2.2, basta con demostrar que, para cada $B_{\mathcal{U}_i}$ y $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$, existen subgrupos $H < N \le G$, tales que:

1. $\chi_{\mathrm{Ind}_{1_H}^G} = \chi_{\mathcal{U}_i} + \chi_{\mathrm{Ind}_{1_N}^G}$ $\quad(\chi_{\mathrm{Ind}_{1_H}^G} = \chi_{\mathcal{W}_{n,k}} + \chi_{\mathrm{Ind}_{1_N}^G}$, respectivamente)
2. $\dim \mathrm{Fix}_H\, \mathcal{U}_i = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_H}^G}, \chi_{\mathcal{U}_i}\rangle = 1$, $\quad(\dim \mathrm{Fix}_H\, \mathcal{V}_{n,k} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_H}^G}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}}\rangle = 1$, respectivamente)

Para calcular los caracteres inducidos, nos valdremos de la fórmula que aparece en [7] pág 64, que dice:

Sea $H \le G$, entonces el caracter correspondiente a la representación de G, inducida por la trivial de H, está dada por:

$$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_H}^G(g)} = |\,C_G(g)|\sum_i \frac{1_H(g_i)}{|\,C_H(g_i)|} \tag{4.3}$$

donde la suma recorre los g_i representantes de clases de conjugación en H, contenidos en la clase de conjugación de g, $C_G(g)$ y $C_H(g)$ son los centralizadores de g en G y H respectivamente.

Luego

Para $\mathcal{U}_2$

Cl_g	Cl_{Id}	$Cl_{x^r},\ r \neq 2^{n-1}$	$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x>}}^G}(g)$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^n}) = 2$	$2^n(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}) = 2$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^n}) = 2$	0	0
$\chi_{\mathcal{U}_2}(g)$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_G}^G}(g)$	1	1	1	1	1

$$\Rightarrow \qquad \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x>}}^G} = \chi_{\mathcal{U}_2} + \chi_{\mathrm{Ind}_{1_G}^G}$$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_{<x>} \mathcal{U}_2 &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_2} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{U}_2}(g) \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x>}}^G}(g) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} (\underbrace{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot 2}_{2^n \text{veces}}) \\
&= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{B_{\mathcal{U}_2} \sim P(X_{<x>}/Y)}$$

Para $\mathcal{U}_3$, sea $D_{2^{n-1}} :=< x^2, y >$

Cl_g	Cl_{Id}	$Cl_{x^r} \neq 2^{n-1}$, r par	$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_{x^r} r impar	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{D_{2^{n-1}}}}^G}(g)$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^n}) = 2$	$2^n(\frac{1}{2^{n-1}}) = 2$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^n}) = 2$	0	$2^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 2$	0
$\chi_{\mathcal{U}_3}(g)$	1	1	1	-1	1	-1
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_G}^G}(g)$	1	1	1	1	1	1

$$\Rightarrow \qquad \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-1}}}}} = \chi_{\mathcal{U}_3} + \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_G}}$$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_{D_{2^{n-1}}} \mathcal{U}_3 &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-1}}}}}, \chi_{\mathcal{U}_3} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{U}_3}(g) \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-1}}}}}(g) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} (\underbrace{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot 2}_{2^n \text{veces}}) \\
&= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{B_{\mathcal{U}_3} \sim P(X_{D_{2^{n-1}}}/Y)}$$

Para $\mathcal{U}_4$, sea $Q_{2^{n-2}} := < x^2, xy >$

Cl_g	Cl_{Id}	$Cl_{x^r} \neq 2^{n-1}$, r par	$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_{x^r} r impar	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{Q_{2^{n-2}}}}}(g)$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^n}) = 2$	$2^n(\frac{1}{2^{n-1}}) = 2$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^n}) = 2$	0	0	$2^2(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) = 2$
$\chi_{\mathcal{U}_4}(g)$	1	1	1	-1	-1	1
$\chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_G}}(g)$	1	1	1	1	1	1

$$\Rightarrow \qquad \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{Q_{2^{n-2}}}}} = \chi_{\mathcal{U}_4} + \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_G}}$$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_{Q_{2^{n-2}}} \mathcal{U}_4 &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{Q_{2^{n-2}}}}}, \chi_{\mathcal{U}_4} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{U}_4}(g) \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{Q_{2^{n-2}}}}}(g) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} (\underbrace{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot 2}_{2^n \text{veces}}) \\
&= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{B_{\mathcal{U}_4} \sim P(X_{Q_{2^{n-2}}}/Y)}$$

Para $\mathcal{W}_{n,k}$, $\quad 1 \leq k \leq n-3 \quad$; sea $\quad D_{2^{n-k}} :=< x^{2^{k+1}}, y >$

Cl_g	Cl_{Id}	$Cl_{x^r},\ r \neq 2^k s$	$Cl_{x^r},\ r = 2^k s,$ s impar	$Cl_{x^r},\ r = 2^k s,$ s par	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-(k+1)}}}}}(g)$	2^{k+1}	0	0	2^{k+1}	2	0
$\chi_{\mathcal{W}_{n,k}}(g)$	2^k	0	-2^k	2^k	0	0
$\chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-k}}}}}(g)$	2^k	0	2^k	2^k	2	0

$$\Rightarrow \quad \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-(k+1)}}}}} = \chi_{\mathcal{W}_{n,k}} + \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-k}}}}} \qquad \text{para } 1 \leq k \leq n-3$$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_{D_{2^{n-(k+1)}}} \mathcal{V}_{n,k} &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-(k+1)}}}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{V}_{n,k}}(g) \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_{2^{n-(k+1)}}}}}(g) \\
&= \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}} \sum_{s \text{ par}} (\omega^{2^{n-(k+1)} \cdot 2^k s} + \omega^{-2^{n-(k+1)} \cdot 2^k s}) \\
&= \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}} (2 \cdot 2^{n-(k+1)}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{B_{\mathcal{W}_{n,k}} \sim P(X_{D_{2^{n-(k+1)}}} / X_{D_{2^{n-k}}}), \text{ para } 1 \le k \le n-3}$$

Para $\mathcal{W}_{n,n-2}$, sea $K := \{Id, x^{2^{n-1}}, y, x^{2^{n-1}} y\}$

Cl_g	Cl_{Id}	Cl_{x^r}, $r \neq 2^{n-2}s$	Cl_{x^r}, $r = 2^{n-2}s$, s impar	Cl_{x^r}, $r = 2^{n-2}s$, s par	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_K}}(g)$	2^{n-1}	0	0	2^{n-1}	2	0
$\chi_{\mathcal{W}_{n,n-2}}(g)$	2^{n-2}	0	-2^{n-2}	2^{n-2}	0	0
$\chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_4}}}(g)$	2^{n-2}	0	2^{n-2}	2^{n-2}	2	0

$$\Rightarrow \quad \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_K}} = \chi_{\mathcal{W}_{n,n-2}} + \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{D_4}}}$$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_K \mathcal{V}_{n,n-2} &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_K}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,n-2}} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{V}_{n,n-2}}(g) \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_K}}(g) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} (2^{n-1} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 2) \\
&= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{B_{\mathcal{W}_{n,n-2}} \sim P(X_K/X_{D_4})}$$

Para $\mathcal{W}_{n,n-1}$

Cl_g	Cl_{Id}	$Cl_{x^r},\ r \neq 2^{n-1}$	$Cl_{x^r},\ r = 2^{n-1}$	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<y>}}^G}(g)$	2^n	0	0	2	0
$\chi_{\mathcal{W}_{n,n-1}}(g)$	2^{n-1}	0	-2^{n-1}	0	0
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_K}^G}(g)$	2^{n-1}	0	2^{n-1}	2	0

$$\Rightarrow \qquad \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<y>}}^G} = \chi_{\mathcal{W}_{n,n-1}} + \chi_{\mathrm{Ind}_{1_K}^G}$$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_{<y>} \mathcal{V}_{n,n-1} &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<y>}}^G}, \chi_{\mathcal{V}_{n,n-1}} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(2^n \cdot 2) \\
&= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{B_{\mathcal{W}_{n,n-1}} \sim P(X_{<y>}/X_K)}$$

$\square$

CAPÍTULO

CINCO

EJEMPLOS ESPECIALES DE ACCIONES DE $\mathbf{SD}_N$ DE GÉNERO 0

5.1. Fórmulas y cálculos preliminares

Todo el trabajo descrito en los capítulos anteriores tiene su aplicación a continuación. Describiremos ciertos casos de acciones de $\mathbf{SD}_n$, que merecen especial atención. Para ello, nos valdremos de resultados preliminares, claves en la búsqueda de dichos ejemplos.

Definición 5.1.1. *Sea X una Superficie de Riemann compacta, y G su grupo de automorfismos. Sean $p_1, ..., p_r \in X$ un conjunto maximal de valores de ramificación, con respecto a G. Para cada $j = 1, ..., r$, consideremos su estabilizador G_j. Definimos la signatura geométrica de G sobre X a la tupla:*

$$(\gamma; [m_1, C_1], ..., [m_r, C_r])$$

donde γ es el género de X_G, $|G_j| = m_j$, y C_j es la clase de conjugación representada por G_j.

Teorema 5.1.1. *Sea G grupo finito actuando sobre X, una superficie de Riemann compacta; con signatura geométrica $(\gamma, [m_1, C_1], ..., [m_t, C_t])$. Entonces, para cada subgrupo $H \leq G$, el género de $X/H = X_H$ está dado por:*

$$g(X_H) = |\,G : H|\,(\gamma - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t}(|\,G : H| \,-\, |\,H \setminus G/G_j|\,) \tag{5.1}$$

donde G_k es un representante de la clase de conjugación C_k, $H \setminus G/K$ es el conjunto de clases dobles para los subgrupos H y K.

Demostración: [16]

Lema 5.1.1. *En los términos del Teorema 5.1.1, tenemos que:*

$$| H \setminus G/K| = \frac{1}{|H|} \sum_{a \in H} \frac{|G| \cdot |K \cap Cl_a|}{|K| \cdot |Cl_a|} \tag{5.2}$$

donde Cl_a es la clase de conjugación de a en G.

Demostración: [16]

Teorema 5.1.2. *Sea G un grupo finito, actuando sobre una Superficie de Riemann compacta X, con signatura geométrica $(\gamma, [m_1, C_1], ..., [m_t, C_t])$. Entonces, la dimensión de cualquier subvariedad B_i, asociada a una representación racional irreducible no-trivial $\mathcal{W}_i$, en la descomposición isógena G-equivariante de la correspondiente Variedad Jacobiana JX, está dada por:*

$$\dim B_i = k_i(\dim V_i(\gamma - 1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{t}(\dim V_i - \dim \mathrm{Fix}_{G_k} V_i)) \tag{5.3}$$

donde G_k es un representante de la clase de conjugación C_k, $dimV_i$ es la dimensión de la representación irreducible compleja V_i, asociada a $\mathcal{W}_i$, y $k_i = m_i \cdot |\ \mathrm{Gal}([K_i : \mathbb{Q}])|$, con m_i el índice de Schur de V_i, y K_i su cuerpo de caracteres asociado.

Demostración: [16]

En nuestro caso, para obtener dichas dimensiones, sólo es necesario calcular $\dim \mathrm{Fix}_{G_k} \mathcal{V}_i$, ya que para los semidiedrales $\mathbf{SD}_n$ el índice de Schur $= m_i = 1$ para todas sus representaciones complejas irreducibles. Además $|\ \mathrm{Gal}([K : \mathbb{Q}])| = 1$, en el caso de las representaciones 1-dimensionales $\mathcal{U}_i$, y $|\mathrm{Gal}([K : \mathbb{Q}])| = 2^{k-1}$ para las representaciones 2-dimensionales $\mathcal{V}_{n,k,j}$

Por otro lado, renombrando $G := \mathbf{SD}_n$, sabemos que

$$\dim \mathrm{Fix}_{G_k} \mathcal{V}_i = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{G_k}}^G}, \chi_{\mathcal{V}_i} \rangle \tag{5.4}$$

De este modo, sólo necesitamos calcular $\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{G_k}}^G}$, para los subgrupos cíclicos G_k.

Finalmente, para hacer este cálculo, nos valdremos de esta fórmula:

Teorema 5.1.3. *Sea $H \leq G$, entonces el caracter correspondiente a la representación de G, inducida por la trivial de H, está dada por:*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_H}^G(g)} = |\ C_G(g)| \sum_i \frac{1_H(g_i)}{|\ C_H(g_i)|} \tag{5.5}$$

donde la suma recorre los g_i representantes de clases de conjugación en H, contenidos en la clase de conjugación de g, $C_G(g)$ y $C_H(g)$ son los centralizadores de g en G y H respectivamente.

Demostración: [7] pág 64.

Luego, presentamos estos cálculos en las siguientes tablas, cada una para un subgrupo cíclico (módulo conjugación); donde Cl_g representa la clase de conjugación del elemento g.

Para $< x^{2r}y >$

Cl_g	Cl_{Id}	Cl_{x^r}, $r \neq 2^{n-1}$	$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x^{2r}y>}}^G}(g)$	$2^{n+1}(\frac{1}{2}) = 2^n$	0	0	$2^2(\frac{1}{2}) = 2$	0

Para $< x^{2r+1}y >$

Cl_g	Cl_{Id}	Cl_{x^r}, $r \neq 2^{n-1}$	$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x^{2r+1}y>}}^G}(g)$	$2^{n+1}(\frac{1}{2^2}) = 2^{n-1}$	0	$2^{n+1}(\frac{1}{2^2}) = 2^{n-1}$	0	$2^2(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) = 2$

Para $< x^{2^{n-r}} >$

Cl_g	Cl_{Id}	Cl_{x^s}, $s \neq 2^{n-1}$		$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x^{2^{n-r}}>}}^G}(g)$	$2^{n-(r-1)}$	$2^{n-(r-1)}$ si $n - r \mid s$	0 si $n - r \nmid s$	$2^{n-(r-1)}$	0	0

Ahora, necesitamos saber los caracteres de representaciones complejas irreducibles de G, cada una asociada a UNA representación racional irreducible. Tales representaciones son:

$\mathcal{U}_2$: $x \mapsto 1$; $y \mapsto -1$

$\mathcal{U}_3$: $x \mapsto -1$; $y \mapsto 1$

$\mathcal{U}_4$: $x \mapsto -1$; $y \mapsto -1$

$$\mathcal{V}_{n,k} : x \mapsto \begin{pmatrix} \omega^{2^{n-(k+1)}} & 0 \\ 0 & \omega^{-2^{n-(k+1)}} \end{pmatrix} \qquad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq k < n-1$$

$$\mathcal{V}_{n,n-1} : x \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega^{-1} \end{pmatrix} \qquad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la tabla de caracteres, asociada a estas representaciones, dice que:

	Cl_{Id}	Cl_{x^r}, $r \neq 2^{n-1}$	$Cl_{x^{2^{n-1}}}$	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathcal{U}_2}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\mathcal{U}_3}$	1	1 si r par, -1 si r impar	1	1	-1
$\chi_{\mathcal{U}_4}$	1	1 si r par, -1 si r impar	1	-1	1
$\chi_{\mathcal{V}_{n,k}}$	2	$\omega^{2^{n-(k+1)}r} + \omega^{-2^{n-(k+1)}r}$	2	0	0
$\chi_{\mathcal{V}_{n,n-1}}$	2	$\omega^r + (-1)^r\omega^{-r}$	-2	0	0

Con toda esta información, podemos entonces calcular las dimensiones de los subespacios fijos:

Para $\mathcal{U}_2$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r}y>} \mathcal{U}_2 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x^{2r}y>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_2} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^n \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2(-1)) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r+1}y>} \mathcal{U}_2 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x^{2r+1}y>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_2} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot (-1)) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2^{n-r}}>} \mathcal{U}_2 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{<x^{2^{n-r}}>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_2} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^r \cdot 2^{n-(r-1)}) = 1$$

Para $\mathcal{U}_3$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r}y>} \mathcal{U}_3 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{1}_{<x^{2r}y>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_3} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^n \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 1) = 1$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r+1}y>} \mathcal{U}_3 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{1}_{<x^{2r+1}y>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_3} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot (-1)) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2^{n-r}}>} \mathcal{U}_3 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{1}_{<x^{2^{n-r}}>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_3} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}(2^r \cdot 2^{n-(r-1)}) = 1, & r < n \\ \frac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 2 \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot (-1)) = 0, & r = n \end{cases}$$

Para $\mathcal{U}_4$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r}y>} \mathcal{U}_4 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{1}_{<x^{2r}y>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_4} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^n \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot (-1)) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r+1}y>} \mathcal{U}_4 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{1}_{<x^{2r+1}y>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_4} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 1) = 1$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2^{n-r}}>} \mathcal{U}_4 = \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{1}_{<x^{2^{n-r}}>}}^G}, \chi_{\mathcal{U}_4} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}(2^r \cdot 2^{n-(r-1)}) = 1, & r < n \\ \frac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 2 \cdot 1 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot (-1)) = 0, & r = n \end{cases}$$

para cada $3 \leq r \leq n$

Para $\mathcal{V}_{n,k}$ $\quad 1 \leq k < n-1$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r}y>} \mathcal{V}_{n,k} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x^{2r}y>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^n \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 0) = 1$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r+1}y>} \mathcal{V}_{n,k} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x^{2r+1}y>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 0) = 1$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x>} \mathcal{V}_{n,k} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}} \rangle = \tfrac{2}{2^{n+1}} \textstyle\sum_{s=0}^{2^n-1} (\omega^{2^{n-(k+1)}s} + \omega^{-2^{n-(k+1)}s}) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2^{n-r}}>} \mathcal{V}_{n,k} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x^{2^{n-r}}>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}} \rangle = \tfrac{2^{n-(r-1)}}{2^{n+1}} \textstyle\sum_{s=0}^{2^r-1} (\omega^{2^{n-(k+1)}2^{n-r}s} + \omega^{-2^{n-(k+1)}2^{n-r}s})$$

$(r < n)$

$$= \begin{cases} 2, & k < n-r \\ 0, & k \geq n-r \end{cases}$$

Para $\mathcal{V}_{n,n-1}$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r}y>} \mathcal{V}_{n,n-1} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x^{2r}y>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,n-1}} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^n \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 0) = 1$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2r+1}y>} \mathcal{V}_{n,n-1} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x^{2r+1}y>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,n-1}} \rangle = \tfrac{1}{2^{n+1}}(2^{n-1} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot (-2) + 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 0) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x>} \mathcal{V}_{n,n-1} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,n-1}} \rangle = \tfrac{2}{2^{n+1}} \textstyle\sum_{s=0}^{2^n-1} (\omega^{s} - \omega^{-s}) = 0$$

$$\dim \mathrm{Fix}_{<x^{2^{n-r}}>} \mathcal{V}_{n,n-1} = \langle \chi_{\mathrm{Ind}^G_{1_{<x^{2^{n-r}}>}}}, \chi_{\mathcal{V}_{n,n-1}} \rangle = \tfrac{2^{n-(r-1)}}{2^{n+1}} \textstyle\sum_{s=0}^{2^r-1} (\omega^{2^{n-r}s} - \omega^{-2^{n-r}s}) = 0$$

5.2. Ejemplos en que $\dim B_{U_i} > 0$ para $2 \leq i \leq 4$, y $\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}} > 0$, para $1 \leq k \leq n-1$

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la fórmula 5.1.2. Luego, nos preocuparemos de aquellas acciones con género de la superficie cuociente igual a 0, tales que $\dim B_{\mathcal{U}_i} > 0$ para $2 \leq i \leq 4$, y $\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}} > 0$, para $1 \leq k \leq n-1$. Es decir, aquellas acciones en que, efectivamente, las dimensiones en la descomposición vista en la Proposición 4.1.1 no se anulan.

En las siguientes tablas, no es difícil ver que, efectivamente, los vectores generan a $G = \mathbb{SD}_n$

Descartando los casos no favorables, obtenemos la siguiente lista resumen para los casos $t \leq 8$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 2, 4, 4, 2^n, 2^n)$	$(y, y, xy, xy, x, x^{2^{n-1}-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	1	1	2^k	$3 \cdot 2^{n-2}$	$5 \cdot 2^{n-1} - 1$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0; 2, 2, 4, 4, 2^r, 2^n, 2^n)$	$(y, y, x^{2^{n-1}-2^{n-r}+1}y, xy, x^{2^{n-r}}, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	1	1	2^k si $k < n-r$	2^n	$7 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-r} - 1$
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$		

t	Firma	Vector Generador
7	$(0; 2, 4, 4, 4, 2^n, 2^n, 2^n)$	$(y, xy, x^{1-2^{n-1}}y, xy, x^{1-2^{n-1}}, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	2	1	$3 \cdot 2^{k-1}$	$9 \cdot 2^{n-3}$	$15 \cdot 2^{n-2} - 2$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,2,2,4,2^n,2^n,2^n)$	$(y,y,y,xy,x^{2^{n-1}+1},x,x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	1	2	$3\cdot 2^{k-1}$	$2^{n-1}+3\cdot 2^{n-3}$	$13\cdot 2^{n-2}-2$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,2,2,4,4,4,2^n)$	(y,y,y,xy,xy,xy,x)

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
2	1	1	2^k	$2^{n-1}+3\cdot 2^{n-3}$	$11\cdot 2^{n-2}$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,4,4,2^r,2^r,2^n,2^n)$	$(y,y,xy,xy,x^{2^{n-r}},x^{2^{n-1}-2^{n-r}},x,x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	1	1	2^k si $k<n-r$	$5\cdot 2^{n-2}$	$9\cdot 2^{n-1}-2^{n-(r-1)}-1$
			2^{k+1} si $k\geq n-r$		

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,4,4,4,2^r,2^n,2^n,2^n)$	$(y,xy,xy,xy,x^{2^{n-r}},x,x,x^{-(2^{n-r}+1)})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	2	1	$3\cdot 2^{k-1}$ si $k<n-r$	$2^{n-1}+7\cdot 2^{n-3}$	$19\cdot 2^{n-2}-2^{n-r}-2$
			2^{k+1} si $k\geq n-r$		

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 2, 4, 4, 4, 2^r, 2^n)$	$(y, y, y, xy, xy, xy, x^{2^{n-r}}, x^{1-2^{n-r}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
2	1	1	2^k si $k < n-r$	$2^{n-1} + 5 \cdot 2^{n-3}$	$15 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-r}$
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$		

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 2, 4, 2^r, 2^n, 2^n, 2^n)$	$(y, y, y, xy, x^{2^{n-r}}, x^{2^{n-1}-2^{n-r}+1}, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	1	2	$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k < n-r$	$2^{n-1} + 5 \cdot 2^{n-3}$	$17 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-r} - 2$
			2^{k+1} si $k \geq n-r$		

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2^n, 2^n)$	$(y, y, y, y, xy, xy, x, x^{2^{n-1}-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
2	1	2	$3 \cdot 2^{k-1}$	2^n	$7 \cdot 2^{n-1} - 1$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 4, 4, 4, 4, 2^n, 2^n)$	$(y, y, xy, xy, xy, xy, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
2	2	1	$3 \cdot 2^{k-1}$	$5 \cdot 2^{n-2}$	$2^{n+2} - 1$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 4, 4, 2^n, 2^n, 2^n, 2^n)$	$(y, y, xy, xy, x^{2^{n-1}-1}, x, x, x^{-1})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	2	2	2^{k+1}	$5 \cdot 2^{n-2}$	$9 \cdot 2^{n-1} - 3$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4)$	$(y, y, y, y, xy, xy, xy, xy)$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
3	1	1	2^k	2^n	$3 \cdot 2^n + 1$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 2, 2, 2^n, 2^n, 2^n, 2^n)$	$(y, y, y, y, x, x, x^{-1}, x^{-1})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	1	3	2^{k+1}	2^n	$2^{n+2} - 3$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 4, 4, 4, 4, 2^n, 2^n, 2^n, 2^n)$	$(xy, xy, xy, xy, x, x, x^{-1}, x^{-1})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
1	3	1	2^{k+1}	$3 \cdot 2^{n-1}$	$5 \cdot 2^n - 3$

Cabe destacar que, para la primera firma de la lista, tomando $n = 3$, se alcanza el género mínimo donde ocurre este fenómeno ($g = 19$)

Otro patrón digno de destacar es que cada uno de los casos está determinado por ciertas simetrías en la dimensión de los $B_{\mathcal{U}_i}$, lo que permitiría encontrar, quizás más facilmente los siguientes casos, para firmas más largas.

5.3. Ejemplos en que $\dim B_{\mathcal{U}_i} = 0$ para $2 \leq i \leq 4$, y $\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}} = 0$, para $1 \leq k < n-1$

Por otro lado, el lado opuesto de de los casos anteriores, lo representan aquellos en que sólo $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$ aparece efectivamente en la descomposición de la Proposición 4.1.1.

Tales casos podemos incluso darlos de una manera general:

t	Firma	Vector Generador
3	$(0; 2, 4, 2^n)$	$(y, xy, x^{2^{n-1}+1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
0	0	0	0	2^{n-3}	2^{n-2}

y para $t > 3$

$(0; \underbrace{2, \ldots, 2}_{t-3 \text{ veces}}, 2, 4, 2^n)$, con vector generador:

$$\begin{cases} (0; \underbrace{x^{2^{n-1}}, \ldots, x^{2^{n-1}}}_{t-3 \text{ veces}}, y, xy, x^{2^{n-1}+1}), & \text{si } t \text{ es impar;} \\ (0; \underbrace{x^{2^{n-1}}, \ldots, x^{2^{n-1}}}_{t-3 \text{ veces}}, y, xy, x), & \text{si } t \text{ es par;} \end{cases}$$

De esta forma, $\dim B_{\mathcal{U}_i} = -1 + \frac{1}{2}(t - (t-3) - 1) = 0$, para $i = 2, 3, 4$, y

$$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}} = -2 + \tfrac{1}{2}(2t - 2(t-3) - 2) = 0, \text{ para } n - k > 1.$$

Pero esto se cumple siempre para $1 \leq k < n-1$.

Por lo tanto, $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$ es el único con dimensión $\neq 0$.

De hecho $\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}} = (2t-5) \cdot 2^{n-3}$

En resumen, los casos vistos bajo este análisis son:

t	Firma	Vector Generador
3	$(0; 2, 4, 2^n)$	$(y, xy, x^{2^{n-1}+1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
0	0	0	0	2^{n-3}	2^{n-2}

t	Firma	Vector Generador
$t>3$	$(0;\underbrace{2,\ldots,2}_{t-3 \text{ veces}},2,4,2^n)$	$(0;\underbrace{x^{2^{n-1}},\ldots,x^{2^{n-1}}}_{t-3 \text{ veces}},y,xy,x^{2^{n-1}+1})$ si t impar
		$(0;\underbrace{x^{2^{n-1}},\ldots,x^{2^{n-1}}}_{t-3 \text{ veces}},y,xy,x)$ si t par

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X)$
0	0	0	0	$(2t-5)\cdot 2^{n-3}$	$(2t-5)\cdot 2^{n-2}$

Observación 5.3.1. *En cada una de las tablas anteriores, el cálculo de $g(X)$ fue hecho con la fórmula de Riemann-Hurwitz, y comprobado con la suma de los $B_{\mathcal{U}_i}$, más 2 veces la suma de los $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$, lo que corrobora el resultado.*

5.4. Ejemplos en que $B_{\mathcal{U}_i}$ ó $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$ son Vaiedades Jacobianas, para $2 \leq i \leq 4$, $1 \leq k \leq n-1$

Ya vimos en el Teorema 4.1.2, que cada $B_{\mathcal{U}_i}$, $2 \leq i \leq 4$ y cada $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$, $1 \leq k \leq n-1$, es isógeno a una Variedad de Prym intermedia. Usaremos esto, para encontrar acciones particulares de G, tales alguno de éstos sean, además, isógenos a Variedades Jacobianas.

Ya sabemos que

$$\begin{array}{ll} B_{\mathcal{U}_2} \sim P(X_{<x>}/Y) & B_{\mathcal{W}_{n,k}} \sim P(X_{D_{2^{n-(k+1)}}}/X_{D_{2^{n-k}}}), \text{para } 1 \leq k \leq n-3 \\ B_{\mathcal{U}_3} \sim P(X_{D_{2^{n-1}}}/Y) & B_{\mathcal{W}_{n,n-2}} \sim P(X_K/X_{D_4}) \\ B_{\mathcal{U}_4} \sim P(X_{Q_{2^{n-2}}}/Y) & B_{\mathcal{W}_{n,n-1}} \sim P(X_{<y>}/X_K) \end{array}$$

Pero podemos decir algo más de los $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$:

Lema 5.4.1. $B_{\mathcal{W}_{n,k}} \sim P(X_{Q_{2^{n-(k+2)}}}/X_{D_{2^{n-(k+1)}}})$, *para* $1 \leq k \leq n-3$

Demostración: Usando técnicas anteriores, podemos ver que:

Cl_g	Cl_{Id}	Cl_{x^r}, $r \neq 2^k s$	Cl_{x^r}, $r = 2^k s$, s impar	Cl_{x^r}, $r = 2^k s$, s par	Cl_y	Cl_{xy}
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{Q_{2^{n-(k+2)}}}}^G}(g)$	2^{k+1}	0	0	2^{k+1}	0	2
$\chi_{\mathcal{W}_k}(g)$	2^k	0	-2^k	2^k	0	0
$\chi_{\mathrm{Ind}_{1_{Q_{2^{n-(k+1)}}}}^G}(g)$	2^k	0	2^k	2^k	0	2

$$\Rightarrow \quad \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{Q_{2^{n-(k+2)}}}}^G} = \chi_{\mathcal{W}_{n,k}} + \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{Q_{2^{n-(k+1)}}}}^G}$$

para $1 \leq k \leq n-3$

y además

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Fix}_{Q_{2^{n-(k+2)}}} \mathcal{V}_{n,k} &= \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{Q_{2^{n-(k+2)}}}}^G}, \chi_{\mathcal{V}_{n,k}} \rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{g \in G} \chi_{\mathcal{V}_{n,k}}(g) \chi_{\mathrm{Ind}_{1_{Q_{2^{n-(k+2)}}}}^G}(g) \\
&= \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}} \sum_{s\mathrm{par}} (\omega^{2^{n-(k+1)} \cdot 2^k s} + \omega^{-2^{n-(k+1)} \cdot 2^k s}) \\
&= \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}} (2 \cdot 2^{n-(k+1)}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$B_{\mathcal{W}_{n,k}} \sim P(X_{Q_{2^{n-(k+2)}}}/X_{Q_{2^{n-(k+1)}}}), \text{ para } 1 \leq k \leq n-3$$

□

En particular, hemos obtenido que

$$B_{\mathcal{W}_{n,1}} \sim P(X_{Q_{2^{n-3}}}/X_{Q_{2^{n-2}}}) \tag{5.6}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{lcl}
JX_{<y>} \sim JX_K \times P(X_{<y>}/X_K) & & JX_{<y>} \sim JX_K \times B_{\mathcal{W}_{n,n-1}} \\
JX_K \sim JX_{D_{2^2}} \times P(X_K/X_{D_{2^2}}) & & JX_K \sim JX_{D_{2^2}} \times B_{\mathcal{W}_{n,n-2}} \\
JX_{D_{2^2}} \sim JX_{D_{2^3}} \times P(X_{D_{2^2}}/X_{D_{2^3}}) & \Rightarrow & JX_{D_{2^2}} \sim JX_{D_{2^3}} \times B_{\mathcal{W}_{n,n-3}} \\
\vdots & & \vdots \\
JX_{D_{2^{n-3}}} \sim JX_{D_{2^{n-2}}} \times P(X_{D_{2^{n-3}}}/X_{D_{2^{n-2}}}) & & JX_{D_{2^{n-3}}} \sim JX_{D_{2^{n-2}}} \times B_{\mathcal{W}_{n,2}} \\
JX_{D_{2^{n-2}}} \sim JX_{D_{2^{n-1}}} \times P(X_{D_{2^{n-3}}}/X_{D_{2^{n-2}}}) & & JX_{D_{2^{n-2}}} \sim B_{\mathcal{U}_3} \times B_{\mathcal{W}_{n,1}}
\end{array} \tag{5.7}$$

también

$$JX_{Q_{2^{n-3}}} \sim JX_{Q_{2^{n-2}}} \times P(X_{Q_{2^{n-3}}}/X_{Q_{2^{n-2}}}) \quad \Rightarrow \quad JX_{Q_{2^{n-3}}} \sim B_{\mathcal{U}_4} \times B_{\mathcal{W}_{n,1}} \tag{5.8}$$

y por último

$$\begin{array}{lcl}
JX_{<x>} \sim JY \times P(X_{<x>}/Y) & & JX_{<x>} \sim B_{\mathcal{U}_1} \times B_{\mathcal{U}_2} \\
JX_{D_{2^{n-1}}} \sim JY \times P(X_{D_{2^{n-1}}}/Y) & \Rightarrow & JX_{D_{2^{n-1}}} \sim B_{\mathcal{U}_1} \times B_{\mathcal{U}_3} \\
JX_{Q_{2^{n-2}}} \sim JY \times P(X_{Q_{2^{n-2}}}/Y) & & JX_{Q_{2^{n-2}}} \sim B_{\mathcal{U}_1} \times B_{\mathcal{U}_4}
\end{array} \tag{5.9}$$

Combinando (19), (20), (21); y el hecho que $\dim B_{\mathcal{U}_1} = 0$ para acciones con cuociente de género 0, pudimos encontrar condiciones suficientes para lo que estamos buscando. En resumen:

Proposición 5.4.1. *1. $B_{\mathcal{U}_2}$, $B_{\mathcal{U}_3}$, $B_{\mathcal{U}_4}$ son siempre Variedades Jacobianas*

2. Para que $B_{\mathcal{W}_{n,1}}$ sea Variedad Jacobiana, basta que $\dim B_{\mathcal{U}_3} = 0$ ó $\dim B_{\mathcal{U}_4} = 0$

3. Para que $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$, $1 < k \leq n-1$, sea Variedad Jacobiana, basta que $\dim B_{\mathcal{U}_3} = 0$ ó $\dim B_{\mathcal{U}_4} = 0$; y que $\dim B_{\mathcal{W}_{n,s}} = 0$ para todo $s < k$

Con estos resultados, y usando la fórmula de dimensiones, vista en el Teorema 5.1.2. Encontramos, para un k dado, las acciones de G tales que $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$ es una Variedad Jacobiana, cuando $t \leq 8$.

Dichos cálculos se resumen a continuación:

Para $B_{\mathcal{W}_{n,1}}$

t	Firma	Vector Generador
4	$(0;2,4,2^{n-1},2^n)$	$(y,xy,x^2,x^{2^{n-1}-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
0	0	0	2^{k-1}	$3\cdot 2^{n-3}$	1	$5\cdot 2^{n-2}-2$

t	Firma	Vector Generador
4	$(0;2,2,2^n,2^n)$	(y,y,x,x^{-1})

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
0	0	1	2^{k-1}	2^{n-2}	1	2^n-1

t	Firma	Vector Generador
4	$(0;4,4,2^n,2^n)$	$(xy,xy,x,x^{2^{n-1}-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
0	1	0	2^{k-1}	2^{n-1}	1	$3\cdot 2^{n-1}-1$

t	Firma	Vector Generador
5	$(0;2,2,4,4,2^{n-1})$	$(y,y,xy,x^{2^{n-1}+3}y,x^2)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1	0	0	2^{k-1}	2^{n-1}	1	$3\cdot 2^{n-1}-1$

t	Firma	Vector Generador
5	$(0;2,2,2^r,2^n,2^n)$	$(y,y,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}-1},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	0	1	2^{k-1} si $k<n-r$	2^{n-1}
			2^k si $k\geq n-r$	

$g(X_{D_{2n-2}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$2^{n+1}-2^{n-r}-1$
2 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
5	$(0;4,4,2^r,2^n,2^n)$	$(xy,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x,x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	1	0	2^{k-1} si $k<n-r$	$3\cdot 2^{n-2}$
			2^k si $k\geq n-r$	

$g(X_{Q_{2n-3}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$5\cdot 2^{n-1}-2^{n-r}-1$
2 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
5	$(0;2,4,2^{n-1},2^{n-1},2^n)$	$(y,xy,x^2,x^{-2},x^{2^{n-1}+1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2n-2}})$	$g(X)$
0	0	0	2^k	$5\cdot 2^{n-3}$	2	$9\cdot 2^{n-2}-4$

t	Firma	Vector Generador
5	$(0; 2, 4, 4, 4, 2^n)$	(y, xy, xy, xy, x)

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1	1	0	2^{k-1}	$5 \cdot 2^{n-3}$	1	$7 \cdot 2^{n-2}$

t	Firma	Vector Generador
5	$(0; 2, 2, 2, 4, 2^n)$	$(y, y, y, x^{2^{n-1}+1}y, x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1	0	1	2^{k-1}	$3 \cdot 2^{n-3}$	1	$5 \cdot 2^{n-2}$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 4, 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^n)$	$(y, x^{2^{n-1}+3}y, x^2, x^2, x^{-2}, x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
0	0	0	$3 \cdot 2^{k-1}$	$7 \cdot 2^{n-3}$	3	$13 \cdot 2^{n-2} - 6$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 2, 2^r, 2^r, 2^n, 2^n)$	$(y, y, x^{2^{n-r}}, x^{-2^{n-r}}, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	0	1	2^{k-1} si $k < n-r$	$3 \cdot 2^{n-2}$
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$3 \cdot 2^n - 2^{n-r+1} - 2$
3 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
6	$(0;4,4,2^r,2^r,2^n,2^n)$	$(xy,x^{2^{n-1}+1}y,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x,x^{-1})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	1	0	2^{k-1} si $k<n-r$	2^n
			$3\cdot 2^{k-1}$ si $k\geq n-r$	

$g(X_{Q_{2n-3}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$7\cdot 2^{n-1}-2^{n-r+1}-1$
3 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
6	$(0;2,2,4,4,2^{n-1},2^{n-1})$	$(y,y,xy,x^{2^{n-1}+1}y,x^2,x^{-2})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2n-2}})$	$g(X)$
1	0	0	2^k	$3\cdot 2^{n-2}$	2	$5\cdot 2^{n-1}-3$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0;2,2,2,4,2^r,2^n)$	$(y,y,y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x)$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	0	1	2^{k-1} si $k<n-r$	$5\cdot 2^{n-3}$
			2^k si $k\geq n-r$	

$g(X_{D_{2n-2}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$9\cdot 2^{n-2}-2^{n-r}$
2 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 4, 4, 4, 2^r, 2^n)$	$(y, x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y, xy, xy, x^{2^{n-r}}, x^{2^{n-1}+1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	1	0	2^{k-1} si $k < n-r$	$7 \cdot 2^{n-3}$
			2^k si $k \geq n-r$	

$g(X_{Q_{2n-3}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$11 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-r}$
2 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 2, 2, 2, 2^n, 2^n)$	(y, y, y, y, x, x^{-1})

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2n-2}})$	$g(X)$
1	0	2	2^k	2^{n-1}	2	$2^{n+1} - 1$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 2, 2, 2, 4, 4)$	$(y, y, y, y, xy, x^{2^{n-1}+1}y)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2n-2}})$	$g(X)$
2	0	1	2^{k-1}	2^{n-1}	1	$3 \cdot 2^{n-1} + 1$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0; 2, 2, 4, 4, 4, 4)$	(y, y, xy, xy, xy, xy)

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2n-3}})$	$g(X)$
2	1	0	2^{k-1}	$3 \cdot 2^{n-2}$	1	$2^{n+1} + 1$

t	Firma	Vector Generador
6	$(0;4,4,4,4,2^n,2^n)$	(xy,xy,xy,xy,x,x^{-1})

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1	2	0	2^k	2^n	2	$3\cdot 2^n-1$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,4,2^{n-1},2^{n-1},2^{n-1},2^{n-1},2^n)$	$(y,xy,x^2,x^{-2},x^2,x^{-2},x^{2^{n-1}+1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
0	0	0	2^{k+1}	$9\cdot 2^{n-3}$	4	$17\cdot 2^{n-2}-8$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,2,4,4,2^{n-1},2^{n-1},2^{n-1})$	$(y,y,xy,x^{2^{n-1}+3}y,x^2,x^2,x^{-2})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1	0	0	$3\cdot 2^{k-1}$	2^n	3	$7\cdot 2^{n-1}-5$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,2,2^r,2^r,2^r,2^n,2^n)$	$(y,y,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x^{2^{n-r}-1},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	0	1	2^{k-1} si $k<n-r$	2^n
			2^{k+1} si $k\geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$2^{n+2}-3\cdot 2^{n-r}-1$
4 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;4,4,2^r,2^r,2^r,2^n,2^n)$	$(y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x,x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	1	0	2^{k-1} si $k<n-r$	$5\cdot 2^{n-2}$
			2^{k+1} si $k\geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$9\cdot 2^{n-1}-3\cdot 2^{n-r}-1$
4 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,2,2,4,2^r,2^r,2^n)$	$(y,y,y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x^{2^{n-r}},x^{1-2^{n-r}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	0	1	2^{k-1} si $k<n-r$	$7\cdot 2^{n-3}$
			$3\cdot 2^{k-1}$ si $k\geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$13\cdot 2^{n-2}-2^{n-r+1}$
3 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,4,4,4,2^r,2^r,2^n)$	$(y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,xy,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x^{2^{n-r}},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	1	0	2^{k-1} si $k<n-r$	$9\cdot 2^{n-3}$
			$3\cdot 2^{k-1}$ si $k\geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1\leq r<n-1$	$15\cdot 2^{n-2}-2^{n-r+1}$
3 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0; 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2^r)$	$(y, y, y, y, xy, x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y, x^{2^{n-r}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
2	0	1	2^{k-1} si $k < n-r$	$3 \cdot 2^{n-2}$
			2^k si $k \geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$5 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-r} + 1$
2 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0; 2, 2, 2, 2, 2^r, 2^n, 2^n)$	$(y, y, y, y, x^{2^{n-r}}, x^{1-2^{n-r}}, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	0	2	2^k si $k < n-r$	$3 \cdot 2^{n-2}$
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$3 \cdot 2^n - 2^{n-r} - 1$
3 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0; 2, 2, 4, 4, 4, 4, 2^r)$	$(x^{2^{n-r}}y, y, xy, xy, xy, xy, x^{-2^{n-r}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
2	1	0	2^{k-1} si $k < n-r$	2^n
			2^k si $k \geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$3 \cdot 2^n - 2^{n-r} + 1$
2 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;4,4,4,4,2^r,2^n,2^n)$	$(xy,xy,xy,xy,x^{2^{n-r}},x^{1-2^{n-r}},x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	2	0	2^k si $k < n-r$	$5 \cdot 2^{n-2}$
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$2^{n+2}-2^{n-r}-1$
3 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,2,2,2,2,4,2^n)$	$(y,y,y,y,y,xy,x^{1-2^{n-1}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
2	0	2	2^k	$5 \cdot 2^{n-3}$	2	$9 \cdot 2^{n-2}$

t	Firma	Vector Generador
7	$(0;2,4,4,4,4,4,2^n)$	$(y,xy,xy,xy,xy,xy,x^{1-2^{n-1}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
2	2	0	2^k	$9 \cdot 2^{n-3}$	2	$13 \cdot 2^{n-2}$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,4,2^{n-1},2^{n-1},2^{n-1},2^{n-1},2^{n-1},2^n)$	$(y,x^{2^{n-1}+3}y,x^2,x^2,x^{-2},x^2,x^{-2},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
0	0	0	$5 \cdot 2^{k-1}$	$11 \cdot 2^{n-3}$	5	$21 \cdot 2^{n-2}-10$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 4, 4, 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1})$	$(x^2y, y, xy, x^{2^{n-1}+3}y, x^2, x^{-2}, x^2, x^{-2})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1	0	0	2^{k+1}	$5 \cdot 2^{n-2}$	4	$9 \cdot 2^{n-1} - 7$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 2, 2, 2^r, 2^r, 2^r, 2^r, 2^n, 2^n)$	$(y, y, x^{2^{n-r}}, x^{-2^{n-r}}, x^{2^{n-r}}, x^{-2^{n-r}}, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	0	1	2^{k-1} si $k < n - r$	$5 \cdot 2^{n-2}$
			$5 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n - r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n - 1$	$5 \cdot 2^n - 2^{n-r+2} - 1$
5 si $r = n - 1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0; 4, 4, 2^r, 2^r, 2^r, 2^r, 2^n, 2^n)$	$(xy, x^{2^{n-1}+1}y, x^{2^{n-r}}, x^{-2^{n-r}}, x^{2^{n-r}}, x^{-2^{n-r}}, x, x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	1	0	2^{k-1} si $k < n - r$	$3 \cdot 2^{n-1}$
			$5 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n - r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n - 1$	$11 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-r+2} - 1$
5 si $r = n - 1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,2,4,2^r,2^r,2^r,2^n)$	$(y,y,y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x^{2^{n-r}},x)$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	0	1	2^{k-1} si $k < n-r$	$9 \cdot 2^{n-3}$
			2^{k+1} si $k \geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$17 \cdot 2^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-r}$
4 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,4,4,4,2^r,2^r,2^r,2^n)$	$(y,xy,xy,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x^{2^{n-r}},x^{1-2^{n-1}})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	1	0	2^{k-1} si $k < n-r$	$11 \cdot 2^{n-3}$
			2^{k+1} si $k \geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$19 \cdot 2^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-r}$
4 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,2,2,2^r,2^r,2^n,2^n)$	$(y,y,y,y,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x,x^{-1})$

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	0	2	2^k si $k < n-r$	2^n
			2^{k+1} si $k \geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
2 si $1 \leq r < n-1$	$2^{n+2} - 2^{n-r+1} - 1$
4 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,4,4,4,4,2^r,2^r)$	$(y,y,xy,xy,xy,xy,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
2	1	0	2^{k-1} si $k < n-r$	$5 \cdot 2^{n-2}$
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$2^{n+2} - 2^{n-r+1} + 1$
3 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,2,2,4,4,2^r,2^r)$	$(y,y,x^{2^{n-1}}y,y,xy,xy,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
2	0	1	2^{k-1} si $k < n-r$	2^n
			$3 \cdot 2^{k-1}$ si $k \geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
1 si $1 \leq r < n-1$	$7 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-r+1} + 1$
3 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;4,4,4,4,2^r,2^r,2^n,2^n)$	$(xy,xy,xy,xy,x^{2^{n-r}},x^{-2^{n-r}},x,x^{-1})$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	2	0	2^k si $k < n-r$	$3 \cdot 2^{n-1}$
			2^{k+1} si $k \geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
2 si $1 \leq r < n-1$	$5 \cdot 2^n - 2^{n-r+1} - 1$
4 si $r = n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,2,2,2,4,2^r,2^n)$	$(y,y,y,y,y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,x^{2^{n-r}},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
2	0	2	2^k si $k<n-r$	$7\cdot 2^{n-3}$
			$3\cdot 2^{k-1}$ si $k\geq n-r$	

$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
2 si $1\leq r<n-1$	$13\cdot 2^{n-2}-2^{n-r}$
3 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,4,4,4,4,4,2^r,2^n)$	$(y,x^{2^{n-1}+2^{n-r}+1}y,xy,xy,xy,xy,x^{2^{n-r}},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
2	2	0	2^k si $k<n-r$	$11\cdot 2^{n-3}$
			$3\cdot 2^{k-1}$ si $k\geq n-r$	

$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
2 si $1\leq r<n-1$	$17\cdot 2^{n-2}-2^{n-r}$
3 si $r=n-1$	

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,4,4,4,4,4,4)$	$(x^{2^{n-1}}y,y,y,xy,xy,xy,xy,xy,xy)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
3	2	0	2^k	$5\cdot 2^{n-2}$	2	$7\cdot 2^{n-1}+1$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;4,4,4,4,4,4,2^n,2^n)$	$(xy,xy,xy,xy,xy,xy,x^{2^{n-1}-1},x)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{Q_{2^{n-3}}})$	$g(X)$
2	3	0	$3\cdot 2^{k-1}$	$3\cdot 2^{n-1}$	3	$7\cdot 2^{n-1}+3$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,2,2,2,2,4,4)$	$(y,y,y,y,y,y,xy,x^{2^{n-1}+1}y)$

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
3	0	2	2^k	$3\cdot 2^{n-2}$	2	$5\cdot 2^{n-1}+1$

t	Firma	Vector Generador
8	$(0;2,2,2,2,2,2,2^n,2^n)$	(y,y,y,y,y,y,x,x^{-1})

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,k}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{D_{2^{n-2}}})$	$g(X)$
2	0	3	$3\cdot 2^{k-1}$	$3\cdot 2^{n-2}$	3	$3\cdot 2^n-1$

Ahora, para $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$, $2\leq k\leq n-2$, los casos que buscamos, pueden ser resumidos en dos tablas que muestran el caso general, para un t dado.

t	Firma	Vector Generador
$t>3$	$(0;2,4,\underbrace{2^{n-k},\ldots,2^{n-k}}_{t-3\text{ veces}},2^n)$	$(y,xy,\underbrace{x^{2^k},x^{-2^k},\ldots,x^{2^k},x^{-2^k}}_{\frac{t-3}{2}\text{ veces}},x^{2^{n-1}+1})$; si t es impar
		$(y,x^{2^{n-1}+2^k+1}y,x^{2^k},\underbrace{x^{2^k},x^{-2^k},\ldots,x^{2^k},x^{-2^k}}_{\frac{t-4}{2}\text{ veces}},x)$; si t es par

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,s}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
0	0	0	0 si $1 \leq s < k$	$(2t-5)2^{n-3}$
			$(t-3)2^{s-1}$ si $k \leq s \leq n-2$	

$g(X_{D_{2^{n-(k+1)}}})$	$g(X_K)$	$g(X)$
$(t-3)2^{k-1}$	$(t-3)2^{n-3}$	$(4t-11)2^{n-2}-(t-3)2^k$

t	Firma	Vector Generador
$t > 4$	$(0;2,2,4,4,\underbrace{2^{n-k},\dots,2^{n-k}}_{t-4 \text{ veces}})$	$(y,y,xy,x^{2^{n-1}+1}y\ ,\underbrace{x^{2^k},x^{-2^k},\dots,x^{2^k},x^{-2^k}}_{\frac{t-4}{2} \text{ veces}})$; si t es par
		$(y,y,xy,x^{2^{n-1}+2^k+1}y,x^{2^k}\ ,\underbrace{x^{2^k},x^{-2^k},\dots,x^{2^k},x^{-2^k}}_{\frac{t-5}{2} \text{veces}})$; si t es impar

dim $B_{\mathcal{U}_2}$	dim $B_{\mathcal{U}_3}$	dim $B_{\mathcal{U}_4}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,s}}$	dim $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$
1	0	0	0 si $1 \leq s < k$	$(t-3)2^{n-2}$
			$(t-4)2^{s-1}$ si $k \leq s \leq n-2$	

$g(X_{D_{2^{n-(k+1)}}})$	$g(X_K)$	$g(X)$
$(t-4)2^{k-1}$	$(t-4)2^{n-3}$	$(2t-7)2^{n-1}-(t-4)2^k+1$

y finalmente, para $B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$, resumimos también dos casos generales, para un t dado.

t	Firma	Vector Generador
$t > 2$	$(0;2,\underbrace{2,\dots,2}_{t-3 \text{ veces}},4,2^n)$	$(y,xy,x^{2^{n-1}+1})$; si $t=3$
		$(y,\ ,\underbrace{x^{2^{n-1}},\dots,x^{2^{n-1}}}_{t-3 \text{ veces}},xy,x^{2^{n-1}+1})$; si $t>3$ es impar
		$(y,\ \underbrace{x^{2^{n-1}},\dots,x^{2^{n-1}}}_{t-3\text{veces}},xy,x)$; si t es par

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,s}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{<y>})$	$g(X)$
0	0	0	0	$(2t-5)2^{n-3}$	$(2t-5)2^{n-3}$	$(2t-5)2^{n-2}$

t	Firma	Vector Generador
$t>3$	$(0;2,2,\underbrace{2,...,2}_{t-4 \text{ veces}},4,4)$	$(x^{2^{n-1}}y, y, xy, xy)$; si $t=4$
		$(y, y, \underbrace{x^{2^{n-1}}, ..., x^{2^{n-1}}}_{t-4 \text{ veces}}, xy, xy)$; si t es impar
		$(x^{2^{n-1}}y, y, \underbrace{x^{2^{n-1}}, ..., x^{2^{n-1}}}_{t-4 \text{veces}}, xy, xy)$; si $t>4$ es par

$\dim B_{\mathcal{U}_2}$	$\dim B_{\mathcal{U}_3}$	$\dim B_{\mathcal{U}_4}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,s}}$	$\dim B_{\mathcal{W}_{n,n-1}}$	$g(X_{<y>})$	$g(X)$
1	0	0	0	$(t-3)2^{n-2}$	$(t-3)2^{n-2}$	$(t-3)2^{n-1}+1$

Observación 5.4.1. *En cada una de las tablas anteriores, el cálculo de $g(X_H)$,para $H \leq G$ fue hecho con la fórmula de géneros intermedios vista en el Teorema 5.1.1, y comprobado con la suma de los $B_{\mathcal{U}_i}$, más 2 veces la suma de los $B_{\mathcal{W}_{n,k}}$, lo que corrobora el resultado.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Broughton *Classifying finite group actions on surfaces of low genus* Journal of Pure and Applied Algebra **69** (1990) 233-270 North-Holland.

[2] A. Carocca y R. E. Rodríguez *Jacobians with actions and artional idempotents* J. Algebra **306** (2006), no. 2, 322-343.

[3] A. Carocca, S. Recillas y R. E. Rodríguez *Dihedral groups acting on Jacobians* Contemp. Math. **311** (2002), 41-77.

[4] C. Curtis e I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras* New York: John Wiley, c(1962)

[5] R. Donagi y E. Markman *Spectral covers, algebraically completely integrable Hamiltonian systems, and moduli of bundles, in: Integrable Systems and Quantum groups* Springer Lect. Notes Math. **1620** (1996), 1-119.

[6] H. Farkas e I. Kra *Riemann Surfaces* Graduate Texts in Mathematics **71**. Springer-Verlag. New York, 1991.

[7] M. Isaacs *Character Theory of Finite Groups* Dover Publications (1994)

[8] H. Lange y C. Birkenhake *Complex Abelian Varieties* Springer - Verlag (1992)

[9] H. Lange y S. Recillas *Abelian Varieties with Group Actions* Journ. Reine Angew. Mathematik, 515 (2004) 135-155.

[10] R. Miranda *Algebraic curves and Riemann Surfaces* American Mathematical Society (1995)

[11] S. Recillas *La Jacobiana de la extensión de Galois de una curva trigonal* Aport. Matem. Com. **14** (1994), 159-167.

[12] S. Recillas y R. E. Rodríguez *Jacobians and representations of S_3* Aport. Mat. Invest. **13** (1998), 117-140.

[13] S. Recillas y R. E. Rodríguez *Prym varieties and four fold covers* Publ. Prelimin. Inst. Mat. Univ. Nac. Aut. México **686** (2001).

[14] J. Ries *The Prym variety for a cyclic unramified cover of a hyperelliptic curve* J. reine angew. Math. **340** (1983), 59-69.

[15] R. E. Rodríguez *Introducción a las Variedades Abelianas* Apuntes. PUC (2002)

[16] A. Rojas *Group Actions on Jacobian Varieties* Rev. Mat. Iberoamericana **23** (2007), no. 2, 397-420.

[17] A. Sánchez-Argáez *Acciones del grupo A_5 en variedades jacobianas* Aport. Mat. Com. **25** (1999), 99-108.

[18] J. P. Serre *Linear Representations of Finite Groups* Graduate Texts in Mathematics, v.42, Springer (1996).