PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE DECOHERENCIA EN SEMIGRUPOS MARKOVIANOS CUÁNTICOS

por

Julián Andrés Agredo Echeverry.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Rolando Rebolledo.

Comisión Informante:
Claudio Fernández Jaña (Pontificia Universidad Catolica de Chile).
Dominique Spehner (Instituto Fourier - Francia).

Abril del 2009
Santiago, Chile.

Agradecimientos.

Cuando pise por primera vez suelo chileno lo hice lleno de sueños y con muchas dudas. Eran tantas las incognitas que se me venían a la cabeza que no resistí y mi primera frase a un ciudadano chileno fue en efecto una pregunta, lo interrogue acerca de la gente en Chile. El hombre al cual interrogaba era un taxista y ante una pregunta tan poco específica como la que acababa de plantearle el solo atinó a responderme que como en cualquier parte del mundo habían personas buenas y personas malas.

Hoy varios años despues sigo luchando por alcanzar esos sueños y aunque muchas de mis dudas han sido solucionadas, aún quedan muchas otras a las cuales le busco respuesta. Siempre me considere una persona con mucha suerte, lo fui en Bogotá y lo soy ahora acá, en Santiago; pues confrontando lo que he vivido con lo que me dijo aquel taxista, debo decir que los unicos chilenos que he conocido, han sido gente buena y parte de estos agradecimientos van a esos chilenos, los cuales son muchos y seguramente no pueda nombrarlos a todos detalladamente.

Esa lista de buenos chilenos la encabeza el profesor Rolando Rebolledo, a quien le agradezco no solo por heredarme parte de ese caudal de conocimientos que posee, si no también por brindarme apoyo en aquellos momentos donde pense que no lo iba a encontrar. Sin duda alguna nunca hubiera alcanzado el titulo de Magister sin su ayuda, gracias por creer en mí. Aprovecho también para expresarle la gran admiración que siento por el como científico y como persona, además del orgullo de haberlo tenido como profesor guía y de tenerlo ahora como profesor tutor en el Doctorado.

Otro buen chileno al cual agradezco por el apoyo y su amistad es a Claudio Rivera, sin duda alguna, para los que lo hemos conocido, será de esas personas dificiles de no mencionar, a la hora de hablar acerca de la gente en Chile, también le agradezco por creer en mí.

Por muchas paginas que escribiera siempre me faltaría el reconocimento de algún buen chileno; así que abreviare agradeciendo a todos aquellos que me han ayudado y me han apoyado en particular a todas aquellas personas que hacen parte del departamento de Matemáticas de la Universidad Católica en la cual siempre me trataron bien y donde me dieron las facilidades para culminar exitosamente mi Magister.

A Angelica por soportarme todos estos años y como diria cierto cantante, por ser mi proa, mi timon, mi timonel, mi barco y todo, mi mar, mi ancla mi arena y mi caña de pescar, mi brujula y mi norte, mi puerto y mi soporte ...

Agradezco a esa pequeña colonia de Colombianos presente en Matemáticas y Estadistica: Martha, Willy, Felipe, Johana y Alejandro (Mexicano de corazón; pero Colombiano por adopción). Por ayudarme a conllevar la nostalgía que sufro a veces por estar lejos de mis padres y de mi país.

Por último agradezco a los profesores miembros de la comisión informante en general por dedicar parte de su tiempo a evaluar este trabajo, al profesor Claudio Fernandez en particular por interesarse en mi trabajo y al profesor Dominique Spehner por sus valiosas sugerencias para mejorar este escrito.

Índice general

Introducción.

Para la representación de la dinámica en un sistema cuántico abierto se utilizan dos espacios de Hilbert: el primer espacio de Hilbert que denotaremos por $\mathfrak{h}_0$ sera el espacio del sistema y el segundo espacio denotado por $\mathfrak{h}_A$ será el espacio del ambiente, donde la dinámica total del sistema es representada sobre el espacio de Hilbert $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_A$ por el generador H de un grupo unitario, siendo $H = H_0 \otimes 1 + 1 \otimes H_A + H_I$ para el cual H_0 es el hamiltoniano del sistema, H_A el hamiltoniano del ambiente y H_I el hamiltoniano de interacción.

Además si se desea desea analizar la dinámica reducida sobre el espacio $\mathfrak{h}_0$ es necesario conocer el estado inicial del ambiente, el cual es representado por una matriz de densidad ρ_A, dicha matriz pertenece al espacio $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_A)$ el cual es el espacio lineal generado por los operadores acotados con valor absoluto de traza finita definidos en $\mathfrak{h}_A$, un elemento en dicho espacio es llamado un operador clase traza. Con esta matriz de densidad se describe la dinámica reducida sobre $\mathfrak{h}_0$ en el cuadro de Schrödinger:

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho) = tr_{\mathfrak{h}_A}\left(e^{-itH}\rho \otimes \rho_A e^{itH}\right)$$

donde $tr_{\mathfrak{h}_A}$ es la traza parcial sobre las variables ambientales y $(\mathcal{T}_{*t})_{t\geq 0}$ es un semigrupo Markoviano cuántico definido en $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$. También podemos utilizar el estado ρ_A para determinar la esperanza condicional E_0 definida sobre el espacio $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ formado por todos los operadores acotados en $\mathfrak{h}_0$ y describir dicha dinámica en el cuadro de Heisenberg:

$$\mathcal{T}_t(x) = E_0\left(e^{itH}x \otimes 1_A e^{-itH}\right) \quad \text{para } x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0).$$

A nivel matemático el tratamiento riguroso de todo lo descrito anteriormente dio como frutos una cantidad muy variada de trabajos y conceptos entre los cuales se destaca el límite de acoplamiento débil o límite estocástico el cual fue tratado en una primera versión de manera formalizada por Davies ([**Da1**],[**Da2**],[**Da3**]), enfocandose primordialmente en la dinámica reducida y recientemente se ha trabajado la dinámica en el espacio completo ([**AFL**], [**ALV2**], [**DD1**], [**DD2**], [**DF1**]). Además del tratamiento riguroso, el límite de acoplamiento débil permite construir semigrupos Markovianos cuánticos cumpliendo propiedades importantes como la de balance detallado y la existencia de reducciones clásicas, entre otras. Debido a ello dedicamos un primer capítulo a revisar nociones preliminares para posteriormente en un segundo capítulo plantear en mas detalle el límite de acoplamiento débil. Dado que estamos interesados en el estudio de semigrupos Markovianos cuánticos solamente hablaremos de la versión reducida de este límite pues es esta la que nos da la herramienta para generar dichos semigrupos. Probaremos que estos cumplen dos propiedades importantes: la existencia de una reducción clásica y el cumplimiento de una condición de balance detallado.

En realidad, además de las dos propiedades anteriores, los semigrupos Markovianos cuánticos generados por límite de acoplamiento débil gozan de una tercera propiedad que es consecuencia del balance detallado: la decoherencia, esta sera analizada en el siguiente capítulo. Para describir a grandes rasgos lo que ocurre en este contexto supongamos que es dada una base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathfrak{h}_0$, entonces una matriz de densidad ρ es caracterizada por sus componentes $\rho(m,n) =< e_m, \rho e_n >$. En general, denotaremos $\rho_t(m,n)$ como las componentes de $\rho_t = \mathcal{T}_{*t}(\rho)$, los términos $\rho_t(m,n)$ con $n \neq m$ son llamados *coherencias.* En algunas dinámicas ocurre la desaparición de los términos no diagonales de las matrices densidad a medida que el tiempo evoluciona, es decir, para $n \neq m, \rho_t(m,n) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, por lo tanto, para un tiempo suficientemente grande la evolución del estado es esencialmente descrita por matrices diagonales, esto último ocurre por ejemplo cuando el fenómeno de decoherencia esta presente. Es claro entonces que para este proposito deberemos asumir siempre a $\mathfrak{h}_0$ como un espacio de Hilbert separable fijo, dotado con un producto interno denotado simplemente por $< \cdot, \cdot >$. Lo anterior junto con el concepto de convergencia al equilibrio sera tratado en nuestro tercer capítulo.

En el cuarto y último capítulo haremos uso practico de la teoría expuesta para enfocarnos en un modelo específico de dinámica utilizado en física el cual es descrito por los semigrupos Markovianos cuánticos genericos, en particular estudiaremos la existencia de una tasa de decoherencia.

CAPÍTULO 1

Preliminares.

1. Álgebras de operadores.

DEFINICIÓN 1.1. Una C^*-*álgebra* es una álgebra $\mathcal{A}$ dotada de una involución $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^*$ y una norma $||\cdot||$ satisfaciendo, para todo $x, y \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:
(C1) $x^{**} = x$.
(C2) $(\lambda x + \mu y)^* = \overline{\lambda} x^* + \overline{\mu} y^*$.
(C3) $(xy)^* = y^* x^*$.
(C4) $||x||$ es positivo siempre y $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.
(C5) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$.
(C6) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
(C7) $\mathcal{A}$ es completa para $||\cdot||$.
(C8) $||xx^*|| = ||x||^2$

Una álgebra con una involución satisfaciendo $(C1), (C2)$ y $(C3)$ es llamada una **-álgebra.*
Una álgebra cumpliendo todas las condiciones salvo la condición $(C8)$ la cual es reemplazada por $(C8)'$ $||x^*|| = ||x||$ es llamada una *álgebra de Banach.*

Durante el transcurso de este trabajo se usaran únicamente espacios de Hilbert separables y se asumira esto sin hacer mención explicita.

DEFINICIÓN 1.2. Una *álgebra de von Neumann* es una C^*-álgebra actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}$ la cual contiene el elemento unidad $1_{\mathfrak{h}}$ (el operador identidad sobre $\mathfrak{h}$). Además de lo anterior pediremos que dicha C^*-álgebra sea débilmente (o fuertemente) cerrada.

Un ejemplo de álgebra de von Neumann es el espacio $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ de los operadores acotados sobre $\mathfrak{h}$, donde la involución es la adjunción de operadores. Realmente ésta será la álgebra de von Neumann sobre la cual centraremos nuestra atención. Como un ejemplo importante de un elemento en $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ considere el operador $|v><w|$ donde $v, w \in \mathfrak{h}$ y tal que $|v><w|(\cdot) =< w, \cdot > v$, luego $|v><w|$ es una proyección sobre v y es inmediato ver que es un operador acotado.

DEFINICIÓN 1.3. Dada una álgebra $\mathcal{A} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ sea

$$\mathcal{A}' = \{x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}) | xa = ax \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}\}.$$

Llamaremos a $\mathcal{A}'$ *el conmutante* de $\mathcal{A}$.

Varios hechos interesantes acerca del conmutante pueden probarse, uno de ellos es que $\mathcal{A}'$ es una álgebra de von Neumann la cual no necesariamente es abeliana. Además si $\mathcal{A}$ es una álgebra abeliana entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ y por lo tanto la igualdad $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ nos dice que tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A}'$ son álgebras de von Neumann abelianas maximales.

2. Semigrupos Markovianos cuánticos.

Los semigrupos Markovianos cuánticos con los cuales trabajaremos son semigrupos definidos sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$. Un elemento de este conjunto se dice *positivo* si es de la forma a^*a con $a \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$. Cada aplicación de un semigrupo Markoviano cuántico preserva la positividad, mas aún, gozan entre otras propiedades, de la completa positividad:

DEFINICIÓN 1.4. Una aplicación lineal $\mathcal{P} : \mathfrak{L}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ se dice *completamente positiva* si para cualquier colección finita $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ de elementos de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ se tiene que el elemento $\sum_{i,j} a_i^* \mathcal{P}(b_i^* b_j) a_j$ es positivo.

Para un estudio mas detallado de la completa positividad ver [**Re1**]. No obstante, vale la pena resaltar que si $\mathcal{P}$ ademas de ser completamente positiva es una aplicación que preserva la identidad (es decir $\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ con $\mathbf{1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$) entonces cumple la *propiedad de Schwarz*:

$$\mathcal{P}(x^*)\mathcal{P}(x) \leq \mathcal{P}(x^*x) \quad \text{para cada} \quad x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}).$$

En particular, los semigrupos Markovianos cuánticos preservan la unidad y desde luego poseen la propiedad de Schwarz. Esta noción de semigrupo es una extensión no conmutativa del concepto de semigrupo Markoviano definido en espacios de probabilidad clásicos.

DEFINICIÓN 1.5. Un *semigrupo Markoviano cuántico* (*SMC*) definido en $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ es una familia uniparametrica $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de aplicaciones lineales de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ en si mísmo, satisfaciendo:

(M1) $\mathcal{T}_0(x) = x$, para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$.
(M2) Cada $\mathcal{T}_t(\cdot)$ es completamente positiva.
(M3) $\mathcal{T}_t(\mathcal{T}_s(x)) = \mathcal{T}_{t+s}(x)$, para todo $t, s \geq 0$ y para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$.
(M4) $\mathcal{T}_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ para todo $t \geq 0$.
(M5) Para cada $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ la aplicación $t \longrightarrow \mathcal{T}_t(x)$ es w^*-continua sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ y $\mathcal{T}_t(\cdot)$ es una aplicación normal.

Normalidad significa que cada vez que se tenga una red creciente (x_α) de operadores positivos con envolvente superior x, se tenga que la envolvente superior de $(\mathcal{T}_t(x_\alpha))$ es $\mathcal{T}_t(x)$.

El hecho de que $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ sea una álgebra de von Neumann permite ver a este espacio como el dual de $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})$ el espacio de los *operadores clase traza*, es decir $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$

ó equivalentemente $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})$ es el predual de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$, es decir $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})_* = \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})$ y además $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ es w^*- continuo (continuo en la topologá débil *) si y solo si la aplicación $t \longrightarrow tr(\rho\mathcal{T}_t(x))$ es continua para todo $\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})$ con $tr\rho = 1$ y para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$.

DEFINICIÓN 1.6. Sean $\mathcal{A}$ una *-álgebra y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una *-subalgebra abeliana. Diremos que un SMC $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ es *reducido por* $\mathcal{B}$ si esta es invariante bajo la acción de $\mathcal{T}_t$ para todo $t \geq 0$.

Cuando un semigrupo $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ esta definido sobre una *-álgebra $\mathcal{B}$ abeliana la cual deja invariante entonces dicho semigrupo se puede identificar con un semigrupo Markoviano clásico $T := (T_t)_{t\geq 0}$ (ver por por ejemplo [**Re2**]). Por lo tanto si el semigrupo Markoviano cuántico es reducido por una *-subalgebra abeliana implica que la restricción del semigrupo a esta *-subalgebra abeliana es un semigrupo Markoviano clásico. En el segundo capítulo veremos como se pueden constuir SMC que son reducidos por una *-álgebra abeliana maximal.

3. El generador del semigrupo.

El generador $\mathcal{L}$ del semigrupo $\mathcal{T}$ es definido en el sentido de la topología w^*, es decir, su dominio $D(\mathcal{L})$ consiste de todos los $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ para los cuales

$$w^* - \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t(x) - x}{t} \quad \text{existe.}$$

Así, para $x \in D(\mathcal{L})$, el valor de dicho límite define a $\mathcal{L}(x)$.

DEFINICIÓN 1.7. Dados A y B operadores definidos en un mismo espacio de Hilbert definimos: $[A, B] := AB - BA$ y $[A, B]_+ := AB + BA$.

Cuando el semigrupo es tal que $\lim_{t\longrightarrow 0} \sup_{||x||\leq 1} ||\mathcal{T}_t(x) - x|| = 0$ (es decir continuo en norma) entonces el generador del semigrupo tiene la forma de Lindblad:

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2}\sum_j (L_j^* L_j x - 2L_j^* x L_j + x L_j^* L_j)$$

con H y L_j operadores acotados en $\mathfrak{h}$. Usualmente denotaremos la parte disipativa del generador $\mathcal{L}$ como $\mathcal{L}_d(x) := -\frac{1}{2}\sum_j (L_j^* L_j x - 2L_j^* x L_j + x L_j^* L_j)$.

Para SMC definidos con un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}_0$ de dimensión finita la forma de Lindblad tiene el aspecto:

$$\mathcal{L}(x) = i[\Theta, x] - [\Delta, x]_+ + v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'})v$$

donde Θ y Δ son operadores autoadjuntos sobre $\mathfrak{h}_0$, $v \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}')$ para algún $\mathfrak{h}'$ espacio de Hilbert auxiliar. Además se pueden escoger Θ y v tales que $tr_{\mathfrak{h}_0}\Theta = 0$

y $tr_{\mathfrak{h}_0} v = 0$, en este caso Θ y Δ son únicos salvo equivalencia unitaria. Vale la pena notar que $(e^{t\mathcal{L}})_{t\geq 0}$ es Markoviano si y solo si $2\Delta = v^* v$.

4. El semigrupo predual.

En estricto rigor el espacio $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})_*$ es el espacio de todos los funcionales lineales definidos sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ que son débilmente continuos sobre el conjunto

$$\{x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}); ||x|| \leq 1\}$$

desde este punto de vista se puede ver que todo SMC $\mathcal{T}$ sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ induce el *semigrupo predual* $\mathcal{T}_*$ de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})_*$ en si mismo, definido por

$$\mathcal{T}_{*t}(\omega)(a) = \omega(\mathcal{T}_t(a)) \tag{1}$$

para todo $a \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$, $\omega \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})_*$ y para todo $t \geq 0$.

Como elementos de vital importancia en el desarrollo de esta teoría se encuentran el conjunto de los *estados* conformado por todos los funcionales lineales positivos continuos ω tales que $||\omega|| = \omega(1)$=1. Se sabe que para un estado ω que esta en el predual de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ existe $\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})$ positivo tal que $tr\rho = 1$ y $\omega(x) = tr(\rho x)$ para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ (para ver la prueba de esta afirmación consultar [**Att**]), por lo tanto de esto último y de la ecuación (1) se sigue en particular que: $tr\mathcal{T}_{*t}(\rho)x = tr\rho\mathcal{T}_t(x)$ para todo $\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})$ y $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$.

Debe tenerse en cuenta además que si el generador $\mathcal{L}$ de un SMC es expresado en su forma de Lindblad:

$$\mathcal{L} = i[\Theta, \cdot] + \mathcal{L}_d$$

entonces el generador del semigrupo predual correspondiente $\mathcal{L}_*$ es expresado como:

$$\mathcal{L}_* = -i[\Theta, \cdot] + \mathcal{L}_{*d}.$$

En particular para $\mathfrak{h}$ de dimension finita se tiene que

$$\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h})^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{h}) \quad \text{y } \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{h})^*,$$

por lo tanto el uno es predual del otro y viscebersa. Dado lo anterior abusando de la notación en el caso finito dimensional sera frecuente utilizar la igualdad $\mathcal{L}_{*d} = \mathcal{L}_d^*$.

5. Formas no acotadas.

En esta sección hablaremos algunas cosas de las formas no acotadas las cuales se utilizaran para describir elementos del límite de acoplamiento débil el cual será visto en el siguiente capítulo.

DEFINICIÓN 1.8. Sean $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ espacios de Hilbert. Decimos que la aplicación

$$Dom_i F \times Dom_d F \ni (\phi, \varphi) \longrightarrow (\phi, F\varphi) \in \mathbb{C} \tag{2}$$

es una forma F de $\mathfrak{h}_1$ a $\mathfrak{h}_2$ si y solo si:

(F1) $Dom_d F$ es un subespacio de $\mathfrak{h}_1$.
(F2) $Dom_i F$ es un subespacio de $\mathfrak{h}_2$.
(F3) La aplicación (2) es lineal con respecto a la segunda variable.
(F4) La aplicación (2) es antilineal con respecto a la primera variable.

$Dom_d F$ es llamado dominio derecho de F y $Dom_i F$ es llamado dominio izquierdo de F. Si $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ entonces estos dominios coinciden y denotamos $Dom_f F$ para $Dom_i F = Dom_d F$ el cual sera llamado el dominio de F.

DEFINICIÓN 1.9. Definimos el *adjunto de la forma* F, denotado por F^{*f} como sigue: $Dom_i F^{*f} := Dom_d F, Dom_d F^{*f} := Dom_i F$ y

$$Dom_d F \times Dom_i F \ni (\varphi, \phi) \longrightarrow < \varphi, F^{*f}\phi > := \overline{< \phi, F\varphi >}.$$

Notese que si F es un operador con dominio $Dom F \subset \mathfrak{h}_1$, entonces este genera una forma, la cual denotaremos también por F, tal que $Dom_d F = Dom F, Dom_i F = \mathfrak{h}_2$ la cual es dada por

$$\mathfrak{h}_2 \times Dom F \ni (\phi, \varphi) \longrightarrow (\phi, F\varphi)$$

y podemos calcular tanto el adjunto en el sentido de formas, denotado por F^{*f} como el adjunto en el sentido de operadores denotado por F^*. Si F es acotado entonces los dos sentidos de adjunción coinciden, si F es no acotado estos adjuntos pueden diferir.

CAPÍTULO 2

Límite de acoplamiento débil y consecuencias.

En el transcurso de este capítulo asumiremos que $\mathfrak{h}_0$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita .Para explicar el límite de acoplamiento débil representaremos la dinámica total sobre el espacio $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma_s(\mathfrak{h}_A)$. A continuación explicamos como se define el espacio $\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)$, el cual es conocido como el espacio de Fock Bosónico y $\mathfrak{h}_A$ es llamado el espacio 1-partícula.

1. Espacio de Fock Bosónico y segunda cuantización.

Utilizaremos la notación $\otimes$ y $\oplus$ para denotar el producto tensorial y la suma directa en la categoria de espacios de Hilbert y denotaremos sus contrapartes algebraicas como $\overset{al}{\otimes}$ y $\overset{al}{\oplus}$ respectivamente. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{R}$ denotamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la potencia n-esima tensorial de $\mathcal{R}$ como $\otimes^n \mathcal{R}$.

Definición 2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la aplicación $Sim^n : \otimes^n \mathcal{R} \longrightarrow \otimes^n \mathcal{R}$ como $Sim^n(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma(n)}$. Donde S_n denota el grupo de permutaciones definidas sobre un conjunto de n elementos.

Denotando

$$\Gamma_s^n(\mathcal{R}) := Sim^n(\otimes^n \mathcal{R}) \quad \text{y } \mathbb{C} := \Gamma_s^0(\mathcal{R}).$$

$\Gamma_s^n(\mathcal{R})$ es llamado *el espacio n-particula.*

El espacio de Fock simetrico (o Bosónico) es entonces definido como

$$\Gamma_s(\mathcal{R}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_s^n(\mathcal{R}).$$

Como ejemplo de un elemento de este espacio considere $\Omega = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, este elemento es llamado el *vector vacío.* Algunas veces se utilizara también el espacio de Fock algebraico: Si $\mathcal{D}_1$ es un subespacio de $\mathcal{R}$, entonces

$$\overset{al^n}{\Gamma}_s(\mathcal{D}_1) := (\overset{al^n}{\oplus} \mathcal{D}_1) \cap \Gamma_s^n(\mathcal{R}),$$

y por lo tanto

$$\overset{al}{\Gamma}_s(\mathcal{D}_1) := Gen\{\varphi | \varphi \in \overset{al^n}{\Gamma}_s(\mathcal{D}_1), n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora supongamos $\mathcal{D}_1$ es un subespacio denso de $\mathcal{R}$ y $R^* : \mathfrak{h}_0 \overset{al}{\otimes} \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathfrak{h}_0$ es un operador no acotado. Establecemos R por adjunción de R^* en el sentido de formas. De este modo se define para $\varphi \in \mathfrak{h}_0 \overset{al}{\otimes} \overset{al^n}{\Gamma_s}(\mathcal{D}_1)$ y para todo n natural mayor o igual a uno

$$a(R)\varphi := \sqrt{n}\left(R^* \otimes Sim^{n-1}\right)\varphi$$

$a(R)$ es bien definido como un operador no acotado y este define una forma cuadratica sobre $\mathfrak{h}_0 \overset{al}{\otimes} \overset{al}{\Gamma_s}(\mathcal{D}_1)$. Denotamos por $a^*(R)$ su adjunto en el sentido de formas cuadraticas.

DEFINICIÓN 2.2. Las formas $a^*(R)$ y $a(R)$ son llamadas *creación* y *aniquilación* respectivamente.

En el caso en el que estamos interesados tomaremos un operador

$$V \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_A)$$

para construir $a^*(V)$ y $a(V)$, estos definen operadores cerrables densamente definidos (discutido en [**BD1**] (pag 174)) los cuales seguiremos denotando igual y llamaremos operadores de creación y aniquilación respectivamente.

DEFINICIÓN 2.3. Dado un operador A unitario de un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}_1$ en otro espacio de Hilbert $\mathfrak{h}_2$ es posible construir de manera natural otro operador $\Gamma(A)$ de $\Gamma_s(\mathfrak{h}_1)$ en $\Gamma_s(\mathfrak{h}_2)$ definiendo

$$\Gamma(A)(Sim^n(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)) = Sim^n(A(u_1) \otimes \ldots \otimes A(u_n)) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El operador $\Gamma(A)$ es llamado *la segunda cuantización* de A.

Como consecuencia del teorema de Stone se tiene que dado un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $(e^{itH})_{t\in\mathbb{R}}$ existe un único operador autoadjunto $d\Gamma(H)$ (llamado *la segunda cuantización diferencial de H*) tal que $\Gamma(e^{itH}) = e^{itd\Gamma(H)}$ y $d\Gamma(H)\Omega = 0$ (ver [**Par**]).

2. Límite de acoplamiento débil reducido.

Para cada $\lambda > 0$ se define el operador

$$H_\lambda = H_0 \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A) + \lambda(a^*(V) + a(V)).$$

Donde H_0 es el Hamiltoniano que describe la dinámica en el espacio $\mathfrak{h}_0$, $d\Gamma(H_A)$ describe la dinámica del ambiente expresada por la segunda cuantización del operador autoadjunto H_A sobre $\mathfrak{h}_A$, $V \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_A)$ y los operadores $a^*(V)$ y $a(V)$ son respectivamente los operadores creación y aniquilación bosónicos de V.

Aquí la influencia de la interaccion entre el sistema y el ambiente en la dinámica es descrita por el operador $\lambda(a^*(V) + a(V))$. Cabe notar además que el operador segunda cuantización $d\Gamma(h_A)$ no necesariamente es acotado por lo que el operador H_λ no necesariamente es acotado pese a ello este es en efecto el Hamiltoniano de la dinámica total (ver teorema 4.1 de [**DD2**]).

Tomando Ω el vector vacio en $\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)$ construimos la inmersión $I_{\mathfrak{h}_0} : \mathfrak{h}_0 \longrightarrow \mathfrak{h}$ dada por $I_{\mathfrak{h}_0}(\varphi) := \varphi \otimes \Omega$ para todo $\varphi \in \mathfrak{h}_0$, por lo tanto $I^*_{\mathfrak{h}_0} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}_0$ es igual a $1_{\mathfrak{h}_0} \otimes < \Omega|$. El siguiente teorema nos cuenta que ocurre con la dinámica del sistema cuando a medida que transcurre el tiempo la interacción con el sistema va desapareciendo:

TEOREMA 2.4 (Límite de acoplamiento débil reducido). *Existen un semigrupo Markoviano cuántico completamente positivo $\mathcal{T}_t = e^{t\mathcal{L}}$ sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ tal que*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} e^{-itH_0/\lambda^2} I^*_{\mathfrak{h}_0} e^{itH_\lambda/\lambda^2} (x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) e^{-itH_\lambda/\lambda^2} I_{\mathfrak{h}_0} e^{itH_0/\lambda^2} = e^{t\mathcal{L}}(x)$$

y un semigrupo de contracciones $e^{-it\Upsilon}$ de tal forma que $[\Upsilon, H_0] = 0$ y que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} e^{itH_0/\lambda^2} I^*_{\mathfrak{h}_0} e^{-itH_\lambda/\lambda^2} I_{\mathfrak{h}_0} = e^{-it\Upsilon}.$$

Estos límites son tomados en norma del operador. Además existen un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}'$ de dimensión finita y un operador $v \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}')$ tal que

$$\mathcal{L}(x) = -i\left[\frac{\Upsilon + \Upsilon^*}{2}, x\right] - \frac{1}{2}[x, v^*v]_+ + v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'})v \quad \textit{para todo } x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0).$$

Preferimos omitir la demostración del teorema anterior dado su alto contenido tecnico (esta puede ser consultada en [**DD2**]), en vez de ello nos enfocaremos en las dos propiedades que tienen los SMC obtenidos por el límite de acoplamiento débil (LAD): la existencia de una reducción y la propiedad de balance detallado.

Debemos notar que dados $\varphi \in \mathfrak{h}_0$, $B \otimes C \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma_s(\mathfrak{h}_A))$ se tiene

$$I^*_{\mathfrak{h}_0}(B \otimes C) I_{\mathfrak{h}_0}(\varphi) = I^*_{\mathfrak{h}_0}(B(\varphi) \otimes C(\Omega)) = < \Omega, C\Omega > B(\varphi) \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}$$

y

$$I_{\mathfrak{h}_0} I^*_{\mathfrak{h}_0}(B \otimes C) = I_{\mathfrak{h}_0} < \Omega|C(\cdot) > B \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)} = < \Omega|C(\cdot) > B(\cdot) \otimes \Omega = B \otimes |\Omega >< \Omega| C$$

entonces $I^*_{\mathfrak{h}_0}(\cdot) I_{\mathfrak{h}_0}$ es una esperanza condicional y $I_{\mathfrak{h}_0} I^*_{\mathfrak{h}_0}(\cdot)$ es una proyección ortogonal. Así podemos decir que el LAD que se expresa en el teorema anterior se expresa en términos de la esperanza condicional $I^*_{\mathfrak{h}_0}(\cdot) I_{\mathfrak{h}_0}$ y por ende una pregunta natural que surge es si existe una formulación similar escrita en términos de la proyección ortogonal $I_{\mathfrak{h}_0} I^*_{\mathfrak{h}_0}(\cdot)$. La respuesta a esta pregunta es si, mas aún bajo ciertas condiciones sobre la dinámica total se puede probar que suponer el cumplimiento de una formulación es equivalente a suponer que se cumple la otra. Este hecho es probado en [**DJ1**] y es una forma de probar que para este tipo de semigrupos se cumplen condiciones de balance detallado con respecto a un estado en particular.

Otra manera de probar este último hecho es por medio de la forma de Lindblad del generador del semigrupo que es como finalmente lo probaremos.

3. Existencia de reducción de SMC obtenidos por LAD.

Esta propiedad es probada en [**AK**], no obstante las proposiciones y corolarios siguientes dan una nueva demostración de dicha propiedad.

PROPOSICIÓN 2.5. *Para todo $x \in \mathfrak{h}_o$ se cumple la siguiente cadena de igualdades:*

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{h}_0}^* a^*(V)(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} &= I_{\mathfrak{h}_0}^*(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) a^*(V) I_{\mathfrak{h}_0} = a(V)(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} \\ &= a(V) I_{\mathfrak{h}_0} = (1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A)) I_{\mathfrak{h}_0} = I_{\mathfrak{h}_0}^*(1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A)) \\ &= [1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A), (x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})] = 0. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar notese que dado $\varphi \in \mathfrak{h}_0$ si $V(x\varphi) = k \otimes h$ tenemos que

$$I_{\mathfrak{h}_0}^* a^*(V)(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0}(\varphi) = I_{\mathfrak{h}_0}^* V(x\varphi) \otimes \Omega = I_{\mathfrak{h}_0}^* k \otimes (0, h, 0, \ldots, 0, \ldots) = 0.$$

De manera similar se prueba que $I_{\mathfrak{h}_0}^*(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) a^*(V) I_{\mathfrak{h}_0} = 0$.

Dado $\varphi \in \mathfrak{h}_0$ y $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ vemos que $a(V)(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0}(\varphi) = a(V)(x\varphi \otimes \Omega) = 0$.

La igualdad anterior se cumple en particular tomando $x = 1_{\mathfrak{h}_0}$ por lo tanto:

$$a(V) I_{\mathfrak{h}_0} = a(V)(1_{\mathfrak{h}_0} \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} = 0$$

Nuevamente tomando $\varphi \in \mathfrak{h}_0$ vemos que

$$(1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A)) I_{\mathfrak{h}_0}(\varphi) = (1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A))(\varphi \otimes \Omega) = \varphi \otimes d\Gamma(H_A)\Omega = 0.$$

Tomando $(\varphi \otimes \gamma) \in \mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma_s(\mathfrak{h}_A)$ tenemos

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{h}_0}^*(1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A))(\varphi \otimes \gamma) = I_{\mathfrak{h}_0}^*(\varphi \otimes d\Gamma(H_A)\gamma) &= \langle \Omega, d\Gamma(H_A)\gamma \rangle \varphi \\ &= \langle d\Gamma(H_A)\Omega, \gamma \rangle \varphi = 0. \end{aligned}$$

Por último la igualdad $[1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A), (x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})] = 0$ es evidente.

□

COROLARIO 2.6. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ se cumple:*

$$I_{\mathfrak{h}_0}^*[H_\lambda, \cdot]^n (x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} = [H_0, x]^n$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar notese que

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{h}_0}^*[H_\lambda, \cdot](x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} &= I_{\mathfrak{h}_0}^*[H_0 \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}, \cdot](x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} \\ &+ \lambda I_{\mathfrak{h}_0}^*[a(V) + a(V^*), \cdot](x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} \\ &+ I_{\mathfrak{h}_0}^*[1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A), \cdot] I_{\mathfrak{h}_0}. \end{aligned}$$

Por la proposición anterior se tiene que

$$I_{\mathfrak{h}_0}^*[a(V) + a(V^*), \cdot](x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0} = I_{\mathfrak{h}_0}^*[1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A),] I_{\mathfrak{h}_0} = 0,$$

por lo tanto:

$$I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_\lambda,\cdot](x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} = I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_0\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)},\cdot](x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} = [H_0,x],$$

lo cual prueba el corolario para el caso $n=1$. Procediendo por inducción supongamos el resultado cierto para $n=k$. Entonces:

$$I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_\lambda,\cdot]^{k+1}(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} = I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_\lambda,\cdot][H_\lambda,\cdot]^k(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} =$$
$$I^*_{\mathfrak{h}_0}\left([H_0\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)},\cdot]+[1_{\mathfrak{h}_0}\otimes d\Gamma(H_A),\cdot]+\lambda[a(V)+a^*(V),\cdot]\right)[H_\lambda,\cdot]^k(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0}.$$

Utilizando nuevamente la proposición anterior tenemos:

$$I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_\lambda,\cdot]^{k+1}(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} = I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_0\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)},\cdot][H_\lambda,\cdot]^k(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0}$$

Ahora, notese que $I^*_{\mathfrak{h}_0}H_0\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)} = H_0 I^*_{\mathfrak{h}_0}$ y que $(H_0\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} = I_{\mathfrak{h}_0}H_0$, luego, utilizando este hecho y la hipotesis de inducción tenemos:

$$\begin{aligned} I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_\lambda,\cdot]^{k+1}(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} &= [H_0, I^*_{\mathfrak{h}_0}[H_\lambda,\cdot]^k(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0}] \\ &= [H_0,[H_0,x]^k] = [H_0,x]^{k+1} \end{aligned}$$

Por inducción se concluye lo pedido. □

Vale la pena notar que el corolario anterior es valido aún en el caso cuando $H_0 = H_A = 0$, pues por la proposición anterior se tiene que

$$I^*_{\mathfrak{h}_0}[a(V)+a(V^*),\cdot](x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} = I^*_{\mathfrak{h}_0}[1_{\mathfrak{h}_0}\otimes d\Gamma(H_A),]I_{\mathfrak{h}_0} = 0,$$

es decir me da la igualdad $0=0$.

La siguiente afirmación es consecuencia inmediata del corolario anterior:

COROLARIO 2.7. *Para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ se cumple:*

$$I^*_{\mathfrak{h}_0}\frac{-it}{\lambda^2}[H_\lambda,\cdot]^n(\cdot\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0}(i[H_0,x]) = \frac{-it}{\lambda^2}i[H_0,\cdot]([H_0,x]^n)$$

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea S un operador autoadjunto (puede ser no acotado) en un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}$. Si $(f_n), f$ y g son funciones Borel medibles en el espectro de S tales que $f_n \longrightarrow f$ puntualmente y $|f_n|\leq g$, para todo $n\in\mathbb{N}$ entonces $f_n(S)x\longrightarrow f(S)x$ para todo $x\in Dom(g(S))$.*

Para la demostración de esta afirmación ver la pagina 214 de [**Ped**].

Aplicando la afirmación anterior y el último corolario tenemos:

COROLARIO 2.9. *Para cada $x\in\mathfrak{h}_0$*

$$\begin{aligned} &e^{-it[H_0,\cdot]/\lambda^2}I^*_{\mathfrak{h}_0}e^{it[H_\lambda,\cdot]/\lambda^2}(i[H_0,x]\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0} \\ &= i[H_0,\cdot]e^{-it[H_0,\cdot]/\lambda^2}I^*_{\mathfrak{h}_0}e^{it[H_\lambda,\cdot]/\lambda^2}(x\otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})I_{\mathfrak{h}_0}. \end{aligned}$$

Vale la pena comentar que existe un ejemplo dado por Nelson de dos operadores no acotados A y B para los cuales existe un subespacio denso $\mathcal{D}$ de un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}$ que es un dominio esencial tanto de A como de B tal que $ABy = BAy$ para todo $y \in \mathcal{D}$ pero donde e^{iA} no conmuta con e^{iB}. Por lo tanto nuestro último corolario no es tan obvio como la intuición lo dice.

Dado un operador A actuando en el espacio de Hilbert $\mathfrak{h}_0$ notaremos como $W^*(A)$ la *-álgebra generada por A y por el operador $1_{\mathfrak{h}_0}$.

DEFINICIÓN 2.10. Diremos que un operador A es libre de multiplicidades si y solo si $W^*(A) = W^*(A)'$.

TEOREMA 2.11. *El SMC $\mathcal{T}$ generado por LAD es reduccido por $W^*(H_0)$ si H_0 es libre de multiplicidades.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, dado $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$, utilizando el último corolario tenemos que:

$$
\begin{aligned}
e^{-itH_0/\lambda^2} I_{\mathfrak{h}_0}^* e^{itH_\lambda/\lambda^2}(\cdot \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)})) e^{-itH_\lambda/\lambda^2} I_{\mathfrak{h}_0} e^{itH_0/\lambda^2}(i[H_0, x]) \\
= e^{-it[H_0,\cdot]/\lambda^2} I_{\mathfrak{h}_0}^* e^{it[H_\lambda,\cdot]/\lambda^2}(\cdot \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0}(i[H_0, x]) \\
= i[H_0, \cdot] e^{-it[H_0,\cdot]/\lambda^2} I_{\mathfrak{h}_0}^* e^{it[H_\lambda,\cdot]/\lambda^2}(x \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}) I_{\mathfrak{h}_0}
\end{aligned}
$$

Si tomamos λ aproximandose a cero en la anterior igualdad, teniendo en cuenta que H_0 es un operador acotado, tenemos por el LAD que

$$
e^{t\mathcal{L}}(i[H_0, x]) = \mathcal{T}_t(i[H_0, x]) = i[H_0, \cdot]\mathcal{T}_t(x) = i[H_0, \cdot]e^{t\mathcal{L}}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0),
$$

De esta última igualdad tenemos que si $[H_0, x] = 0$ entonces $[H_0, e^{t\mathcal{L}}(x)] = 0$. Lo cual nos dice en particular que $e^{t\mathcal{L}}(x)(W^*(H_0)) \subset W^*(H_0)'$ y dado que H_0 es libre de multiplicidades se concluye que $e^{t\mathcal{L}}(x)(W^*(H_0)) \subset W^*(H_0)$.

□

4. Condición de Balance detallado (CBD).

Toda esta sección es sacada de [**DD2**].

DEFINICIÓN 2.12. Decimos que un estado ω sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ es *fiel* si $\omega(x^*x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Si $\omega(\cdot) = tr\rho(\cdot)$ es fiel entonces decimos que ρ es fiel.

Dado ρ un elemento con traza igual a uno que es fiel introducimos el producto escalar dado por

$$
< A, B >_\rho := tr\rho^{1/2} A^* \rho^{1/2} B
$$

Sea $\mathcal{L}$ el generador de un SMC sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ recordemos que este puede ser expresado de forma única como

$$
\mathcal{L} = i[\Theta, \cdot] + \mathcal{L}_d,
$$

donde $\mathcal{L}_d$ es la parte puramente disipativa y $i[\Theta, \cdot]$ es su parte Hamiltoniana.

DEFINICIÓN 2.13. El generador $\mathcal{L}$ satisface *la Condición de Balance Detallado ó CBD* para ρ si y solo si $\mathcal{L}_d$ y $i[\Theta, \cdot]$ son autoadjuntos y antiautoadjuntos respectivamente con respecto al producto interno $< \cdot, \cdot >_\rho$.

Para M una aplicación definida sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ si denotamos como $M^{*\rho}$ el conjugado hermitiano con respecto a $< \cdot, \cdot >_\rho$ entonces este se puede calcular explicitamente:

$$M^{*\rho}(A) = \rho^{-1/2} M^*(\rho^{1/2} A \rho^{1/2}) \rho^{-1/2}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior es facil ver que $\mathcal{L}$ cumple CBD para ρ si y solamente si $[\Theta, \rho] = 0$ y $\mathcal{L}_d$ cumple CBD para ρ.

La definición de CBD puede variar dependiendo de como se defina el producto escalar. La que nosotros hemos mencionado hasta ahora es usada en [**DF1**] bajo el nombre de Condición de Balance detallado estandar. Otra que se maneja comunmente es tomando el producto escalar $< A, B >_\rho$ en $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ como $tr \rho A^* B$. También vale la pena notar que la CBD esta estrechamente relacionada con el concepto de reversibilidad de la dinámica, este aspecto y otros iguales de interesantes son tratados en [**FU1**], donde $\mathfrak{h}_0$ es tomado de dimensión infinita, en cambio, por las condiones impuestas por el LAD nuestra CBD es manejada en un espacio de dimensión finita.

Sea $\beta > 0$ y considremos el operador $e^{-\beta H_0} \otimes |\Omega >< \Omega| \cdot$, asumiendo por simplicidad que $tr e^{-\beta H_0} = 1$.

Denominamos el Hamiltoniano libre a $H_L := H_0 \otimes 1_{\Gamma_s(1_{\mathfrak{h}_A})} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A)$, así definimos la dinámica

$$\tau_t(C) := e^{itH_L} C e^{-itH_L}$$

y el estado

$$\omega_\beta(C) := tr e^{-\beta H_0} \otimes |\Omega >< \Omega| C \quad \text{para } C \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}).$$

DEFINICIÓN 2.14. Diremos que el *ambiente es térmico* a temperatura $1/\beta > 0$ si para cualquier $x_1, x_2, x_1', x_2' \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0), f_j \in L^2(\mathbb{R})$ y

$B_j := x_j \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)} (a^*(v \otimes |f_j >) + a(v \otimes |f_j >)) x_j' \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}$ para j=1,2, y para cualquier $t \in \mathbb{R}$

tenemos $\omega_\beta(\tau_t(B_1) B_2) = \omega_\beta(B_2 \tau_{t+i\beta}(B_1))$. En este caso ω_β es llamado *el estado de Gibbs*

TEOREMA 2.15. *si para cualquier $x_1, x_2, x_1', x_2' \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0), V \in (\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}')$ y*

$B_j := x_j \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)} (a^*(V) + a(V)) x_j' \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)}$ para j=1,2, y para cualquier $t \in \mathbb{R}$

tenemos

$$\omega_\beta(\tau_t(B_1) B_2) = \omega_\beta(B_2 \tau_{t+i\beta}(B_1)) \tag{3}$$

entonces para cualquier función f continua definida sobre el espectro de H_A y cualquier $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ se tiene

$$tr_{\mathfrak{h}_A}(1 \otimes \overline{f}(-H_A))VAV^* = V^*(A \otimes e^{-\beta H_A} f(H_A))V \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. El lado izquierdo de (3) es igual a

$$tr e^{-i\beta K + itK} D_1 V^* (D_1' e^{-itK} D_2 \otimes e^{-itH_R}) V D_2'.$$

El lado derecho de (3) es igual a

$$tr D_2 V^* (D_2' e^{-\beta K + itK} D_1 \otimes e^{-\beta H_A + itH_A}) V D_1' e^{-itK}.$$

Ahora tomando $A_1 := D_2' e^{-\beta K + itK} D_1$, $A_2 := D_1' e^{-itK} D_2$ y usando la ciclicidad de la traza tenemos

$$tr A_2 \otimes e^{-itH_A} V A_1 V^* = tr A_2 V^* A_1 \otimes e^{-\beta H_A + itH_A} V.$$

Tomando transformada de Fourier tenemos

$$tr A_2 \otimes \overline{f}(H_A) V A_1 V^* = tr A_2 V^* A_1 \otimes e^{-\beta H_A} f(H_A) V.$$

Esto último impica (4). □

Del teorema anterior podemos concluir que si el ambiente esta a temperatura $1/\beta$ entonces en particular existe un operador autoadjunto Y sobre $\mathfrak{h}'$ (el mismo espacio de Hilbert que se menciona en el LAD) tal que

$$tr_{\mathfrak{h}'} v A v^* = v^* A \otimes e^{-\beta Y} v \quad \text{y que } vH_0 = (H_0 \otimes 1_{\mathfrak{h}'} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes Y)v.$$

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 2.16. *Si el ambiente es térmico a temperatura $1/\beta$ entonces el generador $\mathcal{L}$ de un SMC generado por LAD cumple la condición de balance detallado estandar con respecto a $\rho_G = e^{-\beta H_0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema del límite de acoplamiento débil reducido sabemos que existen un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}'$ y un operador $v \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}')$ tal que

$$\mathcal{L}(x) = -i\left[\frac{\Upsilon + \Upsilon^*}{2}, x\right] - \frac{1}{2}[x, v^*v]_+ + v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'})v \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0).$$

tal que $[\Upsilon, H_0] = 0$, por lo tanto $-i\left[\frac{\Upsilon+\Upsilon^*}{2}, e^{-\beta H_0}\right] = 0$ y de esta forma resta ver que $\mathfrak{L}_d$ es autoadjunto.

Ahora como el ambiente es térmico entonces $vH_0 = (H_0 \otimes 1_{\mathfrak{h}'} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes Y)v$ entonces

$$v^*vH_0 = v^*(H_0 \otimes 1_{\mathfrak{h}'} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes Y)v = (v^*(H_0 \otimes 1_{\mathfrak{h}'} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes Y)v)^* = (v^*vH_0)^* = H_0 v^*v,$$

por lo tanto v^*v conmuta con ρ_G y por ende $[\cdot, v^*v]_+$ es autoadjunto con respecto al producto interno $< \cdot, \cdot >_{\rho_G}$.

Si tomamos $M_1(x) := v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'})v$, utilizando la definición de traza parcial se puede calcular facilmente que

$$M_1^{*\rho}(x) = tr_{\mathfrak{h}'}(e^{\beta H_0/2} \otimes 1_{\mathfrak{h}'})(ve^{-\beta H_0/2} x e^{-\beta H_0/2} v^*)(e^{\beta H_0/2} \otimes 1_{\mathfrak{h}'}).$$

Nuevamente utilizando el hecho de que el ambiente es térmico tenemos que

$$tr_{\mathfrak{h}'} v A v^* = v^* A \otimes e^{-\beta Y} v,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} M_1^{*\rho}(x) &= tr_{\mathfrak{h}'}(e^{\beta H_0/2} \otimes 1_{\mathfrak{h}'})(v e^{-\beta H_0/2} x e^{-\beta H_0/2} v^*)(e^{\beta H_0/2} \otimes 1_{\mathfrak{h}'}) \\ &= tr_{\mathfrak{h}'} e^{\beta H_0/2} v^* (e^{-\beta H_0/2} x e^{-\beta H_0/2} \otimes e^{-\beta Y}) v e^{\beta H_0/2}, \end{aligned}$$

pero como $vH_0 = (H_0 \otimes 1_{\mathfrak{h}'} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes Y)v$ entonces por el teorema espectral

$$v e^{\beta H_0/2} = e^{\beta H_0/2} \otimes e^{\beta Y/2} = e^{\beta H_0/2} v^*$$

y así

$$e^{\beta H_0/2} v^* (e^{-\beta H_0/2} x e^{-\beta H_0/2} \otimes e^{-\beta Y}) v e^{\beta H_0/2} = v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'}) v,$$

entonces $M_1^{*\rho}(x) = tr_{\mathfrak{h}'} v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'})v = v^*(x \otimes 1_{\mathfrak{h}'})v = M_1(x)$. Este último detalle finaliza la demostración. $\square$

En el proximo capítulo hablaremos entre otras cosas de los estados invariantes y veremos que ρ_G define un estado invariante, esto sera consecuencia del teorema anterior. Este hecho nos permitira concluir que existe decoherencia en los SMC generados por LAD.

CAPÍTULO 3

Decoherencia de SMC.

Pese a que el LAD es dado sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}_0$ de dimensión finita, la siguiente teoría y los resultados se formulan en general para $\mathfrak{h}_0$ separable de dimensión finita ó infinita. Solamente se expondra aquellos resultados que utilizaremos a lo largo de este trabajo, para ver un desarrollo mas completo del concepto de decoherencia en SMC ver [**Re2**].

1. Semigrupos ergodicos y decoherencia.

DEFINICIÓN 3.1. El SMC $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ se dice *ergodico* si existe un estado $\omega_\infty \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)_*$ tal que para cada $\omega \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)_*$ se tiene

$$\mathcal{T}_{*t}(\omega)(x) = \omega(\mathcal{T}_t(x)) \longrightarrow \omega_\infty(x) \quad \text{cuando} \quad t \longrightarrow \infty \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0).$$

Cualquier estado ω tal que $\omega(\mathcal{T}_t(x)) = \omega(x)$ para todo $t \geq 0$ se dice un *estado invariante* con respecto a $\mathcal{T}$. Notese que de la definición anterior se concluye que $\omega_\infty(\mathcal{T}_t(x)) = \omega_\infty(x)$, es decir que ω_∞ es un estado invariante con respecto a $\mathcal{T}$. Definiremos a continuación la noción de decoherencia, para ello se considera un operador H_0 autoadjunto con espectro puntual puro y denotaremos por $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de vectores propios de H_0.

DEFINICIÓN 3.2. Decimos que H_0 induce *decoherencia* del semigrupo Markoviano cuántico $\mathcal{T}$ si existe $\sigma \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ que conmuta con H_0 y $\omega = tr\sigma(\cdot)$ define un estado fiel invariante con respecto a $\mathcal{T}$.

Tomando $\alpha_t(x) := e^{itH_0}xe^{-itH_0}$ para todo $t \geq 0$ la anterior definición implica la existencia de $\sigma \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ tal que $tr\sigma\mathcal{T}_t(x) = tr\sigma x = tr\sigma\alpha_t(x)$ para todo $t \geq 0$.

La siguiente proposición cuya prueba fue desarollada por el autor de esta trabajo, nos dice que en efecto hay decoherencia en los SMC generados por el LAD. Aqui tomamos sin perdida de generalidad ρ_G con $tr\rho_G = 1$.

PROPOSICIÓN 3.3. *Dado $\mathfrak{h}_0$ espacio de Hilbert que describe un ambiente térmico en el LAD a temperatura $1/\beta$ y el operador clase traza $\rho_G = e^{-\beta H_0}$ que definía el estado de Gibbs del capítulo anterior entonces si H_0 tiene espectro puntual puro se tiene que ρ_G conmuta con H_0 y define ahora otro estado $\omega_G := tr(\rho_G\,\cdot)$ sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ el cual es fiel e invariante con respecto al semigrupo $\mathcal{T}$ generado por LAD. Por lo tanto H_0 induce decoherencia sobre el SMC $\mathcal{T}$ generado por LAD.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\rho_G = e^{-\beta H_0}$ y H_0 conmutan. Para ver que es un estado sea $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la base ortonormal en $\mathfrak{h}_0$ de vectores propios de H_0, notese que por el teorema espectral $\rho_G = e^{-\beta H_0} = \sum_i e^{-\beta\lambda_i}|e_i\rangle\langle e_i|$ por lo tanto para $u \in \mathfrak{h}_0$ tenemos:

$$< u, \rho_G u >= \left\langle u, \sum_i e^{-\beta\lambda_i}|e_i\rangle\langle e_i|u\right\rangle = \sum_i < e_i, u > e^{-\beta\lambda_i} < u, e_i >$$
$$= \sum_i | < e_i, u > |^2 e^{-\beta\lambda_i} \geq 0.$$

entonces ρ_G es un operador positivo y por lo tanto $\rho_G = \rho_G^{1/2}\rho_G^{1/2}$ en consecuencia:

$$\omega_G(x^*x) = tr(\rho_G x^*x) = tr\left(x\rho_G^{1/2}\right)^*\left(x\rho_G^{1/2}\right) = \sum_i \left\langle e_i, (x\rho_G^{1/2})^*(x\rho_G^{1/2})e_i\right\rangle$$
$$= \sum_i ||x\rho_G^{1/2}e_i||^2 \geq 0.$$

De lo anterior se concluye que ω_∞ es un estado, además vemos que $\omega_\infty(x^*x) = 0$ si y solamente si $x\rho_G^{1/2}e_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$0 = \sum_i xe^{-\beta\lambda_i/2}|e_i\rangle\langle e_i|e_j = xe^{-\beta\lambda_j/2}e_j$$

pues $< e_i, xe_j >= 0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$, entonces $xe_j = 0$ y por lo tanto $x = 0$, esto prueba la fidelidad.

Para ver que la invarianza se cumple notese en primer lugar que si $\mathcal{L} = i[\theta, \cdot] + \mathcal{L}_d$ es el generador del SMC $\mathcal{T}$ generado por LAD, como $\mathcal{T}$ cumple la condición de balance detallado con respecto a ρ_G entonces $[\theta, \rho_G] = 0$ y $\mathcal{L}_d$ es autoadjunto con respecto al producto interno $<,>_{\rho_G}$ entonces

$$0 = \mathcal{L}_d(1) = \mathcal{L}_d^{*\rho_G}(1) = \rho_G^{-1/2}\mathcal{L}_d^*(\rho_G)\rho_G^{-1/2}$$

por lo tanto como $\mathfrak{h}_0$ es de dimensión finita $0 = \mathcal{L}_d^*(\rho_G) = \mathcal{L}_{*d}(\rho_G)$ y por lo tanto $\mathcal{L}_*(\rho_G) = -i[\theta, \rho_G] + \mathcal{L}_{*d}(\rho_G) = 0$, lo cual implica que $\mathcal{T}_{*t}(\rho_G) = \rho_G$, entonces $\omega_G(\mathcal{T}_t(x)) = tr\rho_G\mathcal{T}_t(x) = tr\mathcal{T}_{*t}(\rho_G)x = tr(\rho_G)x = \omega_G(x)$ y esto concluye la invarianza. De todo esto se sigue la afirmación. □

La siguiente proposición nos confirma el comportamiento esperado de las coherencias cuando hay decoherencia en un semigrupo ergodico. Esta demostración es sacada de [**Re2**].

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea H_0 un operador autoadjunto no degenerado con espectro puntual puro que induce decoherencia sobre el semigrupo ergodico $\mathcal{T}$. Entonces dado*

$\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ *arbitario y* $n \neq m$ *se cumple que:*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} < e_m, \mathcal{T}_{*t}(\rho)e_n >= 0$$

Demostración. Sea $\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ arbitario pero fijo, es claro que $\omega := tr\rho(\cdot)$ define un estado sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$. Como $\mathcal{T}$ es ergodico existe un estado fiel ω_∞ tal que

$$\mathcal{T}_{*t}(\omega)(x) = \omega(\mathcal{T}_t(x)) \longrightarrow \omega_\infty(x)$$

cuando $t \longrightarrow \infty$ para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$.

Dado que ω_∞ es un estado, existe ρ_∞ tal que $\omega_\infty = tr\rho_\infty(\cdot)$, de esto último y de las propiedades del SMC $\mathcal{T}$ se sigue para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$

$$(5) \qquad tr\mathcal{T}_{*t}(\rho)x = \mathcal{T}_{*t}(\omega)(x) = \omega(\mathcal{T}_t(x)) \longrightarrow \omega_\infty(x) = tr\rho_\infty x \quad \text{cuando } t \longrightarrow \infty$$

Tomando $x = |e_n >< e_m|$ en esta última igualdad se tiene:

$$(6) \qquad \lim_{t \longrightarrow \infty} < e_m, \mathcal{T}_{*t}(\rho)e_n >=< e_m, \rho_\infty e_n >$$

Por otro lado como H_0 induce decoherencia existe $\rho' \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ tal que $tr\rho'\mathcal{T}_t(x) = tr\rho x$ para todo $t \geq 0$, ρ' conmuta con H_0 y $\omega' := tr\rho'(\cdot)$ define un estado fiel de tal forma que $\omega'(\mathcal{T}_t(x)) = \omega'(x)$ para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$.Luego, en particular de (5) se sigue:

$$\omega'(x) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \omega'(\mathcal{T}_t(x)) = \omega_\infty(x)$$

Esta igualdad implica $tr(\rho_\infty - \rho')x = 0$ para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$. Nuevamente tomando $x = |e_n >< e_m|$ dado que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base ortonormal (completa) se concluye que $\rho_\infty = \rho'$.

Asi podemos cambiar ρ_∞ por ρ' en (6), el resultado se concluye facilmente si se tiene que $< e_m, \rho' e_n >= 0$. Para ver esto último notese que como H_0 induce decoherencia entonces ρ' conmuta con H_0 y así $H_0\rho' e_s = \rho' H_0 e_s = \rho' \lambda_s e_s = \lambda_s \rho' e_s$, para $s \in \mathbb{N}$ y λ_s valor propio de H_0. Lo cual nos permite concluir que $\rho' e_s$ es vector propio de H_0 asociado a λ_s, como H_0 es no degenerado se sigue que $\rho' e_s = c e_s$ con c número real diferente de cero, para todo $s \in \mathbb{N}$, de aqui se sigue la afirmación.

□

Como un aporte nuevo, notese que imitando las ideas de las pruebas de las dos proposiciones anteriores se obtiene de forma inmediata el siguiente corolario que relaciona los conceptos de Balance detallado, Decoherencia y Ergodicidad.

Corolario 3.5. *Sea* $\mathcal{T}$ *un* SMC *ergodico que cumple* CBD *con respecto a* $\rho_G = e^{-\beta H_0}$ *para* $\beta > 0$ *y* H_0 *operador autoadjunto no degenerado con espectro* *puntual puro entonces H_0 induce decoherencia sobre $\mathcal{T}$ y dado $\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ arbitario y $n \neq m$ se cumple que:*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} < e_m, \mathcal{T}_{*t}(\rho) e_n >= 0.$$

2. La brecha espectral.

A continuación discutiremos sobre un elemento que nos permitira medir en algún sentido la velocidad con la que un SMC ergodico converge a un estado fiel invariante ω_∞. Así, durante el transcurso de esta sección tomaremos como elementos fijos un operador autoadjunto H_0 y un SMC ergodico $\mathcal{T}$ cumpliendo las hipótesis de la proposición 3.4. Fijaremos también el estado inyectivo ω_∞ al cual converge el semigrupo y para este estado también fijamos el elemento clase traza $\sigma := \rho_\infty$ asociado a dicho estado. Notese que la fidelidad de ω_∞ implica la inyectividad de σ. Esta sección es basada en el articulo [**Car**].

El espacio $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ de los operadores clase traza es dotado de una norma $||\cdot||_1$ la cual para x en dicho espacio es definida por $||x||_1 = tr(x^*x)^{1/2}$, se puede decir que es la contraparte de las funciones $L^1(\mathbb{R})$ de análisis real, desde luego también hay un semejante para el espacio $L^2(\mathbb{R})$:

DEFINICIÓN 3.6. Sean x, y elementos en $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$, se define el producto escalar $< x, y >_2 := tr(x^*y)$ y su norma $||\cdot||_2$ como la norma asociada al producto interno. Diremos que el espacio $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ de los *operadores Hilbert-Schmidt* es el formado por todos los operadores compactos definidos en $\mathfrak{h}_0$ con dicha norma finita.

Tomando el espacio de Hilbert $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ se define la aplicación $i : \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0) \longrightarrow \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ como $i(x) = \sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}$. Si cambiamos $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ el dominio de i por $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ obtenemos una aplicación $k : \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0) \longrightarrow \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ donde $k(x) = \sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}$. Estas aplicaciones estan bien definidas sobre sus dominios.

PROPOSICIÓN 3.7. *Las aplicaciones i y k son contracciones inyectivas que preservan la positividad y poseen rango denso.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\sigma^{\frac{1}{4}} x^* x \sigma^{\frac{1}{4}} = \left(x\sigma^{\frac{1}{4}}\right)^* \left(x\sigma^{\frac{1}{4}}\right)$ se concluye facilmente que i y k preservan la positividad.

Si $\sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}} = \sigma^{\frac{1}{4}} y \sigma^{\frac{1}{4}}$ entonces $\sigma^{\frac{1}{4}}(x-y)^* \sigma^{\frac{1}{4}} \sigma^{\frac{1}{4}}(x-y)\sigma^{\frac{1}{4}} = 0$, por lo tanto

$$tr\sigma(x-y)^*(x-y) = 0.$$

Por la fidelidad de ω_∞ se sigue que $x = y$, esto prueba la inyectividad de i y k.

Sus rangos son densos pues ellos contienen todos los operadores de rango finito.

Para probar que k es una contracción, notese que para cada $x \in \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$, por la desigualdad de Holder para ideales de Shatten se puede asegurar:

$$||k(x)||_1 = ||\sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}||_1 \leq ||\sigma^{\frac{1}{4}}||_4^2 ||x||_2 = ||x||_2$$

La contractividad de i se sigue de la reflexividad de $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ y de que la aplicación dualidad en este caso es dada por la traza, pues dado $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} ||i(x)||_2 &= \sup_{y \in \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0), ||y||_2 \leq 1} tr(yi(x)) = \sup_{y \in \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0), ||y||_2 \leq 1} tr(k(y)x) \\ &\leq \sup_{y \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0), ||y||_2 \leq 1} tr(yx) = ||x|| \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se sigue de que k es contracción.

□

Lo que sigue es construir a traves de i un semigrupo $T := (T_t)_{t \geq 0}$ de contracciones fuertemente continuo definido sobre $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ el cual se relaciona con $\mathcal{T}$ por medio de la igualdad:

$$T_t(i(x)) = i(\mathcal{T}_t(x))$$

para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$.

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea* $\mathcal{R} : \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ *una aplicación lineal con la propiedad de Schwarz y tal que* $tr(\sigma \mathcal{R}(x)) \leq tr(\sigma x)$ *para todo operador acotado* x. *Entonces existe una contracción* $R : \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0) \longrightarrow \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ *tal que* $R \circ i = i \circ \mathcal{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Notese que si $z \in i(\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0))$ se tiene que $z = i(x)$ con $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ entonces definimos $R(z) := i(\mathfrak{R}(x))$, asi, R definido sobre $i(\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0))$ cumple con la igualdad: $R \circ i = i \circ \mathcal{R}$,en virtud de la proposición (3.7) R queda bien definida sobre un subconjunto denso de $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$. Basta probar que R es contracción, de esta forma R se puede definir sobre todo $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ extendiendo por densidad.

Para probar que R es una contracción consideremos una base *ortonormal* $(e_k)_{k \geq 0}$ la cual diagonaliza a σ.Consideremos las proyecciones $P_n = \sum_{k=0}^{n} |e_k >< e_k|$ y $\mathcal{M}$ la variedad lineal generada por los elementos de la forma $P_n x P_n$ con $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ y $n \in \mathbb{N}$, el cual es un subespacio denso de $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$. Se define el operador $V : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ como $V(x\sigma^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{R}(x)\sigma^{\frac{1}{2}}$, el cual cumple:

$$||V(x\sigma^{\frac{1}{2}})||_2^2 = tr(\sigma \mathcal{R}(x)^* \mathcal{R}(x)) \leq tr(\sigma \mathcal{R}(x^* x)) \leq tr(\sigma x^* x) = ||x\sigma^{\frac{1}{2}}||_2^2$$

Por lo tanto V se puede extender en forma unica a el espacio $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$.

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los operadores $\triangle_n : \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0) \longrightarrow \mathcal{M}$ como $\triangle_n(x) = \sigma^{\frac{1}{2}}(P_n x P_n)\sigma^{-\frac{1}{2}}$ y $\triangle : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ como $\triangle(x) = \sigma^{\frac{1}{2}} x \sigma^{-\frac{1}{2}}$.

Dado que P_n es una proyección conmutando con σ entonces se tiene que los anteriores operadores son simetricos y positivos, mas aún son acotados. Se puede probar que la clausura de $\triangle$ es autoadjunta, basta ver a $\triangle$ como un operador multiplicación sobre $\mathcal{M}$. Ahora para todo $x \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle V^*\triangle_n^2 V(x\sigma^{\frac{1}{2}}), x\sigma^{\frac{1}{2}}\right\rangle &= ||\triangle_n(\mathcal{R}(x)\sigma^{\frac{1}{2}})||_2^2 \leq tr(\mathcal{R}(x)^*\sigma\mathcal{R}(x)) \\ &\leq tr(\sigma\mathcal{R}(x^*x)) \leq tr(\sigma x x^*) \\ &= ||\triangle(x\sigma^{\frac{1}{2}})||_2^2 = \left\langle \triangle^2(x\sigma^{\frac{1}{2}}), x\sigma^{\frac{1}{2}}\right\rangle.\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue entonces que $V^*\triangle_n^2 V \leq \triangle^2$. Mas aun, dado que V es una contracción se tiene:

$$(V^*\triangle_n V)^2 = V^*\triangle_n(VV^*)\triangle_n V \leq V^*\triangle_n^2 V$$

De esta última desigualdad y del resultado previo concluimos $\triangle^2 \geq (V^*\triangle_n V)^2$, dado que los operadores involucrados en esta desigualdad son operadores positivos se tiene que $\triangle \geq (V^*\triangle_n V)^2$.Así para todo $x \in \mathcal{M}$ se cumple:

$$\begin{aligned}||R(i(x))||_2^2 = tr\left(\mathcal{R}(x)^*\sigma^{\frac{1}{2}}\mathcal{R}(x)\sigma^{\frac{1}{2}}\right) &= \lim_n tr\left(\mathcal{R}(x)^*\sigma^{\frac{1}{2}}P_n\mathcal{R}(x)P_n\sigma^{\frac{1}{2}}\right) \\ = \lim_n \left\langle V^*\triangle_n V(x\sigma^{\frac{1}{2}}), x\sigma^{\frac{1}{2}}\right\rangle &\leq \left\langle \triangle(x\sigma^{\frac{1}{2}}), x\sigma^{\frac{1}{2}}\right\rangle = ||i(x)||_2^2.\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{M} = i(\mathcal{M})$ es denso en $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$, se sigue que R tiene una extensión contractiva sobre $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$, y de esto se sigue la proposición.

□

De esta última proposición se sigue para todo $t \geq 0$ la existencia de contracciones T_t tal que para todo operador acotado $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ se tiene $T_t(i(x)) = i(\mathcal{T}_t(x))$. Además $T = (T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo:

$$T_{s+t}(i(x)) = i \circ \mathcal{T}_{s+t}(x) = i \circ \mathcal{T}_s \circ \mathcal{T}_t(x) = T_s \circ i \circ \mathcal{T}_t(x) = T_s T_t(i(x))$$

y

$$T_0(i(x)) = i(\mathcal{T}_0(x)) = i(x).$$

TEOREMA 3.9. *Existe un único semigrupo de contracciones T fuertemente continuo sobre $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ tal que $T_t(\sigma^{\frac{1}{4}}x\sigma^{\frac{1}{4}}) = \sigma^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}_t(x)\sigma^{\frac{1}{4}}$ para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{D}$ el subespacio $i(\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0))$ de $\mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0)$; para todo $t \geq 0$, se tiene de lo discutido anteriormente que

$$T_t : \mathcal{D} \longrightarrow \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0) \quad \text{con } T_t(\sigma^{\frac{1}{4}}x\sigma^{\frac{1}{4}}) = \sigma^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}_t(x)\sigma^{\frac{1}{4}}$$

y que para cada t tenemos que T_t es una contracción, por lo tanto podemos extender estos operadores al espacio completo.

Se probara ahora que $T := (T_t)_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo: para $y = \sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}$ en $\mathcal{D}$ se tiene

$$\begin{aligned}
||T_t(y) - y||_2^2 &= ||T_t(y)||_2^2 + ||y||_2^2 - tr(T_t(y)^* y + y^* T_t(y)) \\
&\leq 2||y||_2^2 - tr(T_t(y)^* y + y^* T_t(y)) \\
&= tr\left(\sigma^{\frac{1}{2}} x^* \sigma^{\frac{1}{2}} (x - \mathcal{T}_t(x)) + (x - \mathcal{T}_t(x)) \sigma^{\frac{1}{2}} x^* \sigma^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2\Re e\left(tr\left(\sigma^{\frac{1}{2}} x^* \sigma^{\frac{1}{2}} (x - \mathcal{T}_t(x))\right) x\right) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye la afirmación para cualquier elemento $y \in \mathcal{D}$ y la propiedad se concluye extendiendo por densidad, esto nos da la existencia y la unicidad se concluye facilmente de la forma en que se construyo el semigrupo.

$\square$

Notese que $\mathcal{T}_t(1) = 1$ implica $T_t(\sigma^{\frac{1}{2}}) = \sigma^{\frac{1}{2}}$, es decir $\sigma^{\frac{1}{2}}$ es un vector invariante de T.

COROLARIO 3.10. *Sea L el generador infinitesimal del semigrupo T del teorema anterior. Si $x \in Dom(\mathcal{L})$ se tiene que $\sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}} \in Dom(L)$ y $L(\sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}) = \sigma^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}(x) \sigma^{\frac{1}{4}}$*

DEFINICIÓN 3.11. Sea L el generador infinitesimal del semigrupo de contracciones T, definimos la *brecha espectral* (Spectral Gap) de L como:

$$gap(L) = \inf\left\{-\Re e < x, Lx >_2 |x \in Dom(L), < \sigma^{1/2}, x >_2 = 0, ||x||_2 = 1\right\}$$

Por lo tanto la brecha espectral depende del SMC $\mathcal{T}$ y el estado invariante fiel σ que son fijados. No haremos explicita dicha dependencia en procura de no recargar la notación; pero se advierte que esto debe tenerse en cuenta. La definición de la brecha espectral también puede ser dada en terminos del semigrupo:

PROPOSICIÓN 3.12. *Sea $\lambda(t) := -\sup\left\{\log ||T_t(x)||_2, < \sigma^{1/2}, x >_2 = 0, ||x||_2 = 1\right\}$ entonces $gap(L) = \inf\limits_{t>0} \frac{\lambda(t)}{t}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A := gap(L)$ y $B := \inf\limits_{t>0} \frac{\lambda(t)}{t}$,luego debemos probar que $A = B$. Supongamos que $y = \sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}} \in Dom(L), < \sigma^{1/2}, y >_2 = 0, ||y||_2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d_t}||T_t(y)||_2^2 &= \frac{d}{d_t}||\sigma^{14}\mathcal{T}_t(x)\sigma^{14}||_2 = \frac{d}{d_t}tr(\sigma\mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x)) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} tr\sigma\left(\frac{\mathcal{T}_{t+h}(x^*)\mathcal{T}_{t+h}(x) - \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} tr\sigma\left(\frac{\mathcal{T}_{t+h}(x^*) - \mathcal{T}_t(x^*)}{h}\right)\mathcal{T}_{t+h}(x) + tr\sigma\left(\mathcal{T}_t(x^*)\frac{\mathcal{T}_{t+h}(x^*) - \mathcal{T}_t(x^*)}{h}\right) \\
&=< \sigma^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}_t(\mathcal{L}(x))\sigma^{\frac{1}{4}}, \sigma^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}_t(x)\sigma^{\frac{1}{4}} >_2 + < \sigma^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}_t(x)\sigma^{\frac{1}{4}}, \sigma^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}_t(\mathcal{L}(x))\sigma^{\frac{1}{4}} >_2 \\
&= 2\Re e < L(T_t(\sigma^{\frac{1}{4}}x\sigma^{\frac{1}{4}})), T_t(\sigma^{\frac{1}{4}}x\sigma^{\frac{1}{4}}) >_2 \leq -2A||T_t(y)||_2^2,
\end{aligned}$$

esta última desigualdad se cumple por la definición de A aplicado a $T_t(y)$ el cual esta en el dominio de L y cumple que $< \sigma^{\frac{1}{2}}, T_t(y) >_2 = 0$. Y de dicha desigualdad se concluye que

$$||T_t(y)||_2^2 \leq e^{-2At}||y||_2^2,$$

de lo cual se sigue que $-\log||T_t(y)||_2 \geq At$, donde $||y|| = 1$, por lo tanto $B \geq A$. Para la otra desigualdad tomemos $y = \sigma^{14}x\sigma^{14} \in Dom(L), < \sigma^{1/2}, y >_2 = 0, ||y||_2 = 1$, entonces por definición del generador

$$\begin{aligned}
2\Re e < y, Ly >_2 &= < y, Ly >_2 + \overline{< y, Ly >_2} = tr(\sigma x^*\mathcal{L}(x)) + tr(\sigma\mathcal{L}(x)^*x) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} tr\sigma\left(x^*\frac{\mathcal{T}_t(x) - x}{h} + \frac{\mathcal{T}_t(x^*) - x^*}{h}x\right) \\
&= 2\lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{\Re e < y, \mathcal{T}_h(y) > -1}{h}\right) = 2\frac{d}{d_h}\Re e < y, \mathcal{T}_h(y) > |_{h=0} \\
&\leq 2\frac{d}{d_h}\Re e||\mathcal{T}_h(y)|||_{h=0} \leq 2\frac{d}{d_h}e^{-Bh}|_{h=0} = -2B
\end{aligned}$$

Luego $B \leq A$ y de esto se concluye la igualdad.

□

3. Decoherencia y convergencia exponencial hacia el equilibrio.

Uno de los objetivos de los SMC en física es modelar el decaimiento hacia el equilibrio de los sistemas cuánticos abiertos . El estado de equlibrio es representado por un operador σ positivo con traza 1 tal que $tr(\sigma\mathcal{T}_t(x)) = tr(\sigma x)$ para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$. El decaimiento al equilibrio es expresado por

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} tr(\rho\mathcal{T}_t(x)) = tr(\sigma x)$$

para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ y para todo operador ρ positivo con traza uno (ó equivalentemente el semigrupo $\mathcal{T}_t$ es ergodico). Vale la pena notar que de la definición de estado de equilibrio se sigue facilmente la unicidad del estado al cual converge. A continuación enunciamos un resultado que se desprende de la última proposición de la sección previa, este resultado nos dara una relación entre los conceptos de brecha espectral, convergencia hacia el equilibrio y decoherencia.

PROPOSICIÓN 3.13. *Sea T un semigrupo de contracciones fuertemente continuo definido sobre $\mathcal{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ con generador infinitesimal L y vector invariante $\sigma^{\frac{1}{2}}$, entonces la brecha espectral de el operador L es el maximo valor positivo ε satisfaciendo que para todo $y \in \mathcal{I}_2(\mathfrak{h}_0)$ y $t \geq 0$:*

$$||T_t(y) - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2 \leq e^{-\varepsilon t}||y - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = gap(L)$. Como $\sigma^{\frac{1}{2}}$ es vector invariante de T, utilizando la ultima proposición tenemos:

$$||T_t(y) - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2 = ||T_t\left(y - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}\right)||_2 \leq e^{-Bt}||y - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2.$$

Es claro también de la última proposición de la sección anterior que $gap(L)$ es el valor máximo que cumple la desigualdad anterior.

□

Notese que si $\rho \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{h}_0)$ con traza igual a uno, entonces $\rho^{\frac{1}{2}}$ es tal que $||\rho^{\frac{1}{2}}||_2 = 1$, por lo tanto para $y = i(x) = \sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
tr\left(\rho \mathcal{T}_t(x) - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \rho\right) &= tr\left(\rho \mathcal{T}_t(x - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \mathbf{1})\right) \\
&= tr\left(\rho^{\frac{1}{2}} i(\mathcal{T}_t(x - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \mathbf{1}))\right) \\
&\leq \sup_{z \in \mathfrak{I}_2(\mathfrak{h}_0), ||z||_2 \leq 1} tr z i(\mathcal{T}_t(x - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \mathbf{1})) \\
&= ||i(\mathcal{T}_t(x - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \mathbf{1}))||_2 \\
&= ||T_t(i(x)) - i(< \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \mathbf{1})||_2 \\
&= ||T_t(i(x)) - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2.
\end{aligned}$$

Utilizando esto último y la última proposición de la sección previa tenemos:

$$tr\left(\rho \mathcal{T}_t(x) - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \rho\right) \leq e^{-gap(L)t}||y - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2$$

para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$. Si $gap(L)$ es mayor que cero esta última desigualdad implica que

$$tr\left(\mathcal{T}_{*t}(\rho)x\right) \longrightarrow tr\left(< \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \rho\right) = < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \quad \text{cuando } t \longrightarrow \infty.$$

Como $y = \sigma^{\frac{1}{4}} x \sigma^{\frac{1}{4}}$ tenemos que $< \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 = tr\left(\sigma x\right)$ y así

$$tr\left(\rho \mathcal{T}_t(x) - \sigma x\right) \leq e^{-gap(L)t}||y - < \sigma^{\frac{1}{2}}, y >_2 \sigma^{\frac{1}{2}}||_2.$$

Todo lo anterior prueba la siguiente afirmación:

PROPOSICIÓN 3.14. *Sea un SMC $\mathcal{T}$ y un estado σ tal que gap(L) es estrictamente mayor a cero entonces σ es un estado de equilibrio para $\mathcal{T}$ y la convergencia hacia dicho estado de equilibrio es exponencial a una tasa gap(L). Además si para* $n \neq m < e_n, \sigma e_m >= 0$ *entonces* $< e_n, \mathcal{T}_{*t}(\rho) e_m > \longrightarrow 0$ *cuando* $t \longrightarrow \infty$ *en forma exponencial, donde la tasa exponencial de dicha convergencia es mayor o igual a gap(L).*

CAPÍTULO 4

Tasa de Decoherencia en SMC genericos.

En este capítulo representaremos la dinámica total sobre el espacio $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \Gamma_s(\mathfrak{h}_A)$ donde $\mathfrak{h}_0$ tiene base ortonormal $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (es decir $\mathfrak{h}_0$ es infinito dimensional; pero se puede adaptar toda la teoría y todos los resultados al caso finito dimensonal facilmente), $\mathfrak{h}_A = L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ y el hamiltoniano de dicha dinámica dado por el operador

$$H_\lambda = H_0 \otimes 1_{\Gamma_s(\mathfrak{h}_A)} + 1_{\mathfrak{h}_0} \otimes d\Gamma(H_A) + \lambda(a^*(V) + a(V)),$$

donde $\lambda > 0$, $a(V) = V^* \otimes A(g)$, $a^*(V) = V \otimes A^*(g)$; aquí V es un operador acotado sobre $\mathfrak{h}_0$, $A(g)$ y $A^*(g)$ son los operadores aniquilación y creación respectivamente definidos sobre $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}))$ los cuales dependen de una función g que esta en el espacio de Schwarz. No nos detendremos a explicar en detalle la forma de definir los operadores $A(g)$ y $A^*(g)$ dado que su importancia es solo de indole tecnica, para ver en detalle la definición de estos consultar por ejemplo las pagina 5 de [**ALV1**]. Además de lo anterior exigiremos que el ambiente sea térmico a temperatura $1/\beta$ y el hamiltoniano del sistema H_0 sea representado en la base de $\mathfrak{h}_0$ como

$$H_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \epsilon_k |e_k >< e_k|;$$

es decir, H_0 tiene espectro puntual puro. Notese que para manejar el concepto de decoherencia debemos exigir que el espectro de H_0 sea no degenerado, lo cual en efecto exigiremos, mas aún exigiremos que H_0 sea un hamitoniano generico. Todo este capítulo salvo la última sección es basada en el trabajo [**CFH**].

DEFINICIÓN 4.1. Diremos que el hamiltoniano H_0 es *generico* si el espacio propio asociado a cada valor propio ϵ_k es unidimensional y si se tiene $\epsilon_k - \epsilon_m = \epsilon_{k'} - \epsilon_{m'}$ para $k \neq j$ unicamente cuando $k = k'$ y $m = m'$.

1. Definición y construcción de SMC genericos.

A continuación estableceremos el SMC generico inicialmente como una forma y posteriormente impondremos condiciones suficentes para definir este como un semigrupo minimal. Para ello tomaremos como fijas dos funciones g y ω las cuales cumplen las siguientes condiciones:

(a) Sin perdida de generalidad para nuestros calculos tomaremos la función $\omega(x) = |x|$ (en general se puede considerar una función $\omega : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty[$ radial y estrictamente creciente en cada semirecta que empieza en cero).

(b) Se tomará una función $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ en el espacio de Schwarz (esta función es la misma que nombramos al inicio del capítulo sobre la cual dependen los operadores aniquilación y creación del Hamiltoniano de interacción).

(c) La función g y la función de dispersión ω son relacionadas por la condición analítica

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\omega(x)} |g(x)|^2 dx \right| dt < \infty.$$

(d) $d \geq 2$ (esto se exige pues para $\omega(x) = |x|$ la condición analítica anterior se cumple para cualquier g en el espacio de Schwarz solo si $d \geq 2$, si la función ω cambia también cambia la dimensión d para la cual se cumple la condición analítica (c)).

Ahora, si denotamos para cada $w > 0$ como $S(w)$ la superficie en $\mathbb{R}^d$ tal que $S(w) := \{x \in \mathbb{R}^d; \omega(x) = w\}$, $d_S(x)$ la superficie integral y $v.p.$ el valor principal de una integral definimos las constantes $(g|g)_w^-$ y $(g|g)_w^+$ dadas por:

$$(g|g)_w^- = \pi \int_{S(w)} \frac{|g(x)|^2 e^{\beta\omega(x)}}{e^{\beta\omega(x)} - 1} d_S(x) - iv.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2 e^{\beta\omega(x)}}{(e^{\beta\omega(x)} - 1)(\omega(x) - w)} dx,$$

$$(g|g)_w^+ = \pi \int_{S(w)} \frac{|g(x)|^2}{e^{\beta\omega(x)} - 1} d_S(x) - iv.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2}{(e^{\beta\omega(x)} - 1)(\omega(x) - w)} dx.$$

De esta forma para $k, k' \in \mathbb{N}$ con $\epsilon_k > \epsilon_{k'}$ y $w = \epsilon_k - \epsilon_{k'}$ tenemos las constantes $\gamma_{k,k'}^-, \xi_{k,k'}^-, \gamma_{k,k'}^+, \xi_{k,k'}^+$ dadas por

$$\gamma_{k,k'}^- = 2\Re e(g|g)_w^- |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2, \quad \xi_{k,k'}^- = \Im m(g|g)_w^- |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2,$$

$$\gamma_{k,k'}^+ = 2\Re e(g|g)_w^+ |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2, \quad \xi_{k,k'}^+ = \Im m(g|g)_w^+ |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2.$$

Por lo tanto la última condición que impondremos queda formulada como:

(e) Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define

$$\kappa_k := \sum_{k' \in \mathbb{N}; \epsilon_{k'} < \epsilon_k} (\xi_{k,k'}^- + \xi_{k,k'}^+) |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2$$

cumpliendo la condición de sumabilidad

$$\sum_{k' \in \mathbb{N}; \epsilon_{k'} < \epsilon_k} (|\xi_{k,k'}^-| + |\xi_{k,k'}^+|) |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2 < \infty.$$

Notese que el signo $-$ puesto en $\gamma_{k,k'}$ y en $\xi_{k,k'}$ se puede ver como una tasa de transición de un valor propio a un valor propio menor y el signo $+$ de un valor propio a un valor propio mas grande. Teniendo en cuenta lo anterior denotaremos por simplicidad $\gamma_{k,k'}$ ó $\xi_{k,k'}$, según sea el caso sin los signos; pero se entendera para $k \neq k'$ que ira $+$ si $k \leq k'$ o $-$ si $k \geq k'$.

Dichas constantes permiten definir formalmente el generador del SMC generico:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k,k';k\neq k'} (\gamma_{k,k'}(2|k><k'|x|k'><k| - [|k><k|, x]_+) + 2i\xi_{k,k'}[x, |k><k|]).$$

Más exactamente los SMC genericos son generados por límite de acoplamiento débil tomando en cuenta las observaciones dadas al principio del capítulo y donde el generador es dado formalmente por la expresión anterior. Para ver detalles consultar [**AK**]. A continuación probaremos algunas acotaciones que nos permitiran dar otra representación para el generador formal $\mathcal{L}$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Bajo las condiciones $(a) - (d)$ se tienen las siguientes desigualdades:*

$$\Re e(g|g)_w^- \leq \pi |S(1)| ||g||_\infty^2 \frac{w^{d-1} e^{\beta w}}{e^{\beta w} - 1}, \quad \Re e(g|g)_w^+ \leq \pi |S(1)| ||g||_\infty^2 \frac{w^{d-1}}{e^{\beta w} - 1},$$

donde $||g||_\infty$ es la norma del supremo de g y $|S(1)|$ es la medida de la superficie de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^d$. Además:

$$\Re e(g|g)_w^- \leq \pi |S(1)| \frac{e^{\beta w}}{e^{\beta w} - 1} \sup_{k\in\mathbb{R}^d} |k|^{d-1} |g(k)|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto:

$$\begin{aligned}\Re e(g|g)_w^- &= \pi \frac{e^{\beta w}}{e^{\beta w} - 1} \int_{S(w)} |g(x)|^2 d_S(x) \leq \pi ||g||_\infty^2 \frac{e^{\beta w}}{e^{\beta w} - 1} \int_{S(w)} d_S(x) \\ &= \pi |S(1)| ||g||_\infty^2 \frac{w^{d-1} e^{\beta w}}{e^{\beta w} - 1}.\end{aligned}$$

La desigualdad para $\Re e(g|g)_w^+$ se prueba en forma analoga a la anterior. La última desigualdad se sigue de ver que sobre $S(w)$ se tiene:

$$|g(x)|^2 = w^{-(d-1)} |x|^{d-1} |g(x)|^2.$$

□

De la anterior proposición se sigue inmediatamente lo siguiente:

COROLARIO 4.3. *Para $w > 0$ las constantes $\Re e(g|g)_w^+$ y $\Re e(g|g)_w^-$ son uniformemente acotadas y se tiene además:*

$$\mu_k := \sum_{k'\in\mathbb{N};\epsilon_{k'}<\epsilon_k} \gamma^-_{k,k'} \leq 2\sup_w \Re e(g|g)^-_w \cdot \sum_{k'\in\mathbb{N};\epsilon_{k'}<\epsilon_k} |\langle e_{k'}, V(e_k)\rangle|^2$$
$$\leq 2\sup_w \Re e(g|g)^-_w \cdot ||V(e_k)||^2$$

y

$$\lambda_k := \sum_{k'\in\mathbb{N};\epsilon_{k'}<\epsilon_k} \gamma^+_{k,k'} \leq 2\sup_w \Re e(g|g)^+_w \cdot \sum_{k'\in\mathbb{N};\epsilon_k<\epsilon_{k'}} |\langle e_k, V(e_{k'})\rangle|^2$$
$$\leq 2\sup_w \Re e(g|g)^+_w \cdot ||V^*(e_k)||^2.$$

Gracias al corolario anterior y la condición (e) se pueden definir los operadores:

$$G = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{\mu_k+\lambda_k}{2} + i\kappa_k\right) |e_k><e_k|,$$

$$L_{k,k'} = \sqrt{\gamma^-_{k,k'}}|e_{k'}><e_k| \quad \text{si } \epsilon_{k'}<\epsilon_k \quad \text{y} \quad L_{k,k'} = \sqrt{\gamma^+_{k',k}}|e_{k'}><e_k| \quad \text{si } \epsilon_k<\epsilon_{k'}.$$

Notese que formalmente

$$\mathcal{L}(x) = G^*x + \sum_{k'\in\mathbb{N};k'\neq k} L^*_{k,k'}xL_{k,k'} + xG.$$

y que G es un operador disipativo, por lo tanto es el generador de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo el cual denotaremos como $(P_t)_{t\geq 0}$.

PROPOSICIÓN 4.4. *Bajo las condiciones* $(a)-(d)$ *el operador* G *se puede escribir como* $G = -W - iH$ *donde* $H := \sum_k \kappa_k|e_k><e_k|$ *es autoadjunto y donde* $2W := \sum_{k,k'\in\mathbb{N};k'\neq k} L^*_{k,k'}L_{k,k'}$ *es una serie fuertemente convergente por lo tanto* W *define un operador acotado autoadjunto. Más aún, si las constantes* $\Im m(g|g)^+_w$ *y* $\Im m(g|g)^-_w$ *son uniformente acotadas en* w *entonces* G *es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el último corolario y el hecho de que V es acotado tenemos:

$$\mu_k \leq 2\sup_{w>0} \Re e(g|g)^-_w||V||^2 \quad \text{y} \quad \lambda_k \leq 2\sup_{w>0} \Re e(g|g)^+_w||V^*||^2,$$

para todo $k\in\mathbb{N}$. Por lo tanto utilizando la ortogonalidad de la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se conclue que la serie que define a $2W$ converge fuertemente y de esto se sigue que $G=-W-iH$ con H autoadjunto. Ahora si las constantes $\Im m(g|g)^+_w$ y $\Im m(g|g)^-_w$ son acotadas por una constante c, entonces $|\kappa_k| \leq c(||D||^2+||D^*||^2)$ y de esto se sigue que el operador H es acotado y por lo tanto G es acotado. □

Es claro que los operadores $L_{k,k'}$ son acotados y si G es acotado, se sigue que $\mathcal{L}$ es una forma acotada y por lo tanto genera un semigrupo Markoviano cuántico sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ continuo en norma (ver [**Lin**]). El caso cuando G es no acotado será estudiado a continuación. Para ello utilizaremos una tecnica que sigue la filosofía de los iterados de Picard y donde el semigrupo construido es llamado minimal (para la descripción de estas tecnicas ver por ejemplo [**Fag**]).

El semigrupo minimal es definido por medio de sucesiones no decrecientes de aplicaciones positivas $(\mathcal{T}_t^{(n)})_{n\geq 0}$ definido por recurrencia como sigue:

$$\mathcal{T}_t^{(0)}(x) = P_t^* x P_t,$$

$$\left\langle v, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)u \right\rangle = \langle P_t v, x P_t u\rangle + \sum_{k,k'} \int_0^t \langle L_{k,k'} P_{t-s} v, \mathcal{T}_s^{(n)}(x) P_t L_{k,k'} u\rangle \, ds$$

para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$, $t \geq 0, v, u \in Dom(G)$. Si x es positivo , entonces la sucesión $(\mathcal{T}_t^{(n)}(x))_{n\geq 0}$ es no decreciente y tomamos

$$\mathcal{T}_t(x) = \sup_{n\geq 0} \mathcal{T}_t^{(n)}(x) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

La definición de las aplicaciones positivas. $\mathcal{T}_t$ es entonces extendida por linealidad a todos los elementos de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$. El semigrupo minimal asociado con G y $L_{k,k'}$, satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{T}_t(x)u\rangle &= \langle v, xu\rangle \\ &+ \int_0^t \left\{ \langle Gv, \mathcal{T}_s(x)u\rangle + \sum_{k,k'} \langle L_{k,k'} P_{t-s} v, \mathcal{T}_s^{(n)}(x) P_t L_{k,k'} u\rangle \right\} ds \end{aligned} \tag{7}$$

para todo $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$, $t \geq 0, v, u \in Dom(G)$. El semigrupo minimal es la única solución a la ecuación anterior si y solamente si $\mathcal{T}_t(1) = 1$ para todo $t \geq 0$ (ver [**Fag**]).

2. Propiedades.

Estudiaremos a continuación algunas propiedades del semigrupo.

DEFINICIÓN 4.5. Sea $\mathcal{D}$ la subálgebra *diagonal* de $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ formada por los elementos $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ tales que $< e_k, x(e_{k'}) >= 0$ para todo $k \neq k'$ y sea $\mathcal{D}_{off}$ el *espacio de elementos fuera de la diagonal* formado por los x tales que $x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}_0)$ y $< e_k, x(e_k) >= 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 4.6. *La subálgebra abeliana $\mathcal{D}$ y el espacio de operadores $\mathcal{D}_{off}$ son invariantes bajo $\mathcal{T}_t$ para todo $t \geq 0$. Mas aún $\mathcal{T}_t(x) = P_t^* x P_t$ para todo $x \in \mathcal{D}_{off}$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, un elemento x de $\mathcal{D}_{off}$ puede escribirse como $x = \sum_{k\neq k'} x_{kk'} |e_k >< e_{k'}|$, y por lo tanto

$$P_t^* x P_t = \sum_{k\neq k'} c(t,k,k') x_{kk'} |e_k >< e_{k'}|,$$

donde $c(t,k,k') = e^{-((\mu_k+\mu_{k'}+\lambda_k+\lambda_{k'})/2+i(\kappa_k-\kappa_{k'}))t}$. Observando el segundo termino de la sucesión que define el semigrupo minimal vemos que

$$L^*_{k,k'}P^*_t x P_t L_{k,k'} = \gamma_{k,k'} \sum_{j\neq j'} c(t,j,j') x_{jj'}(|e_k><e_{k'}| \cdot |e_j><e_{j'}| \cdot |e_{k'}><e_k|) = 0,$$

puesto que $k \neq k'$ y entonces no existen terminos con $j = k' = j'$ ó con $j = k = j'$. Desta forma, se sigue por recursión que $\mathcal{T}^{(n)}_t(x) = P^*_t x P_t$ para todo $n \geq 2$ y tomando n tendiendo a infinito vemos que $\mathcal{T}_t(x) = P^*_t x P_t$. Todo lo anterior prueba además que $\mathcal{D}_{off}$ es invariante bajo $\mathcal{T}_t$.

Probaremos ahora que $\mathcal{D}$ es invariante bajo $\mathcal{T}^{(n)}_t$ para todo n. Si n=0 es inmediato dado que si $x = \sum_k x_k|e_k><e_k|$, entonces $P^*_t x P_t = \sum_k e^{-(\mu_k+\lambda_k)t}x_k|e_k><e_k| \in \mathcal{D}$.
Supongamos ahora que $\mathcal{T}^{(n)}_s(x) \in \mathcal{D}$. Para todo k, k' se tiene:

$$L^*_{k,k'}\mathcal{T}^{(n)}_s(x)L_{k,k'} = \gamma_{k,k'}\left\langle e_{k'}, \mathcal{T}^{(n)}_s(x)e_{k'}\right\rangle |e_k><e_k|.$$

Entonces los operadores

$$L^*_{k,k'}\mathcal{T}^{(n)}_s(x)L_{k,k'}, \quad y \quad P^*_{t-s}L^*_{k,k'}\mathcal{T}^{(n)}_s(x)L_{k,k'}P_{t-s}$$

estan en $\mathcal{D}$ de igual forma ocurre con el operador definido por la integral (definida en la topología débil*)

$$\int_0^t P^*_{t-s}L^*_{k,k'}\mathcal{T}^{(n)}_s(x)L_{k,k'}P_{t-s}ds.$$

Dado que x se puede escribir como una combinación lineal de operadores no negativos podemos suponer sin perdida de generalidad que x es no negativo. se siguede la formula de recursión que la suma de operadores positivos

$$\sum_{k,k';k\neq k'} \int_0^t P^*_{t-s}L^*_{k,k'}\mathcal{T}^{(n)}_s(x)L_{k,k'}P_{t-s}ds$$

es fuertemente convergente y su límite pertenece a $\mathcal{D}$. Por lo tanto $\mathcal{T}^{(n+1)}_s(x)$ esta en $\mathcal{D}$. El resultado se sigue por inducción. □

Es claro que el álgebra diagonal $\mathcal{D}$ es isomorfa a el espacio de Banach $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Identificando $\mathcal{D}$ con $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y tomando las restricciones de $\mathcal{T}_t$ a $\mathcal{D}$ encontramos un semigrupo clásico $T = (T_t)_{t\geq 0}$ el cual es sub-Markoviano (es decir $T_t(1) \leq 1$) definido sobre $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Como es probado en [**FR1**] (lema 2.19) el generador A del semigrupo es caracterizado por:

$$Dom(A) = Dom(\mathcal{L}) \cap \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad A(f) = \mathcal{L}(f) \quad \text{para todo } f \in Dom(A).$$

Es inmediato que:

$$A_{k,k'} = \gamma^{-}_{k,k'} \quad \text{para todo } k, k' \text{ con } \epsilon_{k'} < \epsilon_k,$$
$$A_{k',k} = \gamma^{+}_{k',k} \quad \text{para todo } k, k' \text{ con } \epsilon_k < \epsilon_{k'},$$
$$A_{k,k} = -\sum_{k'\in\mathbb{N};\epsilon_{k'}<\epsilon_k} \gamma^{-}_{k,k'} - \sum_{k'\in\mathbb{N};\epsilon_k<\epsilon_{k'}} \gamma^{+}_{k,k'} = -(\mu_k + \lambda_k).$$

Si denotamos por A_d la parte diagonal de $(A_{k,k'})_{k,k'\in\mathbb{N}}$ se tiene entonces que
$$(e^{tA_d}f)(k) = e^{-(\mu_k+\lambda_k)t}f(k).$$
Es claro también que A_d es una extensión del operador autoadjunto $G^* + G$ sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Vale la pena recordar que un *operador de transición submarkoviano* M es determinado por una matriz $(M_{k,k'})_{k,k'\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo $0 \leq M_{k,k'} \leq 1$ para todo k, k' y $\sum_{k'} M_{k,k'} \leq 1$.

LEMA 4.7. *Sea M un operador de transición submarkoviano clásico sobre $\mathcal{D}$. La aplicación lineal $\Phi[M] : \mathfrak{h}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ definida por*
$$\Phi[M](x) = \sum_{k,k'} M_{k,k'} \langle k', xk'\rangle \, |k >< k|,$$
es una contracción completamente positiva sobre $\mathcal{D}$ anulandose sobre $\mathcal{D}_{off}$. Además si $M(1) = 1$ entonces $\Phi[M](1) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Como la base es ccmpleta es claro que la aplicación $\Phi[M]$ es bien definida. Además dado que M es sbmarkoviano tenemos que:
$$\left|\sum_{k'} M_{k,k'} < k', xk' >\right| \leq ||x|| \sum_{k'} M_{k,k'} \leq ||x||.$$
se sigue que $\Phi[M](x)$ es un elemento en $\mathcal{D}$ con norma acotada por $||x||$. Mas aún $\Phi[M]$ es una suma de multiplos positivos de aplicaciones completamente positivas $x \longrightarrow |k >< k'|x|k' >< k|$. esta formula también muestra que $\Phi[M]$ se anula en $\mathcal{D}_{off}$. Un calculo facil muestra que $\Phi[M](1) = 1$ cuando $M(1) = 1$ □

El lema anterior nos va a servir para probar una formula que representa al semigrupo generico:

TEOREMA 4.8. *El SMC generico $\mathcal{T}$ satisface*

$$\mathcal{T}_t(x) = \Phi[e^{tA}](x) - \Phi[e^{tA_d}](x) + P_t^* x P_t \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}_0) \textit{ y } t \geq 0. \tag{8}$$
Además $\mathcal{T}_t(x) = \Phi[e^{tA}](x)$ para todo $x \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{T}_t(x) = P_t^* x P_t$ para todo $x \in \mathcal{D}_{off}$.

DEMOSTRACIÓN. Cada elemento de $\mathcal{L}(\mathfrak{h}_0)$ puede ser descompuesto como la suma de su parte diagonal y su parte fuera de la diagonal. Entonces es suficiente probar la igualdad (8) separadamente para todo $x \in \mathcal{D}$ y para todo $x \in \mathcal{D}_{off}$.

La identidad se cumple para todo $x \in \mathcal{D}_{off}$. En efecto, por el lema anterior, tanto $\Phi[e^{tA}]$ como $\Phi[e^{tA_d}]$ se anulan sobre $\mathcal{D}_{off}$.
Consideremos entonces $x \in \mathcal{D}$. Escribiendo x en la forma $x = \sum_\sigma x_k |e_k >< e_k|$ vemos que $P_t^* x P_t = \sum_k e^{-\mu_k t} x_k |e_k >< e_k| = \Phi[e^{tA_d}](x)$. Por lo tanto el lado derecho de (8) coincide con $\Phi[e^{tA}](x)$. Por otro lado, la formula

$$\Phi[e^{tA}](x) = \sum_{k,k'} (e^{tA})_{k,k'} x_{k'} |e_k >< e_k|$$

muestra que $\Phi[e^{tA}]$ coincide con la restricción de $\mathcal{T}_t$ a la subálgebra abeliana $\mathcal{D}$. Se sigue entonces de el último teorema que (8) se cumple para todo $x \in \mathcal{D}$. □

De este último teorema se sigue facilmente lo siguiente:

COROLARIO 4.9. *El semigrupo minimal $\mathcal{T}$ es Markov si y solamente si el semigrupo minimal clásico generado por A es Markov.*

Ahora usaremos la moayoria de los resultados que se han dado hasta el momento en este capítulo para probar que el semigrupo minimal $\mathcal{T}$ es en efecto la única solución de la ecuacion integral (7).

TEOREMA 4.10. *Bajo las suposiciones $(a)-(e)$ se tiene que el semigrupo minimal $\mathcal{T}$ es la única solución de la ecuacion integral* (7).

DEMOSTRACIÓN. En efecto, utilizando la proposición 4.4 probamos que la restricción clásica A es acotada, (como operador de $\ell^\infty(\mathbb{N})$), luego por el comentario al final de la prueba de la proposición 4.4 (que también es aplicable en el caso clásico) se tiene que A genera un semigrupo de Markov y por el último corolario tenemos que $\mathcal{L}$ genera un SMC, lo cual equivale a la unicidad en la solución de la ecuación integral (7). □

3. Tasa de decoherencia

Los SMC genericos gozan de una estructura la cual se deja manejar facilmente en particular nosotros tomamos el sistema de origen térmico tal como se toma en [**CFH**]; no obstante estos semigrupos se dejan construir en otro tipo de sistemas no termicos (ver por ejemplo [**AHO**]). El objetivo de esta sección es definir el concepto de tasa de decoherencia y calcular dicha tasa en el caso de un SMC generico. Vale la pena aclarar que dicha tasa es de indole exponecial.

DEFINICIÓN 4.11. Dado un $\mathcal{T}$ un SMC definido sobre $\mathfrak{h}_\circ$ y una base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{h}_0$. Diremos que $D > 0$ es *tasa de decoherencia* si es la constante mas grande la cual cumple que para todo estado ρ existe otra constante (posiblemente dependiendo de ρ) $C_{n,m}(\rho)$ tal que

$$|< e_m, \mathcal{T}_{*t}(\rho) e_n >| \le e^{-Dt} |C_{n,m}(\rho)|$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$ y para todo $t > 0$.

Notese que en particular la existencia de una tasa de decoherencia D implica que hay decoherencia en el semigrupo.

PROPOSICIÓN 4.12. *Dado $\mathcal{T}$ un SMC generico se cumple:*
$| < e_m, \mathcal{T}_{*t}(\rho)e_n > | = e^{-((\mu_n+\mu_m+\lambda_m+\lambda_n)/2)t} | < e_m, \rho e_n > |$ *para* $n \neq m$ *y* $t > 0$ *.*
Donde $\mu_k := \sum_{k' \in \mathbb{N}; \epsilon_{k'} < \epsilon_k} \gamma^-_{k,k'}$, $\lambda_k := \sum_{k' \in \mathbb{N}; \epsilon_{k'} < \epsilon_k} \gamma^+_{k,k'}$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que para $n \neq m$ por el teorema 4.8

$$\mathcal{T}_t(|e_n >< e_m|) = P^*_t|e_n >< e_m|P_t.$$

Por lo tanto utilizando que $G = -\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\mu_k+\lambda_k}{2} + i\kappa_k\right) |e_k >< e_k|$ genera a $(P_t)_{t>0}$ tenemos

$$\begin{aligned}
< e_m, \mathcal{T}_{*t}(\rho)e_n > &= tr\mathcal{T}_{*t}(\rho)|e_n >< e_m| = tr\rho\mathcal{T}_t(|e_n >< e_m|) = tr\rho P^*_t|e_n >< e_m|P_t \\
&= tr\rho e^{-((\mu_n+\mu_m+\lambda_m+\lambda_n)/2+i(\kappa_n-\kappa_m))t}|e_n >< e_m| \\
&= e^{-((\mu_n+\mu_m+\lambda_m+\lambda_n)/2+i(\kappa_n-\kappa_m))t} tr\rho|e_n >< e_m| \\
&= e^{-((\mu_n+\mu_m+\lambda_m+\lambda_n)/2+i(\kappa_n-\kappa_m))t} < e_m, \rho e_n >
\end{aligned}$$

Al tomar modulos obtenemos el resultado. □

DEFINICIÓN 4.13. Un semigrupo Markoviano clásico T es llamado *irreducible* si para todo $n, m \in \mathbb{N}$ existe k y $n_1, \ldots, n_k$ números naturales tales que

$$\gamma_{n,n_1}\gamma_{n_1,n_2}\cdots\gamma_{n_k,m} > 0$$

COROLARIO 4.14. *Dado un SMC generico $\mathcal{T}$ cuya reducción clásica T es irreducible y si las constantes μ_k, λ_k dadas por las tasas del generador $\mathcal{L}$ de $\mathcal{T}$ definen una succesion doblemente indexada $(\alpha_{n,m})$,$(\alpha_{n,m} := \mu_n + \mu_m + \lambda_m + \lambda_n)$ la cual no tiene a cero como punto de acumulación. Entonces*

$$D := \inf_{n,m \in \mathbb{N}} \alpha_{n,m}$$

es tasa de decoherencia de $\mathcal{T}$

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis de irreducibilidad sobre T garantiza que $\mu_m + \lambda_m > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora como cero no es punto de acumulación de $(\alpha_{n,m})$ esto implica que $D := \inf_{n,m \in \mathbb{N}} \alpha_{n,m} > 0$. Lo demás se sigue de la proposición anterior.
□

Bibliografía

[AFH] L. Accardi, F. Fagnola, S. Hachicha *Generic q-Markov Semigroups and Speed of Convergence of q-Algorithms*,Inf. Dim.Anal. Quan. Prob. Vol 9, Número 4 (2006) pag $567-594$.

[AFL] L. Accardi, A. Frigerio, Y.G Lu *Weak coupling limit as a quantum functional central limit theorem*, Comm. Math. Phys. 131 (1990) pag $537-570$.

[AHO] L. Accardi, S. Hachicha, H. Ouerdiane *Generic Quantum Markov Semigroups: the Fock Case*,Open Sys. Inf Dyn.12 (2005), pag 385.

[AK] L. Accardi, S. Kozyrev, *Quantum interacting particle systems*, Lectures on Quantum Interacting Particle Systems. (2002) pag $1-195$.

[ALV1] L. Accardi, Y.G Lu and I. V. Volovich *A White-Noise Approach to Stochastic Calculus*, Act. App. Math 63 (2000) pag 3.

[ALV2] L. Accardi, Y.G Lu and I. V. Volovich *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Springer, New York. Phys. (2002).

[Att] S. Attal, *Elements of operator Algebras and Modular Theory*, Open Quantum System I., Springer-Verlag, Berlin(2006), pag 69.

[BR1] O. Bratteli, D. Robinson *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, segunda edición, Springer-Verlag, Berlin (1996), pag 46.

[BD1] L. Bruneau, J. Dereziński *Pauli-Fierz Hamiltonians defined as quadratic forms*, Rep. Math. Phys. 54 (2004) pag 169.

[Car] R. Carbone, *Exponential L^2-Convergence of Quantum Markov Semigroups Related to Birth-and-Death Processes*, Stochastic Analysis and Mathematical Physics., ANESTOC'98, Birkhauser Verlag(1998), pag 1.

[CFH] R. Carbone, F. Fagnola, S. Hachicha *Generic Quantum Markov Semigroups: the Gaussian Gauge Invariant Case*, Open Sys. Inf Dyn.14 (2007), pag 425.

[Da1] E. B. Davies, *Markovian master equations*, Comm. Math. Phys. 39 (1974) pag 91.

[Da2] E. B. Davies, *Markovian master equations II*, Math. Ann. 219 (1976) pag 147.

[Da3] E. B. Davies, *One parameter semigroups*, Academic Press (1980).

[DD1] J. Dereziński, W. De Roeck, *Extended weak coupling limit for Friedrichs Hamiltonians*, Journ. Math. Phys. 48 (2007).

[DD2] J. Dereziński, W. De Roeck, *Extended weak coupling limit for Pauli-Fierz operators*, Comm. Math. Phys. 279 (2008). pags 411 – 423

[DD3] J. Dereziński, W. De Roeck, *Reduced and extended weak coupling limit*, Nonc. Harm. Anal. 78 (2007) pag 91.

[DF1] J. Dereziński, R. Fruboes, *Fermi Golden Rule and open quantum systems*, Open Quantum systems III Recent Developments. Lecture Notes in Mathematics 1882 eds S. Attal, A. Joye, C. A Pillet (2006) pag 67 – 116.

[DJ1] J. Dereziński, R. Jaksić, *On the nature of Fermi Golden Rule for open quantum systems*, Journ. Stat.Phys. vol 116 números 1|4 (2004) Lecture Notes in Mathematics 1882 eds S. Attal, A. Joye, C. A Pillet (2006) pag 67 – 116.

[Fag] F. Fagnola, *Quantum Markov Semigroups and Quantum Markov Flows*,Pryecciones 18, 1, (1999).

[FR1] F. Fagnola, R. Rebolledo, *Quantum interacting particle systems*, Lectures on Quantum Interacting Particle Systems. (2002) pag 197 – 239.

[FU1] F. Fagnola, V. Umanità, *Generators of detailed balance quantum Markov semigroups*, Inf. Dim. Ann, Quantum Probability and related topics.Vol 10, número 3 (2007), pag 335.

[Lig] T. Liggett, *Exponential L_2 convergence of attractive reversible nearest particle systems*, Ann. Probab. 17 (1989)., pag 403.

[Lin] G. Lindblad, *On the generators of Quantum Dynamical Semigroups*,Commun. Math. Phys. 48 (1976)., pag 119 Ann. Probab. 17 (1989)., pag 403.

[Par] K. R. Parthasarathy, *An introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhauser Verlag (1992).

[Ped] G. K Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag (1995).

[Re1] R. Rebolledo, *Complete Positivity and Markov structure of Open Quantum System*, Open Quantum System II., Springer-Verlag, Berlin(2006), pag 149.

[Re2] R. Rebolledo, *Decoherence of quantum Markov semigroups*, Ann. I. Poincaré-PR 41 (2005).,pag 349.

[Re3] R. Rebolledo, *A View on Decoherence Via Master Equations*, Open Sys. and Inf. Dyn 12 (2005)., pag 37.