PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

La Medida de Equilibrio de un Endomorfismo Holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$

Por

Manuel Rodrigo Parra Castañeda

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Magister en Ciencias Exactas Mención Matemática.

Tutores	:	Jan Kiwi	-	Universidad Católica de Chile.
		Juan Rivera-Letelier	-	Universidad Católica del Norte.
Comisión Informante	:	Jan Kiwi	-	Universidad Católica de Chile.
		Juan Rivera-Letelier	-	Universidad Católica del Norte.
		Rubí Rodríguez	-	Universidad Católica de Chile.

Marzo 2006
Santiago, Chile

Agradecimientos

Durante todo el desarrollo de esta tesis, el apoyo de mi pareja Valeria ha sido mi fuente inagotable de energía y apoyo. Su amor y esmero han sido mi pilar fundamental durante todo este tiempo, por ésto quiero dedicarle a ella este trabajo de Tesis.

Quiero agradecer también el apoyo y compresión que siempre me ha brindado mi familia. Desde siempre, el compromiso de mis padres con mi educación y el cariño de mis hermanos, ha sido la piedra angular de mis logros. Padres queridos, muchas gracias por todo. Quiero agradecer también a la familia de Valeria, mi nueva familia, quienes no sólo se han comprometido de forma genuina en este proyecto, sinó que han vivido conmigo momentos importantes de éste. A ustedes también quiero decirles lo agradecido que estoy, son una familia maravillosa.

Cuando ingresé a la Facultad de Matemáticas el año 2001, a la carrera de Licenciatura en Matemáticas, comencé un camino maravilloso y enriquecedor. Por esto quiero agradecer al profesor Angel Carocca, quién me estimuló a tomar esta senda; sin su consejo nunca habría escogido esta maravillosa carrera.

Durante la Licenciatura desarrollé una profunda pasión por las Matemáticas y gracias a las magistrales cátedras de todos mis profesores, me siento preparado para seguir adelante, a todos ellos muchas gracias. Quiero agradecer especialmente a la profesora Rubí Rodríguez, quién en sus numerosas clases y tiempo brindado, despertó mis aspiraciones en matemáticas y en cierta forma, moldeó mis gustos actuales en la disciplina. Siento una especial admiración por ella.

Apenas comencé el postgrado el año 2003, ya sabía que quería hacer mi Tesis de Magister en Dinámica Compleja y estoy seguro de haber escogido a los mejores guias para ésto, quienes me honraron aceptando mi petición. Mis tutores Juan Rivera-Letelier y Jan Kiwi han sido maestros fabulosos que me han enseñado mucho más de lo que podría haber imaginado. Me han apoyado en todo momento y siempre han estado presentes, brindándome sus capacidades excepcionales de matemáticos y amigos. Quisiera poder expresarles en estas breves palabras todo el agradecimiento y admiración que tengo por ustedes. Cuando se agradece a un amigo, la sensación es especial... gracias Jan, gracias Juan.

Finalmente, quiero agradecer el apoyo económico que me brindaron la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile con su plan de becas y Fondecyt con los proyectos 1020711 y 1040683. Sin ésta ayuda, habría sido imposible llevar a cabo este trabajo.

LA MEDIDA DE EQUILIBRIO DE UN ENDOMORFISMO HOLOMORFO DE $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$

Índice

1. Introducción 3
2. Funciones Holomorfas de Varias Variables Complejas 5
3. El Espacio Proyectivo Complejo 7
3.1. Variedades 7
3.2. El Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ 8
3.3. Funciones Holomorfas en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ 9
4. Hechos Básicos de Geometría Algebraica 11
4.1. Preliminares Algebraicos 11
4.2. Variedades Afines 12
4.3. Variedades Proyectivas 13
4.4. El Espacio Tangente de Zariski 15
4.5. Intersección en Variedades Proyectivas 16
5. La Forma de Fubini-Study 19
5.1. Formas Reales 19
5.2. Formas Complejas 20
5.3. Formas Diferenciales Reales 21
5.4. (p,q)-Formas Diferenciales 23
5.5. La forma de Fubini-Study 25
5.6. Integración de la Métrica de Fubini-Study sobre Variedades Proyectivas 28
5.7. El Teorema de Lelong 28
6. Hechos de Ergodicidad y Entropía 32
6.1. Ergodicidad 32
6.2. Entropía 37
6.3. Entropía Topológica de Endomorfismos Holomorfos de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ 39
7. Dos Caracterizaciones de la Medida de Equilibrio de un Endomorfismo Holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ 41
7.1. La Primera Aproximación 42
7.2. El Conjunto Excepcional y su Estratificación 45
7.3. La Primera Caracterización. Demostración del Teorema 1 49
7.4. La Segunda Caracterización. Demostración del Teorema 2 52
Referencias 57

1. Introducción

La siguiente monografía se enmarca en el estudio de endomorfismos holomorfos del espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. En particular, se estudia la medida de equilibrio asociada a éstas, donde una medida de equilibrio es una medida de probabilidad invariante que maximiza la entropía métrica del sistema dinámico.

En dimensión 1, estos endomorfismos holomorfos (funciones racionales en una variable), comenzaron a ser estudiados a comienzos del siglo 20 con los trabajos de Julia, Fatou y Léau. Brolin en el año 1965 [6], obtuvo una medida de equilibrio para polinomios actuando sobre la esfera de Riemann. En su trabajo, Brolin demuestra que el conjunto de Julia J tiene capacidad logaritmica positiva, y que la medida natural μ soportada sobre J, obtenida de su potencial logaritmico, se obtiene como el límite débil de las medidas de conteo:

$$\mu_{n,x} := D^{-n} \sum_{y \in f^{-n}(x)} \delta_y,$$

donde f es un polinomio mónico de grado D, el punto x es arbitrario (posiblemente fuera de un conjunto excepcional de a lo mas dos puntos) y δ_y la medida puntual de Dirac soportada en y, es decir, μ refleja la distribución de preimágenes de x. Este último hecho, implica en particular, que la medida μ es una medida de equilibrio. Brolin demuestra además, que esta medida es mezclante.

Lyubich y Freire-Lopes-Mañé (1983, [22], [11]) demostraron, para funciones racionales sobre la esfera de Riemann, que existe una medida natural μ, que refleja la distribución de los puntos periódicos repulsores, que se obtiene como la distribución de preimágenes de puntos no excepcionales y que ésta es la única medida de entropía maximal.

En dimensión superior, Hubbard (1986, [17]) introduce la función de Green G dinámicamente definida, para las aplicaciones de Hénon (ciertos difeomorfismos polinomiales de $\mathbb{C}^2$), y obtiene una medida invariante natural definida por $\mu := (dd^cG)^{\wedge 2}$, donde dd^c es el laplaciano $\frac{i}{4\pi}\partial\bar{\partial}$. Esta medida μ, es una candidata natural a tener las propiedades de la medida de Brolin-Freire-Lopes-Mañé y fue detalladamente estudiada por Bedford-Smillie (1991, 1992 [7, 8, 9, 10]) y Fornaess-Sibony (1992, [12]). Bedford-Smillie-Lyubich en [4, 5] demuestran que esta medida, es la única medida invariante que maximiza la entropía.

En el caso de endomorfismos holomorfos de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, fueron Hubbard y Papadopol (1994, [18]), quienes mostraron que existía una medida de probabilidad invariante natural μ, obtenida del laplaciano de la función de Green del sistema dinámico. Fornaess-Sibony (1994, [13]) demuestran que esta medida es mezclante y que refleja la distribución de preimágenes de puntos fuera de un conjunto pluripolar, lo que en particular implica, que es una medida de equilibrio. Adicionalmente, Briend-Duval (1999, [1]) prueban que los exponentes de Lyapounov de la medida μ son positivos y que los puntos periódicos repulsores están equidistribuidos con respecto a μ. Esto último es particularmente interesante, pues en dimensión superior, es la única forma de ver que los puntos periódicos repulsores son densos en el conjunto de Julia.

Hasta este punto, si bien era claro que la medida natural μ del endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tenia entropía máxima, no se sabia aún si era la única medida de entropía maximal. Por otra parte, en dimensión uno, la medida se podía obtener como límite débil de preimágenes de puntos no excepcionales, por tanto estaba abierta la interrogante de si ésto era cierto en dimensiones superiores. En particular, se necesitaba tener una buena definición de conjunto excepcional en el contexto de dimensiones superiores. Todas estas preguntas permanecen abiertas hasta el año 2001, cuando Jean-Yves Briend y Julien Duval publican su trabajo "*Deux caractérisations de la mesure d'equilibre d'un endomorphisme de* $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$" [2]. En éste, dan una buena definición de conjunto excepcional y caracterizan a la medida de equilibrio, como la distribución de preimágenes de puntos no excepcionales, y como la única medida de entropía maximal.

Esta tesis de Magister, es una monografía basada en el trabajo de Briend-Duval [2], organizada como sigue:

En las secciones 2 y 3, se compila los hechos básicos de holomorfía en varias variables y variedades complejas respectivamente. En la sección 3 además, se detalla la definición y propiedades del espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y los endomorfismos holomorfos de éste.

En la sección 4, se introduce los hechos básicos de álgebra conmutativa y geometría algebraica, para finalmente enunciar el resultado mas importante de esta sección: el Teorema de Bezout.

La sección 5 tiene como objetivo, estudiar la métrica hermitiana natural de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, llamada la métrica de Fubini-Study. Para ésto, se introduce detalladamente el tópico de formas diferenciales reales y complejas. Con el objetivo de hacer lo mas autocontenida posible esta monografía, se ha obviado intencionalmente el uso de fibrados vectoriales.

En la sección 6 se presentan los hechos básicos de Teoría Ergódica, para finalmente mostrar resultados referentes a entropía de endomorfismos holomorfos.

Por último, en la sección 7, se define el conjunto excepcional de un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y se demuestran las dos caracterizaciones de la medida de equilibrio antes mencionadas.

2. Funciones Holomorfas de Varias Variables Complejas

Denotaremos por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los números complejos (resp. $\mathbb{R}$ al cuerpo de los números reales) y por $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ al grupo multiplicativo de $\mathbb{C}$. Dado un entero positivo r, denotamos por $\mathbb{C}^r$ al espacio vectorial complejo r dimensional sobre $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}^r$ al espacio vectorial real r dimensional sobre $\mathbb{R}$) dado por

$$\mathbb{C}^r := \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{r} \qquad \left(\text{resp. } \mathbb{R}^r := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{r}\right).$$

Denotamos por $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_r)$ a los elementos de $\mathbb{C}^r$ (ó $\mathbb{R}^r$) y el vector $(0, \ldots, 0)$ lo escribiremos como $\vec{0}$.

En general, dado un espacio V (vectorial, topológico, etc.) y dado un entero positivo r, denotaremos como es usual por V^r al producto cartesiano de r copias de V, dado por

$$V^r := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r},$$

con la estructura natural inducida.

Comenzamos esta sección introduciendo el concepto de holomorfía para funciones de varias variables complejas a valores en $\mathbb{C}$. Como referencia para esta sección seguiremos el texto de [15].

Como es usual, diremos que una función de una variable compleja es holomorfa si tiene derivada compleja.

Definición 2.1. *Una función f definida en un abierto $D \subset \mathbb{C}^k$ a valores en $\mathbb{C}$ se dira* holomorfa *en D, si f es continua y holomorfa en cada variable separadamente.*

Teorema 2.2. *(Lema de Osgood) Si una función continua f definida en un abierto $D \subset \mathbb{C}^k$ a valores en $\mathbb{C}$, es holomorfa en cada variable separadamente, entonces f es analítica en D.*

Identificaremos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ donde i es una solución fija de $w^2 + 1 = 0$, de tal forma que cada elemento $z \in \mathbb{C}$ se identifica con un único elemento $x + iy$ de $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. En particular, para cada entero positivo k, el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^k$ se identifica con el espacio vectorial real $(\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})^k$ de dimensión (real) $2k$.

Una función $f : D \subset (\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})^k \to \mathbb{C}$, donde $f(\vec{z}) = u(\vec{z}) + iv(\vec{z})$ se dirá de clase C^r si $u, v \in C^r(D, \mathbb{R})$. Diremos que f es suave si $r = +\infty$. Para todo $r \geq 1$ se puede definir los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f) := \frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j}$$
$$i\frac{\partial}{\partial y_j}(f) := i\frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j}$$

lo que nos permite definir los operadores diferenciales lineales (complejos)

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Notar que como consecuencia del Teorema 2.2 toda función holomorfa es suave. En particular, se tiene la siguiente caracterización de holomorfía.

Teorema 2.3. *(Criterio de Cauchy-Riemann) Una función f definida en un abierto $D \subset \mathbb{C}^k$ a valores en $\mathbb{C}$ de clase C^1, es holomorfa en D si y sólo si satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0, \ j = 1, \ldots, k.$$

Dados números reales positivos $r_1, \ldots, r_k$, diremos que $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_k) \in]0, +\infty[^k$ es un poliradio. Dado $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{C}^k$ y un poliradio $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ se define un polidisco abierto $\Delta(\vec{v}; \mathrm{r}) \subset \mathbb{C}^k$ como el conjunto

$$\Delta(\vec{v}; \mathrm{r}) := \left\{ \vec{z} = (z_0, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid |z_j - v_j| < r_j \text{ para todo } j = 1, \ldots, k \right\}.$$

Teorema 2.4. *(Teorema de la Función Implicita)*
Sean m y k enteros positivos tal que $m \leq k$, sean $f_1, \ldots, f_m$ funciones holomorfas en un polidisco abierto $\Delta(\vec{v}; \mathrm{r}) \subset \mathbb{C}^k$, con $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ y $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_k)$. Suponga que para todo $j = 1 \ldots, m$ se tiene que $f_j(\vec{v}) = 0$ y

$$\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_\ell}(\vec{v}) \right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ \ell = k-m+1,\ldots,k}} \neq 0.$$

Entonces existen polidiscos abiertos $\Delta' := \Delta(\vec{v}'; \delta') \subset \mathbb{C}^{k-m}$, $\Delta'' := \Delta(\vec{v}''; \delta'') \subset \mathbb{C}^m$ con $\vec{v}' = (v_1, \ldots, v_{k-m})$, $\vec{v}'' = (v_{k-m+1}, \ldots, v_k)$, $\Delta' \times \Delta'' \subset \Delta(\vec{v}; \mathrm{r})$ y funciones holomorfas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : \Delta' \to \Delta''$ con la siguiente propiedad: Si $\vec{z} = (\vec{z}', \vec{z}'') \in \Delta' \times \Delta''$, entonces para todo $j = 1, \ldots, m$,

$$f_j(\vec{z}) = 0 \text{ si y sólo si } \vec{z}'' = (\varphi_1(\vec{z}'), \ldots, \varphi_m(\vec{z}'))$$

Ver demostración en [15] p.15, 16.

Dado un entero positivo r y un abierto $D \subset \mathbb{C}^k$, una función vectorial $F : D \to \mathbb{C}^r$ dada por $F(\vec{z}) = (F_1(\vec{z}), \ldots, F_r(\vec{z}))$ se dirá holomorfa si para cada $j = 1, \ldots, r$ la función F_j es holomorfa. Llamaremos a la matriz

$$\mathcal{D}(F)(\vec{z}) := \left(\frac{\partial F_j}{\partial z_\ell} \right)_{\substack{j=1,\ldots,r \\ \ell=1,\ldots,k}}$$

la matriz jacobiana de F en $\vec{z}$. Diremos que la función F es no singular en $\vec{z} \in D$ si el rango de $\mathcal{D}(F)(\vec{z})$ es igual a $\max\{k, r\}$. Por último, F se dice no singular en D si es no singular en cada punto de D.

Teorema 2.5. *(Teorema de la Función Inversa)*
Sea F una función holomorfa definida en una vecindad de $\vec{0} \in \mathbb{C}^k$ a valores en $\mathbb{C}^k$. Supongamos que $F(\vec{0}) = \vec{0}$, y que F es no singular en $\vec{0}$. Entonces, existe un polidisco abieto $\Delta(\vec{0}; \delta)$ y una función holomorfa G definida en una vecindad de $F(\Delta(\vec{0}; \delta))$ a valores en $\mathbb{C}^k$, tal que para todo $\vec{z} \in \Delta(\vec{0}; \delta)$, $\vec{\mathrm{w}} = F(\vec{z})$ si y sólo si $\vec{z} = G(\vec{\mathrm{w}})$.

3. El Espacio Proyectivo Complejo

3.1. Variedades. Sea M un espacio topológico de Hausdorff, paracompacto y conexo, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\geq 1}$ un cubrimiento numerable de M por conjuntos abiertos. Suponga que para cada $j \geq 1$ existe un homeomorfismo

$$\mathbf{z}_j : U_j \subset M \to \mathbf{z}_j(U_j) \subset \mathbb{C}^k \text{ (resp. } \mathbb{R}^k\text{)},$$

tal que para cada par de índices j, ℓ que satisfacen $U_j \cap U_\ell \neq \emptyset$ entonces

$$\tau_{\ell j} = \mathbf{z}_\ell \circ \mathbf{z}_j^{-1} : \mathbf{z}_j(U_j \cap U_\ell) \to \mathbf{z}_\ell(U_j \cap U_\ell)$$

es holomorfa (resp. suave).

La colección $z = \{\mathbf{z}_j\}_{j\geq 1}$ es llamada un sistema de coordenadas locales holomorfas (resp. coordenadas locales suaves), a los pares $(\mathbf{z}_j, U_j)$ los llamamos una carta local holomorfa (resp. carta local suave), y al par $(z, \mathcal{U})$ un atlas holomorfo (resp. atlas suave) para M. Dos atlas $(z, \mathcal{U})$, $(w, \mathcal{W})$ holomorfos (resp. suaves) sobre M se dirán equivalentes si la unión de ambos es también un atlas holomorfo (resp. suave). Esto define una relación de equivalencia sobre los atlas de la variedad M, y a una clase de equivalencia sobre M la llamamos una estructura holomorfa sobre M (resp. una estructura suave sobre M).

Es importante notar que por el Teorema 2.2, toda estructura holomorfa sobre M es a la vez una estructura suave sobre M.

Definición 3.1.1. *Diremos que el espacio topológico M es una* variedad compleja *de dimensión k (resp.* variedad suave de dimensión k*) si está provisto de alguna estructura holomorfa (resp. suave) sobre él, modelado sobre $\mathbb{C}^k$ (resp. modelado sobre $\mathbb{R}^k$).*

Diremos que una variedad suave es orientable si su estructura suave posee un atlas con sistemas de coordenadas locales $\{\mathbf{z}_j\}_{j\geq 1}$ tal que cada vez que $U_j \cap U_\ell \neq \emptyset$ entonces

$$\det\left(\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_\ell^\beta}\right) > 0.$$

Sean M y N dos variedades complejas (resp. suaves) de dimensiones k y k' respectivamente. Una función $f : M \to N$ se dirá holomorfa (resp. suave) si para todo atlas holomorfo (resp. suave) $(z, \mathcal{U})$ de M y $(w, \mathcal{V})$ de N en sus respectivas estructuras complejas, y para todo $U_j \in \mathcal{U}$, $V_\ell \in \mathcal{V}$ tales que $p \in U_j$, $f(p) \in V_\ell$, entonces existe una vecindad $U_j' \subset U_j$ de p tal que $f(U_j') \subset V_\ell$, donde

$$\mathbf{w}_\ell \circ f \circ \mathbf{z}_j^{-1} : \mathbf{z}_j(U_j') \to \mathbf{w}_\ell(f(U_j'))$$

es holomorfa (resp. suave). En el caso que $k < k'$, diremos que f es una inmersión si el rango de la matriz jacobiana

$$\mathcal{D}(\mathbf{w}_\ell \circ f \circ \mathbf{z}_j^{-1})(\mathbf{z}_j(p))$$

es igual a k para todo $p \in M$. Si una inmersión $f : M \to N$ es un homeomorfismo entre M y $f(M) \subset N$, diremos que f es una incrustación.

Sea M una variedad compleja (resp. suave) y sea $M' \subset M$ un subconjunto provisto de una estructura compleja (resp. suave). Diremos que M' es una subvariedad inmersa de M, si la inclusión $\iota : M' \hookrightarrow M$ es una inmersión. Diremos que M' es una subvariedad de M si la inclusión $\iota : M' \hookrightarrow M$ es una incrustación, y diremos que M' es una subvariedad cerrada de M, si además de subvariedad, es un conjunto cerrado de M.

Sea M una variedad suave de dimensión k, sea $M' \subset M$ una subvariedad inmersa de dimensión r. Es un hecho conocido que si $p \in M'$ y U es una vecindad de p en M', entonces existe una coordenada local (z, V) de M en torno a p tal que

$$U \cap V = \{q \in M \mid z^{r+1}(q) = \cdots = z^k(q) = 0\}.$$

Por último, finalizamos esta subsección con un teorema que será necesario mas adelante. Recordamos que una función entre espacios topológicos se dice propia, si la preimagen de todo subconjunto compacto es también compacto.

Teorema 3.1.2. *(Teorema de la Función Propia)*
Sean M y N variedades complejas, y sea $f : M \to N$ una función holomorfa. Sea $M' \subset M$ una subvariedad compleja de M tal que f restringida a M' es una función propia, entonces $f(M') \subset N$ es una subvariedad compleja de N.

ver demostración en [14] p. 395-400.

3.2. El Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\}$ tal que para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\}$ se tiene $\vec{x} \sim \vec{y}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. Sea $\mathbb{X}$ el conjunto

$$\mathbb{X} := \left(\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\}\right) / \sim,$$

dotado de la topología cuociente. Denotamos por π la proyección canónica $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{X}$ que lleva $\vec{z} = (z_0, \ldots, z_k)$ a su clase de equivalencia, la cual denotamos por $\mathbf{z} = [z_0 : \ldots : z_k]$.

Sea $S^{2k+1} \subset \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\}$ el subespacio topológico definido por $S^{2k+1} := \{\vec{z} \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\} \mid \|\vec{z}\| = 1\}$. Este subespacio es compacto y conexo, y la función continua π restringida a S^{2k+1} sigue siendo sobreyectiva, por lo que concluimos que $\mathbb{X}$ también es compacto y conexo. En adición señalamos que $\mathbb{X}$ es también Hausdorff y simplemente conexo.

Sean los abiertos $U_j = \{\mathbf{z} = [z_0 : \ldots : z_k] \in \mathbb{X} \mid z_j \neq 0\}$, $j = 0, \ldots, k$, donde $\mathbb{X} = \cup_j U_j$, y los homeomorfismos $\mathbf{z}_j : U_j \to \mathbb{C}^k$ definidos por

$$\mathbf{z}_j[z_0 : \ldots : z_k] = \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_k}{z_j}\right).$$

Con inversa $\mathbf{z}_j^{-1} : \mathbb{C}^k \to U_j$ dada por

$$\mathbf{z}_j^{-1}(w_1, \ldots, w_k) = [w_1 : \ldots : w_j : 1 : w_{j+1} : \ldots : z_k]$$

Notar que para todo $j < \ell$ la función

$$\mathbf{z}_\ell \circ \mathbf{z}_j^{-1} : \mathbf{z}_j(U_j \cap U_\ell) = \{(w_1, \ldots, w_k) \mid w_{\ell-1} \neq 0\} \to \mathbf{z}_\ell(U_j \cap U_\ell) = \{(w_1, \ldots, w_k) \mid w_{j+1} \neq 0\}$$

dada por

$$\mathbf{z}_\ell \circ \mathbf{z}_j^{-1}(w_1, \ldots, w_k) = \left(\frac{w_1}{w_{\ell-1}}, \ldots, \frac{w_j}{w_{\ell-1}}, \frac{1}{w_{\ell-1}}, \ldots, \frac{w_{\ell-2}}{w_{\ell-1}}, \frac{w_\ell}{w_{\ell-1}}, \ldots, \frac{w_k}{w_{\ell-1}}\right)$$

es holomorfa. Luego las colecciones $\{U_j\}_{j=0}^k$ y $\{\mathbf{z}_j\}_{j=0}^k$ satisfacen los axiomas de atlas holomorfo, por tanto éstas dan a $\mathbb{X}$ una estructura de variedad compleja de dimensión k, provisto de la estructura holomorfa determinada por este atlas.

Definición 3.2.1. *Definimos el* espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ *como: El espacio topológico $\mathbb{X}$ junto con la estructura holomorfa determinada por el atlas $(\{\mathbf{z}_j\}_{j=0}^k, \{U_j\}_{j=0}^k)$. Llamamos a U_j la* j-ésima carta afín *y a $\mathbf{z}_j : U_j \to \mathbb{C}^k$ la* j-ésima coordenada afín *de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.*

Observemos que la aplicación

$$[z_0 : \ldots : z_{j-1} : 0 : z_{j+1} : \ldots : z_k] \to [z_0 : \ldots : z_{j-1} : z_{j+1} : \ldots : z_k]$$

es un biholomorfismo entre el j-ésimo hiperplano afín $H_j := \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus U_j$ y $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C})$. Muchas veces identificaremos H_j con $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C})$ y U_j con $\mathbb{C}^k$ (via $\mathbf{z}_j$) de tal forma que $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ lo escribiremos como $\mathbb{C}^k \sqcup \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C})$. A esta última, simplemente la llamaremos la compactificación de $\mathbb{C}^k$ por un hiperplano. A veces, es usual llamar a esta última una compactificación por un hiperplano al infinito, aunque esta nomenclatura es mas común cuado $j = k$.

3.3. Funciones Holomorfas en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Dado un entero positivo k, escribiremos como $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$ al anillo de polinomios en $k+1$ variables con coeficientes en $\mathbb{C}$. Recordamos que, dado un entero no negativo D, un polinomio $P \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$ es homogéneo de grado D si P se escribe de la forma

$$P(z_0, \ldots, z_k) = \sum_{\substack{j_0 + \ldots + j_k = D \\ j_0, \ldots, j_k \geq 0}} a_{j_0 \cdots j_k} z_0^{j_0} \cdots z_k^{j_k}.$$

En particular, todo polinomio homogéneo de grado 0 es constante, y el polinomio constante igual a cero es homogéneo de cualquier grado. Por otro lado, para todo $\vec{z} \in \mathbb{C}^{k+1}$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$ se tiene que $P(\lambda \vec{z}) = \lambda^D P(\vec{z})$. Luego, si $F_0, \ldots, F_k$ son polinomios homogéneos del mismo grado $D \geq 0$, entonces

$$(F_0(\lambda \vec{z}), \ldots, F_k(\lambda \vec{z})) = \lambda^D (F_0(\vec{z}), \ldots, F_k(\vec{z})).$$

Sea

$$I := \pi(\{\vec{z} \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\} \mid (F_0(\vec{z}), \ldots, F_k(\vec{z})) = \vec{0}\} \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C}). \tag{3.3.1}$$

Entonces la aplicación $\vec{z} \mapsto (F_0(\vec{z}), \ldots, F_k(\vec{z}))$ de $\mathbb{C}^{k+1}$ en si misma, induce una aplicación $\mathbf{z} \mapsto [F_0(\vec{z}) : \ldots : F_k(\vec{z})]$ de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus I$ a valores en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Definición 3.3.1. *La función $f(\mathbf{z}) = [F_0(\vec{z}) : \ldots : F_k(\vec{z})]$ se dirá* meromorfa de grado D *si los polinomios homogéneos $F_0, \ldots . F_k$ no tienen un factor en común, y se dirá* meromorfa dominante *si es meromorfa y su matriz jacobiana no es constante igual a cero. Llamaremos a $I \subseteq \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ definido por (3.3.1) el* conjunto de indeterminación *de la función meromorfa f. Por último, la función $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1}$ definida por $F(\vec{z}) = (F_0(\vec{z}), \ldots, F_k(\vec{z}))$ será llamada* levantamiento *de f.*

Es un hecho conocido, que toda función holomorfa de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ se puede escribir, en coordenadas homogéneas, como $k+1$ polinomios homogéneos del mismo grado sin factores comunes (ver [23] p. 40, 67-68). Diremos que una aplicación $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ si es una función meromorfa dominante con conjunto de indeterminación vacío.

Sean $P_1, \ldots, P_k$ polinomios en $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ y sea D el mayor de los grados de estos polinomios. Entonces los polinomios $t^D P_1(\vec{z}/t), \ldots, t^D P_k(\vec{z}/t), t^D \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k, t]$ son polinomios homogéneos de grado D sin factores en común. Por tanto, la función

$$\widehat{f}([z_1 : \ldots : z_k : t]) = [t^D P_1(\vec{z}/t) : \ldots : t^D P_k(\vec{z}/t) : t^D]$$

es una función meromorfa de grado D de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^k \sqcup \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C})$. Observemos que para todo $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \subseteq \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ esta función coincide con la función de $\mathbb{C}^k$ en $\mathbb{C}^k$ dada por $f(z_1, \ldots, z_k) = (P_1(\vec{z}), \ldots, P_k(\vec{z}))$.
La función meromorfa $\widehat{f}$ sera llamada extensión de la función f.

Como ejemplo de lo anterior, podemos ver las aplicaciones tipo Hénon de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ definidas por $f(z, w) = (p(z) + aw, z)$ donde $p \in \mathbb{C}[z]$ es un polinomio de grado $D \geq 2$ y $a \in \mathbb{C}^*$. Consideramos su extensión a $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dada por

$$\widehat{f}([z : w : t]) = \left[t^D p(z/t) + awt^{D-1} : zt^{D-1} : t^D\right].$$

Notar que las extensiones de las aplicaciones tipo Hénon no son endomorfismos holomorfos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, pues tienen conjunto de indeterminación no vacío $I = \{[0 : 1 : 0]\}$.

Un ejemplo sencillo de un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es la aplicación

$$f[z_0 : \ldots : z_k] = [z_0^D : \ldots : z_k^D].$$

4. Hechos Básicos de Geometría Algebraica

En esta sección introduciremos los conceptos básicos de la geometría algebraica que serán necesarios. Como base de esta sección tomamos principalmente el enfoque de [23].

4.1. Preliminares Algebraicos. Dado un anillo conmutativo con unidad R, un subconjunto $\mathfrak{A} \subset R$ se dice un ideal de R, si él es un subgrupo aditivo de R y para todo $x \in R$, $y \in \mathfrak{A}$ se tiene que $xy \in \mathfrak{A}$. Dados ideales $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de R y una familia de ideales $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ de R, es facil ver que los siguientes subconjuntos de R son también ideales de R:

(i) $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \mathfrak{A}_\alpha$
(ii) $\sum_\alpha \mathfrak{A}_\alpha := \{x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_s} \mid s \in \mathbb{Z}_+, \, x_{\alpha_j} \in \mathfrak{A}_{\alpha_j}\}$
(iii) $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} := \{x_{\alpha_1} y_{\beta_1} + \ldots + x_{\alpha_s} y_{\beta_s} \mid s \in \mathbb{Z}_+, \, x_{\alpha_j} \in \mathfrak{A}_{\alpha_j}, y_{\beta_\ell} \in \mathfrak{B}_{\beta_\ell}\}$.

Llamamos a (ii) una suma de ideales y a (iii) un producto finito de ideales.

Dado un subconjunto $Z \subset R$, definimos el ideal generado por Z, al ideal

$$(Z) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A}\supset Z \\ \mathfrak{A} \text{ ideal de } R}} \mathfrak{A} = $$
$$= \{g_{\alpha_1} x_{\beta_1} + \ldots + g_{\alpha_s} x_{\beta_s} \mid s \in \mathbb{Z}_+, \, g_{\alpha_j} \in R, \, x_{\beta_\ell} \in Z\}.$$

Dado un entero positivo r y $g_1, \ldots, g_r \in R$, denotamos por $(g_1, \ldots, g_r)$ al ideal $(\{g_1, \ldots, g_r\})$. En particular, si denotamos por 0 y 1 a los polinomios constantes iguales a cero y uno respectivamente, se tienen los ideales $(0) = \{0\}$ y $(1) = R$. Un ideal $\mathfrak{A} \subset R$ se dirá finitamente generado si es generado por un subconjunto finito de R.

Un ideal $\mathfrak{A} \subset R$ se dirá primo si para todo $x, y \in R$ tales que $xy \in \mathfrak{A}$, se tiene $x \in \mathfrak{A}$ ó $y \in \mathfrak{A}$.

Dado un ideal $\mathfrak{A} \subset R$, definimos el radical de $\mathfrak{A}$, como el ideal

$$\sqrt{\mathfrak{A}} = \{g \in R \mid g^m \in \mathfrak{A}, \text{ para algun entero } m \geq 1\}.$$

Diremos que $\mathfrak{A}$ es un ideal radical si $\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}}$. Notar que el radical de un ideal es un ideal radical.

Recordamos que para todo entero positivo k, el anillo conmutativo con unidad $R = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$, es un dominio de factorización única sin divisores de cero. Además, señalamos que $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ es un anillo noetheriano, es decir, toda cadena ascendente de ideales es necesariamente finita, lo que implica en particular, que todos sus ideales son finitamente generados. El anillo $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Dado un entero no negativo D, denotamos por $\mathbb{C}_D[z_1, \ldots, z_k]$ al subespacio vectorial de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ de los polinomios homogéneos de grado D. Es claro que $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ es un anillo gradado por estos subespacios, es decir

(i) $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k] = \bigoplus_{D\geq 0} \mathbb{C}_D[z_1, \ldots, z_k]$

(ii) $\mathbb{C}_D[z_1, \ldots, z_k] \cdot \mathbb{C}_{D'}[z_1, \ldots, z_k] \subset \mathbb{C}_{D \cdot D'}[z_1, \ldots, z_k]$.

Un ideal $\mathfrak{A} \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ se dirá un ideal homogéneo si puede ser generado por un número finito de polinomios homogéneos. Se verifica que un ideal $\mathfrak{A}$ es homogéneo si y solo si

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{D \geq 0} (\mathfrak{A} \cap \mathbb{C}_D[z_1, \ldots, z_k]).$$

La intersección, suma y producto finito de ideales homogéneos es un ideal homogéneo. El radical de un ideal homogéneo es también un ideal homogéneo. Por último, un ideal homogéneo $\mathfrak{A}$ es primo si para todo par de polinomios homogéneos P y Q tales que $PQ \in \mathfrak{A}$ entonces $P \in \mathfrak{A}$ ó $Q \in \mathfrak{A}$.

4.2. Variedades Afines. Sea k un entero positivo y P un polinomio en $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$. Este polinomio determina una aplicación

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{C}^k & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (z_1, \ldots, z_k) & \mapsto & P(z_1, \ldots, z_k). \end{array}$$

Definición 4.2.1. *Un subconjunto $X \subset \mathbb{C}^k$ se dirá una* variedad algebraica *de $\mathbb{C}^k$, si existe un ideal $\mathfrak{A} \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ tal que*

$$X = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^k \mid P(\vec{z}) = 0 \textit{ para todo } P \in \mathfrak{A}\}.$$

En este caso, denotaremos X por $V(\mathfrak{A})$. Si el ideal $\mathfrak{A}$ es primo, entonces diremos que X es una variedad algebraica afín *ó* variedad afín. *Dados $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$, escribiremos $V(\{P_1, \ldots, P_r\})$ como $V(P_1, \ldots, P_r)$.*

Se sigue inmediatamente de la definición que para todo par de ideales $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ de R y toda familia $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de ideales de R se tiene

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k] \Rightarrow V(\mathfrak{A}_1) \supset V(\mathfrak{A}_2) \\ \text{(ii)} & V(\mathfrak{A}_1) \cup V(\mathfrak{A}_2) = V(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) = V(\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2) \\ \text{(iii)} & V\left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{A}_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} V(\mathfrak{A}_\alpha) \\ \text{(iv)} & V(0) = \mathbb{C}^k,\ V(1) = \emptyset \\ \text{(v)} & V(\sqrt{\mathfrak{A}}) = V(\mathfrak{A}). \end{array}$$

Para todo ideal $\mathfrak{A}$, el ideal radical $\sqrt{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ se escribe como una intersección finita de ideales primos $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$,

$$\sqrt{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{B}_m,$$

tal que para todo $j, \ell \in \{1, \ldots, m\}$ distintos se tiene que $\mathfrak{B}_j \not\supset \mathfrak{B}_\ell$. El entero m y cada uno de los ideales primos $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ están únicamente determinados por $\mathfrak{A}$ (ver [29] vol. 1, p. 209). Las propiedades (ii) y (v) implican entonces que en este caso

$$V(\mathfrak{A}) = V(\mathfrak{B}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{B}_m).$$

A cada variedad afín $V(\mathfrak{B}_j)$ la denominaremos una componente irreducible de $V(\mathfrak{A})$.

De las propiedades (ii), (iii) y (iv) se tiene que las variedades algebraicas de $\mathbb{C}^k$ satisfacen los axiomas de conjuntos cerrados de una topología.

Definición 4.2.2. *Definimos la* topología de Zariski *de $\mathbb{C}^k$ como la colección de complementos en $\mathbb{C}^k$ de variedades algebraicas.*

Es importante notar que el espacio $\mathbb{C}^k$ dotado de la topología de Zariski es no Hausdorff, pues todos los abiertos de Zariski son densos en esta topología. Es fácil ver que todo abierto en la topología de Zariski es también abierto con respecto a la topología usual de $\mathbb{C}^k$. En particular, se sigue que todo abierto de Zariski es abierto y denso en la topología usual.

Teorema 4.2.3. *(Nullstellensatz de Hilbert)*
Dado cualquier ideal $\mathfrak{A}$ de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$, y un polinomio P que se anula en todo punto de $V(\mathfrak{A})$, entonces $P \in \sqrt{\mathfrak{A}}$.

Ver demostración en [29] vol. 2, p. 164.

Definición 4.2.4. *Dado cualquier conjunto $X \subset \mathbb{C}^k$, definimos el* ideal de X *en $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ por*

$$\mathfrak{I}(X) := \{P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k] \mid P(\vec{z}) = 0 \text{ para todo } \vec{z} \in X\}.$$

Para cada de subconjuntos X_1 y X_2 de $\mathbb{C}^k$ se tiene:

(i) $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{C}^k \Rightarrow \mathfrak{I}(X_1) \supset \mathfrak{I}(X_2)$
(ii) $\mathfrak{I}(X_1 \cup X_2) = \mathfrak{I}(X_1) \cap \mathfrak{I}(X_2)$
(iii) Para todo ideal $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k] \Rightarrow \mathfrak{I}(V(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}}$ (Teorema 4.2.3)
(iv) Para todo subconjunto $X \subset \mathbb{C}^k \Rightarrow V(\mathfrak{I}(X)) = \overline{X}$, la clausura Zariski de X.

Corolario 4.2.5. *Existe una biyección, que revierte el orden dado por la inclusión de conjuntos, entre el conjunto de ideales radicales de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ y las variedades algebraicas de $\mathbb{C}^k$ dada por*

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}} \to V(\mathfrak{A}) \qquad y \qquad X \to \mathfrak{I}(X).$$

En esta biyección, las variedades afines se corresponden con ideales primos.

4.3. Variedades Proyectivas. Dado un entero positivo k y un polinomio homogéneo P en $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$, este polinomio induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) & \to & \{0,1\} \\ & [z_0 : \ldots : z_k] & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } P(z_0, \ldots, z_k) = 0 \\ 1, & \text{si } P(z_0, \ldots, z_k) \neq 0. \end{cases} \end{array}$$

Definición 4.3.1. *Un subconjunto $X \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ se dirá una* variedad algebraica, *si existe un ideal homogéneo $\mathfrak{A} \subset \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$ tal que*

$$X = \{\mathbf{z} = [z_0 : \ldots : z_k] \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid P(\mathbf{z}) = 0 \text{ para todo } P \in \mathfrak{A}\}.$$

En este caso, denotaremos X por $V(\mathfrak{A})$. Si el ideal homogéneo $\mathfrak{A}$ es primo, entonces diremos que X es una variedad algebraica proyectiva *ó* variedad proyectiva. *Dados los polinomios homogéneos $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$, escribiremos $V(\{P_1, \ldots, P_r\})$ como $V(P_1, \ldots, P_r)$.*

Igual que en la subsección anterior, se tiene que para todo par de ideales homogéneos $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ de R y toda familia de ideales homogéneos $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de R se tiene

(i) $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k] \Rightarrow V(\mathfrak{A}_1) \supset V(\mathfrak{A}_2)$
(ii) $V(\mathfrak{A}_1) \cup V(\mathfrak{A}_2) = V(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) = V(\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2)$
(iii) $V\left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{A}_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} V(\mathfrak{A}_\alpha)$
(iv) $V(0) = \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, $V(1) = \emptyset$
(v) $V(\sqrt{\mathfrak{A}}) = V(\mathfrak{A})$.

También se tiene, que el radical de un ideal homogéneo $\mathfrak{A}$ de $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$ se escribe como una intersección finita de ideales homogéneos primos $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_m$,

$$\sqrt{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{B}_m,$$

tales que para todo $j,\ell \in \{1,\ldots,m\}$ distintos se tiene que $\mathfrak{B}_j \not\supseteq \mathfrak{B}_\ell$. El entero m y cada uno de los ideales primos homogéneos $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_m$ están únicamente determinados por $\mathfrak{A}$. Las propiedades (ii) y (v) implican también en este caso que

$$V(\mathfrak{A}) = V(\mathfrak{B}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{B}_m).$$

A cada variedad proyectiva $V(\mathfrak{B}_j)$ la denominaremos una componente irreducible de $V(\mathfrak{A})$.

De la misma forma que en la subsección anterior, definimos la topologia Zariski de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ como el complemento en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de variedades algebraicas de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Igual que antes, los abiertos de Zariski son densos en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y por tanto $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es no Hausdorff con la topología de Zariski. Se verifica también que los abiertos de Zariski son abiertos en la topología usual de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Definición 4.3.2. *Dado un conjunto $X \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, definimos el* ideal de X *en* $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$ *como el ideal homogéneo*

$$\mathfrak{I}(X) := \{P \in \mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k] \mid P \textit{ es homogéneo, } P(\mathrm{z}) = 0 \textit{ para todo } \mathrm{z} \in X\}.$$

Igual que antes, para todo subconjunto X_1 y X_2 de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ se tiene:

(i) $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathfrak{I}(X_1) \supset \mathfrak{I}(X_2)$
(ii) $\mathfrak{I}(X_1 \cup X_2) = \mathfrak{I}(X_1) \cap \mathfrak{I}(X_2)$
(iii) Para todo ideal homogéneo $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k] \Rightarrow \mathfrak{I}(V(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}}$
(iv) Para todo subconjunto $X \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \Rightarrow V(\mathfrak{I}(X)) = \overline{X}$, la clausura Zariski de X.

Dado un entero positivo k y dado un polinomio $Q \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]$ de la forma

$$Q(z_1,\ldots,z_k) = \sum_{j_1,\ldots,j_k} a_{j_1,\ldots,j_k} z_1^{j_1} \cdots z_k^{j_k},$$

con $\max\{j_1+\ldots+j_k\} > 0$ y sea $D(Q) := \max\{j_1+\ldots+j_k\}$ el grado de Q. Luego, definimos la homogenización de Q en $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$ como el polinomio $\widetilde{Q} \in \mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$ dado por

$$\widetilde{Q}(z_0,\ldots,z_k) := \sum_{j_1,\ldots,j_k} a_{j_1,\ldots,j_k} z_0^{(D(Q)-\sum_\ell j_\ell)} z_1^{j_1} \cdots z_k^{j_k}.$$

Notese que $\widetilde{Q}$ es homogéneo de grado D. En el caso $\max\{j_1+\ldots+j_k\} = 0$, definimos $\widetilde{Q} := Q$.

Se definen los morfismos de anillos

$$\begin{array}{rrcl} \widehat{}: & \mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k] & \to & \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k] \\ & P = P(z_0,\ldots,z_k) & \mapsto & \widehat{P} = P(1,z_1,\ldots,z_k) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \widetilde{}: & \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k] & \to & \mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k] \\ & Q = Q(z_1,\ldots,z_k) & \mapsto & \widetilde{Q} = \widetilde{Q}(z_0,\ldots,z_k). \end{array}$$

Si $\mathfrak{B}$ es un ideal de $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$, denotamos por $\widehat{\mathfrak{B}}$ al ideal en $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]$ imagen de $\mathfrak{B}$ por $\widehat{}$, y de igual forma, si $\mathfrak{B}$ es un ideal de $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]$, denotamos por $\widetilde{\mathfrak{B}}$ al ideal en $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$ imagen por $\widetilde{}$.

Teorema 4.3.3. *Identificando $\mathbb{C}^k$ con $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})\setminus H_0$, se cumple que:*

a) Si $\mathfrak{B}\in\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$ es un ideal homogéneo primo y $X\subset\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ la variedad proyectiva $V(\mathfrak{B})$, entonces el conjunto $X\setminus X\cap H_k$ es igual a la variedad afín $V(\widehat{\mathfrak{B}})$.

b) Si $\mathfrak{B}\subset\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]$ es un ideal primo y $X\subset\mathbb{C}^k$ la variedad afín $V(\mathfrak{B})$, entonces su clausura de Zariski $\overline{X}$ en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es la variedad algebraica $V(\widetilde{\mathfrak{B}})$.

Ver demostración en [23], p. 22, 23.

Claramente, el teorema anterior es valido identificando $\mathbb{C}^k$ con $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})\setminus H_j$, para cualquier $j=0,\ldots,k$.

4.4. El Espacio Tangente de Zariski. Dado un ideal primo $\mathfrak{A}$ de $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]$, sea X la variedad afín de $\mathbb{C}^k$ dada por $X=V(\mathfrak{A})$. Dado $\vec{z}_0\in X$, definimos el espacio Tangente de Zariski de X en $\vec{z}_0$, que denotamos por $T_{\vec{z}_0,X}$, como el subespacio lineal de $\mathbb{C}^k$ definido por

$$T_{\vec{z}_0,X} := \left\{ (z_1,\ldots,z_k)\in\mathbb{C}^k \mid \sum_{s=1}^{k}\frac{\partial P}{\partial z_s}(\vec{z}_0)\cdot z_s = 0, \text{ para todo } P\in\mathfrak{A} \right\}.$$

Si $P_1,\ldots,P_r$ son polinomios en $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]$ tales que $\{P_1,\ldots,P_r\}$ genera al ideal $\mathfrak{A}$, entonces la dimensión de $T_{\vec{z}_0,X}$ está dada por

$$\dim(T_{\vec{z}_0,X}) = k - \operatorname{rango}\left(\frac{\partial P_t}{\partial z_s}(\vec{z}_0)\right)_{\substack{t=1,\ldots,r\\ s=1,\ldots,k}}.$$

Se verifica que el rango de la matriz $(\partial P_t/\partial z_s)$ no depende de la elección de generadores de $\mathfrak{A}$. Además, dado cualquier entero no negativo n, el conjunto $\{\vec{z}\in X \mid \dim(T_{\vec{z},X})\geq n\}$ es un subconjunto cerrado de X.

En el caso en que X sea una variedad proyectiva de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, dada por el ideal homogéneo primo $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_k]$, y dado $\mathbf{z}\in X$, suponga que el hiperplano H_0 no contiene a $\mathbf{z}$, que por tanto denotamos por $\mathbf{z}=[1:z_1:\ldots:z_k]$. Definimos el espacio Tangente de Zariski de X en $\mathbf{z}$ en la coordenada afín U_0, que denotamos por $T_{0,\mathbf{z},X}$, como el subespacio lineal de $\mathbb{C}^k$ definido por

$$T_{0,\mathbf{z},X} := \left\{ (w_1,\ldots,w_k)\in\mathbb{C}^k \mid \sum_{s=1}^{k}\frac{\partial P}{\partial z_s}(z_1,\ldots,z_k)\cdot w_s = 0, \text{ para todo } P\in\widehat{\mathfrak{B}} \right\}.$$

De forma análoga, se define el espacio Tangente de Zariski X en $\mathbf{z}$ en la coordenada afín U_j, que denotamos por $T_{j,\mathbf{z},X}$. Para todo $j,\ell=0,\ldots,k$ tales que $\mathbf{z}\in U_j\cap U_\ell$ se tiene que los espacios $T_{j,\mathbf{z},X}$ y $T_{\ell,\mathbf{z},X}$ son isomorfos, luego se define el espacio Tangente de Zariski de X en $\mathbf{z}$, que denotamos por $T_{\mathbf{z},X}$, como la clase de equivalencia de estos subespacios lineales de $\mathbb{C}^k$, y cuya dimensión está dada como antes, tomando la dimensión de cualquier espacio representante de la clase.

Definición 4.4.1. *Dada una variedad afín ó proyectiva X de $\mathbb{C}^k$ ó $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ respectivamente, definimos la* dimensión de X *como*

$$\dim(X) := \min_{\vec{z}\in X}\{\dim(T_{\vec{z},X})\}.$$

Un punto $\vec{z} \in X$ se dirá un punto suave si $\dim(X) = \dim(T_{\vec{z},X})$, y se dirá un punto singular si $\dim(X) < \dim(T_{\vec{z},X})$. Denotaremos por $\mathrm{Sing}(X)$ al subconjunto de puntos singulares de X. Es claro que para todo $\vec{z} \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ se tiene $T_{\vec{z},\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}^k$ y por tanto $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ no tiene puntos singulares.

En el caso que X sea una variedad algebraica, definimos la dimensión de X como el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

4.5. Intersección en Variedades Proyectivas. De ahora en adelante, dada una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de dimensión s, denotaremos a esta última por X^s cuando queramos hacer notar la dimensión de la variedad proyectiva. Por otra parte, nos referiremos a las variedades definidas por un ideal generado por polinomios lineales como planos proyectivos. Nos referiremos a los planos proyectivos de dimensión 1 como líneas proyectivas (notar que el caso de dimensión igual a 0 se reduce a un punto).

Teorema 4.5.1. *Para todo $r \in \{1, \dots, k\}$ y toda variedad proyectiva $X^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, existe un entero positivo d tal que, si L^{k-r} es una variedad lineal que satisface: Todo elemento z de $L \cap X$ es un punto suave de X y $T_{z,L} \oplus T_{z,X} = \mathbb{C}^k$. Entonces la cardinalidad de $L \cap X$ es igual a d.*

Ver demostración en [23], p. 70, 71.

El conjunto de planos proyectivos de dimensión $k - r$ está parametrizado por el Grassmanniano $\mathrm{Grass}(k, k-r)$. Es un hecho conocido que existe un abierto denso de planos en $\mathrm{Grass}(k, k-r)$ que satisfacen las condiciones del Teorema 4.5.1 (ver [23] p. 71, 72, [26] p. 68).

Definición 4.5.2. *Dada una variedad proyectiva $X^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, y d como en el Teorema 4.5.1, definimos el* grado de X *como*

$$\deg(X) := d.$$

Ver también [14] p. 171.

Notar que $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tiene grado 1.

Teorema 4.5.3. *(Teorema de Bezout, Primera Versión)*
Sean $r, s \in \{1, \dots, k\}$ y sean X^r, Y^s variedades proyectivas de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ con $r + s \geq k$. Sea $X \cap Y = W_1 \cup \cdots \cup W_\ell$ la descomposición de $X \cap Y$ en sus componentes irreducibles. Asumamos que:

a) Para todo $j = 0, \dots, \ell$, $\dim(W_j) = r + s - k$,

b) Para todo $j = 0, \dots, \ell$, existe un punto $\mathbf{z} \in W_j$ tal que $\mathbf{z}$ es suave sobre X y sobre Y, y $\dim(T_{\mathbf{z},X} \cap T_{\mathbf{z},Y}) = r + s - k$ (condición de transversalidad).

Entonces

$$\deg(X)\cdot\deg(Y)=\sum_{j=1}^{\ell}\deg(W_j).$$

Ver demostración en [23], p. 81-84.

Para enunciar una versión más general del Teorema de Bezout, introduciremos primero algunos preliminares. Denotaremos por $\mathcal{F}_\ell(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))$ al grupo libre generado por las variedades proyectivas de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de dimensión ℓ.

Para cualquier elemento $\sum_j n_j Z_j \in \mathcal{F}_\ell(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))$, definimos su grado por:

$$\deg\left(\sum_j n_j Z_j\right) := \sum_j n_j \deg(Z_j).$$

Dadas las variedades proyectivas $X^s, Y^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ con $r+s\geq k$ y W una componente irreducible de $X\cap Y$ de dimensión $r+s-k$, se define la multiplicidad de intersección $\mathrm{mult}(W; X\cap Y)$ de X e Y en W por:

- Para el caso $r+s-k=0$, sean U una vecindad (en la topología usual) suficientemente pequeña de la variedad proyectiva W (que en este caso se reduce a un punto) y σ un elemento suficientemente cercano (en la topología cuociente inducida como subespacio de $\mathbb{R}^{(k+1)^2}$) a la identidad de $\mathrm{PGL}(k+1,\mathbb{C}) := \mathrm{GL}(k+1,\mathbb{C})/\{\lambda I \mid \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\}$. Definimos

$$\mathrm{mult}(W; X\cap Y) := \mathrm{Card}(X\cap\sigma(Y)\cap U).$$

Notamos que este número es independiente de U y σ. Además, si W' es otra componente irreducible de $X\cap Y$, distinta de W, definimos

$$\mathrm{mult}(W\cup W'; X\cap Y) := \mathrm{mult}(W; X\cap Y) + \mathrm{mult}(W'; X\cap Y).$$

- Para el caso $r+s-k>0$, sea $L\subset\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ un plano genérico de dimensión $2k-r-s$, luego definimos

$$\mathrm{mult}(W; X\cap Y) := \mathrm{mult}(W\cap L; X\cap(Y\cap L)).$$

Por último, definimos el producto de intersección $X\cdot Y\in\mathcal{F}_{r+s-k}(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))$ de X e Y por:

$$X\cdot Y := \sum_{\substack{W\subset X\cap Y\\ W \text{ componente}}} \mathrm{mult}(W; X\cap Y)\cdot W \in \mathcal{F}_{r+s-k}(\mathbb{P}^k(\mathbb{C})).$$

Pasamos a enunciar el Teorema de Bezout en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, en su versión más general.

Teorema 4.5.4. *(Teorema de Bezout) Sean $r,s\in\{1,\dots,k\}$ y sean X^r, Y^s variedades proyectivas de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ con $r+s\geq k$, y tales que toda componente irreducible de $X\cap Y$ tiene dimensión $r+s-k$. Entonces*

$$\deg(X)\cdot\deg(Y)=\deg(X\cdot Y).$$

Como consecuencia directa del Teorema de Bezout, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.5.5. *Sean $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$ polinomios homogéneos de grados $D_1, \ldots, D_k$ respectivamente, tales que $V(P_1) \cap \cdots \cap V(P_k)$ es un conjunto finito. Entonces, este conjunto tiene $D_1 \cdots D_k$ puntos, contados con multiplicidad.*

5. La Forma de Fubini-Study

El espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ posee una métrica natural, dada por la forma diferencial denominada forma de Fubini-Study. Introduciremos los conceptos básicos de formas diferenciales, analizando los casos: puntual (subsecciones 5.1, 5.2), local y global (subsecciones 5.3, 5.4). La forma de Fubini-Study se define en la subsección 5.5. Es un hecho conocido, que una vez definidas las formas diferenciales de una variedad en un atlas dado, entonces estas formas diferenciales quedan únicamente determinadas en la estructura (holomorfa o suave) de la variedad. Por simplicidad, usaremos implícitamente este hecho para fijar un atlas y definir las formas diferenciales sobre este.

Por otra parte, dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $V_{\mathbb{K}}^*$ al espacio vectorial dual de V sobre $\mathbb{K}$.

5.1. Formas Reales. Esta subsección está ampliamente basada en el texto [27], y representa la base de las siguientes subsecciones.

Sea m un entero positivo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión m. Dado un entero no negativo r, sea $\Omega_{\mathbb{R}}^r(V)$ el espacio vectorial de las transformaciones multilineales de V^r en $\mathbb{R}$. Observemos que $\Omega_{\mathbb{R}}^1(V)$ es igual al espacio vectorial dual $V_{\mathbb{R}}^*$ de V. A los elementos de $\Omega_{\mathbb{R}}^r(V)$ los llamaremos tensores de orden r ó r-tensores. Dados r, ℓ enteros no negativos, $T \in \Omega_{\mathbb{R}}^r(V)$ y $S \in \Omega_{\mathbb{R}}^\ell(V)$ definimos el producto tensorial $T \otimes S : V^{r+\ell} \to \mathbb{R}$ por

$$T \otimes S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r+\ell}) = T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) \cdot S(\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_{r+\ell}).$$

Se verifica que $T \otimes S \in \Omega_{\mathbb{R}}^{r+\ell}(V)$.

Diremos que un r-tensor T, es alternante si para todo $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in V$ tales que existen $j, \ell \in \{1, \dots, r\}$ distintos con $\vec{v}_j = \vec{v}_\ell$, se tiene $T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) = 0$. Denotaremos por $\Lambda_{\mathbb{R}}^r(V)$ el espacio vectorial de los r-tensores alternantes. A los elementos de $\Lambda_{\mathbb{R}}^r(V)$ los llamaremos formas de orden r o r-formas. Identificaremos $\Lambda_{\mathbb{R}}^0(V)$ con $\mathbb{R}$ de tal forma que un elemento de $\Lambda_{\mathbb{R}}^0(V)$ se identifica con su valor en $\mathbb{R}$.

Si V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, cada transformación lineal $f : V \to W$ induce una aplicación lineal $f^* : \Omega_{\mathbb{R}}^r(W) \to \Omega_{\mathbb{R}}^r(V)$ dada por

$$f^*(T)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) = T(f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_r)).$$

Notar que $f^*((\Lambda_{\mathbb{R}}^r(W)) \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^r(V)$. Llamamos a f^* el pull-back por f.

Sea S_r el grupo de las permutaciones de $\{1, \dots, r\}$. Dado $\sigma \in S_r$ denotamos por $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, +1\}$ el signo de la permutación σ. La aplicación sgn : $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$ es un homomorfismo de grupos entre S_r y el grupo multiplicativo $\{-1, +1\}$. Para $\sigma \in S_r$ y $T \in \Omega_{\mathbb{R}}^r(V)$ definimos el tensor $\sigma * T \in \Omega_{\mathbb{R}}^r(V)$ por $\sigma * T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) = T(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(r)})$. Es fácil ver que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} S_r \times \Omega_{\mathbb{R}}^r(V) & \to & \Omega_{\mathbb{R}}^r(V) \\ (\sigma, T) & \mapsto & \sigma * T \end{array}$$

define una acción de S_r en $\Omega^r_{\mathbb{R}}(V)$. Observamos que si $\omega \in \Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ es una r-forma, entonces para todo $\sigma \in S_r$ se tiene que $\sigma * \omega = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega$.

Para todo $T \in \Omega^r_{\mathbb{R}}(V)$ definimos el alternado de T como el r-tensor

$$\operatorname{Alt}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sigma * T.$$

Es claro que $\operatorname{Alt}(T) \in \Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ y que si $\omega \in \Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ entonces $\operatorname{Alt}(\omega) = \omega$.

Dados $\omega \in \Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ y $\eta \in \Lambda^\ell_{\mathbb{R}}(V)$, definimos el producto exterior de ω y η como

$$\omega \wedge \eta := \frac{(r+\ell)!}{r! \cdot \ell!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{r+\ell}(V).$$

Es fácil ver que $\omega \wedge \eta = (-1)^{r\ell} \eta \wedge \omega$ (anticonmutatividad). En particular, si r es impar entonces $\omega \wedge \omega = 0$. La aplicación

$$\wedge : \Lambda^r(V) \times \Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{r+\ell}(V)$$

así definida es bilineal. Además, si W es un espacio vectorial y $f : V \to W$ una transformación lineal, entonces $f^*(\omega_1 \otimes \omega_2) = f^*\omega_1 \otimes f^*\omega_2$, lo que implica que $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$.

Dada $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ una base de $V^*_{\mathbb{R}}$, es fácil ver que si $r \leq m$, entonces

$$\{\phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_r}\}_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} \qquad \left(\text{resp. } \{\phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_r}\}_{1 \leq j_1, \ldots, j_r \leq m}\right)$$

es una base de $\Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ (resp. $\Omega^r_{\mathbb{R}}(V)$). Notemos en particular que $\Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ (resp. $\Omega^r_{\mathbb{R}}(V)$) tiene dimensión $\binom{m}{r}$ (resp. m^r). Por otro lado, cuando $r > m$ el espacio vectorial $\Lambda^r_{\mathbb{R}}(V)$ tiene dimensión cero.

5.2. Formas Complejas. Dado un entero positivo k, sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión k. Como identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, el espacio vectorial V tiene una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión (real) $2k$. Dado un entero no negativo r, el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las aplicaciones $\mathbb{R}$-multilineales de V^r en $\mathbb{C}$ (que denotamos por $\Omega^r_{\mathbb{C}}(V)$), el producto tensorial, el alternado de un tensor, y el pull-back por una aplicación lineal se definen de forma similar como en la subsección anterior. Al espacio de r-tensores alternantes a valores en $\mathbb{C}$ lo denotaremos por $\Lambda^r_{\mathbb{C}}(V)$.

Dado un entero no negativo p, definimos el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de $(p, 0)$-formas, como el subespacio $\Lambda^{(p,0)}(V) \subset \Lambda^p_{\mathbb{C}}(V)$ formado por todas las formas $\theta \in \Lambda^p_{\mathbb{C}}(V)$ tales que

$$\theta : V^p \to \mathbb{C}$$

es $\mathbb{C}$-multilineal.

Similarmente, dado un entero no negativo q, definimos el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de $(0, q)$-formas, como el subespacio $\Lambda^{(0,q)}(V) \subset \Lambda^q_{\mathbb{C}}(V)$ formado por todas las formas $\eta \in \Lambda^q_{\mathbb{C}}(V)$ tales que

$$\bar{\eta} : V^q \to \mathbb{C}$$

es $\mathbb{C}$-multilineal, donde $\bar{\eta}$ denota el conjugado complejo de η.

Ahora pasamos a definir los objetos principales de esta subsección. Dados los enteros no negativos p y q, definimos el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de (p,q)-formas, como el subespacio $\Lambda^{(p,q)}(V) \subset \Lambda^{p+q}_{\mathbb{C}}(V)$ dado por

$$\Lambda^{(p,q)}(V) := \{\theta \wedge \eta \mid \theta \in \Lambda^{(p,0)}(V),\, \eta \in \Lambda^{(0,q)}(V)\}.$$

Dada una base $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ del espacio dual complejo de V, es fácil ver que $\{\phi_1, \ldots, \phi_k, \bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_k\}$ es una base del espacio vectorial real $\Lambda^1_{\mathbb{C}}(V)$. Además, es claro que la colección

$$\{\phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{\alpha_p} \wedge \bar{\phi}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}_{\beta_q}\}_{\substack{1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_p\leq k \\ 1\leq\beta_1<\ldots<\beta_q\leq k}}$$

es una base de $\Lambda^{(p,q)}(V)$. Observamos que se tiene la identidad de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$\Lambda^r_{\mathbb{C}}(V) = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{(p,q)}(V).$$

Por último, dado $\omega \in \Lambda^{(p,q)}(V)$ definimos los tensores reales $\mathcal{R}e(\omega)$, $\mathcal{I}m(\omega) \in \Omega^{p+q}_{\mathbb{R}}(V)$ como la parte real e imaginaria respectivamente de los valores de ω en $\mathbb{C}$.

5.3. Formas Diferenciales Reales. Sea m un entero positivo y M una variedad suave de dimensión m. Sea $\{\mathrm{x}_j\}_{j\geq 1}$ un sistema de coordenadas locales suaves sobre M

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{x}_j: & U_j \subset M & \to & \mathrm{x}_j(U_j) \subset \mathbb{R}^m \\ & p & \mapsto & (x_j^1(p), \ldots, x_j^m(p)). \end{array}$$

Dada una base $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ de $\Lambda^1(\mathbb{R}^m) = (\mathbb{R}^m)^*_{\mathbb{R}}$ y dados enteros $r, j \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \{1, \ldots, m\}$, sea $dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}$ la aplicación constante

$$\begin{array}{rrcl} dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}: & U_j & \to & \Lambda^r(\mathbb{R}^m) \\ & p & \mapsto & dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}|_p \end{array}$$

definida por

$$dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}|_p := \phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{\alpha_r}.$$

Notar que si $r \geq 2$ y para algún $s \neq t$ se tiene que $\alpha_s = \alpha_t$ entonces $dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}$ es la aplicación constante igual a cero.

Dado $j \geq 1$, sea $\{\varphi_{j,\alpha} : \mathrm{x}_j(U_j) \to \mathbb{R} \mid \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \{1, \ldots, m\}^r\}$ una colección de funciones suaves. Llamamos a la aplicación

$$\varphi_j : U_j \to \Lambda^r(\mathbb{R}^m)$$

definida como

$$\varphi_j(p) := \sum_\alpha \varphi_{j,\alpha}(\mathrm{x}_j(p)) \cdot dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}|_p$$

una r-forma diferencial real local.

Una r-forma diferencial sobre M, es una colección de r-formas locales

$$\varphi = \left\{ \sum_\alpha \varphi_{j,\alpha} dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r} \right\}_{j\geq 1}$$

tales que para todo j, $\ell \geq 1$ y $p \in U_j \cap U_\ell$ se satisfacen las ecuaciones

$$\varphi_{\ell,\beta}(\mathbf{x}_\ell(p)) = \det\left(\frac{\partial x_j^{\alpha_s}}{\partial x_\ell^{\beta_t}}(\mathbf{x}_\ell(p))\right)_{s,t=1,\ldots,r} \cdot \varphi_{j,\alpha}(\mathbf{x}_j(p)). \tag{5.3.1}$$

A las relaciones dadas por (5.3.1) las denominamos ecuaciones de compatibilidad. Denotamos por $\Lambda^r(M)$ al espacio de todas las r-formas sobre M. De igual forma, denotaremos por $\Omega^r_{\mathbb{R}}(M)$ al espacio de todos los r-tensores sobre M, definidos de forma análoga.

Diremos que toda función suave $f : M \to \mathbb{R}$ es una 0-forma diferencial. Dada una 0-forma diferencial f y $j \geq 1$ sea df_j la 1-forma diferencial local

$$df_j : U_j \to \Lambda^1_{\mathbb{R}}(V)$$

definida por

$$df_j : p \mapsto \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}_j^{-1})}{\partial x_j^1}(\mathbf{x}_j(p))dx_j^1|_p + \ldots + \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}_j^{-1})}{\partial x_j^m}(\mathbf{x}_j(p))dx_j^m|_p.$$

Es fácil verificar que las 1-formas diferenciales locales $\{df_j\}_{j\geq 1}$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (5.3.1) y por lo tanto $df := \{df_j\}_{j\geq 1}$ define una 1-forma diferencial sobre M, que llamamos la diferencial de f. Es claro que si tenemos dos funciones suaves f y g, se cumple que $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$.

Dados $r \geq 1$ y una r-forma diferencial sobre M

$$\varphi = \left\{\varphi_j := \sum_\alpha \varphi_{j,\alpha} dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}\right\}_{j\geq 1},$$

definimos su derivada exterior $d\varphi$ como la colección de $(r+1)$-formas diferenciales locales sobre M

$$d\varphi = \left\{d\varphi_j := \sum_\alpha d\varphi_{j,\alpha} \wedge dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_r}\right\}.$$

Se verifica fácilmente que las $(r+1)$-formas diferenciales locales $\{d\varphi_j\}_{j\geq 1}$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (5.3.1) y por tanto $d\varphi := \{d\varphi_j\}_{j\geq 1}$ define una $(r+1)$-forma diferencial sobre M.

Ahora nos restringimos al caso en que M es orientable, y el cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\geq 1}$ de M es localmente finito.

Sea ω una m-forma diferencial local dada por,

$$\omega = \{\omega_j dx_j^1 \wedge \cdots \wedge dx_j^m\}_{j\geq 1}.$$

Tomamos una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ dada por $\{\psi_j\}$. Definimos la integral de ω sobre M como

$$\int_M \omega := \sum_j \int_{\mathbf{x}_j(U_j)} \psi_j \cdot \omega_j(t_1, \ldots, t_m) dt_1 dt_2 \cdots dt_m.$$

Esta integral no depende de la elección de la partición de la unidad.

Por último, sean M y N variedades suaves de dimensiones m y m' respectivamente, sea $f : M \to N$ una función suave y sea ω una r-forma diferencial en $\Lambda^r_{\mathbb{R}}(N)$, entonces definimos la r-forma diferencial pullback de ω por f, que denotamos por $f^*\omega \in \Lambda^r_{\mathbb{R}}(M)$, a la definida como sigue.

Si $p \in M$ está contenido en una carta local $(\mathbf{z}, U)$ de M y $f(p) \in N$ está contenido en una carta local $(\mathbf{w}, V)$ de N, entonces

$$\begin{array}{rccl} f^*\omega : & M & \to & \Lambda^r_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m) \\ & p & \mapsto & f^*\omega(p) \end{array}$$

está definido localmente por

$$f^*(p)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) := \\ \omega(f(p))\left(\mathcal{D}(\mathbf{w} \circ f \circ \mathbf{z}^{-1})(\mathbf{z}(p)) \cdot \vec{v}_1, \ldots, \mathcal{D}(\mathbf{w} \circ f \circ \mathbf{z}^{-1})(\mathbf{z}(p)) \cdot \vec{v}_r\right).$$

Se verifica fácilmente, que $f^*\omega$ es una r-forma diferencial sobre M. Es claro además, que si L es otra variedad suave y $g : N \to L$ es suave, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

En particular, si $M' \subset M$ es una subvariedad de M con inclusión $\iota : M' \hookrightarrow M$ y ω es una r-forma de M, entonces se define la restricción de ω a M' como la r-forma $\iota^*\omega$.

Por último, si N es otra variedad suave, η una forma diferencial sobre N y $f : M \to N$ una función sobreyectiva suave, entonces se tiene que

$$\int_M f^*\eta = \int_N \eta. \tag{5.3.2}$$

5.4. (p, q)-Formas Diferenciales. Sea k un entero positivo, sea M una variedad compleja de dimensión k, y $\{\mathbf{z}_j\}_{j\geq 1}$ un sistema de coordenadas locales holomorfo con

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{z}_j : & U_j \subset M & \to & \mathbf{z}_j(U_j) \subset \mathbb{C}^k \\ & p & \mapsto & \mathbf{z}_j(p) = (z^1_j(p), \ldots, z^k_j(p)). \end{array}$$

Descomponiendo z^α_j en su parte real e imaginaria como

$$z^\alpha_j = x^{2\alpha-1}_j + i x^{2\alpha}_j, \ \alpha = 1, \ldots, k$$

obtenemos un sistema de coordenadas locales suave sobre M $\{\mathbf{x}_j\}_{j\geq 1}$, $\mathbf{x}_j = (x^1_j, \ldots, x^{2k}_j)$. De las ecuaciones de Cauchy-Riemann es fácil ver que para cada $j, \ell \geq 1$ se tiene

$$\det\left(\frac{\partial x^s_j}{\partial x^t_\ell}\right)_{s,t=1,\ldots,2k} = \left|\det\left(\frac{\partial z^s_j}{\partial z^t_\ell}\right)_{s,t=1,\ldots,k}\right|^2 > 0 \text{ en } \mathbf{z}_j(U_j) \cap \mathbf{z}_\ell(U_\ell),$$

lo que muestra que toda variedad compleja es orientable.

Dada una base $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ de $(\mathbb{C}^k)^*_{\mathbb{C}}$ y dados enteros no negativos p, q, enteros positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$, sea $dz^{\alpha_1}_j \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_p}_j \wedge d\bar{z}^{\beta_1}_j \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\beta_q}_j$ la aplicación

$$\begin{array}{rccl} dz^{\alpha_1}_j \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_p}_j \wedge d\bar{z}^{\beta_1}_j \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\beta_q}_j : & U_j & \to & \Lambda^{(p,q)}(\mathbb{C}^k) \\ & p & \mapsto & dz^{\alpha_1}_j \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_p}_j \wedge d\bar{z}^{\beta_1}_j \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\beta_q}_j|_p \end{array}$$

definida por

$$dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_j^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^{\beta_q}|_p := \psi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{\alpha_p} \wedge \bar{\psi}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\psi}_{\beta_q}.$$

Dado $j \geq 1$, sea

$$\{\varphi_{j,\alpha,\beta} : \mathbf{z}_j(U_j) \to \mathbb{C} \mid \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \{1, \ldots, k\}^p, \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \{1, \ldots, k\}^q\}$$

una colección de funciones suaves. Llamamos a la aplicación

$$\varphi_j : U_j \to \Lambda^{(p,q)}(\mathbb{C}^k)$$

definida como

$$\varphi_j(p) := \sum_{\alpha,\beta} \varphi_{j,\alpha,\beta} dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_j^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^{\beta_q}|_p$$

una (p,q)-forma diferencial local.

Una (p,q)-forma diferencial sobre M, es una colección de (p,q)-formas diferenciales locales

$$\varphi \quad := \quad \left\{ \varphi_j = \sum_{\alpha,\beta} \varphi_{j,\alpha,\beta} dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_j^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^{\beta_q} \right\}_{j \geq 1}$$

tales que para todo $j, \ell \geq 1$ y $p \in U_j \cap U_\ell$ se satisfacen las ecuaciones

$$\varphi_{\ell,\alpha,\beta}(\mathbf{z}_\ell(p)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z_j^{\alpha_a}}{\partial z_\ell^{\alpha_b}}(\mathbf{z}_\ell(p)) & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{z}_j^{\beta_c}}{\partial \bar{z}_\ell^{\beta_d}}(\mathbf{z}_\ell(p)) \end{pmatrix}_{\substack{a,b=1,\ldots,p \\ c,d=1,\ldots,q}} \cdot \varphi_{j,\alpha,\beta}(\mathbf{z}_j(p)). \tag{5.4.1}$$

A las relaciones dadas por (5.4.1) las denominamos ecuaciones de compatibilidad complejas. Denotamos por $\Lambda^{(p,q)}(M)$ al espacio de todas las (p,q)-formas diferenciales sobre M.

Toda función suave $f : M \to \mathbb{C}$ se dirá una $(0,0)$-forma diferencial. Dada una $(0,0)$-forma diferencial f y $j \geq 1$ sean ∂f_j y $\bar{\partial} f_j$ las $(1,0)$ y $(0,1)$-formas diferenciales locales

$$\partial f_j : U_j \to \Lambda^{(1,0)}(\mathbb{C}^k) \quad \text{y} \quad \bar{\partial} f_j : U_j \to \Lambda^{(0,1)}(\mathbb{C}^k)$$

definidas por

$$\partial f_j : p \mapsto \frac{\partial(f \circ \mathbf{z}_j^{-1})}{\partial z_j^1}(\mathbf{z}_j(p)) dz_j^1|_p + \ldots + \frac{\partial(f \circ \mathbf{z}_j^{-1})}{\partial z_j^k}(\mathbf{z}_j(p)) dz_j^k|_p$$

$$\bar{\partial} f_j : p \mapsto \frac{\partial(f \circ \mathbf{z}_j^{-1})}{\partial \bar{z}_j^1}(\mathbf{z}_j(p)) d\bar{z}_j^1|_p + \ldots + \frac{\partial(f \circ \mathbf{z}_j^{-1})}{\partial \bar{z}_j^k}(\mathbf{z}_j(p)) d\bar{z}_j^k|_p.$$

Se verifica que las $(1,0)$-formas diferenciales locales $\{\partial f_j\}_{j \geq 1}$ y $(0,1)$-formas diferenciales locales $\{\bar{\partial} f_j\}_{j \geq 1}$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad complejas (5.4.1) y por tanto definen una $(1,0)$ y $(0,1)$-formas diferenciales respectivamente sobre M. La diferencial de f se define como $df := \partial f + \bar{\partial} f$.

Dados enteros no negativos p y q tales que $p+q \geq 1$ y una (p,q)-forma φ

$$\varphi = \left\{ \sum_{\alpha_p,\beta_q} \varphi_{j,\alpha,\beta} dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_j^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^{\beta_q} \right\}_{j \geq 1},$$

definimos las colecciones de $(p+1,q)$ y $(p,q+1)$-formas diferenciales locales

$$\partial\varphi := \left\{ \sum_{\alpha_p,\beta_q} \partial\varphi_{j,\alpha,\beta} dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_j^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^{\beta_q} \right\}_{j \geq 1},$$

$$\bar{\partial}\varphi := \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \bar{\partial}\varphi_{j,\alpha,\beta} dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_j^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^{\beta_q} \right\}_{j \geq 1},$$

respectivamente, que verifican las ecuaciones de compatibilidad compleja (5.4.1). Luego, $\partial\varphi$ y $\bar{\partial}\varphi$ son $(p+1,q)$ y $(p,q+1)$-formas diferenciales sobre M respectivamente. Definimos la derivada exterior de φ por $d\varphi := \partial\varphi + \bar{\partial}\varphi$.

5.5. La forma de Fubini-Study. En esta subsección, introduciremos una $(1,1)$-forma diferencial ω sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, denominada la métrica de Fubini-Study. Esta métrica da una métrica Riemanniana canónica sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, que le confiere estructura de espacio métrico compacto. Se introducen los conceptos básicos de forma hermitiana y métrica hermitiana, para asi demostrar que ω satisface las propiedades antes mencionadas. Existe un sinnúmero de propiedades geométricas de la métrica de Fubini-Study que no mencionaremos en esta monografía, pero sin embargo es pertinente destacar que ésta es la métrica natural de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Sea k un entero positivo y V un espacio vectorial complejo de dimensión k. Una forma hermitiana η sobre V es una aplicación $\eta : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que para todo $x,y,z \in V$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \eta(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha\eta(x,z) + \beta\eta(y,z) \\ \eta(x,y) &= \overline{\eta(y,x)}. \end{aligned}$$

El conjunto de las formas hermitianas sobre V es un subespacio vectorial de $\Lambda^{(1,1)}(V)$. Observemos en particular que para todo $x \in V$, el número complejo $\eta(x,x)$ es real. Decimos que η es positiva definida si para todo $x \in V \setminus \{0\}$, se tiene $\omega(x,x) > 0$.

Una forma cuadrática sobre V invariante bajo multiplicación por i, es una aplicación $q : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x,y,z \in V$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} q(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha q(x,z) + \beta q(y,z) \\ q(x,y) &= q(y,x) \\ q(ix,iy) &= q(x,y). \end{aligned}$$

El conjunto de las formas hermitianas sobre V y el conjunto de las formas cuadraticas sobre V invariantes bajo multiplicación por i, son canónicamente isomorfos como espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, donde el isomorfismo está dado por:

$$\eta = \eta(x,y) \mapsto q = q(x,y) := \mathcal{R}e(\eta(x,y))$$
$$q = q(x,y) \mapsto \eta = \eta(x,y) := q(x,y) - iq(ix,y).$$

La forma hermitiana η es positiva definida si y sólo si q es positiva definida.

Recordamos que una matriz cuadrada con entradas complejas $H := (h_{j\ell})$ es hermitiana si

$$H^* := (\overline{h_{\ell j}}) = H.$$

Es fácil ver que, dada una matriz hermitiana H, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \to & x^t H y, \end{array}$$

es una forma hermitiana.

Definición 5.5.1. *Sea M una variedad compleja de dimensión k. Una* métrica hermitiana *sobre M, es una $(1,1)$-forma diferencial $\eta \in \Lambda^{(1,1)}(M)$, que localmente se escribe como*

$$\eta_j(p) = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} h_{\alpha\beta}(\mathbf{z}_j(p)) dz_j^\alpha \wedge \bar{z}_j^\beta,$$

donde para todo $\vec{z} \in \mathbf{z}(U_j)$, la matriz $(h_{\alpha\beta}(\vec{z}))_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}$ es hermitiana positiva definida.

Una métrica hermitiana ω sobre M define una métrica riemanniana sobre M dada por la forma cuadrática positiva definida $q = \mathcal{R}e(\eta)$.

Para el caso $M = \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, sea la colección de $(1,1)$-formas diferenciales locales $\{\omega_j\}_{j=0}^k$ definidas en cada carta local $(\mathbf{z}_j, U_j)$ por

$$\begin{array}{cccl} \omega_j : & U_j & \to & \Lambda^{(1,1)}(\mathbb{C}^k) \\ & p & \mapsto & \omega_j(p) := \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \|\mathbf{z}_j(p)\|^2. \end{array}$$

Se verifica que esta colección de $(1,1)$-formas diferenciales locales satisface las ecuaciones de compatibilidad complejas (5.4.1) y por tanto define una $(1,1)$-forma diferencial ω sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Por otra parte, dada una carta local afín U_j, definimos el levantamiento de U_j como la función holomorfa

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{Z}_j : & U_j & \to & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\} \\ & [z_0 : \ldots : z_k] & \mapsto & \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_k}{z_j} \right). \end{array}$$

Se verifica fácilmente que $\pi \circ \mathbf{Z}_j = \mathrm{Id}_{U_j}$. Luego $\mathbf{Z}_j^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{U_j}^*$, de donde se ve que

$$\pi^* \omega_j(\mathbf{Z}_j(p)) = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \|\mathbf{Z}_j(p)\|^2.$$

Para todo $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{C}^k$, $z \in \mathbb{C}$ y $\ell = 1, \ldots, k+1$ denotamos por $\vec{v}_\ell(z) \in \mathbb{C}^{k+1}$ a

$$\vec{v}_\ell(z) := (v_1, \ldots, v_{\ell-1}, z, v_\ell, \ldots, v_k).$$

Luego, notamos que para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^k$, $z \in \mathbb{C}$ y $j = 0, \ldots, k$ se tiene que

$$\omega_j(p)(\vec{v}, \vec{w}) = \pi^* \omega_j(\mathbf{Z}_j(p))(\vec{v}_{j+1}(z), \vec{w}_{j+1}(z)).$$

Definimos la acción del grupo de matrices invertibles de $(k+1) \times (k+1)$ con entradas complejas, denotado por $\mathrm{GL}(k+1, \mathbb{C})$, sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ por: si $\mathbf{z} \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, $A \in \mathrm{GL}(k+1, \mathbb{C})$ y $\vec{z} \in \pi|_{S^{2k+1}}^{-1}(\mathbf{z})$ entonces $\Theta_A(\mathbf{z}) := \pi(A\vec{z})$. Es claro que el valor de $\Theta_A(\mathbf{z})$ no depende de la elección del punto $\vec{z} \in \pi|^{-1}_{S^{2k+1}}(\mathbf{z})$. Asi, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\Theta_A} & \mathbb{P}^k(\mathbb{C}). \end{array}$$

Lema 5.5.2. *La $(1,1)$-forma diferencial ω es una métrica hermitiana, cuya forma explícita es:*

$$\frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum_\ell dz_\ell \wedge d\bar{z}_\ell}{1+\sum_\ell |z_\ell|^2} - \frac{(\sum_\ell \bar{z}_\ell dz_\ell) \wedge (\sum_\ell z_\ell d\bar{z}_\ell)}{(1+\sum_\ell |z_\ell|^2)^2}\right).$$

Demostración. Denotamos por $\langle , \rangle$ al producto interno hermitiano usual de $\mathbb{C}^{k+1}$. Un cálculo directo en la j-ésima coordenada afín, con $\mathbf{Z}_j = (z_1, \ldots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \ldots, z_k)$, $\vec{v} = (v_0, \ldots, v_k)$, $\vec{w} = (w_0, \ldots, w_k)$, $\bar{\vec{v}} = (\bar{v}_0, \ldots, \bar{v}_k)$ y $\bar{\vec{w}} = (\bar{w}_0, \ldots, \bar{w}_k)$, muestra que

$$\begin{aligned} \pi^*\omega_j(\vec{v},\vec{w}) &= \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log \|\mathbf{Z}_j\|^2(\vec{v},\vec{w}) \\ &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum_\ell dz_\ell \wedge d\bar{z}_\ell}{1+\sum_\ell |z_\ell|^2} - \frac{(\sum_\ell \bar{z}_\ell dz_\ell) \wedge (\sum_\ell z_\ell d\bar{z}_\ell)}{(1+\sum_\ell |z_\ell|^2)^2}\right)(\vec{v},\vec{w}) \qquad (5.5.1) \\ &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\langle \vec{v}, \bar{\vec{w}}\rangle - \langle \bar{\vec{v}}, \vec{w}\rangle}{1+\langle \mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_j\rangle} - \frac{\langle \bar{\mathbf{Z}}_j, \vec{v}\rangle\langle \mathbf{Z}_j, \bar{\vec{w}}\rangle - \langle \mathbf{Z}_j, \bar{\vec{v}}\rangle\langle \bar{\mathbf{Z}}_j, \vec{w}\rangle}{(1+\langle \mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_j\rangle)^2}\right). \end{aligned}$$

Sea $U(k+1)$ el grupo unitario de matrices complejas de $(k+1) \times (k+1)$ con entradas complejas, definido por

$$U(k+1) := \{A \in \mathrm{GL}(k+1, \mathbb{C}) \mid \langle A\vec{v}, A\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle \text{ para todo } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^{k+1}\}.$$

El grupo unitario $U(k+1)$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$; es decir, la órbita de todo punto bajo $U(k+1)$ es todo $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Es claro que $\pi \circ A = \Theta_A \circ \pi$, luego se tiene que

$$\begin{aligned} \pi^* \circ \Theta_A^* \omega_j(p)(\vec{v},\vec{w}) &= A^* \circ \pi^*\omega_j(p)(\vec{v},\vec{w}) \\ &= \pi^*\omega_j(A\mathbf{Z}_j(p))(A\vec{v}, A\vec{w}) \\ &= \pi^*\omega_j(\mathbf{Z}_j(p))(\vec{v},\vec{w}), \end{aligned}$$

por (5.5.1). Por lo tanto, ω es invariante bajo la acción de $U(k+1)$. Por todo lo anterior, para ver si ω es una métrica hermitiana positiva definida, basta ver su forma en un punto. Escogemos el punto $[1:0:\ldots:0]$, luego

$$\omega_0([1:0:\ldots:0]) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$

donde la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix},$$

es claramente hermitiana positiva definida. $\square$

Definición 5.5.3. *Se define la métrica de Fubini-Study ω sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ como la métrica hermitiana sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ definida por la colección de $(1,1)$-formas diferenciales locales $\{\omega_j\}_{j=0}^k$,*

$$\begin{array}{rccl} \omega_j: & U_j & \to & \Lambda^{(1,1)}(\mathbb{C}^k) \\ & p & \mapsto & \omega_j(p) := \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|z_j(p)\|^2. \end{array}$$

5.6. Integración de la Métrica de Fubini-Study sobre Variedades Proyectivas. Fijamos un entero positivo k y sea ω la métrica de Fubini-Study sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Es un hecho conocido que, dado $r \in \{1,\dots,k\}$, para toda variedad proyectiva $X^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, el conjunto $X^* := X\backslash \mathrm{Sing}(X)$ es una subvariedad compleja de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, que se puede definir localmente como los ceros comunes de $k-r$ polinomios homogéneos con matriz jacobiana de rango máximo. Por el teorema de la función implicita, estos polinomois definen un sistema de coordenadas holomorfas sobre X^*. Luego, si ω es la forma de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, entonces $\omega^{\wedge r}$ es una forma de volumen sobre X^*.

Teorema 5.6.1. *(Teorema de Wirtinger)*
Dado $r \in \{1,\dots,k\}$ y dada una variedad proyectiva $X^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, entonces

$$\mathrm{Vol}(X) := \int_{X^*} \omega^{\wedge r} = \deg(X)\cdot r!.$$

Ver demostración en [23], p.88-89.

Como $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es una variedad proyectiva de grado 1 y dimensión k, y no tiene puntos singulares, el teorema 5.6.1 implica que

$$\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \omega^{\wedge k} = k!.$$

Luego, $\Omega := \frac{\omega^{\wedge k}}{k!}$ define una medida de probabilidad Boreliana sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. En adición, mencionamos el hecho que si f es un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de grado D, y $X^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es una variedad proyectiva, entonces

$$\int_X f^*\omega^{\wedge r} = D^r \int_X \omega^{\wedge r}. \tag{5.6.1}$$

Teorema 5.6.2. *(Teorema de Chow)*
Toda variedad compleja de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es una variedad algebraica.

En particular, si f es un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y dado $r \in \{1,\dots,k\}$ y $X^r \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ una variedad algebraica, entonces por los Teoremas 3.1.2 y 5.6.2 se tiene que $f(X^r) \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es una variedad algebraica. Más adelante, probaremos que todo endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es una aplicación finito a uno, de lo que se puede deducir fácilmente que $f(X^r) \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tiene dimensión r.

5.7. El Teorema de Lelong. Un subconjunto X de $\mathbb{C}^k$ se dirá una variedad analítica, si para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta U de x y un conjunto finito de funciones holomorfas $f_1,\dots,f_s$ definidas sobre U tal que:

$$X \cap U = \{y \in U \mid f_1(y) = \cdots = f_s(y) = 0\}.$$

En particular, toda variedad algebraica de $\mathbb{C}^k$ es una variedad analítica. El concepto de dimensión y punto singular de una variedad analítica se define de la misma forma que en la Subsección 4.4.

En toda esta subsección, identificamos $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^k \sqcup H$, donde H es un hiperplano.

Denotamos por ξ a la métrica euclidea sobre $\mathbb{C}^k$ dada por:

$$\xi(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{w}) := \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} dz_j \wedge d\bar{z}_j(\vec{v},\vec{w}) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}(\langle \vec{v},\bar{\vec{w}}\rangle - \langle \bar{\vec{v}},\vec{w}\rangle),$$

para todo $\mathrm{z} = (z_1,\ldots,z_k) \in \mathbb{C}^k \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{C}^k$.

Recordamos que, por el Lema 5.5.2, en una carta afín dada (que identificamos con $\mathbb{C}^k$), la forma de Fubini-Study está dada por:

$$\begin{aligned}\omega(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{w}) &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} dz_j \wedge d\bar{z}_j}{1+\sum_{j=1}^{k}|z_j|^2} - \frac{(\sum_{j=1}^{k}\bar{z}_j dz_j)\wedge(\sum_{j=1}^{k} z_j d\bar{z}_j)}{(1+\sum_{j=1}^{k}|z_j|^2)^2}\right)(\vec{v},\vec{w}) = \\ &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\langle \vec{v},\bar{\vec{w}}\rangle - \langle \bar{\vec{v}},\vec{w}\rangle}{1+\langle \mathrm{z},\mathrm{z}\rangle} - \frac{\langle \bar{\mathrm{z}},\vec{v}\rangle\langle \mathrm{z},\bar{\vec{w}}\rangle - \langle \mathrm{z},\bar{\vec{v}}\rangle\langle \bar{\mathrm{z}},\vec{w}\rangle}{(1+\langle \mathrm{z},\mathrm{z}\rangle)^2}\right)\end{aligned}$$

para todo $\mathrm{z} = (z_1,\ldots,z_k) \in \mathbb{C}^k \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{C}^k$.

En particular, si $\|\cdot\|$ denota a la norma usual (euclidea) de $\mathbb{C}^k$, definida por $\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v},\vec{v}\rangle}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{C}^k$, entonces se tiene que

$$\omega(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{v}) \geq \frac{\xi(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{v})}{1+\|\mathrm{z}\|^2}.$$

Luego, para todo $r > 0$ y $\mathrm{z} \in \mathbb{C}^k$ tal que $\|\mathrm{z}\| < r$, se tiene la siguiente comparación entre las métricas:

$$\xi(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{v}) \geq \omega(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{v}) \geq \frac{\xi(\mathrm{z})(\vec{v},\vec{v})}{1+r^2}. \tag{5.7.1}$$

Para $r > 0$, denotaremos por $B_e(\vec{0},r) \subset \mathbb{C}^k$ a la bola de centro $\vec{0}$ y radio r, con la métrica euclidea. Además, Diam y Vol denotan el diámetro y el volumen con respecto a la métrica de Fubini-Study, mientras que Diam_e y Vol_e lo harán con respecto a la métrica euclidea.

Teorema 5.7.1. ***(Lelong)***
Sea X una variedad analítica en $\mathbb{C}^k$ de dimensión d, tal que $\vec{0} \in X$ y sea L un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^k$ de dimensión d. Entonces, para cada $r > 0$ tal que la inclusión $\iota : X \cap B_e(\vec{0},r) \hookrightarrow B_e(\vec{0},r)$ sea una aplicación propia, se tiene que

$$\mathrm{Vol}_e(X \cap B_e(\vec{0},r)) := \int_{X\cap B_e(\vec{0},r)} \xi^{\wedge d} \geq \mathrm{Vol}_e(L \cap B_e(\vec{0},r)).$$

Ver demostración en [20].

Si X es una variedad analítica en $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y L un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^k$ como en el Teorema anterior, de (5.7.1) y el Teorema 5.7.1 se sigue que, para todo

$r > 0$, $B_e(\vec{0}, r) \subset B(\vec{0}, r)$ y por tanto

$$\text{(5.7.2)} \quad \mathrm{Vol}(X \cap B(\vec{0}, r)) \geq \mathrm{Vol}(X \cap B_e(\vec{0}, r)) \geq \frac{\mathrm{Vol}_e(X \cap B_e(\vec{0}, r))}{(1+r^2)^d} \geq \frac{\mathrm{Vol}_e(L \cap B_e(\vec{0}, r))}{(1+r^2)^d}.$$

De ésto, podemos demostrar el siguiente lema:

Lema 5.7.2. *Para toda bola $B(\mathbf{z}, r)$ de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ con $r \leq \sqrt{(\pi-2)/2}$ y toda curva analítica C que pasa por $\mathbf{z}$ tal que la inclusión $\iota : C \cap B(\mathbf{z}, r) \hookrightarrow B(\mathbf{z}, r)$ es propia, se tiene que* $\mathrm{Area}(C) \geq 2r^2$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\mathbf{z} = \vec{0} \in \mathbb{C}^k \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Por el Teorema 5.7.1 y la desigualdad (5.7.2), tenemos que

$$\mathrm{Area}(C \cap B(\vec{0}, r)) \geq \mathrm{Area}(C \cap B_e(\vec{0}, r)) \geq \frac{\mathrm{Area}_e(C \cap B_e(\vec{0}, r))}{1+r^2} \geq \frac{\mathrm{Area}_e(L \cap B_e(\vec{0}, r))}{1+r^2} = \frac{\pi r^2}{1+r^2},$$

donde L es una línea proyectiva cualquiera. Se tiene que $\frac{\pi r^2}{1+r^2} \geq 2r^2$ si y sólo si $r \leq \sqrt{\frac{\pi-2}{2}}$, lo que concluye la demostración. $\square$

Un subconjunto $D \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ se dirá un disco holomorfo, si está contenido en alguna curva analítica y si existe un biholomorfismo entre D y $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$. Dados discos holomorfos $D \subset \widetilde{D}$ en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tales que existe un biholomorfismo entre $A := \widetilde{D} \setminus D$ y un anillo $\mathbf{A}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\} \subset \mathbb{C}$, definimos el módulo de A como el valor

$$\mathrm{Mod}(A) := \frac{\log r}{2\pi}.$$

Es un hecho conocido que el módulo de un anillo es invariante bajo isomorfismos conformes (ver [21] pp. 30-36).

Diremos que una curva cerrada simple y rectificable $\gamma \subset A$ es esencial en A, si esta curva encierra un disco holomorfo que a su vez contiene a D. El módulo del anillo A satisface la identidad

$$\frac{1}{\mathrm{Mod}(A)} = \sup \left\{ \frac{1}{\mathrm{Area}_\eta(A)} \cdot \mathrm{ínf}\left\{\mathrm{Long}_\eta(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ esencial en } A\right\} \mid \eta \text{ métrica hermitiana conforme en } A \right\}$$

Lema 5.7.3. *Para todo par de discos holomorfos $D \subset \widetilde{D}$ en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, existe una constante universal $c > 0$ tal que:*

$$(\mathrm{Diam}(D))^2 \leq c \frac{\mathrm{Area}(\widetilde{D})}{\mathrm{mín}\{1, \mathrm{Mod}(A)\}}.$$

Demostración. Sea

$$r^2 := \frac{\mathrm{Area}(\widetilde{D})}{\mathrm{mín}\{1, \mathrm{Mod}(A)\}}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer r pequeño. Luego, tomando la métrica de Fubini-Study se tiene

$$\frac{1}{\mathrm{Mod}(A)} \geq \frac{\inf\left\{\mathrm{Long}_\eta(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ esencial en } A\right\}}{\mathrm{Area}(A)}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Area}(A)}{\mathrm{Mod}(A)} \geq \inf\left\{\mathrm{Long}(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ esencial en } A\right\}.$$

En particular, para todo $\epsilon > 0$, podemos escoger γ esencial en A (que podría ser ∂D) tal que,

$$(\mathrm{Long}(\gamma))^2 - \epsilon \leq \frac{\mathrm{Area}(A)}{\mathrm{Mod}(A)} \leq \frac{\mathrm{Area}(\widetilde{D})}{\mathrm{Mod}(A)} \leq r^2.$$

Denotaremos por D_γ al disco encerrado por γ. Como $\mathrm{Diam}(D) \leq \mathrm{Diam}(D_\gamma)$, nos bastará con verificar que $\mathrm{Diam}(D_\gamma) \leq 3r$. Si $\mathrm{Diam}(D_\gamma) > 3r$, como $\mathrm{Long}(\gamma) \leq r+\epsilon'$, con $\epsilon' \downarrow 0$ cuando $\epsilon \downarrow 0$, se tiene que para todo x_0, $y_0 \in \gamma$, $\mathrm{dist}(x_0, y_0) \leq r + \epsilon'$, y por tanto podemos escoger $\mathbf{z} \in D_\gamma$ tal que $\mathrm{dist}(\mathrm{z}, \gamma) \geq r$, porque sino, para todo x, $y \in D_\gamma$, x_0, $y_0 \in \gamma$,

$$\mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, x_0) + \mathrm{dist}(x_0, y_0) + \mathrm{dist}(y_0, y) < 3r + \epsilon',$$

luego, tomando primero $\epsilon \downarrow 0$ y después el supremo sobre los x, $y \in D_\gamma$ se tendría que

$$3r < \mathrm{Diam}(D_\gamma) \leq 3r.$$

Por tanto, podemos escoger $\mathbf{z} \in D_\gamma$ tal que su distancia a γ satisfaga la desigualdad

$$\mathrm{dist}(\mathrm{z}, \gamma) \geq r.$$

Por lo anterior, la curva analítica D_γ pasa por z y es tal que, $\iota : D_\gamma \cap B(\mathbf{z}, r) \hookrightarrow B(\mathrm{z}, r)$ es una aplicación propia. Así, por 5.7.2, tendríamos que

$$r^2 \geq \mathrm{Area}(\widetilde{D}) \geq \mathrm{Area}(D_\gamma) \geq 2r^2,$$

lo que claramente es una contradicción. Por tanto,

$$\mathrm{Diam}(D)^2 \leq \mathrm{Diam}(D_\gamma)^2 \leq 9r^2 = 9\frac{\mathrm{Area}(\widetilde{D})}{\mathrm{mín}\{1, \mathrm{Mod}(A)\}}.$$

Ésto concluye la demostración.

$\square$

6. Hechos de Ergodicidad y Entropía

Durante toda esta sección fijamos $(\mathbb{X}, \rho)$ un espacio métrico compacto y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una función continua. La aplicación f^0 denotará a la función identidad de $\mathbb{X}$, y dado un entero no negativo n, denotaremos por f^n a la composición

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}.$$

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{X}$ y un entero positivo n, denotaremos por $f^{-n}(A)$ al conjunto de preimágenes de A por f^n.

Un conjunto $A \subset \mathbb{X}$ se dirá totalmente invariante por f si:

$$f^{-1}(A) = A \text{ y } f(A) = A.$$

Dada un medida de probabilidad boreliana ν sobre $\mathbb{X}$, denotaremos $(L^1_\nu(\mathbb{X}), \|\cdot\|'_1)$ al espacio vectorial real definido por:

$$L^1_\nu(\mathbb{X}) := \left\{ f : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{X}} |f| d\nu < +\infty \right\},$$

dotado de la seminorma

$$\|f\|'_1 := \int_{\mathbb{X}} |f| d\nu.$$

Definimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $L^1_\nu(\mathbb{X})$ dada por

$$f \sim g \text{ si y sólo si } \nu(\{x \in \mathbb{X} \mid f(x) = g(x)\}) = 0.$$

Es un hecho conocido que el espacio vectorial real cuociente

$$\mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X}) := L^1_\nu(\mathbb{X}) / \sim,$$

provisto de la norma $\|\cdot\|_1$, inducida por la seminorma $\|\cdot\|'_1$, es un espacio de Banach (ver [25] p.65-71). Por simplicidad, para cada $f \in L^1_\nu(\mathbb{X})$, denotaremos también por f a su clase de equivalencia en $\mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X})$.

Dado un boreliano A de $\mathbb{X}$, se verifica que la función característica $\mathbf{1}_A$ de A pertenece a $\mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X})$, donde $\|\mathbf{1}_A\|_1 = \nu(A)$.

Denotaremos por $\mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ al espacio vectorial real de las funciones continuas sobre $\mathbb{X}$ a valores en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{X}} |\varphi(x)|.$$

Es un hecho conocido que $(\mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Además, como $\mathbb{X}$ es compacto, se tiene la inclusión

$$\mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X}).$$

6.1. Ergodicidad.

Sea $\mathscr{B}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{X}$ y sea $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ el conjunto convexo de medidas de probabilidad borelianas sobre $\mathbb{X}$.

Cada medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ define una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \nu[\varphi] := \int \varphi d\nu. \end{array}$$

Dotamos a $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ de la topología débil*, que es la menor topología sobre $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ que hace continuas todas estas aplicaciones. El conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ provisto de esta topología es un espacio topológico compacto, metrizable y localmente convexo (ver [28] p. 146-153). Una sucesión de medidas $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ converge a la medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ si y sólo si $\lim_{n\to+\infty} \nu_n[\varphi] = \nu[\varphi]$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

Para cada medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$, el push forward $f_*\nu$ de ν por f, es la medida tal que para cada $A \in \mathscr{B}$, se satisface:

$$f_*\nu(A) := \nu(f^{-1}(A)).$$

Una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ se dirá f-invariante si $f_*\nu = \nu$. Denotamos por $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ al subespacio vectorial de las medidas f-invariantes:

$$\mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f) := \{\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}} \mid f_*\nu = \nu\}.$$

Teorema 6.1.1. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico compacto y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una función continua. Entonces*

(i) $f_* : \mathcal{M}_{\mathbb{X}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ es lineal y continua.
(ii) $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$.

Demostración:

(i) Es fácil ver, mediante aproximación por funciones simples, que para cada $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ y $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ se tiene la identidad

$$\int \varphi d(f_*\nu) = \int \varphi \circ f d\nu. \tag{6.1.1}$$

Como $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ es metrizable, para demostrar que f_* es continua, es suficiente demostrar continuidad secuencial. Si $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$, tal que $\nu_n \to \nu$ cuando $n \to +\infty$, entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, se tiene que $\varphi \circ f \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ y por tanto

$$\int \varphi d(f_*\nu_n) = \int \varphi \circ f d\nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int \varphi \circ f d\nu = \int \varphi d(f_*\nu).$$

Ésto implica que f_* es continua.

Además, para cada $t \in [0,1]$, ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ y cada $A \in \mathscr{B}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_*(t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(A) &= (t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(f^{-1}(A)) \\ &= t\nu_1(f^{-1}(A)) + (1-t)\nu_2(f^{-1}(A)) \\ &= tf_*\nu_1(A) + (1-t)f_*\nu_2(A), \end{aligned}$$

lo que muestra que f_* es lineal.

(ii) Sea $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en el compacto metrizable $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$. Tomamos la sucesión:

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \sigma_n.$$

Como el espacio $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ es compacto y metrizable, podemos escoger una subsucesión $\{\nu_{n_\ell}\}_{\ell\geq 1}$ que converge a una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$.

De la linealidad de f_*, observamos que

$$f_*(\nu_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^{j+1}\sigma_n = \frac{f_*^n\sigma_n - \sigma_n}{n} + \nu_n.$$

De la continuidad de f_* se concluye que $f_*\nu = \nu$ y por tanto $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$.

∎

Definición 6.1.2. *Una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ se dirá* ergódica, *si para todo Boreliano A totalmente invariante por f se tiene que $\nu(A) = 0$ ó $\nu(A) = 1$. La medida ν se dirá* mezclante *si, para todo boreliano A y B se tiene que*

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(A) \cap B) = \nu(A)\nu(B).$$

Notar que si ν es una medida de probabilidad boreliana y $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función ν-medible y f-invariante, entonces ν es ergódica si y sólo si φ es constante ν-c.t.p. Además, podemos ver que toda medida mezclante es ergódica, pues si A es un boreliano totalmente invariante y ν es una medida mezclante, entonces

$$\begin{aligned}\nu(A)^2 &= \nu(A)\nu(A)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(A)\cap A)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \nu(A)\\ &= \nu(A).\end{aligned}$$

Dado un boreliano $A \in \mathscr{B}$ y una sucesión de funciones continuas $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ que convergen en $\mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X})$ a la función característica de A, se tiene que

$$\nu[\varphi_j] \to \nu(A) \text{ cuando } j \to +\infty.$$

Por tanto, la aplicación $\nu : \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ se extiende continuamente a $\mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X})$.

Lema 6.1.3. *Se tienen las siguientes caracterizaciones:*

(i) *Una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ es ergódica si y sólo si, para todo φ, $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$*

$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \int \varphi\circ f^j(x)\phi(x)d\nu(x) = \left(\int \varphi d\nu\right)\left(\int \phi d\nu\right).$$

(ii) *Una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ es mezclante si y sólo si, para todo φ, $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$*

$$\lim_{n\to+\infty} \textstyle\int \varphi\circ f^n(x)\phi(x)d\nu(x) = \left(\int \varphi d\nu\right)\left(\int \phi d\nu\right).$$

Demostración. La demostración de (i) y (ii) son similares, luego por simplicidad, sólo veremos la demostración de (ii).

Supongamos que para todo φ, $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \int \varphi\circ f^n(x)\phi(x)d\nu(x) = \left(\int \varphi d\nu\right)\left(\int \phi d\nu\right).$$

Sean A y B Borelianos. Para todo $\epsilon > 0$, existen compactos K_1, K_2 y abiertos O_1, O_2 tales que:

$$K_1 \subset A \subset O_1,\ K_2 \subset B \subset O_2,\ \nu(O_1 \setminus K_1) < \epsilon \ \text{ y } \ \nu(O_2 \setminus K_2) < \epsilon.$$

Sean $\{\varphi_m\}_{m\geq 1}$ y $\{\phi_m\}_{m\geq 1}$ sucesiones decrecientes de funciones continuas tales que

$$\varphi_m \downarrow \mathbf{1}_{K_1} \quad \text{y} \quad \phi_m \downarrow \mathbf{1}_{K_2} \quad \text{cuando } m \to +\infty,$$

con $\inf_{m\geq 1} \int \varphi_m d\nu = \nu(K_1)$ e $\inf_{m\geq 1} \int \phi_m d\nu = \nu(K_2)$. Luego, para todo par de enteros positivos m y n, se tiene que

$$\begin{aligned}
\nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2) &= \int_{f^{-n}(K_1)\cap K_2} d\nu \\
&= \int \mathbf{1}_{f^{-n}(K_1)} \mathbf{1}_{K_2} d\nu = \int \mathbf{1}_{K_1} \circ f^n \mathbf{1}_{K_2} d\nu \\
&\leq \int \varphi_m \circ f^n \phi_m d\nu.
\end{aligned}$$

Luego

$$\limsup_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2) \leq \int \varphi_m d\nu \int \phi_m d\nu, \quad \text{para todo } m \geq 1.$$

Tomando el ínfimo sobre m, se obtiene que

$$\limsup_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2) \leq \nu(K_1)\nu(K_2) \leq \nu(A)\nu(B).$$

Como $A = (A \setminus K_1) \sqcup K_1$ y $B = (B \setminus K_2) \sqcup K_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\nu(f^{-n}(A) \cap B) &= \nu(f^{-n}((A \setminus K_1) \sqcup K_1) \cap (B \setminus K_2) \sqcup K_2) \\
&= \nu(f^{-n}(A \setminus K_1) \cap (B \setminus K_2)) + \nu(f^{-n}(A \setminus K_1) \cap K_2) + \\
&\quad + \nu(f^{-n}(K_1) \cap (B \setminus K_2)) + \nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2) \\
&\leq \nu(B \setminus K_2) + \nu(f^{-n}(A \setminus K_1)) + \\
&\quad + \nu((B \setminus K_2)) + \nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2) \\
&= \nu(B \setminus K_2) + \nu(A \setminus K_1) + \nu((B \setminus K_2)) + \nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2) \\
&< 3\epsilon + \nu(f^{-n}(K_1) \cap K_2)
\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\limsup_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(A) \cap B) \leq \nu(A)\nu(B) + 3\epsilon.$$

De forma similar, podemos tomar $\{\tilde{\varphi}_m\}_{m\geq 1}$ y $\{\tilde{\phi}_m\}_{m\geq 1}$ sucesiones crecientes de funciones continuas tales que

$$\tilde{\varphi}_m \uparrow \mathbf{1}_{O_1} \quad \text{y} \quad \tilde{\phi}_m \uparrow \mathbf{1}_{O_2} \quad \text{cuando } m \to +\infty,$$

con $\sup_{m\geq 1} \int \tilde{\varphi}_m d\nu = \nu(O_1)$ y $\sup_{m\geq 1} \int \tilde{\phi}_m d\nu = \nu(O_2)$ para obtener

$$\liminf_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(O_1) \cap O_2) \geq \nu(O_1)\nu(O_2) \geq \nu(A)\nu(B),$$

y del hecho que $O_1 = (O_1 \setminus A) \sqcup A$, $O_2 = (O_2 \setminus B) \sqcup B$, obtener que

$$\liminf_{n\to+\infty} \nu(f^{-n}(A) \cap B) \geq \nu(A)\nu(B) - 3\epsilon,$$

lo que concluye la identidad.

Por otra parte, sea $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ mezclante. Para todo par de Borelianos A y B, es claro que

$$\begin{aligned}\int \mathbf{1}_A \circ f^n \mathbf{1}_B d\nu &= \int \mathbf{1}_{f^{-n}(A)\cap B} d\nu \\ &= \int_{f^{-n}(A)\cap B} d\nu = \nu(f^{-n}(A)\cap B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(A)\nu(B) \\ &= \int \mathbf{1}_A d\nu \int \mathbf{1}_B d\nu.\end{aligned}$$

Luego, la afirmación se cumple para cada par de funciones características, y por linealidad de la integral, el resultado se extiende a las funciones simples.

Para todo par de funciones continuas φ, $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, podemos escoger sucesiones crecientes $\{\varphi_m\}_{m\geq 1}$ y $\{\phi_m\}_{m\geq 1}$ de funciones simples tales que

$$\varphi_m \uparrow \varphi \text{ y } \phi_m \uparrow \phi \text{ cuando } m \to +\infty, \ \nu\text{-c.t.p.}$$

Para todo par de enteros positivos m y n, se tiene que

$$\int \varphi \circ f^n \phi d\nu \geq \int \varphi_m \circ f^n \phi_m d\nu.$$

Asi, por lo visto anteriormente, se tiene que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int \varphi \circ f^n \phi d\nu \geq \int \varphi_m d\nu \int \phi_m d\nu.$$

Por definición de la integral, podemos tomar el supremo sobre m, obteniendo

$$\liminf_{n\to+\infty} \int \varphi \circ f^n \phi d\nu \geq \int \varphi d\nu \int \phi d\nu.$$

Similarmente, podemos tomar una sucesión decreciente de funciones simples convergiendo a φ y ϕ para asi obtener la desigualdad

$$\limsup_{n\to+\infty} \int \varphi \circ f^n \phi d\nu \leq \int \varphi d\nu \int \phi d\nu.$$

Y ésto termina la prueba. □

Una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ se dirá extremal, si cada vez que existen $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ y $t \in [0, 1]$ tales que

$$\nu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2,$$

entonces $t = 0$ ó $t = 1$. Es fácil ver que el conjunto de medidas extremales de $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$, que denotamos por $\mathcal{E}_{\mathbb{X}}(f)$, es igual al conjunto de medidas ergódicas.

Teorema 6.1.4. *(Descomposición Ergódica)*
Para toda medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$, existe una única medida de Borel τ sobre $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ tal que $\tau(\mathcal{E}_{\mathbb{X}}(f)) = 1$ y tal que para toda $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\nu(x) = \int_{\mathcal{E}_{\mathbb{X}}(f)} \left(\int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\mu(x) \right) d\tau(\mu).$$

Ver demostración en [24].

Teorema 6.1.5. *(Teorema Ergódico de Birkhoff)*
Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ un espacio métrico compacto y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una función continua. Sea $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ y $\varphi \in \mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X})$. Entonces, para ν-c.t.p. $x \in \mathbb{X}$ el siguiente límite existe

$$\widehat{\varphi}(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x).$$

Además, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{X})$, $\widehat{\varphi} \circ f = \widehat{\varphi}$ y $\int \widehat{\varphi} d\nu = \int \varphi d\nu$. En particular, si ν es ergódica, entonces $\widehat{\varphi}$ es constante ν-c.t.p.

Ver demostración en [28] p. 34-39.

6.2. Entropía.

6.2.1. Entropía Métrica. Dada una colección finita de borelianos $\xi = \{A_j\}_{j=1}^m$ del espacio métrico compacto $\mathbb{X}$ y una medida de probabilidad $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$, diremos que ξ es una partición medible de $(\mathbb{X}, \nu)$ si

(i) $\nu(\mathbb{X} \setminus \cup_{j=1}^m A_j) = 0$
(ii) Para todo $j, \ell = 1, \ldots, m$ distintos, se tiene $\nu(A_j \cap A_\ell) = 0$.

La función $t \mapsto t\log t$ está definida y es continua en $]0, +\infty[$. Usando el hecho que $t \log t \to 0$ cuando $t \to 0^+$, podemos extender esta función continuamente a $[0, +\infty[$ asignandole el valor 0 en $t = 0$. Dada una partición medible $\xi = \{A_j\}_{j=1}^m$, definimos la entropía de la partición ξ como

$$H_\nu(\xi) := -\sum_{j=1}^m \nu(A_j)\log(\nu(A_j)) \in [0, +\infty[.$$

Para $\xi = \{A_j\}_{j=1}^m$ y $\eta = \{B_\ell\}_{\ell=1}^s$ particiones medibles de $\mathbb{X}$, definimos la partición conjunta de ξ y η como:

$$\xi \vee \eta := \{A \cap B \mid A \in \xi,\ B \in \eta\}.$$

Dada una función continua $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, una medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)$ y una partición medible $\xi = \{A_j\}_{j=1}^m$, es fácil ver que las colecciones

$$f^{-j}(\xi) := \{f^{-j}(A) \mid A \in \xi\}$$
$$\xi_n^f := \xi \vee f^{-1}(\xi) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\xi),$$

son particiones medibles.

Definición 6.2.1. *La* entropía métrica de f con respecto a ξ *es por definición*

$$h_\nu(f, \xi) := \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n} H_\nu(\xi_n^f) \in [0, +\infty].$$

Se define la entropía métrica de f *(respecto a ν) como*

$$h_\nu(f) := \sup\{h_\nu(f, \xi) \mid \xi \textit{ partición medible de } \mathbb{X}\} \in [0, +\infty].$$

6.2.2. Entropía Topológica y Principio Variacional. Dado un espacio métrico compacto $(\mathbb{X},\rho)$ y un entero no negativo n definimos la n-métrica dinámica ρ_n, como la función

$$\begin{array}{rccc} \rho_n: & \mathbb{X}\times\mathbb{X} & \to & [0,+\infty[\\ & (x,y) & \mapsto & \rho_n(x,y) \end{array}$$

definida por

$$\rho_n(x,y) := \max_{0\leq j\leq n-1}\{\rho(f^j(x),f^j(y))\}.$$

Claramente, $\rho_0 = \rho$ y es fácil ver que ρ_n es una métrica que induce la misma topología que ρ en $\mathbb{X}$.

Dado un entero no negativo n y $\epsilon > 0$, diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{X}$ es (n,ϵ)-separado, si para todo x, $y \in A$ se tiene que

$$\rho_n(x,y) \geq \epsilon.$$

Dado un conjunto A, denotamos por $\mathrm{Card}(A)$ a su cardinalidad.

Definición 6.2.2. *Definimos la* entropía topológica de f *como*

$$\mathrm{h_{top}}(f) := \sup_{\epsilon>0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\max\{\mathrm{Card}(A)\mid A \text{ es } (n,\epsilon)\text{-separado }\}\right)\in[0,+\infty].$$

Dado un conjunto no vacío $B \subset \mathbb{X}$, definimos la entropía topológica de f restringida a B como

$$\mathrm{h_{top}}(f|B) := \sup_{\epsilon>0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\max\{\mathrm{Card}(A)\mid A\subset B,\ A \text{ es } (n,\epsilon)\text{-separado }\}\right).$$

Notamos que si $A \subset B$ entonces $\mathrm{h_{top}}(f|A) \leq \mathrm{h_{top}}(f|B)$.

Teorema 6.2.3. *(Principio Variacional)*
Sea $(\mathbb{X},\rho)$ un espacio métrico compacto y $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ una función continua. Entonces

$$\mathrm{h}_{top}(f) = \sup\{h_\nu(f)\mid \nu\in\mathcal{M}_{\mathbb{X}}(f)\}.$$

Ver demostración en [28] p. 188-190.

Usando el Teorema 6.1.4, se puede demostrar (ver demostración en [28] p. 190, 191) la siguiente variante del Principio Variacional:

$$\mathrm{h_{top}}(f) = \sup\{\mathrm{h}_\nu(f)\mid\nu\in\mathcal{E}_{\mathbb{X}}(f)\}.$$

Dado un entero positivo n, definimos la n-ésima bola dinámica con centro x y radio $r > 0$, al conjunto definido por

$$B_n(x,r) := \{y\in\mathbb{X}\mid\rho_n(x,y) < r\}.$$

Teorema 6.2.4. *(Brin-Katok)*
Sea $(\mathbb{X},\rho)$ un espacio métrico compacto y $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ una función continua. Si $\nu\in\mathcal{E}_{\mathbb{X}}(f)$, entonces para ν-c.t.p. $x\in\mathbb{X}$ se tiene que

$$h_\nu(f) = \sup_{\epsilon>0}\liminf_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}\log(\nu(B_n(x,\epsilon))).$$

Ver demostración en [3].

Teorema 6.2.5. *(Principio Variacional Relativo)*
Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ un espacio métrico compacto y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una función continua. Si ν es una medida ergódica y $A \subset \mathbb{X}$ es un boreliano tal que $\nu(A) > 0$, entonces

$$h_\nu(f) \leq \mathrm{h}_{top}(f|A).$$

Ver demostración en [22].

6.3. Entropía Topológica de Endomorfismos Holomorfos de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. De ahora en adelante, nos restringiremos al caso $\mathbb{X} = \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, provisto de la métrica ρ inducida por la forma de Fubini-Study y f un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de grado D.

Dado un entero positivo n, definimos el conjunto

$$\Gamma_n := \left\{ \left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right) \mid x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \right\} \subset \left(\mathbb{P}^k(\mathbb{C})\right)^n,$$

y para un subconjunto X de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ definimos:

$$\Gamma_n|X := \Gamma_n \cap (X \times (\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^{n-1}).$$

Recordamos que, dado $j = 0, \ldots, k$ y una carta local afín afín $(\mathbf{z}_j, U_j)$ de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, la forma de Fubini-Study ω de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, se escribe localmente por

$$\omega_j(p)(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \|\mathbf{z}_j(p)\|^2(\vec{v}, \vec{w}),$$

para todo $p \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^k$.

Dado un entero positivo n, y una colección de cartas locales $(U_{j_1}, \mathbf{z}_{j_1}), \ldots, (U_{j_n}, \mathbf{z}_{j_n})$ de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, definimos sobre el espacio producto $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$ una colección de $(1,1)$-formas diferenciales locales

$$\omega_{j_1 \cdots j_n}(p_1, \ldots, p_n)((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n), (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)) := \sum_{\ell=1}^{n} \omega_{j_\ell}(p_\ell)(\vec{v}_\ell, \vec{w}_\ell),$$

para todo $(p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$ y para todo par $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n), (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) \in (\mathbb{C}^k)^n$. Es fácil ver, que la colección de $(1,1)$-formas diferenciales locales $\{\omega_{j_1 \cdots j_n}\}$ determinan una forma diferencial sobre $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$, que denotamos por $\omega_{\times n}$, que además, satisface las propiedades de métrica hermitiana sobre $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$. Llamamos a esta métrica hermitiana la métrica producto de Fubini-Study sobre $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$.

Dado un entero positivo r, una variedad algebraica X de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de dimensión r y $\omega_{\times n}$ la forma de Fubini-Study en el espacio producto $\left(\mathbb{P}^k(\mathbb{C})\right)^n$, definimos

$$\mathrm{lov}(f|X) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathrm{Vol}(\Gamma_n|X)\right) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\int_{\Gamma_n|X} \omega_{\times n}^{\wedge r} \right).$$

Es importante notar, que de (5.3.2) y la definición, se tiene la identidad:

$$\int_{\Gamma_n|X} \omega_{\times n}^{\wedge r} = \int_X \left(\omega + f^*\omega + \cdots + (f^{n-1})^*\omega\right)^{\wedge r}.$$

Teorema 6.3.1. *(Gromov)*
Si f es un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de grado D y $X \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ una variedad algebraica, entonces

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f|X) \leq \mathrm{lov}(f|X).$$

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto (n,ϵ)-separado. Como la colección de n-bolas dinámicas $\{B_n(y,\epsilon/2)\}_{y\in A}$ son disjuntas dos a dos, se tiene que

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_n|X) \geq \sum_{y\in A} \mathrm{Vol}\left(\Gamma_n|B_n(y,\epsilon/2)\right).$$

Del Teorema 5.7.1, se puede ver que existe $c > 0$ independiente de y y de n tal que

$$\mathrm{Vol}\left(\Gamma_n|B_n(y,\epsilon/2)\right) \geq c.$$

Luego,

$$\frac{1}{n}\log\left(\mathrm{Vol}(\Gamma_n|X)\right) \geq \frac{\log c}{n} + \frac{1}{n}\log\left(\mathrm{máx}\{\mathrm{Card}(A) \mid A \subset X,\ A \text{ es } (n,\epsilon)\text{-separado } \}\right),$$

lo que implica claramente que $\mathrm{lov}(f|X) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f|X)$. □

El argumento anterior se adapta para demostrar que para cada conjunto $X \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y $\epsilon > 0$, si denotamos por $(\Gamma_n|X)_\epsilon$ una ϵ-vecindad de $\Gamma_n|X$ en $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$, obtenemos

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f|X) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(\mathrm{Vol}((\Gamma_n|X)_\epsilon)). \tag{6.3.1}$$

Lema 6.3.2. *Si f es un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y X una variedad algebraica de dimesión r, entonces*

$$\mathrm{lov}(f|X) = r\log D.$$

En particular, tomando $X = \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, obtenemos que

$$\mathrm{h}_{top}(f) \leq \mathrm{lov}(f|\mathbb{P}^k(\mathbb{C})) = k\log D.$$

Demostración. Sea τ el grado de X.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Gamma_n|X) &= \int_{\Gamma_n|X} \omega_{\times n}^{\wedge r} \\
&= \int_X \left(\omega + f^*\omega + \cdots + (f^{n-1})^*\omega\right)^{\wedge r} \\
&= \sum_{0\leq j_1,\dots,j_r\leq n-1} \int_X (f^{j_1})^*\omega \wedge \cdots \wedge (f^{j_r})^*\omega \\
&= \tau \sum_{0\leq j_1,\dots,j_r\leq n-1} D^{j_1+\cdots+j_r} \\
&= \tau(1 + D + \cdots + D^{n-1})^r \\
&= \tau\left(\frac{D^n-1}{D-1}\right)^r.
\end{aligned}$$

Luego, se obtiene fácilmente que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left(\mathrm{Vol}(\Gamma_n|X)\right) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left(\tau\left(\frac{D^n-1}{D-1}\right)^r\right) = r\log D.$$

□

7. Dos Caracterizaciones de la Medida de Equilibrio de un Endomorfismo Holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$

Durante todo este capítulo, f denotará un endomorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de grado $D \geq 2$. Todo el capítulo está enteramente basado en el trabajo [2].

Usando la nomenclatura del formalismo termodinámico, una medida de probabilidad f-invariante se dice una medida de equilibrio ó estado de equilibrio de f, si esta medida realiza la máxima entropía métrica posible. En este capítulo, veremos el hecho principal de esta monografía; esto es, que todo endomorfismo holomorfo f posee una única medida de equilibrio $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}(f)$, sin masa en el conjunto excepcional $E \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, conjunto que definiremos más adelante.

Dado $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, denotaremos por $\mathrm{mult}_x(f)$ a la multiplicidad de f en x.

Teorema 7.0.3. *Para todo $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\sum_{f(y)=x} \mathrm{mult}_y(f) = D^k.$$

Ver demostración en [23] p. 53.

Definimos el pullback de f como el operador $f^* : \mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \to \mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}$, dado por

$$f^*\nu[\varphi] := \int \sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi(y) d\nu(x), \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}), \mathbb{R}),$$

donde la suma está tomada contando la multiplicidad de las preimágenes.

Por la identidad (6.1.1), observamos que para toda medida $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}$ y toda $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_* \circ (D^{-k} f^*)\nu[\varphi] &= D^{-k} \textstyle\int \sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi \circ f(y) d\nu(x) \\ &= D^{-k} \textstyle\int D^k \varphi(x) d\nu(x) \\ &= \nu[\varphi]. \end{aligned}$$

En particular, si $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}$ es tal que $D^{-k} f^* \nu = \nu$, entonces $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}(f)$.

Denotaremos por $\mu_{n,x}$ a la medida de conteo de preimágenes por f^n dada por $\mu_{n,x} := (D^{-k} f^*)^n \delta_x = D^{-kn} f^{n*} \delta_x$.

La medida de equilibrio de f se puede caracterizar por los siguientes dos teoremas.

Teorema 1. *(Primera Caracterización)*
Existe una única medida de probabilidad μ sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ que verifica $D^{-k} f^* \mu = \mu$, sin masa en el conjunto excepcional E. Además, para toda medida de probabilidad ν sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ sin masa sobre E, se tiene que

$$D^{-kn} f^{n*} \nu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu.$$

En particular, μ refleja la distribución de preimágenes de puntos no excepcionales, es decir, $\mu_{n,x} \to \mu$ si y sólo si $x \notin E$.

Como consecuencia del teorema anterior, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 7.1. *La medida μ es mezclante.*

Demostración. Del Lema 6.1.3, sabemos que es suficiente ver la acción de μ sobre las funciones continuas.

Sean $\varphi, \phi \in C(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}), \mathbb{R})$. Por hipótesis, tenemos que para cada $x \notin E$,

$$D^{-kn} \int \sum_{z \in f^{-n}(x)} \varphi(z) d\mu(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int \varphi d\mu.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x) \cdot \phi \circ f^n(x) d\mu(x) &= \int \varphi(x) \cdot \phi \circ f^n(x) d\left(D^{-kn} f^{n*}\mu\right)(x) = \\
&= D^{-kn} \int \sum_{z \in f^{-n}(x)} \varphi(z) \cdot \phi \circ f^n(z) d\mu(x) = \\
&= \left(D^{-kn} \int \sum_{z \in f^{-n}(x)} \varphi(z) d\mu(x)\right) \left(\int \phi d\mu\right) \\
&\xrightarrow[n \to +\infty]{} \left(\int \varphi d\mu\right) \left(\int \phi d\mu\right).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *(Segunda Caracterización)*
La medida de equilibrio μ es la única medida de entropía maximal de f.

7.1. La Primera Aproximación. En esta subsección, mostraremos que dados $x, y \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tales que $\mu_{n,x}(C) \to 0$ y $\mu_{n,y}(C) \to 0$ cuando $n \to +\infty$, donde C es el conjunto algebraico de puntos críticos, entonces la diferencia $\mu_{n,x} - \mu_{n,y}$ converge débilmente a 0. Este hecho se basa en que la mayor parte de las ramas inversas locales de f^n son exponencialmente contractivas, como se verificará en el Lema 7.1.1.

Denotaremos por $V = f(C)$ al conjunto de valores críticos y dado un entero positivo ℓ denotaremos por V_ℓ al conjunto definido por $V_\ell := \cup_{j=1}^{\ell} f^j(C)$. Por el Teorema 5.6.2, los conjuntos V y V_ℓ son variedades algebraicas. Definimos el conjunto postcrítico V_∞ por $V_\infty := \cup_{\ell \geq 1} V_\ell$.

Un disco holomorfo se dirá genéricamente plano, si está contenido en una línea proyectiva no contenida en V_∞.

Lema 7.1.1. *Para todo $\epsilon > 0$, existe un entero $\ell \geq 0$ tal que, para todo disco compacto genéricamente plano Δ que no intersecte a V_ℓ, podemos construir $(1-\epsilon)D^{kn}$ ramas inversas de f^n con $n \geq \ell$, con imágenes Δ_j^{-n} y $\mathrm{Diam}(\Delta_j^{-n}) \leq cD^{-n/2}$, donde c no depende de n.*

Demostración. Sea τ el grado de V. Tomamos ℓ fijo tal que $2\tau D^{-\ell}(1-D^{-1})^{-1} < \epsilon$ y sea L la línea proyectiva que contiene a Δ. Como Δ es compacto y $\Delta \cap V_\ell = \emptyset$, podemos tomar un disco $\widetilde{\Delta}$ ligeramente más grande tal que $\widetilde{\Delta} \subset L$, $\widetilde{\Delta} \cap V_\ell = \emptyset$ y $\widetilde{\Delta} \setminus \Delta$ sea biholomorfo a un anillo.

Por hipótesis, f^ℓ posee $D^{k\ell}$ ramas inversas sobre $\widetilde{\Delta}$, cuyas imágenes denotaremos por $\widetilde{\Delta}_j^{-\ell}$, para cada $j = 1, \ldots, D^{k\ell}$. Observamos que $\{\widetilde{\Delta}_j^{-\ell}\}_j$ es una colección de discos disjuntos dos a dos, contenidos en $f^{-\ell}(L)$. Si $L = V(P_1, \ldots, P_{k-1})$ donde para todo $j = 1, \ldots, k-1$, el polinomio homogéneo P_j es lineal, entonces $f^{-\ell}(L) = V(P_1 \circ f^\ell, \ldots, P_{k-1} \circ f^\ell)$. Por tanto

$$\deg(f^{-\ell}(L)) \leq D^{(k-1)\ell}.$$

Del Teorema de Bezout (Teorema 4.5.3), se tiene que $f^{-\ell}(L)$ y V se intersectan en a lo más $\tau D^{(k-1)\ell}$ puntos. Así, existen por lo menos $D^{k\ell} - \tau D^{(k-1)\ell} = D^{k\ell}(1 - \tau D^{-\ell})$ discos $\widetilde{\Delta}_j^{-\ell}$ que no intersectan a V.

Luego, sobre cada uno de estos $\widetilde{\Delta}_j^{-\ell}$, podemos construir D^k ramas inversas $f^{-1} : \widetilde{\Delta}_j^{-\ell} \to \widetilde{\Delta}_j^{-\ell-1}$, por tanto $D^{k(\ell+1)}(1 - \tau D^{-\ell})$ ramas inversas de $f^{\ell+1}$ sobre $\widetilde{\Delta}$ con imágenes $\widetilde{\Delta}_j^{-\ell-1}$. Nuevamente, usando el Teorema de Bezout, tenemos por lo menos $D^{k(\ell+1)}(1 - \tau D^{-\ell}) - \tau D^{(k-1)(\ell+1)} = D^{k(\ell+1)}(1 - \tau D^{-\ell}(1 + D^{-1}))$ discos $\widetilde{\Delta}_j^{-\ell-1}$ que no intersectan V.

Siguiendo el mismo procedimiento, para $n \geq \ell$, podemos construir inductivamente al menos,

$$D^{kn}\left(1 - \tau D^{-\ell}\left(1 + D^{-1} + \ldots + D^{-n+\ell+1}\right)\right) \geq D^{kn}\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

ramas inversas de f^n sobre $\widetilde{\Delta}$ con imágenes $\widetilde{\Delta}_j^{-n}$.

Por otra parte, del Teorema 5.6.1 tenemos que

$$\mathrm{Area}(f^{-n}(L)) = \int_{f^{-n}(L)} \omega = \deg(f^{-n}(L)) \leq D^{(k-1)n}.$$

Como los discos $\widetilde{\Delta}_j^{-n}$ son disjuntos dos a dos en $f^{-n}(L)$, a lo más $(\epsilon/2)D^{kn}$ de ellos pueden tener área mayor que $(2/\epsilon)D^{-n}$, por lo que, al menos $(1-\epsilon)D^{kn}$ de estos discos satisfacen

$$\mathrm{Area}(\widetilde{\Delta}_j^{-n}) \leq \frac{2}{\epsilon} D^{-n}.$$

Denotando $\Delta_j^{-n} := \widetilde{\Delta}_j^{-n} \cap f^{-n}(\Delta)$, el Lema 5.7.3 nos dice que existe $a > 0$ tal que

$$(\mathrm{Diam}(\Delta))^2 \leq a \frac{\mathrm{Area}(\widetilde{\Delta})}{\min\{1, \mathrm{Mod}(\widetilde{\Delta} - \Delta)\}} = a \frac{\mathrm{Area}(\widetilde{\Delta}_j^{-n})}{\min\{1, \mathrm{Mod}(\widetilde{\Delta} - \Delta)\}}.$$

Luego tomamos

$$c = \sqrt{\frac{2a}{\epsilon \cdot \min\{1, \mathrm{Mod}(\widetilde{\Delta} - \Delta)\}}},$$

y ésto concluye la demostración.

□

Corolario 7.1.2. *Sean $x, y \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tales que $\mu_{n,x}(C) \to 0$ y $\mu_{n,y}(C) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Entonces, $\mu_{n,x} - \mu_{n,y} \to 0$ en $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}$ cuando $n \to +\infty$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y tomamos ℓ como en el lema anterior. Sea $\varphi \in C(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ con $\|\varphi\|_\infty = 1$, y sean $z, t \notin V_\ell$. Supongamos que la línea que une z y t no está contenida en V_∞ y sea Δ un disco genéricamente plano en esta línea que contiene a z y t. Sea $n \geq \ell$, luego

$$(7.1.1) \qquad \left|\int \varphi d\mu_{n,z} - \int \varphi d\mu_{n,t}\right| =$$

$$= \left|D^{-kn} \int \sum_{y \in f^{-n}(x)} \varphi(y) d\delta_z(x) - D^{-kn} \int \sum_{y \in f^{-n}(x)} \varphi(y) d\delta_t(x)\right| =$$

$$= D^{-kn} \left| \sum_{y \in f^{-n}(z)} \varphi(y) - \sum_{y \in f^{-n}(t)} \varphi(y) \right|.$$

Por el lema anterior, existe una colección de $(1-\epsilon)D^{kn}$ de discos $\{\Delta_j^{-n}\}_j$ disjuntos dos a dos de preimágenes de Δ, con $\mathrm{Diam}(\Delta_j^{-n}) < cD^{-n/2}$. Separamos ambas sumas en: a lo menos $(1-\epsilon)D^{kn}$ pares $y_1^j, y_2^j \in \Delta_j^{-n}$ y a lo más ϵD^{kn} pares fuera de $\bigcup_j \Delta_j^{-n}$. Entonces, por la continuidad uniforme de φ sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, podemos tomar n suficientemente grande tal que

$$\mathrm{dist}(y_1^j, y_2^j) < cD^{-n/2} \Rightarrow \mathrm{dist}(\varphi(y_1^j), \varphi(y_2^j)) < \epsilon,$$

y por tanto, obtener que

$$\left|\int \varphi d\mu_{n,z} - \int \varphi d\mu_{n,t}\right| \leq D^{-kn}(1-\epsilon)D^{kn}\epsilon + D^{-kn}\epsilon D^{kn} 2\|\varphi\|_\infty =$$
$$= \epsilon(1 - \epsilon + 2\|\varphi\|_\infty) \leq 3\epsilon.$$

Ahora, si la línea que une a z y t quedara contenida en V_∞, podemos tomar $s \notin V_\infty$ y usar el argumento anterior a los pares (z, s) y (s, t), donde a lo más duplicamos la estimación de error.

Notamos que para todo par de enteros positivos $n > m$, se tiene la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
\int \varphi d\mu_{n,x} &= D^{-kn} \int \sum_{z \in f^{-n}(w)} \varphi(z) d\delta_x(w) \\
&= D^{km} \int \sum_{z \in f^{-m}(x)} \left(D^{-k(n-m)} \int \sum_{z_0 \in f^{-(n-m)}(z)} \varphi(z_0) d\delta_z(z_0) \right) d\delta_x(z) \\
&= \int \left(\int \varphi d\mu_{n-m,z} \right) d\mu_{m,x}(z).
\end{aligned}$$

Ahora, consideramos $x, y \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tales que $\mu_{n,x}(C) \to 0$ y $\mu_{n,y}(C) \to 0$. Por hipótesis, para todo entero $\ell \geq 0$, se tiene que:

$$\mu_{n,x}(V_\ell) = \mu_{n+\ell,x}(C) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Tomamos m suficientemente grande, tal que $\mu_{m,x}(V_\ell) + \mu_{m,y}(V_\ell) \leq \epsilon$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\left|\int \varphi d\mu_{n,x} - \int \varphi d\mu_{n,y}\right| = \\
&\quad \left|\int \left(\int \varphi d\mu_{n-m,z}\right) d\mu_{m,x}(z) - \int \left(\int \varphi d\mu_{n-m,t}\right) d\mu_{m,y}(t)\right| \leq \\
&\qquad \int\int \left|\int \varphi d\mu_{n-m,z} - \int \varphi d\mu_{n-m,t}\right| d\mu_{m,x}(z) d\mu_{m,y}(t) \leq \\
&\qquad \int_{V_\ell}\int_{V_\ell} \left|\int \varphi d\mu_{n-m,z} - \int \varphi d\mu_{n-m,t}\right| d\mu_{m,x}(z) d\mu_{m,y}(t) + \\
&\qquad\qquad \int_{V_\ell^c}\int_{V_\ell^c} \left|\int \varphi d\mu_{n-m,z} - \int \varphi d\mu_{n-m,t}\right| d\mu_{m,x}(z) d\mu_{m,y}(t).
\end{aligned}
$$

Luego, por el Lema de Fatou, se tiene que

$$
\limsup_{n\to+\infty} \int_{V_\ell}\int_{V_\ell} \left|\int \varphi d\mu_{n-m,z} - \int \varphi d\mu_{n-m,t}\right| d\mu_{m,x}(z) \times d\mu_{m,y}(t) \leq 2\|\varphi\|_\infty \epsilon = 2\epsilon,
$$

y por la primera parte de esta demostración,

$$
\limsup_{n\to+\infty} \int_{V_\ell^c}\int_{V_\ell^c} \left|\int \varphi d\mu_{n-m,z} - \int \varphi d\mu_{n-m,t}\right| d\mu_{m,x}(z) \times d\mu_{m,y}(t) \leq 2 \cdot 3\epsilon,
$$

lo que, finalmente, nos da que

$$
\limsup_{n\to+\infty} \left|\int \varphi d\mu_{n,x} - \int \varphi d\mu_{n,y}\right| \leq 2\epsilon + 2 \cdot 3\epsilon = 8\epsilon.
$$

□

7.2. El Conjunto Excepcional y su Estratificación. Dado $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, notamos que $\sup_{z\in B(f(x),\epsilon)} \mathrm{Card}\left(B(x,\epsilon) \cap \{f^{-1}(z)\}\right)$ es decreciente en $\epsilon > 0$. Definimos el grado topológico local $\deg_x(f)$ de f en x por

$$
\inf_{\epsilon>0} \sup_{z\in B(f(x),\epsilon)} \mathrm{Card}\left(B(x,\epsilon) \cap \{f^{-1}(z)\}\right),
$$

y éste coincide con la multiplicidad de f en x.

Para todo $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, $\deg_x(f) \in \{1, \ldots, D^k\}$ y para todo entero no negativo s, los conjuntos $\{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \deg_x(f) \geq s\}$ son variedades algebraicas (ver [23] p. 44-47). Además, dado un entero positivo ℓ, se tiene la identidad

$$
\deg_x(f^\ell) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \deg_{f^j(x)}(f).
$$

Si $A \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es una variedad proyectiva, definimos el grado topológico de f en A, que denotamos por $\deg_A(f)$, como

$$
\deg_A(f) := \min_{x\in A}\{\deg_x(f)\}.
$$

Luego, A posee un subconjunto denso de puntos $x \in A$ con $\deg_x(f) = \deg_A(f)$. De ésto se deduce que la siguiente identidad es válida

$$\deg_A(f^\ell) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \deg_{f^j(A)}(f).$$

Recordamos que un conjunto $A \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ es totalmente invariante por f si

$$f(A) = A \text{ y } f^{-1}(A) = A.$$

Lema 7.2.1. *Sea A una variedad proyectiva, $s = \deg_A(f)$ y p la codimensión de A en $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Entonces $s \leq D^p$. Si además $f(A) = A$, entonces se tiene la igualdad si y sólo si A es totalmente invariante.*

Demostración. En toda la demostración, las cardinalidades estan tomadas contando multiplicidades. Sea $x \in A$ tal que $\deg_x(f) = s$, no singular en A y no crítico para $f|_A$. Recordamos que una variedad lineal P de codimensión p se escribe como la variedad de p polinomios lineales, por tanto, $f^{-1}(P)$ se escribe como la variedad de p polinomios de grado D, por los que $\deg(f^{-1}(P)) \leq D^p$.

Por el Teorema de la Función Implícita (Teorema 2.4), podemos tomar una vecindad U de x y ρ una retracción holomorfa de U sobre $U \cap A$. Si P es una variedad lineal de codimensión p cercana a $T_{f(x),f(A)}$, entonces ρ induce un cubrimiento ramificado de grado s de $f^{-1}(P) \cap U$ sobre $A \cap U$, ya que escogimos x no crítico para $f|_A$. Por tanto, si Q es una variedad lineal cercana a $T_{x,\rho^{-1}(x)}$, entonces se tiene que $\operatorname{Card}(f^{-1}(P) \cap Q) \geq s$.

Además, como el grado de $f^{-1}(P)$ es a lo más D^p y el grado de Q es 1, por el Teorema de Bezout tenemos que $\operatorname{Card}(f^{-1}(P) \cap Q) \leq D^p$, y por tanto $s \leq D^p$.

Por otra parte, si $f(A) = A$ entonces $A \subset f^{-1}(A)$ y por tanto se tiene que

$$f^{-1}(Q \cap A) = f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(A) \supset f^{-1}(Q) \cap A,$$

donde genéricamente, $f^{-1}(Q)$ se intersecta en s componentes con A.

Si el grado de A es κ, entonces por el Teorema de Bezout se tiene que

$$\operatorname{Card}(Q \cap A) = \kappa \text{ y } \operatorname{Card}(f^{-1}(Q) \cap A) = \kappa D^{k-p},$$

luego

$$\sum_{z \in f^{-1}(Q \cap A)} \deg_z(f) = \kappa D^k \text{ y } \sum_{z \in f^{-1}(Q) \cap A} \deg_z(f) = \kappa D^{k-p} s.$$

De donde se deduce claramente que $f^{-1}(A) \subset A$ si y sólo si $\kappa D^k \leq \kappa D^{k-p} s$, lo que concluye la demostración.

□

Para cada $p = 2, \ldots, k$, definimos las variedades algebraicas

$$A_p := \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \deg_x \geq D^p\} \text{ y } A_1 := C = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \deg_x f \geq 2\},$$

que claramente satisfacen:

$$A_k \subset \cdots \subset A_p \subset A_{p-1} \subset \cdots \subset A_1 = C.$$

Por el lema anterior, la codimensión de A_p, que denotamos por $\mathrm{codim}(A_p)$, satisface $D^p \leq D^{\mathrm{codim}(A_p)}$, lo que implica que $\mathrm{codim}(A_p) \geq p$ para cada $p = 2, \ldots, k$. Notar que $\mathrm{codim}(C) = 1$ y $\deg_C f = 2$ por lo que las condiciones del lema se satisfacen para $p = 1, \ldots, k$.

Afirmación 7.2.2. *El número de variedades algebraicas totalmente invariantes por f es finito.*

Demostración. Sea B una variedad algebraica completamente invariante y A una de sus componentes irreducibles. Entonces para todo $n \geq 1$ el conjunto $f^{-n}(A)$ es una subvariedad algebraica de B. Luego existen $n > m$ tales que $f^{-n}(A) = f^{-m}(A)$ y por lo tanto $f^{-(n-m)}(A) = A$. Es decir, A es completamente invariante para f^{n-m}.

Además, poniendo $\ell = n - m$, se tiene

$$D^{pl} = \deg_A(f^\ell) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \deg_{f^j(A)}(f),$$

y para todo $j = 0, \ldots, \ell - 1$, f^j mantiene la dimensión de A por ser una aplicación finita a uno, luego se tiene que $\deg_{f^j(A)}(f) \leq D^p$ por el Lema 7.2.1. Entonces necesariamente $\deg_A f = D^p$ y por tanto A está contenida en una componente de dimensión maximal de A_p. La variedad algebraica A_p tiene finitas componentes irreducibles, por tanto concluimos, que sólo puede haber un número finito de variedades algebraicas completamente invariantes.

□

Definición 7.2.3. *El* conjunto excepcional *E de f, es la unión (finita) de todas las variedades algebraicas propias completamente invariantes.*

Dados $p = 1, \ldots, k$ y $\ell = 1, 2, \ldots$, denotaremos por A_p^ℓ a la variedad algebraica definida por

$$A_p^\ell := \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \deg_x f^\ell \geq D^{p\ell}\}.$$

Afirmación 7.2.4. *El conjunto excepcional de cualquier iterado de f coincide con el conjunto excepcional de f.*

Demostración. Igual que antes, tenemos que $\mathrm{codim}(A_p^\ell) \geq p$. Podemos escoger un punto x en una componente irreducible de $A_p^{\ell+1}$ de codimensión al menos p, tal que $f^\ell(x)$ pertenezca a alguna componente irreducible de codimensión al menos p de $f^\ell(A_p^{\ell+1})$ con $\deg_{f^\ell(x)} f \leq D^p$. Luego,

$$D^{p(\ell+1)} \leq \deg_x f^\ell = \deg_x f^\ell \cdot \deg_{f^\ell} f \leq \deg_x f^\ell \cdot D^p,$$

obteniendo que x pertenece a alguna componente irreducible de A_p^ℓ de codimensión p.

Obtenemos así una cadena, descendiente en el índice ℓ, de estratos de codimensión p de A_p^ℓ. Esta cadena descendiente induce una cadena ascendente de ideales en el anillo noetheriano $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_k]$. Por tanto, esta cadena se estabiliza.

Además, si x pertenece a alguna componente irreducible de codimensión p de $f^\ell(A_p^{\ell+1})$, entonces existe y en alguna componente irreducible de codimensión p de

$A_p^{\ell+1}$, tal que $f(y) = x$. Luego, $\deg_y f \leq D^p$ y por tanto

$$\deg_x f^\ell = \prod_{j=0}^{\ell-1} \deg_{f^{j+1}(y)} f = \frac{\deg_y f^{\ell+1}}{\deg_y f} \geq \frac{D^{p(\ell+1)}}{D^p} = D^{p\ell},$$

lo que implica, que x pertenece al estrato de codimensión p de A_p^ℓ.

Asi, para ℓ suficientemente grande, la imagen del estrato de codimensión p de A_p^ℓ está contenida en si misma, y si A es una componente irreducible de este estrato, entonces $\deg_A f = D^p$, lo que muestra, por el Lema (7.2.1), que A_p^ℓ es completamente invariante.

□

Lema 7.2.5. *Si $x \notin E$, entonces $\mu_{n,x}(C) \to 0$ cuando n tiende a $+\infty$.*

Demostración. Demostraremos con una inducción descendente en $p = 1, \ldots, k$ el lema, estratificando al conjunto crítico C, por sus subvariedades algebraicas A_p.

Salvo pasar a un iterado de f, podemos suponer que las componentes de codimensión p de E que denotamos por E_p coinciden con las componentes de codimensión p de A_p. Luego, E_k coincide con A_k y por tanto, tenemos que para todo entero positivo n y todo $x \notin E$

$$\mu_{n,x}(A_k) = 0.$$

Sea $p \in \{2, \ldots, k\}$ y supongamos que existe $\lambda_p \in [0, 1[$ tal que $\mu_{n,x}(A_p) \leq \lambda_p^n$. Por hipótesis, tenemos que E_{p-1} coincide con las componentes de codimensión $p-1$ de A_{p-1}, por tanto, $f^{-n}(x)$ intersecta a A_{p-1} sólo en sus componentes de codimensión mayor o igual que D^p. Si A es una componente irreducible de A_{p-1} y P es un plano genérico de dimensión complementaria con A, que pasa por x, por el Teorema de Bezout tenemos que $\mathrm{Card}(f^{-n}(P) \cap A) = \deg(A) \cdot D^{k-p}$, por lo que se tiene que

$$\mathrm{Card}(f^{-n}(x) \cap A_{p-1}) \leq \deg(A_{p-1}) \cdot D^{k-p}.$$

Acotaremos $\mu_{n,x}(A_{p-1})$, estimando la multiplicidad de los puntos de $f^{-n}(x)$.

Sea $\rho \in]0, 1[$ fijo, tal que $(D^p - 1)^\rho D^{k(1-\rho)} < D^p$. Tenemos que

$$\mu_{n,x}\left(\bigcup_{j=0}^{[n\rho]} f^{-j}(A_p)\right) \leq \sum_{j=0}^{[n\rho]} \mu_{n,x}(f^{-j}(A_p)) =$$

$$= \sum_{t=n-[n\rho]}^{n} \mu_{t,x}(A_p) \leq \lambda_p^{n-[n\rho]}(1 + \lambda_p + \ldots + \lambda_p^{[n\rho]}) \leq \frac{\lambda_p^{n-[n\rho]}}{1-\lambda_p}.$$

Por otra parte, si $y \in A_{p-1} \setminus \cup_{j=0}^{[n\rho]} f^{-j}(A_p)$, entonces

$$\deg_y f^n = \prod_{j=0}^{n} \deg_{f^j(y)} f = \left(\prod_{j=0}^{[n\rho]-1} \deg_{f^j(y)} f\right)\left(\prod_{j=[n\rho]}^{n} \deg_{f^j(y)} f\right)$$
$$\leq (D^p - 1)^{n\rho}(D^k)^{n(1-\rho)}.$$

Luego,

$$\mu_{n,x}(A_{p-1}) = \mu_{n,x}((A_{p-1} \setminus A_p) \sqcup A_p) = \mu_{n,x}(A_{p-1} \setminus A_p) + \mu_{n,x}(A_p) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_p^{n(1-\rho)}}{1-\lambda_p} + \frac{\deg(A_{p-1}) \cdot D^{k-p}((D^p-1)^\rho D^{k(1-\rho)})^n}{D^k} =$$

$$= \frac{\lambda_p^{n(1-\rho)}}{1-\lambda_p} + \deg(A_{p-1}) \left(\frac{(D^p-1)^\rho D^{k(1-\rho)}}{D^p} \right)^n,$$

donde claramente, para n suficientemente grande, podemos escoger $\lambda_{p-1} \in [0,1[$ tal que

$$\mu_{n,x}(A_{p-1}) \leq \lambda_{p-1}^n.$$

Por tanto, todos los estratos A_p convergen exponencialmente a 0, lo que implica que $\mu_{n,x}(C)$ converge a 0. □

Corolario 7.2.6. *Para todo $x, y \notin E$, se tiene que $\mu_{n,x} - \mu_{n,y}$ converge débilmente a 0 cuando $n \to +\infty$.*

El corolario es una consecuencia directa del Corolario 7.1.2 y el Lema 7.2.5.

7.3. La Primera Caracterización. Demostración del Teorema 1. Para demostrar el Teorema 1, demostraremos en la Subsección 7.3.1 que existe una medida de probabilidad μ sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ que verifica $D^{-k} f^* \mu = \mu$, sin masa en el conjunto excepcional E. En la Subsección 7.3.2 demostraremos que para toda medida de probabilidad ν sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ sin masa sobre E, se tiene que

$$D^{-kn} f^{n*} \nu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu.$$

La unicidad de μ es consecuencia de esta última afirmación.

7.3.1. Sea ω la métrica de Fubini-Study sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Del Teorema 5.6.1, sabemos que $\Omega := \omega^{\wedge k}/k!$ determina una medida de probabilidad boreliana sobre $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Definimos

$$\mu_n := D^{-kn} f^{n*} \Omega \ \text{ y } \ \nu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_j.$$

Como $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}$ es métrico compacto, sabemos que existe $\nu \in \overline{\{\nu_j\}_{j \geq 1}}$. Además, de la linealidad y continuidad de $D^{-kn} f^{n*}$, es fácil ver que $D^{-kn} f^{n*} \nu = \nu$.

Si $\nu(E) < 1$, entonces, sea μ la medida de probabilidad definida por

$$\mu(A) := \frac{\nu(A \cap E^c)}{\nu(E^c)}, \quad \text{para todo boreliano } A \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C}).$$

Es fácil ver, de la definición, que $\mu(E) = 0$ y $D^{-k} f^* \mu = \mu$.

Veremos que el caso $\nu(E) = 1$ es imposible, lo que completa la demostración. Si ésto ocurriera, para toda vecindad abierta U de E, tendriamos,

$$\nu_n(U) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Denotamos por $\mathrm{Jac}(f)$ al jacobiano de f con respecto a la (k,k)-forma diferencial Ω, es decir, la función que satisface la identidad $\mathrm{Jac}(f)\Omega = f^*\Omega$. Sea $M :=$

$\sup_{x\in\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \mathrm{Jac}(f)$ y como $E \subset C$, escogemos U suficientemente pequeño, tal que si $\epsilon := \sup_{x\in U} \mathrm{Jac}(f)$, entonces $\sqrt{\epsilon M} < D^k$.

Observamos que para todo par de enteros positivos $n > j$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_*^{n-j}\mu_n &= D^{kn} f_*^{n-j} f^{n*}\Omega \\ &= D^{k(n-j+j)} f_*^{n-j} f^{(n-j+j)*}\Omega \\ &= D^{kj} f^{j*}\Omega \\ &= \mu_j, \end{aligned}$$

luego, como $\nu_n(U) \to 1$, podemos escoger n suficientemente grande tal que

$$\frac{3n}{4} \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j(U) = \sum_{j=1}^{n} f_*^{n-j}\mu_n(U) = \int \sum_{q=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^q d\mu_n.$$

Denotamos por

$$r_n(x) := \sum_{q=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^q,$$

a la función que cuenta el número de veces, que la n-órbita de x por f, visita al abierto U.

Definimos el conjunto

$$X_n := \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid r_n(x) \geq n/2\}.$$

Del hecho que $\int r_n d\mu_n \geq 3n/4$, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{3n}{4} &\leq \int r_n d\mu_n \\ &= \int_{X_n} r_n d\mu_n + \int_{X_n^c} r_n d\mu_n \\ &\leq n\mu_n(X_n) + \frac{n}{2}\mu_n(X_n^c), \end{aligned}$$

lo que claramente implica que $\mu_n(X_n) \geq 1/2$. Es decir,

$$\frac{1}{2} \leq \mu_n(X_n) = D^{-kn}\int_{X_n} f^{n*}\Omega \leq$$
$$\leq D^{-kn}\int_{X_n} \mathrm{Jac}(f^n)\Omega = D^{-kn}\int_{X_n} \prod_{q=0}^{n-1}(\mathrm{Jac}(f)\circ f^q)\Omega \leq \left(\frac{\sqrt{\epsilon M}}{D^k}\right)^n,$$

lo que es una contradicción, pues $\sqrt{\epsilon M} < D^k$.

7.3.2. Sea μ una medida de probabilidad tal que $D^{-k}f^*\mu = \mu$, masa en el conjunto excepcional E y sea ν una medida de probabilidad sin masa en el conjunto excepcional E.

Observamos, que para toda $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}), \mathbb{R})$, se tiene:

$$\begin{aligned} D^{-kn} f^{n*} \mu[\varphi] &= D^{-kn} \int \sum_{z \in f^{-n}(x)} \varphi(z) d\mu(x) \\ &= \int \int \varphi(z) d\mu_{n,x}(z) d\mu(x). \end{aligned}$$

Luego, como $D^{-kn} f^{n*} \mu = \mu$ vemos que

$$\int \varphi(x) d\mu - \int \varphi d(D^{-kn} f^{n*} \nu) = \int \varphi d(D^{-kn} f^{n*} \mu) - \int \varphi d(D^{-kn} f^{n*} \nu) =$$
$$= \int \int \varphi(z) d\mu_{n,x}(z) d\mu(x) - \int \int \varphi(z) d\mu_{n,y}(z) d\nu(y) =$$
$$= \int_{E^c} \int_{E^c} \left(\int \varphi(z) d\mu_{n,x}(z) - \int \varphi(z) d\mu_{n,y}(z) \right) d\mu(x) d\nu(y).$$

Además,

$$\left| \int \varphi(z) d\mu_{n,x}(z) - \int \varphi(z) d\mu_{n,y}(z) \right| \leq 2\|\varphi\|_\infty,$$

y cuando $x, y \notin E$,

$$\int \varphi(z) d\mu_{n,x}(z) - \int \varphi(z) d\mu_{n,y}(z) \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Entonces, del Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que

$$\int \varphi(x) d\mu - \int \varphi d(D^{-kn} f^{n*} \nu) \to 0,$$

cuando $n \to +\infty$, de donde concluimos que $\mu - D^{-kn} f^{n*} \nu \to 0$ débilmente cuando $n \to +\infty$.

Corolario 7.3.1. *La medida μ no tiene masa en las variedades algebraicas.*

Demostración. Sea A una variedad proyectiva de masa positiva y dimensión minimal con esta propiedad.

Si para todo $n \neq m$ se cumpliera que

$$\mu\left(f^{-n}(A) \cap f^{-m}(A)\right) = 0,$$

entonces tendríamos que

$$\mu\left(\bigcup_{\ell \geq 0} f^{-\ell}(A)\right) = \sum_{\ell \geq 0} \mu(f^{-\ell}(A)) = \sum_{\ell \geq 0} \mu(A) = +\infty,$$

lo que contradice la finitud de μ, por lo que existe $\ell \geq 1$ tal que $f^{-\ell}(A) \supset A$.

Por otra parte, de la ecuación funcional $D^{-kn} f^{n*} \mu = \mu$, se obtiene que todas las componentes de $f^{-\ell}(A)$ tienen masa positiva por μ. Así, si B fuese una componente irreducible de $f^{-\ell}(A)$ distinta de A, tendríamos que

$$\mu(f^{-\ell}(A)) \geq \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) > \mu(A),$$

contradiciendo la invariancia de μ por f. Por lo tanto $f^{-\ell}(A) = A$, y entonces A es completamente invariante por $f^{-\ell}$, lo que implica que $A \subset E$ y por tanto $\mu(E) > 0$. Esta contradicción termina de probar lo que queríamos.

□

7.4. La Segunda Caracterización. Demostración del Teorema 2.

7.4.1. La Medida μ es una Medida de Equilibrio. Para cada boreliano $B \in \mathscr{B}$ de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y para cada par de enteros positivos n y $j = 1, \ldots, D^{kn}$ definimos

$$[B]_j^n := \{x \in B \mid \deg_x f^n = j\}.$$

De la identidad (6.1.1), es fácil ver que

$$D^{-kn} f^{n*}\mu(B) = D^{-kn} \int \sum_{z \in f^{-n}(x)} \mathbf{1}_B(z) d\mu(x) =$$

$$= D^{-kn} \sum_{j=1}^{D^{kn}} j \cdot \mu(f([B]_j^n)).$$

En particular, si B es un boreliano tal que $f|_B$ es inyectiva, entonces se tiene que

$$\mu(f(B)) = D^k \mu(B).$$

Proposición 7.4.1. *La entropía métrica $h_\mu(f)$ del endomorfismo holomorfo f satisface la desigualdad*

$$h_\mu(f) \geq k \log D.$$

Demostración. Sea $\alpha \in]0, 1[$ fijo. Por el Corolario 7.3.1 existe una vecindad U del conjunto de valores críticos V, suficientemente pequeña, tal que $\mu(U) \leq \alpha/2$.

Para cada entero positivo n definimos:

$$X_{\alpha,n} := \left\{ x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^j(x) \leq n\alpha \right\}.$$

Veremos que existe n suficientemente grande tal que $\mu(X_{\alpha,n}) > 0$. Supongamos por contradicción que para todo entero positivo n se tiene que $\mu(X_{\alpha,n}) = 0$. Luego,

$$\mu\left(\left\{ x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^j(x) > n\alpha \right\}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\left(\left\{ x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^j(x) \geq \alpha \right\}\right) = 1.$$

Por el Teorema Ergódico de Birkhoff (Teorema 6.1.5), sabemos que

$$\mu\left(\left\{ x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^j(x) = \mu(U) \leq \alpha/2 \right\}\right) = 1,$$

lo que claramente contradice lo anterior.

Por otra parte, sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \text{dist}(\partial U, V)$. Dados $x \in X_{\alpha,n}$ y $q \in \{1, \dots, n\}$, tomamos z en la imagen por f de la $(n-q)$-ésima bola dinámica con centro $f^q(x)$ y radio $\epsilon > 0$, $f(B_{n-q}(f^q(x), \epsilon))$. Observamos que existe $y \in B_{n-q}(f^q(x), \epsilon)$ tal que $f(y) = z$ y por tanto

$$\begin{aligned} \max_{0 \le j \le n-q-1} d(f^{j+1}(f^q(x)), f^j(z)) &= \max_{0 \le j \le n-q-1} d(f^{j+q+1}(x), f^{j+1}(y)) \\ &= \max_{1 \le j \le n-q} d(f^{j+q}(x), f^j(y)) \\ &\le \max_{0 \le j \le n-q} d(f^j(f^q(x)), f^j(y)) < \epsilon \end{aligned}$$

Luego, $f(B_{n-q}(f^q(x), \epsilon)) \subset B_{n-q-1}(f^{q+1}(x), \epsilon)$.

Si $f^{q+1}(x) \in U$, por la invariancia de μ se tiene

$$\mu(B_{n-q}(f^q(x), \epsilon)) \le \mu(B_{n-q-1}(f^{q+1}(x), \epsilon)),$$

y si $f^{q+1}(x) \notin U$, entonces $f : B_{n-q}(f^q(x), \epsilon) \to B_{n-q-1}(f^{q+1}(x), \epsilon)$ es una inyección. En este caso, por (7.4.1) tenemos que

$$\mu(B_{n-q}(f^q(x), \epsilon)) \le D^{-k} \mu(B_{n-q-1}(f^{q+1}(x), \epsilon)).$$

Para n suficientemente grande, hemos construido un boreliano $X_{\alpha,n}$ de medida positiva, donde para cada $x \in X_{\alpha,n}$, podemos encontrar a lo mas $n\alpha$ elementos de la n-órbita pasando por U y a lo menos $n - n\alpha$ elementos pasando fuera de U. Por tanto, obtenemos que

$$\mu(B_n(x, \epsilon)) \le D^{-kn(1-\alpha)}.$$

Del Teorema de Brin-Katok (Teorema 6.2.4), sabemos que

$$\mathrm{h}_\mu(f) = \sup_{\epsilon > 0} \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log(\mu(B_n(x, \epsilon))) \ge k(1-\alpha) \log D.$$

Como la elección de α fue arbitraria, tenemos

$$\mathrm{h}_\mu \ge k \log D.$$

□

Corolario 7.4.2. $\mathrm{h}_{top}(f) = h_\mu(f) = k \log D$. *En particular, μ es una medida de equilibrio de f.*

Demostración. Por el Lema 6.3.2 y el Principio Variacional (Teorema 6.2.3), tenemos que

$$k \log D \ge \mathrm{h}_{\text{top}}(f) = \sup\{\mathrm{h}_\nu(f) \mid \nu \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}(f)\} \ge \mathrm{h}_\mu(f),$$

y por la proposición anterior, concluimos la demostración. □

En la siguiente subsección, completamos esta monografía demostrando el Teorema 2.

7.4.2. La Medida μ es la única Medida de Equilibrio. Demostración. Supongamos que existe una medida ergódica $\nu \neq \mu$ de entropía maximal $k \log D$. La medida ν no puede tener masa en el conjunto de valores críticos V. Sino, como el conjunto de valores críticos V es una variedad algebraica de dimensión $k-1$, y si $\nu(V) > 0$, entonces de los Teoremas 6.2.5, 6.3.1 y el Lema 6.3.2, se tendría que

$$k \log D \leq \mathrm{h_{top}}(f|V) \leq \mathrm{lov}(f|V) = (k-1)\log D.$$

Por lo tanto $\nu(V) = 0$, y en particular $\nu(E) = 0$. Luego, por el Teorema 1, se tiene que $D^{-k} f^* \nu \neq \nu$.

Descomponemos $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V$ por símplices abiertos S, con frontera de masa nula por ν. Sea $U = \cup_S S$. La preimagen de cada símplice S por f es una unión disjunta de D^k componentes S_j, ordenadas por $\nu(S_1) \geq \ldots \geq \nu(S_{D^k})$. Sea

$$U_j = \bigcup_S S_j.$$

Así, tenemos que $f^{-1}(U) = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_{D^k}$, donde $f : U_j \to U$ es una biyección. Como ν es invariante, pero no un punto fijo de $D^{-k} f^*$, podemos escoger símplices S suficientemente pequeños tales que $\nu(U_1) > D^{-k}$.

Sea O un abierto relativamente compacto en U_1 y $\sigma > D^{-k}$, tal que $\nu(O) > \sigma$, y sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que la ϵ-vecindad de O esté contenida en U_1.

Denotamos por $r_n : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}$ a la función

$$r_n(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_O(x),$$

que cuenta el número de visitas de la n-órbita de $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ al abierto O.

Sea

$$X_n := \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid r_n(x) \geq \sigma n\}.$$

Por el Teorema Ergódico de Birkhoff 6.1.5, para ν-c.t.p. puntos $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} r_n(x) = \int \mathbf{1}_O d\nu = \nu(O) > \sigma;$$

luego podemos encontrar n suficientemente grande tal que $\nu(X_n) > 0$.

Del Principio Variacional Relativo 6.2.5 y de (6.3.1), tenemos que

$$k \log D = \mathrm{h}_\nu(f) \leq \mathrm{h_{top}}(f|X_n) \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\mathrm{Vol}((\Gamma_n|X_n)_\epsilon)).$$

Ahora estimaremos el volumen de $(\Gamma_n|X_n)_\epsilon$. Salvo un conjunto de medida cero, la colección $\{U_1, \ldots, U_{D^k}\}$ es un cubrimiento de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Para $\alpha \in \{1, \ldots, D^k\}^n$, denotamos por

$$U_\alpha^{-n} := \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid f^j(x) \in U_{\alpha_j},\ j = 0, \ldots, n-1\},$$

y

$$\Gamma_n(\alpha) := \Gamma_n \cap (U_{\alpha_0} \times \cdots \times U_{\alpha_{n-1}}).$$

Salvo conjuntos de medida cero, las colecciones $\{U_\alpha^{-n}\}_{\alpha\in\{1,\ldots,D^k\}^n}$ y $\{\Gamma_n(\alpha)\}_{\alpha\in\{1,\ldots,D^k\}^n}$ cubren a $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ y Γ_n respectivamente. Como la restricción de f a cada U_j es inyectiva, tenemos que, para cada $j=0,\ldots,n-1$, la restricción de f^j sobre cada U_α^{-n} es inyectiva. Luego, $x\in U_\alpha^{-n}$ si y sólo si $(x,f(x),\ldots,f^{n-1}(x))\in\Gamma_n(\alpha)$ y por tanto

$$\int_{\Gamma_n(\alpha)}\omega_{\times n}^{\wedge k}=\int_{U_\alpha^{-n}}(\omega+f^*\omega+\ldots+f^{(n-1)*}\omega)^{\wedge k}.$$

Además, si una n-órbita $(y,f(y),\ldots,f^{n-1}(y))\in\Gamma_n$ pertenece a la ϵ-vecindad $(\Gamma_n|X_n)_\epsilon$, entonces existe $x\in X_n$ tal que $\max_{j=0,\ldots,n-1}\operatorname{dist}(f^j(x),f^j(y))\le\epsilon$. Si $f^j(x)\in O$, entonces $f^j(y)\in O$, por la elección de ϵ.

Por tanto, tenemos la inclusión

$$(\Gamma_n|X_n)_\epsilon\subset\bigcup_{\alpha\in\Sigma_n}\Gamma_n(\alpha),$$

donde

$$\Sigma_n:=\{\alpha\in\{1,\ldots,D^k\}^n\mid\operatorname{Card}(\{j\mid\alpha_j=1\})\ge\sigma n\}.$$

En [22], Lyubich demostró que existe $\rho<1$ tal que $\operatorname{Card}(\Sigma_n)\le(D^{k\rho})^n$, de donde podemos ver que

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}((\Gamma_n|X_n)_\epsilon) &\le \sum_{\alpha\in\Sigma_n}\int_{\Gamma_n(\alpha)}\omega_{\times n}^{\wedge k}\\ &\le \sum_{\underline{j}\in\{0,\ldots,n-1\}^k}\sum_{\alpha\in\Sigma_n}\int_{U_\alpha^{-n}}(f^{j_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{j_k})^*\omega.\end{aligned}$$

Sea λ tal que $\rho<\lambda<1$. Separaremos la suma $\underline{j}\in\{0,\ldots,n-1\}^k$ en dos partes.

Para $\underline{j}\in\{[\lambda n],\ldots,n-1\}^k$, tenemos que, poniendo $q=[\lambda n]$,

$$\begin{aligned}\int_{U_\alpha^{-n}}(f^{j_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{j_k})^*\omega &= \int_{U_\alpha^{-n}}(f^q)^*((f^{j_1-q})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{j_k-q})^*\omega)\\ &\le \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}(f^{j_1-q})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{j_k-q})^*\omega\\ &= D^{j_1+\ldots+j_k-kq}\\ &\le D^{kn(1-\lambda)}.\end{aligned}$$

Por tanto, la primera suma está acotada por

$$n^k\operatorname{Card}(\Sigma_n)D^{kn(1-\lambda)}\le n^k(D^{k(1+\rho-\lambda)})^n.$$

Para $\underline{j}\notin\{[\lambda n],\ldots,n-1\}^k$ acotamos la segunda suma, usando el hecho que los U_α^{-n} son disjuntos dos a dos. Luego

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Sigma_n}\int_{U_\alpha^{-n}}(f^{j_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{j_k})^*\omega &\le \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})}(f^{j_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{j_k})^*\omega\\ &= D^{j_1+\ldots+j_k}\\ &\le D^{(k-1)(n-1)+\lambda n+1}\end{aligned}$$

Por tanto, la segunda suma está acotada por $n^k(D^{k-1+\lambda})^n$.

Tomamos $\tau = \text{máx}\{k(1+\rho-\lambda), k-1+\lambda\} < k$. Luego

$$\mathrm{Vol}((\Gamma_n|X_n)_\epsilon) \leq n^k(D^{k(1+\rho-\lambda)})^n + n^k(D^{k-1+\lambda})^n \leq 2n^k D^{\tau n},$$

lo que implica que

$$k\log D \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(\mathrm{Vol}((\Gamma_n|X_n)_\epsilon)) \leq \tau\log D < k\log D,$$

y así conclüye la demostración.

REFERENCIAS

[1] J. Y. Briend, J. Duval. *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$*. Acta Math. **182**, (1999), 143-157.

[2] J. Y. Briend, J. Duval. *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$*. Publ. Math. IHES. **93**, (2001), 145-159.

[3] M. Brin, A. Katok. *On local entropy*. Lecture Notes in Math. **1007**, Spinger Verlag (1983), 30-38.

[4] E. Bedford, M. Lyubich, J. Smillie. *Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphism of $\mathbb{C}^2$*. Invent. Math. **114**, (1993), 277-288.

[5] E. Bedford, M. Lyubich, J. Smillie. *Polynomial diffeomorphism of $\mathbb{C}^2$, IV: The measure of maximal entropy and laminar currents*. Invent. Math. **112**, (1993), 77-125.

[6] H. Brolin. *Invariant sets under iteration of rational functions*. Ark. Math. **6**, (1965), 103-144.

[7] E. Bedford, J. Smillie. *Fatou-Bieberbach domains arising from polynomials automorphism*. Indiana Univ. Math. 40, (1991), 789-792.

[8] E. Bedford, J. Smillie. *Polynomial diffeomorphism of $\mathbb{C}^2$: Currents, equilibrium measure and hyperbolicity*. Invent. Math. **103**, (1991), 69-99.

[9] E. Bedford, J. Smillie. *Polynomial diffeomorphism of $\mathbb{C}^2$, II: Stable manifolds and recurrence*. J. Amer. Math. Soc. **4**, (1991), 657-679.

[10] E. Bedford, J. Smillie. *Polynomial diffeomorphism of $\mathbb{C}^2$, III: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure*. Math. Ann. **294**, (1992), 395-420.

[11] A. Freire, A. Lopes, R. Mañé. *An invariant measure for rational maps*. Bol. Soc. Brasil. Mat. 14, (1983), 45-62.

[12] J. E. Fornaess, N. Sibony. *Complex Hénon mappings in $\mathbb{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains*. Duke. Math. J. **65**, (1992), 345-380.

[13] J. E. Fornaess, N. Sibony. *Complex dynamics in higher dimension*. Complex potential theory, P. M. Gauthier and G. Sabidussi ed., Kluwer Acad. Press, (1994), 131-186.

[14] P. Griffiths, J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley and Sons, New York, (1978).

[15] R. C. Gunning and H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New Jersey, (1965).

[16] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1997.

[17] J. H. Hubbard. *The Hénon mapping in the complex domain*. Chaotic Dynamics and Fractals, Academic Press, Orlando, FL, (1986) 101-111.

[18] J. H. Hubbard, P. Papadopol. *Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$*. Indiana Univ. Math. J. **43** (1994) 321-365.

[19] A. Katok, B. Hasselblat. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encycl. of Math. and its Appl. 54 (1995), Cambridge Univ. Press.

[20] P. Lelong. *Propriétes métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **67** (1950), 393-419.

[21] O- Lehto, K. I. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the Plane, 2nd. Ed.* Springer-Verlag (1973).

[22] M Lyubich. *Entropy properties of rational endomorphism of the Riemann sphere.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 3 (1983), 351-385.

[23] D. Mumford. *Algebraic geometry I: Complex projective varieties, 2nd ed.* Springer-Verlag (1995).

[24] R. Phelps *Lectures on Choquet's theorem.* Van Nostrand (1966).

[25] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, 3nd ed. (1987).

[26] I. Shafarevich. *Basic algebraic geometry I: Varieties in projective space.* Springer-Verlag, 2nd ed. (1995).

[27] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry, vol. I.* Publish or Perish, Wilmington DE (1979).

[28] P. Walters. *An introduction to ergodic theory.* Graduate Texts in Mathematics **79**, Springer Verlag (1981).

[29] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra, Vol. I.* Van Nostrand (1958).