



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

REALIZACIÓN DE ACCIONES DE GRUPOS EN SUPERFICIES DE RIEMANN

por

MARTHA JUDITH ROMERO ROJAS

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas  
de la Pontificia Universidad Católica de Chile  
como requisito para optar al grado de  
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Ángel Carocca - Pontificia Universidad Católica de Chile.

Comisión Informante: Anita María Rojas Rodríguez - Universidad de Chile.  
Víctor González - Universidad Técnica Federico Santa María.  
Gonzalo Riera - Pontificia Universidad Católica de Chile.

Enero, 2008  
Santiago, Chile

*A mi amado hijo David, por supuesto.*

*Seguro que intentarás leerla.*

## AGRADECIMIENTOS

Lo mejor de este trabajo, es conocer personas que te hagan cambiar la perspectiva de las cosas y que te enseñen que hay formas y *formas* de hacer matemáticas. Por esto y mucho más gracias, a todos aquellos que de una manera u otra contribuyeron para que este trabajo llegará a buen fin... en especial a mi director de tesis, profesor Angel Carocca, quien a pesar de otras muchas ocupaciones se comprometió y trabajó intensamente para sacar, con paciencia inagotable esta tesis adelante, por apoyarme y guiarme en todo momento. Quiero agradecer también a la profesora Rubí Rodríguez, quien siguió muy de cerca mi trabajo y mostró interés y paciencia para escucharme y corregirme cada vez que fuera necesario, a la comisión informante, profesores Anita María Rojas, Victor González y Gonzalo Riera, por su diligencia y sus oportunas sugerencias, al profesor Antonio Laface, por sus apropiados comentarios y a todos los profesores de mis cursos en la maestría, de todos me llevo un grato recuerdo.

Y como no todo en la vida son matemáticas... gracias a mi familia, porque a pesar de no estar presentes físicamente procuran siempre mi bienestar, por sus oraciones, en especial las de la abuela Fa, a mis padres por confiar en mi y por enseñarme que siempre se puede... a mi hijo por su comprensión y cariño, por permitirme realizar todo lo que es importante para mi, serás siempre mi inspiración para alcanzar mis metas, a mis hermanas, Nao y Nelcy, por ser amigas y madres de mi hijo en mi ausencia, sin su ayuda mis estudios no serían posibles, a Sarita por la alegría que me brinda y a moon por existir.

A Claudio y su familia, a Mariela, son muchos los motivos para agradecer, y como decía alguien "El margen de este apartado es muy pequeño para exponerlos".

A Willy, Angélica, Julian, J.C., Daniela, Hector, Claudia, David, ... por tantas y diversas cosas... en especial agradezco la amistad que me brindaron, la compañía, la colaboración, el apoyo, los momentos de incoherencias. Cada uno sabe la parte que le corresponde. Ustedes hicieron mi vida lejos de casa mucho más llevadera.

Quiero agradecer a todas las personas que cada día me regalaron una sonrisa, la señor a tina, don Oscar, Sole en fin...

Finalmente quiero agradecer el apoyo de todos mis amigos en Colombia y de forma especial a la Universidad del Cauca por darme comisión de estudios.

Para intentar asegurarme de no quedar mal con nadie, si me olvido de mencionar a alguien explícitamente y esa persona no sabe si se cuenta entre la gente a la que debo agradecimientos, que me perdone primero y que tenga por seguro que sí después. De los errores y omisiones soy la única responsable, por supuesto.

## INDICE

Introducción	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Superficies de Riemann . . . . .	3
1.2. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann . . . . .	10
1.3. Género de una Superficie Cociente Intermedia . . . . .	15
<b>2. Clasificando Acciones de Grupos</b>	<b>18</b>
2.1. Acciones Equivalentes . . . . .	18
2.2. Grupos que actúan en Superficies de Riemann de género pequeño . . . . .	20
<b>3. Realización de acciones de grupos</b>	<b>28</b>
3.1. Ejemplos . . . . .	28
3.2. Realizaciones en género 2 . . . . .	32
3.2.1. Grupo Reducido de Automorfismos de una Superficie Hiperelíptica	32
3.3. Realizaciones en género 3 . . . . .	38
Bibliografía	44

## INTRODUCCIÓN

Sea  $\mathcal{W}$  una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$  y sea  $G$  un subgrupo no-trivial de  $Aut(\mathcal{W})$ , el grupo de automorfismos de  $\mathcal{W}$ . Para cada valor fijo de  $g$ , existe solamente un número finito de grupos  $G$  los cuales actúan en  $\mathcal{W}$ , debido a un conocido resultado de Hurwitz [H] que establece que el orden de  $G$  es limitado superiormente por  $84(g-1)$ , vea también [Ac]

El estudio de grupos de automorfismos de superficies tiene una larga historia y su inicio se remonta a algunos siglos atrás y su interés permanece hasta nuestros días. Para valores pequeños de  $g$  se conoce la lista completa de todos los grupos de automorfismos de superficies de Riemann compactas, detalles de ésta pueden ser vistos en [Br], [Ku], [Ku-Ki], [Ma] y [Tu].

Estudios sobre clases especiales de grupos han sido realizados por varios autores y se conocen interesantes resultados, por ejemplo para grupos simples, grupos cíclicos, super-solubles, nilpotentes y abelianos, ver detalles (entre otros) en [Br1], [Co], [Gro], [Ha], [Kur] y [Mac].

Para  $g \geq 2$ , sea  $N(g)$  el orden del mayor grupo de automorfismos de  $\mathcal{W}$ . Existen varios trabajos sobre el problema de hallar grupos  $G$  actuando en  $\mathcal{W}$  y tales que su orden  $|G| = N(g) = 84(g-1)$ , (grupos de Hurwitz). No existen superficies de géneros 2, 4, 5 y 6 con tal propiedad. En [Kle], Klein muestra que existe una única superficie de género 3 sobre la cual actúa  $G = PSL(2, 7)$  (note que  $|PSL(2, 7)| = 168 = 84(3-1)$ ).

Si  $N(g) < 84(g-1)$ , entonces la determinación de  $N(g)$  concierne a dos problemas: el *Problema de existencia*: Mostrar que existe una superficie de Riemann de género  $g$  admitiendo un grupo de automorfismos de orden  $N(g)$  y el *Problema de eliminación*: Mostrar que tal superficie no admite más automorfismos.

La estructura algebraica de un grupo  $G$  dado, juega un papel importante en la determinación del género de una superficie de Riemann admitiendo  $G$ . Así, el problema de hallar superficies admitiendo grupos de automorfismos de orden maximal puede ser visto como un problema grupo-teórico.

En este trabajo estudiaremos grupos de automorfismos de superficies de Riemann compactas de géneros 2 y 3. Nuestro trabajo será estructurado de la siguiente forma:

En el primer capítulo presentamos definiciones básicas y resultados conocidos que se usarán en el desarrollo de este trabajo.

En el capítulo 2 desarrollamos resultados de un artículo de Broughton, junto con algunos ejemplos de ilustración. En el capítulo 3 daremos las realizaciones de las acciones de grupo expuestas en el capítulo 2. Para el caso de las superficies de género 2 consideraremos la superficie, contenida en  $\mathbb{C}P^2$ , definida por una curva algebraica irreducible y su normalización será nuestra superficie de Riemann compacta. Para el caso de las superficies de género 3, en algunos casos se procede como en género 2 y en otros casos se trata de curvas algebraicas irreducibles, suaves homogéneas, de forma tal que la superficie, contenida en  $\mathbb{C}P^2$ , definida por la curva es una superficie de Riemann compacta. Puesto que nuestro objetivo fundamental con este trabajo es dar las realizaciones de las acciones de grupos en superficies de Riemann compactas, comenzaremos este capítulo dando un ejemplo detallado de la obtención de los automorfismos de una superficie de Riemann compacta dada, con el fin de ilustrar el procedimiento que seguimos en los casos presentados.

Preliminares

A continuación presentaremos definiciones, propiedades y algunos resultados relevantes para el desarrollo de los capítulos posteriores.

## 1.1. Superficies de Riemann

Comenzaremos esta sección con una definición ampliamente conocida:

**Definición 1.1.1.** Una *Superficie de Riemann*  $\mathcal{W}$  es un espacio topológico hausdorff, conexo tal que existe  $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  que satisface:

- (a)  $U_\alpha$  es abierto en  $\mathcal{W}$  para todo  $\alpha$ ,  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathcal{W}$
- (b)  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ ,  $V$  abierto, es un homeomorfismo
- (c)  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  es analítica siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

Es decir, una superficie de Riemann es una variedad analítica compleja de dimensión 1.

Los ejemplos más conocidos de superficies de Riemann son:

1. abiertos del plano complejo son superficies de Riemann, particularmente el plano complejo es una superficie de Riemann.
2. La curva suave afín:

$$\mathcal{W} = \{(s, t) \in \mathbb{C}^2 : f(s, t) = 0\},$$

donde  $f$  es un polinomio irreducible y no singular, es decir, no existe una solución común para el sistema:

$$f(s, t) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = 0$$

es una superficie de Riemann. De hecho las cartas aquí se definen usando el teorema de la función implícita así: Dado  $p = (s_0, t_0) \in \mathcal{W}$ , entonces si  $\frac{\partial f(p)}{\partial t} \neq 0$ , por el teorema de la función implícita, existe una función holomorfa  $h(s)$  tal que en una vecindad  $U$  de  $p$ ,  $\mathcal{W}$  es el gráfico de  $t = h(s)$ , de esta forma  $\pi_s : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$  definida por  $\pi_s((s, t)) = s$ , con inversa  $\pi_s^{-1} : V \rightarrow U$ , definida por  $\pi_s^{-1}(z) = (z, h(z))$ , nos da una carta compleja en  $\mathcal{W}$ . Si es  $\frac{\partial f(p)}{\partial s} \neq 0$  procedemos de la misma forma con la otra proyección. Ahora, dado que el polinomio es no singular, al menos una de las derivadas es no nula en cada punto de  $\mathcal{W}$ , luego el dominio de las cartas cubre a  $\mathcal{W}$ . No es difícil ver que las cartas son compatibles puesto que si ambas cartas se obtienen usando la proyección  $\pi_s$ , o la proyección  $\pi_t$ , la composición de la inversa de una con la otra nos da la identidad, que es holomorfa. Entonces asumamos que una carta se obtuvo por la proyección  $\pi_s$  y la otra por  $\pi_t$ . Sea  $p = (s_0, t_0)$  un punto de su dominio común  $U$ , si asumimos que cerca de  $p$ ,  $\mathcal{W}$  es localmente de la forma  $t = h(s)$  para alguna función holomorfa  $h$ . Entonces en  $\pi_s(U)$  cerca de  $s_0$ , la inversa de  $\pi_s$ , envía a  $z$  en  $(z, h(z))$ . Así la composición  $\pi_t \circ \pi_s^{-1}$  envía  $z$  a  $h(z)$ , la cual es holomorfa. Así, las cartas son compatibles y dan estructura compleja a  $\mathcal{W}$ . De otro lado  $\mathcal{W}$  es segundo contable y hausdorff, como subespacio de  $\mathbb{C}^2$ , además por un resultado conocido, no fácil de probar, dado que  $f$  es irreducible, se tiene que  $\mathcal{W}$  es conexo, es decir  $\mathcal{W}$  es una superficie de Riemann.

### 3. La curva proyectiva suave:

$$\mathcal{W} = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\},$$

donde  $F$  es un polinomio homogéneo, no singular de grado  $d$ .

Este ejemplo de superficie de Riemann es menos conocido pero de gran importancia en el desarrollo de este trabajo, por lo que discutiremos sus aspectos más relevantes en detalle:

Comenzaremos por considerar el plano proyectivo  $\mathbb{CP}^2$ . Éste es el conjunto de subespacios 1-dimensionales de  $\mathbb{C}^3$ . Si  $(x, y, z)$  es un vector no nulo en  $\mathbb{C}^3$ , el conjunto

$$[x : y : z] = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

es un punto en el plano proyectivo y cada punto del plano proyectivo se puede escribir de esta forma. Dado que

$$[x : y : z] = [\lambda x, \lambda y, \lambda z]$$

para algún  $\lambda \neq 0$ ; de hecho  $\mathbb{CP}^2$  se puede ver como el espacio cociente de  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  por la acción de multiplicación en  $\mathbb{C}^*$ . De esta forma hereda una topología hausdorff, la topología cociente procedente de la proyección natural de  $\mathbb{C}^3 \setminus 0$  en  $\mathbb{CP}^2$ .

Las entradas en la notación  $[x : y : z]$  son llamadas las coordenadas homogéneas del punto correspondiente en el plano proyectivo.



El espacio  $\mathbb{CP}^2$  puede cubrirse con los conjuntos abiertos:

$$U_0 = \{[x : y : z] : x \neq 0\}, U_1 = \{[x : y : z] : y \neq 0\}, U_2 = \{[x : y : z] : z \neq 0\}$$

cada conjunto abierto es homeomorfo al plano  $\mathbb{C}^2$ . El homeomorfismo en  $U_0$  está dado por  $\varrho : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  definido por  $\varrho_0([x : y : z]) = (y/x, z/x)$ ; con inversa  $\varrho_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ , definida por  $\varrho_0^{-1}(a, b) = [1 : a : b]$ . Para  $U_1$  y  $U_2$  se definen los homeomorfismos  $\varrho_1$  y  $\varrho_2$  de forma similar dividiendo por  $y$  para  $U_1$  y por  $z$  para  $U_2$ .

Más aún, el plano proyectivo puede ser cubierto por los conjuntos  $\varrho_0^{-1}(D)$ ,  $\varrho_1^{-1}(D)$  y  $\varrho_2^{-1}(D)$ , donde  $D = \{(z, w) : \|z\| \leq 1 \wedge \|w\| \leq 1\}$ , luego  $\mathbb{CP}^2$  es un espacio topológico compacto.

Consideremos ahora, un polinomio homogéneo de grado  $d$ ,  $F(x, y, z)$ , y el conjunto:

$$\mathcal{W} = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\},$$

este es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{CP}^2$ . La intersección  $X_i$  de  $\mathcal{W}$  con los conjuntos abiertos  $U_i$  es exactamente una curva suave afín transportada a  $\mathbb{C}^2$ . Por ejemplo, en  $U_0$  donde  $x \neq 0$ , se tiene que:

$$X_0 = \mathcal{W} \cap U_0 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : F(1, a, b) = 0\},$$

la cual es la curva afín descrita por el polinomio  $f(a, b) = 0$ , donde  $f(a, b) = F(1, a, b)$ . Así para construir cartas en  $\mathcal{W}$  usamos las construidas en el ejemplo anterior

Ahora, si  $F$  es no singular, esto es si no existe una solución común para el sistema:

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

en el plano proyectivo  $\mathbb{CP}^2$ , se tiene que,  $F$  es irreducible y  $\mathcal{W}$  es una superficie de Riemann compacta.

En particular para  $F(x, y, z) = y^3z + z^4 - x^4$  tenemos que:

$$\mathcal{W} = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : y^3z + z^4 - x^4 = 0\}.$$

Entonces  $\mathcal{W}$  es un espacio topológico, hausdorff y dado que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = -4x^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2z, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = y^3 + 4z^3,$$

se tiene que no hay solución del sistema  $F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$  en  $\mathbb{CP}^2$  así el polinomio es no singular y por tanto  $\mathcal{W}$  es una superficie de Riemann compacta, dado que es un conjunto cerrado dentro de un compacto.

En este trabajo se mencionaran resultados generales de superficies de Riemann, aunque nuestro interés esta en las superficies de Riemann compactas. Notemos que una superficie compacta puede cubrirse por un número finito de abiertos homeomorfos a discos de  $\mathbb{R}^2$ , luego tiene una base numerable de abiertos. Esto implica, entre otras cosas, que es metrizable.

A continuación mencionaremos algunos conceptos importantes de las funciones definidas entre superficies de Riemann:

En lo que sigue  $\mathcal{W}_1$  y  $\mathcal{W}_2$  son superficies de Riemann.

**Definición 1.1.2.** Una función  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  es *holomorfa en*  $p \in \mathcal{W}_1$  si y sólo si existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $\mathcal{W}_1$ , con  $p \in U_1$  y  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $\mathcal{W}_2$ , con  $F(p) \in U_2$  tal que la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$  es holomorfa en  $\phi_1(p)$ . Diremos que  $F$  es *holomorfa* si es holomorfa en  $\mathcal{W}_1$ .

**Definición 1.1.3.** Un *Isomorfismo* (o Biholomorfismo) entre superficies de Riemann es una función holomorfa  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  la cual es biyectiva, con inversa  $F^{-1} : \mathcal{W}_2 \rightarrow \mathcal{W}_1$  holomorfa. Un isomorfismo  $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  es llamado un *Automorfismo de*  $\mathcal{W}$ .

En el ejemplo anterior:

$$\mathcal{W} = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2 : y^3z + z^4 - x^4 = 0\},$$

se puede ver que la función  $\phi_0 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  definida por:  $\phi_0(x, y, z) = (ix, y, z)$  es un automorfismo de  $\mathcal{W}$ , además  $\phi_0^4 = id$ .

Las propiedades básicas de las aplicaciones entre superficies de Riemann se deducen fácilmente del siguiente teorema:

**Teorema 1.1.1.** Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann y sea  $p \in \mathcal{W}_1$ . Entonces existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{C}$  con  $p \in U_1$  y  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{C}$  con  $F(p) \in U_2$  de modo que  $F(U_1) \subset U_2$ ,  $\phi_1(p) = \phi_2(F(p)) = 0$  y para todo  $z \in \phi_1(U_1)$  se cumple  $(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(z) = z^k$ , para cierto natural  $k$ .

DEMOSTRACIÓN.

Componiendo dos cartas con traslaciones apropiadas, se puede suponer que  $\phi_1(p) = \phi_2(F(p)) = 0$ . Restringiendo  $\phi_1$  se puede hacer que  $F(U_1) \subset U_2$ . Sea  $H = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ ,  $H$  es una función holomorfa no constante en  $\phi_1(U_1)$  tal que  $H(0) = 0$ , luego existe un  $k$  tal que  $H(z) = z^k g(z)$ , donde  $g$  es una función holomorfa en  $0$  tal que  $g(0) \neq 0$ . Restringiendo  $\phi_1$  de nuevo se puede suponer que  $g$  no se anule en  $\phi_1(U_1)$ . Tomando una rama uniforme de la raíz  $k$ -ésima en un entorno de  $g(0)$  (y restringiendo aun más  $\phi_1$  si es necesario) construimos una función holomorfa  $h : \phi_1(U_1) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $h(z)^k = g(z)$ . Así pues,  $H(z) = (zh(z))^k$ . La función  $zh(z)$  tiene derivada no nula en  $0$ , por lo que es inyectiva

en un entorno de 0. Restringiendo  $\phi_1$  una vez mas se puede suponer que es inyectiva en  $\phi_1(U_1)$ . Componiendo  $\phi_1$  con esta función se obtiene una nueva carta sobre  $U_1$ , digamos  $\phi_0$ , de modo que si  $x \in U_1$  y  $w = \phi_1(x)h(\phi_2(x)) \in \phi_0(U_1)$ ,

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(w) = \phi_2(F(x)) = F(\phi_2(x)) = (\phi_1(x)h(\phi_2(x)))^k = w^k.$$

Así pues, las cartas  $\phi_0$  y  $\phi_2$  cumplen lo pedido. ■

La función  $z^k$  (como toda función holomorfa no constante) es abierta, luego  $F$  es abierta en un entorno de cada punto, luego es abierta.

El número  $k$  dado por el teorema anterior puede caracterizarse con independencia de las cartas consideradas:

*Para todo entorno  $U$  de  $p$  suficientemente pequeño existe un entorno  $V$  de  $F(p)$  de modo que todo punto en  $V$  distinto de  $F(p)$  tiene exactamente  $k$  preimágenes en  $U$ .*

Esto se sigue claramente de que la función  $z^k$  tiene esta propiedad en 0. Por lo tanto,  $k$  esta completamente determinado por  $F$  y  $p$ .

**Definición 1.1.4.** Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann y  $p \in \mathcal{W}_1$ . El número natural  $k$  que cumple la propiedad anterior se llama índice de ramificación de  $F$  en  $p$  y lo representaremos por  $\text{mult}_p(F)$ .

La función  $z^k$  se anula solamente en 0, luego todo punto  $p \in \mathcal{W}_1$  tiene un entorno en el que  $F(z) \neq F(p)$ . Equivalentemente, para cada  $y \in \mathcal{W}_2$ , la fibra  $F^{-1}(y)$  es discreta y, si además suponemos que  $\mathcal{W}_1$  es compacto, entonces, es finita. La función  $z^k$  tiene derivada no nula en todo punto distinto de 0, luego es localmente inyectiva salvo en  $z = 0$ . Esto hace que la función  $F$  sea localmente inyectiva en todo punto de  $U$  excepto posiblemente en  $p$ . Así, el conjunto de puntos donde  $F$  no es localmente inyectiva es discreto en  $\mathcal{W}_1$ . Por compacidad es finito.

**Definición 1.1.5.** Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas y sea  $A \subset \mathcal{W}_1$  el conjunto (finito) de puntos de  $\mathcal{W}_1$  donde  $F$  no es localmente inyectiva. Los puntos de  $B = F(A)$  se llaman *valores de ramificación de  $F$* .

Observe que  $F$  es localmente inyectiva alrededor de un punto  $p \in \mathcal{W}_1$  si y solo si  $\text{mult}_p(F) = 1$ . El teorema siguiente recoge la discusión anterior y algunos otros resultados.

**Teorema 1.1.2.** *Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces:*

- (a)  $F$  es abierta, cerrada y sobreyectiva.
- (b) Para cada  $y \in \mathcal{W}_2$ , el conjunto  $F^{-1}(y)$  es finito.

- (c) Para cada  $y \in \mathcal{W}_2$  y cada abierto  $V$  que contenga a  $F^{-1}(y)$ , existe un entorno abierto  $U$  de  $y$  tal que  $F^{-1}(U) \subset V$
- (d) Para cada punto de  $y \in (\mathcal{W}_2 \setminus B)$  existe un entorno abierto  $U$  de  $y$  tal que

$$F^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n V_i,$$

donde los conjuntos  $V_i$  son abiertos disjuntos en  $\mathcal{W}_1$  y todas las aplicaciones  $F|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  son transformaciones conformes.

DEMOSTRACIÓN.

- (a) Ya se mencionó que  $F$  es abierta y por compacidad es cerrada. Por consiguiente,  $F(\mathcal{W}_1)$  es abierto y cerrado en  $\mathcal{W}_2$ , luego por conexión  $F(\mathcal{W}_1) = \mathcal{W}_2$ .
- (b) Ya se probó.
- (c) El conjunto  $\mathcal{W}_1 \setminus V$  es cerrado en  $\mathcal{W}_1$ , luego  $T = F(\mathcal{W}_1 \setminus V)$  es cerrado en  $\mathcal{W}_2$  y no contiene a  $y$ , luego  $U = \mathcal{W}_2 \setminus T$  es un entorno abierto de  $y$  que cumple lo pedido.
- (d) Sea  $F^{-1}(y) = x_1, \dots, x_n$ , donde  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ . Como  $y$  es un punto de  $Y \setminus B$ , cada  $x_i$  tiene un entorno abierto  $W_i$  tal que  $F|_{W_i}$  es inyectiva. Podemos tomar los  $W_i$  disjuntos dos a dos. Entonces  $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$  es un abierto que contiene a  $F^{-1}(y)$ , luego por el ítem anterior existe un entorno abierto  $U$  de  $y$  tal que  $F^{-1}(U) \subset W$ . Se puede suponer que  $U \subset F(W_i)$  para todo  $i$ . Sea  $V_i = W_i \cap F^{-1}(U)$ . Es claro que los conjuntos  $V_i$  cumplen lo pedido. ■

Finalmente probaremos que el número de preimágenes de los puntos de  $\mathcal{W}_2 \setminus B$  es constante:

**Corolario 1.1.3.** *Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces existe un número natural  $n$  tal que cada punto  $b \in \mathcal{W}_2 \setminus B$ , tiene exactamente  $n$  preimágenes por  $F$ . Además, si  $F^{-1}(b) = \{p_1, \dots, p_n\}$ , existe un entorno abierto  $U$  de  $b$  en  $\mathcal{W}_2$  y entornos abiertos disjuntos  $V_i$  en  $\mathcal{W}_1$  de cada  $p_i$  de modo que  $F^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_n$  y las restricciones  $F|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  son conformes.*

DEMOSTRACIÓN.

El conjunto  $\mathcal{W}_2 \setminus B$  es conexo (pues si a una superficie conexa le quitamos un conjunto finito de puntos no perdemos la conexión). Sea  $\mathcal{P}(y)$  el número de preimágenes de  $y$ , parte (d) del teorema anterior prueba que  $\mathcal{P}$  es localmente constante en  $\mathcal{W}_2 \setminus B$ , y por conexión necesariamente  $\mathcal{P}$  es constante en  $\mathcal{W}_2 \setminus B$ . El resto del teorema es consecuencia directa del teorema anterior. ■

**Definición 1.1.6.** Se llama *grado* de una aplicación holomorfa no constante  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  entre superficies de Riemann compactas, al número de preimágenes de cualquiera de los puntos de  $\mathcal{W}_2 \setminus B$ . Este número se representa por  $\eta(F)$ .

El siguiente teorema nos da más información sobre los puntos de ramificación:

**Teorema 1.1.4.** Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada punto  $y \in \mathcal{W}_2$  se cumple

$$\eta(F) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{mult}_x(F).$$

DEMOSTRACIÓN.

De las definiciones se sigue el resultado si  $y$  no es un punto de ramificación. Sea  $b \in \mathcal{W}_2$  un punto de ramificación y suponga que tiene  $s$  preimágenes distintas  $a_1, \dots, a_s$ . Sea  $n_j = \text{mult}_{a_j}(F)$ . Por la definición del grado de  $F$  en un punto, existen entornos abiertos  $V_j$  de cada  $a_j$  disjuntos dos a dos y entornos  $U_j$  de  $b$  tales que cada  $y \in U_j$  tiene exactamente  $n_j$  preimágenes en  $V_j$ . Por el teorema 1.1.2 existe un entorno abierto  $U$  de  $b$  tal que  $U \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_s$  y  $F^{-1}(U) \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s = V$ . Entonces todo punto  $y \in U$  que no es de ramificación tiene exactamente  $n = n_1 + \dots + n_s$  preimágenes, luego  $n = \eta(F)$ . ■

Las superficies de Riemann que aquí se consideran son superficies compactas, conexas y orientables (toda variedad analítica es orientable como variedad real). La estructura topológica de estas superficies es conocida: toda superficie real compacta conexa y orientable es homeomorfa a una esfera con  $g$  asas o, equivalentemente, con  $g$  agujeros, o a la suma conexa de  $g$  toros. El número  $g$  se llama género de la superficie, para una superficie  $\mathcal{W}$ , denotamos su género por  $g(\mathcal{W})$  o simplemente  $g$  si no hay lugar a confusión, entendiendo que la esfera es la superficie de género  $g = 0$ . Dos superficies compactas, conexas y orientables son homeomorfas si y solo si tienen el mismo género. Estos resultados aparecen en los libros de topología algebraica, ver por ejemplo [MW].

Una caracterización más operativa del género de una superficie viene dada en términos de triangulaciones. Recordemos que un triángulo  $T$  en una superficie  $\mathcal{W}$  es un homeomorfismo en la imagen  $T : \Delta \rightarrow \mathcal{W}$ , donde  $\Delta$  es un triángulo usual, por ejemplo

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Las aristas y los vértices de  $T$  son las imágenes por  $T$  de las aristas y vértices de  $\Delta$ . Si  $\mathcal{W}$  es compacta, una triangulación de  $\mathcal{W}$  es un conjunto finito de triángulos en  $\mathcal{W}$  cuyas imágenes cubran  $\mathcal{W}$  y de modo que dos cualesquiera de ellas sean disjuntas o bien tengan una arista o un vértice en común. Las imágenes de los triángulos se llaman caras de la triangulación. Puede probarse que toda superficie compacta  $\mathcal{W}$  admite una triangulación, así como que  $\chi_{\mathcal{W}} = V - A + C$ , donde  $V$ ,  $A$  y  $C$  son respectivamente el número de vértices,

aristas y caras de una triangulación dada, no depende de la triangulación con la que se calcula, sino que es un invariante conocido como característica de Euler de  $\mathcal{W}$ . Además si  $\mathcal{W}$  es conexa y orientable de género  $g$ , entonces  $\chi_{\mathcal{W}} = 2 - 2g$ . Así, por ejemplo, la característica de Euler de la esfera es 2, mientras que la del toro es 0. Todos estos hechos se prueban con relativa facilidad salvo la existencia de triangulaciones.

El siguiente resultado es de gran importancia en el desarrollo de este trabajo:

**Teorema 1.1.5. (Formula de Riemann-Hurwitz)** Sea  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces

$$2g(\mathcal{W}_1) - 2 = 2\eta(F)(g(\mathcal{W}_2) - 1) + \sum_{p \in \mathcal{W}_1} (\text{mult}_p(F) - 1)$$

donde  $g(\mathcal{W}_1)$  y  $g(\mathcal{W}_2)$  denotan el género de  $\mathcal{W}_1$  y  $\mathcal{W}_2$  respectivamente.

Terminaremos esta sección con dos definiciones sobre funciones especiales entre superficies de Riemann:

**Definición 1.1.7.** Un *cubrimiento* (suave) de  $\mathcal{W}$  es una función continua, sobreyectiva  $f : U \rightarrow \mathcal{W}$  tal que para cada  $v \in \mathcal{W}$  existe un abierto  $W$ ,  $v \in W$  tal que  $f^{-1}(W)$  es unión disjunta de conjuntos abiertos  $U_i$  con  $f|_{U_i} : U_i \rightarrow W$  un homeomorfismo.

**Definición 1.1.8.**

- (a) Un *cubrimiento ramificado*  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ , es por definición una función holomorfa sobreyectiva.
- (b) Un punto en  $\mathcal{W}_1$  es un *punto de ramificación* de  $F$  si  $F$  no es localmente uno a uno en él.
- (c) La imagen de un punto de ramificación es un valor de ramificación de  $F$ . En este caso, el conjunto de puntos de ramificación es un subconjunto discreto en  $\mathcal{W}_1$ . Si  $\mathcal{W}_1$  y  $\mathcal{W}_2$  son cerradas, el conjunto de valores de ramificación es finito. Observe que  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow F^{-1}(B) \rightarrow V \setminus B_P$  es un cubrimiento holomorfo, donde  $B_P \subset V$  es el conjunto de valores de ramificación de  $F$ , de grado finito.

Nos interesa considerar el cubrimiento ramificado producido por la acción de un grupo finito en una superficie de Riemann Compacta, por esto en la siguiente sección trataremos con acciones de grupos en superficies de Riemann.

## 1.2. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann

Uno de los conceptos fundamentales en este trabajo es el de acción de grupo, con el cual comenzaremos esta sección.

**Definición 1.2.1.** Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{W}$  una Superficie de Riemann. Una *acción* de  $G$  en  $\mathcal{W}$  es una función  $G \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ , denotada por  $(g, p) \mapsto g \cdot p$  la cual satisface:

- (a)  $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$  para  $g, h \in G$  y  $p \in \mathcal{W}$
- (b)  $e \cdot p = p$  para todo  $p \in \mathcal{W}$ , donde  $e \in G$  es la identidad.

Técnicamente, esta es llamada una acción izquierda en  $\mathcal{W}$ .

Notemos que si se fija  $g \in G$ , la función  $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  definida por  $g(p) = g \cdot p$  es una biyección.

Directamente relacionados con la definición de acción están los siguientes conceptos, que son válidos aún cuando  $\mathcal{W}$  sea un conjunto cualquiera.

**Definición 1.2.2.** La Órbita de un punto  $p \in \mathcal{W}$  es el conjunto,

$$\mathbb{O}_p^G = \{y \in \mathcal{W} : y = g \cdot p \text{ para algún } g \in G\}$$

**Definición 1.2.3.** El Estabilizador de un punto  $p \in \mathcal{W}$  es el subgrupo de  $G$ ,

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

**Observación 1.2.1.**

- (a) Los puntos en la misma órbita tienen estabilizadores conjugados, esto es  $G_{g \cdot p} = g G_p g^{-1}$ .
- (b) Si  $G$  es un grupo finito, entonces  $|G| = |\mathbb{O}_p^G| |G_p|$

Para cada  $p \in \mathcal{W}$  se tiene un subgrupo estabilizador, nos interesa la intersección de todos estos subgrupos, la cual se define a continuación:

**Definición 1.2.4.** El *Kernel* de una acción de  $G$  en  $\mathcal{W}$  es el subgrupo  $K = \{g \in G : g \cdot p = p \text{ para todo } p \in \mathcal{W}\}$ .

$$K = \bigcap_{p \in \mathcal{W}} G_p = \bigcap_{g \in G} G_p^g$$

**Observación 1.2.2.**

- (a) El Kernel es un subgrupo normal de  $G$ .
- (b) El grupo cociente  $G/K$  actúa en  $\mathcal{W}$  con Kernel trivial y con órbitas idénticas a las de la acción de  $G$ . Este tipo de acción se llama *Acción Efectiva*.

Siguiendo con la idea de acciones en superficies de Riemann. Una acción también puede ser *Holomorfa* o *Continua*, si para todo  $g \in G$ , la biyección  $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  definida por  $g(p) = g \cdot p$  es holomorfa o continua.

Las acciones de grupo sobre superficies de Riemann tienen ciertas propiedades especiales que describiremos a continuación:

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $G$  un grupo actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann, y sea  $p$  un punto arbitrario (pero fijo) de  $\mathcal{W}$ . Supongamos que el subgrupo estabilizador  $G_p$  es finito. Entonces  $G_p$  es un grupo cíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [M, pág. 76] ■

En particular, si  $\mathcal{W}$  es compacta,  $\text{Aut}(\mathcal{W})$  es finito y en consecuencia  $G_p$  es un grupo cíclico, donde  $p$  es un punto arbitrario (pero fijo) de  $\mathcal{W}$ .

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann  $\mathcal{W}$ . Entonces el conjunto de puntos de  $\mathcal{W}$  con estabilizador no trivial es discreto.*

Así para las superficies de Riemann compactas que consideraremos se tendrá solo un conjunto finito de puntos con estabilizador no trivial.

Más aún, si  $G$  es un grupo finito, el conjunto de todas las Órbitas es una Superficie de Riemann, que llamaremos *Superficie Cociente* y se denotará por  $\mathcal{W}_G$ .

No es inmediato que  $\mathcal{W}_G$  sea una superficie de Riemann, por esto en lo que sigue intentaremos darle estructura compleja al espacio cociente  $\mathcal{W}_G$ , encontraremos cartas complejas usando la siguiente proposición:

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann  $\mathcal{W}$ . Sea  $p \in \mathcal{W}$  (fijo). Entonces existe una vecindad (abierto)  $U$  de  $p$  tal que:*

- (a)  $U$  es invariante bajo la acción del subgrupo estabilizador  $G_p$ , esto es  $g \cdot u \in U$  para todo  $g \in G_p$  y todo  $u \in U$ .
- (b)  $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$  para todo  $g \notin G_p$ .
- (c) La función  $\alpha: U/G_p \rightarrow \mathcal{W}_G$  inducida por la que envía un punto de  $U$  a su órbita, es un homeomorfismo sobre un conjunto abierto de  $\mathcal{W}_G$ .
- (d) Ningún punto de  $U$  excepto  $p$  queda fijo por los elementos de  $G_p$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [M, pág. 77] ■



Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$ , con cociente  $\mathcal{W}_G$ . Supongamos que  $y \in \mathcal{W}_G$  es un punto imagen de un punto de ramificación de la función cociente  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$ . Sean  $x_1, x_2, \dots, x_s$  los puntos de  $\mathcal{W}$  tales que  $\pi(x_i) = y$  para  $i = 1, 2, \dots, s$ , ellos pertenecen a la misma órbita bajo la acción de  $G$  en  $\mathcal{W}$ , de tal forma que tienen subgrupos estabilizadores conjugados, en particular cada subgrupo estabilizador tiene el mismo orden, digamos  $|G_{x_i}| = r$  para todo  $i$ . Más aún, el número  $s$  de elementos en la órbita es el índice del subgrupo estabilizador en  $G$ , esto es:

$$s = \frac{|G|}{r}$$

**Lema 1.2.1.** *Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$ , con función cociente  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$ , entonces para todo punto imagen de un punto de ramificación  $y \in \mathcal{W}_G$  existe un entero  $r \geq 2$  tal que  $\pi^{-1}(y)$  consiste exactamente de  $|G|/r$  elementos de  $\mathcal{W}$ , y en cada uno de estos puntos  $\pi$  tiene multiplicidad  $r$ .*

En este contexto, el teorema 1.1.5 dice:

**Corolario 1.2.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz**

*Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann Compacta  $\mathcal{W}$ , con función cociente  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$ . Suponga que existen  $k$  valores de ramificación  $y_1, y_2, \dots, y_k$  en  $\mathcal{W}_G$  y supongamos que  $\pi$  tiene multiplicidad  $r_i$  en los  $S_i = |G|/r_i$  puntos arriba de  $y_i$ , entonces:*

$$2g(\mathcal{W}) - 2 = |G| \left[ 2g(\mathcal{W}_G) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right] \quad (1.1)$$

No es difícil ver que si  $R = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$ , donde  $r_1, r_2, \dots, r_k, k$  enteros dados, entonces:

(a)  $R < 2 \Leftrightarrow$

$$k, r_i = \begin{cases} k = 1, r_1 \text{ cualquiera} \\ k = 2, r_1, r_2 \text{ cualquiera} \\ k = 3, \{r_1, r_2\} = \{2, 2\}, r_3 \text{ cualquiera} \\ k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 3\}, \{2, 3, 4\} \text{ o } \{2, 3, 5\} \end{cases}$$

(b)  $R = 2 \Leftrightarrow$

$$k, r_i = \begin{cases} k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\} \text{ o } \{3, 3, 3\} \\ k = 4, \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\} \end{cases}$$

(c) Si  $R > 2$  en efecto  $R \geq 2 + \frac{1}{42}$ .

**Definición 1.2.5.** Sea  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$  la proyección canónica,  $\pi(w) = \mathbb{O}_w^G$ , el conjunto  $\pi^{-1}(p)$ ,  $p \in \mathcal{W}_G$  es llamado la *Fibra* sobre  $p$ .

Si  $G$  es un grupo de automorfismos es de la superficie de Riemann  $\mathcal{W}$ , entonces la proyección natural  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$  es un cubrimiento ramificado.

Supongamos que  $F : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  un cubrimiento ramificado,  $B$  el conjunto de valores de ramificación, para  $b \in B$  consideramos su fibra  $F^{-1}(b) = \{q_1, q_2, \dots, q_s\} \subset \mathcal{W}_1$ , la estructura cíclica de  $F$  en  $b$  es una  $s$ -tupla  $(m_1, m_2, \dots, m_s)$  donde  $m_i$  es el índice de ramificación de  $F$  en  $q_i$ . Esto es,  $F$  es  $m_i : 1$  en  $q_i$ .

**Definición 1.2.6.** Sea  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$  la proyección canónica. El vector  $(g(\mathcal{W}_G) : m_1, m_2, \dots, m_r)$ , donde  $g(\mathcal{W}_G)$  es el género de  $\mathcal{W}_G$  y  $m_i$ , es el orden del subgrupo estabilizador, no trivial, del punto de ramificación  $q_i$ , se denomina *vector de datos de ramificación* (branching data) de  $G$  en  $\mathcal{W}$ .

**Definición 1.2.7.** Un arreglo  $2g(\mathcal{W}_G) + r$ ,  $(a_1, a_2, \dots, a_{g(\mathcal{W}_G)}, b_1, b_2, \dots, b_{g(\mathcal{W}_G)}, c_1, c_2, \dots, c_r)$  de elementos de  $G$  es llamado un *Vector Generador de Tipo*  $(g(\mathcal{W}_G) : m_1, m_2, \dots, m_r)$  si se satisface:

- (a)  $G$  es generado por los elementos  $(a_1, a_2, \dots, a_{g(\mathcal{W}_G)}, b_1, b_2, \dots, b_{g(\mathcal{W}_G)}, c_1, c_2, \dots, c_r)$ ;
- (b) orden  $(c_i) = m_i$  y
- (c)  $\prod_{i=1}^r [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r c_j = 1$ .

**Observación 1.2.3.**

- (a) El vector de datos de ramificación es único si los  $m_j$  son listados en orden no decreciente.
- (b) Dado que  $g(\mathcal{W}_G) = 0$  se presenta con mucha frecuencia, por conveniencia en la notación, omitimos en el vector de datos de ramificación la parte correspondiente a  $g(\mathcal{W}_G)$ . Notemos que en este caso en el vector generador no aparecen los elementos  $a_i$  ni los  $b_i$ .
- (c) También, por conveniencia en la notación, usaremos abreviaturas tales como  $(2^4, 3^2)$  para  $(2, 2, 2, 2, 3, 3)$ .

El siguiente teorema nos garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de una superficie de Riemann con acción de un grupo finito  $G$ :

**Teorema 1.2.2. Teorema de Existencia de Riemann**

Un grupo finito  $G$  actúa en la superficie  $\mathcal{W}$ , de género  $g$ , con vector de datos de ramificación  $(g(\mathcal{W}_G), m_1, m_2, \dots, m_r)$  si y solo si la ecuación de Riemann-Hurwitz se satisface, y  $G$  tiene vector generador  $(a_1, a_2, \dots, a_{g(\mathcal{W}_G)}, b_1, b_2, \dots, b_{g(\mathcal{W}_G)}, c_1, c_2, \dots, c_r)$ .

Veamos un ejemplo del uso del teorema de existencia:

**Ejemplo 1.2.1.** Consideremos  $G = S_3 = \langle a, b : a^3, b^2, abab \rangle$ , buscaremos posibilidades para el género de una superficie  $\mathcal{W}$ , en la que actúe  $S_3$ , holomorfa y efectivamente. Por la fórmula 1.2.1. tenemos:

$$g(\mathcal{W}) = |G| \left[ g(\mathcal{W}_G) - 1 + \frac{1}{2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \beta \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \right) \right] + 1$$

Si suponemos que  $g(\mathcal{W}_G) = 0$ , y reemplazamos  $|G| = |S_3| = 6$  obtenemos:

$$g(\mathcal{W}) = -5 + 3 \left( \frac{2\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \right)$$

y ahora podemos pensar en que  $\alpha = 0$ , es decir que sólo hay puntos de ramificación con subgrupo estabilizador de orden 2, entonces, para  $\beta = 4$ , obtenemos  $g(\mathcal{W}) = 1$ , para  $\beta = 6$  obtenemos  $g(\mathcal{W}) = 4$ .

Para  $\alpha = 1$  y  $\beta = 4$  tenemos  $g(\mathcal{W}) = 3$ .

En efecto, en el primer caso podemos tomar como vector generador:  $(ab, b, a^2b, b)$ , en el segundo caso:  $(ab, b, a^2b, b, b, b)$  y finalmente, podemos tomar el vector:  $(a^2b, b, b, b, a)$ , notemos que en estos casos, dado que  $g(\mathcal{W}_G) = 0$ , solo tenemos en el vector generador elementos del tipo  $c_i$ , según la definición 1.2.7. En cada caso los elementos elegidos satisfacen las condiciones del teorema 1.2.2. De esta forma nos asegura que existen superficies de géneros 1, 4, 3 con acción, holomorfa y efectiva, de  $S_3$ .

Terminaremos el capítulo con algunos conceptos menos conocidos de teoría de grupos, necesarios para el resultado principal de la siguiente sección.

### 1.3. Género de una Superficie Cociente Intermedia

En esta sección presentaremos un resultado que nos da información sobre los cocientes intermedios, es decir los cocientes que se producen cuando pensamos en la acción de un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  que sabemos que actúa en una superficie de Riemann  $\mathcal{W}$ . Para empezar incluiremos algunos hechos básicos sobre las clases dobles, tomados de [S]:

**Proposición 1.3.1.** Sea  $G$  un grupo y sean  $H$  y  $K$  subgrupos de  $G$ .

- (a) Una Clase Doble es un conjunto  $HxK = \{h x k : h \in H, k \in K\}$ .
- (b) Existe una única clase doble que contiene a  $g \in G$ , esta es  $HgK$ .
- (c) Las clases dobles son disjuntas.  $G$  es union disjunta de clases dobles.

(d) Una clase doble es unión de clases laterales derechas de  $H$  y de clases laterales izquierdas de  $K$ . La clase doble  $HgK$  contiene exactamente  $|H : K^{g^{-1}} \cap H|$  clases izquierdas de  $K$ .

(e) La cardinalidad de una clase doble esta dada por:

$$|HgK| = |K||H : K^{g^{-1}} \cap H|$$

(f) Si  $n$  es el número de clases dobles con respecto a  $H$  y  $K$  en  $G$ . Tenemos que:

$$|G| = |Hg_1K| + \dots + |Hg_nK| = |K|(|H : K^{g_1^{-1}} \cap H| + \dots + |H : K^{g_n^{-1}} \cap H|) \quad (1.2)$$

Entonces,

$$|G : K| = \sum_{i=1}^n |H : K^{g_i^{-1}} \cap H|$$

**Definición 1.3.1.** Sea  $\mathcal{W}$  una superficie de Riemann cerrada y  $G$  su grupo de automorfismos. Sean  $p_1, p_2, \dots, p_r$  la colección (maximal) de puntos de ramificación no equivalentes, respecto a  $G$ . Para cada  $j = 1, 2, \dots, r$ , consideramos su estabilizador  $G_j$ . Definimos la *Signatura Geométrica de  $G$  en  $\mathcal{W}$*  como la tupla:

$$(g(\mathcal{W}_G); [m_1, C_1], \dots, [m_r, C_r])$$

donde  $g(\mathcal{W}_G)$  es el género de  $\mathcal{W}_G$ ,  $m_j$  es el orden del subgrupo estabilizador  $G_j$  y  $C_i$  es la clase de conjugación representada por  $G_i$ .

La siguiente proposición establece una fórmula para el género de los cocientes intermedios:

**Proposición 1.3.2.** Sea  $\mathcal{W}$  una superficie con acción de  $G$ , con signatura geométrica:

$$(g(\mathcal{W}_G); [m_1, C_1], \dots, [m_r, C_r])$$

para cada  $H \leq G$ , sea  $\mathcal{W}_H$  la superficie cociente obtenida de  $\mathcal{W}$  por la acción de  $H$  entonces, el género de  $\mathcal{W}_H$  esta dado por:

$$g(\mathcal{W}_H) = |G : H|(g(\mathcal{W}_G) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|G : H| - |H \backslash G / G_i|)$$

donde  $|H \backslash G / G_i|$  denota el cardinal de un conjunto de representantes de la clases dobles.

DEMOSTRACIÓN. ver [R] ■

Miramos en el ejemplo 1.2.1. que el grupo  $S_3$  actúa, holomorfa y efectivamente, en una superficie  $\mathcal{W}$  de género 3, produciendo una superficie cociente  $\mathcal{W}_{S_3}$  de género cero con vector generador era  $(a^2b, b, b, b, a)$ , según la firma  $(3, 2^4)$ . Consideremos el subgrupo de  $S_3$  generado por  $b$ , es decir  $H = \langle b \rangle = \{0, b\}$ , usaremos la fórmula dada

en la proposición 1.3.2. para encontrar el género de la superficie cociente  $\mathcal{W}_H$ . como  $g(\mathcal{W}_{S_3}) = 0$ , reemplazando tenemos:

$$g(\mathcal{W}_H) = 3(-1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|G : H| - |H \backslash G / G_i|)$$

En este caso,  $G_1 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2\}$ ,  $G_2 = \langle a^2b \rangle = \{1, a^2b\}$ ,  $G_3 = G_4 = G_5 = \langle b \rangle = \{1, b\}$ , además  $|H \backslash G / G_1| = 1$ ,  $|H \backslash G / G_2| = 2$  y  $|H \backslash G / G_3| = |H \backslash G / G_4| = |H \backslash G / G_5| = 2$ . Reemplazando tenemos:

$$g(\mathcal{W}_H) = 3(-1) + 1 + \frac{1}{2}(6)$$

así,  $g(\mathcal{W}_H) = 1$ .

## Clasificando Acciones de Grupos finitos en Superficies de Género Pequeño

En este capítulo incluiremos la clasificación completa de la acción de grupos finitos, módulo equivalencia topológica, en superficies de Riemann de género 2 y 3, tomada de [Br], ver también [B, pág. 77] con el fin de obtener todos los requisitos necesarios para desarrollar el siguiente capítulo.

Para elaborar dicha clasificación S.A. Broughton uso algunos resultados que presentaremos a continuación.

### 2.1. Acciones Equivalentes

El teorema 1.2.2 nos garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de una superficie de Riemann con acción de un grupo finito  $G$ , sin embargo nos interesa saber cuando estas acciones son equivalentes, en este sentido definimos acciones equivalentes:

#### Definición 2.1.1. Acciones Equivalentes

Sea  $\mathcal{W}$  una superficie orientable de género  $g$ ,  $Hom^+(\mathcal{W})$  su grupo de homeomorfismos preservando orientación y  $G$  un grupo finito. Se dice que  $G$  actúa (efectivamente) en  $\mathcal{W}$  si existe un monomorfismo  $\varepsilon : G \rightarrow Hom^+(\mathcal{W})$ .

Si  $\varepsilon' : G \rightarrow Hom^+(\mathcal{W})$  es otra acción, entonces se dice que  $\varepsilon, \varepsilon'$  son (topológicamente) equivalentes si existe un  $\omega \in Aut(G)$  y un  $h \in Hom^+(\mathcal{W})$  tal que:

$$\varepsilon'(g) = h\varepsilon(\omega(g))h^{-1} \quad (2.1)$$

Toda acción de  $G$  en  $\mathcal{W}$  puede ser construida por medio de un par de grupos Fuchsianos  $K \triangleleft G^* \subset PSL(2, \mathbb{R})$  actuando discontinuamente en el semiplano superior

complejo  $\mathbb{H}$  (el cubrimiento universal de  $\mathcal{W}$ ,  $g(\mathcal{W}) \geq 2$ ) y un epimorfismo  $\eta : G^* \rightarrow G$  con núcleo  $K$ . El grupo  $K$  es libre de torsión e isomorfo a  $\pi_1(\mathcal{W})$ . La función  $\eta$  es construida a partir de  $\varepsilon$  y un homeomorfismo de  $\mathbb{H}/K \rightarrow \mathcal{W}$ . Se sabe que  $G^*$  tiene la presentación:

$$G^* \cong \left\langle \alpha_i, \beta_i, \rho_j : 1 \leq i \leq \gamma, 1 \leq j \leq r, \prod_{i=1}^{\gamma} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^r \rho_j = \rho_1^{m_1} = \dots = \rho_r^{m_r} = 1 \right\rangle \quad (2.2)$$

identificando los  $\alpha_i, \beta_i, \rho_j$  con sus imágenes en  $G^*$ , se sabe que,

$$|\rho_j| = m_j. \quad (2.3)$$

Si definimos los elementos

$$a_i = \eta(\alpha_i), b_i = \eta(\beta_i), 1 \leq i \leq \gamma, c_j = \eta(\rho_j), 1 \leq j \leq r.$$

Estos elementos generan  $G$ ,

$$\prod_{i=1}^{\gamma} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r c_j = 1$$

y

$$|c_j| = m_j,$$

dado que  $\text{Ker}(\eta)$  es libre de torsión y se satisfacen las fórmulas 2.2 , 2.3.

La relación de equivalencia de acciones induce una relación de equivalencia entre vectores generadores.

Sean  $\varepsilon, \varepsilon', \omega, h$ , como en (2.1),  $\eta, \eta' : G^* \rightarrow G$  las funciones descritas anteriormente. La función  $h$  se levanta a un automorfismo preservando orientación  $h^*$  de  $\mathbb{H}$  tal que  $h^*G(h^*)^{-1}$ , produciendo un automorfismo  $\phi : G^* \rightarrow G^*$  definido por:

$$\phi(g) = h^*g(h^*)^{-1}. \quad (2.4)$$

Así, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} G^* & \xrightarrow{\eta} & G \\ \phi \downarrow & & \downarrow \omega \\ G^* & \xrightarrow{\eta'} & G \end{array}$$

de donde resulta:

$$\eta' = \omega \circ \eta \circ \phi^{-1} \quad (2.5)$$

Sea  $\mathcal{B}$  el subgrupo de  $\text{Aut}(G^*)$  inducido por los homeomorfismos que preservan orientación como en la fórmula 2.4. El grupo  $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}$  actúa en el conjunto:

$$\{\eta : G^* \rightarrow G, \eta \text{ sobreyectiva, } \text{Ker}(\eta) \text{ libre de torsion}\}$$

por la fórmula 2.5 y entonces actúa en el vector generador de  $G$ ,  $(\gamma, m_1, m_2, \dots, m_r)$ . De donde se obtiene:

**Teorema 2.1.1.** *Dos vectores generadores del grupo finito  $G$  definen la misma clase de equivalencia de  $G$ -acciones si y sólo si el vector generador pertenece a la misma clase  $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}$*

Algunos resultados importantes para la clasificación de acciones de grupos en superficies de Riemann son citados a continuación:

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $p$  un número primo,  $p > 3$ . El número de superficies de Riemann compactas, no equivalentes topológicamente con acción de  $\mathbb{Z}_p$ , primo con cociente de signatura  $(0, p, p, p)$  es:*

$$\frac{p+5}{6} \text{ si } p \equiv 1(3)$$

o

$$\frac{p+1}{6} \text{ si } p \equiv -1(3)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [U]. ■

Este resultado nos dice que para  $p \geq 7$ , hay al menos dos superficie de Riemann compactas (no equivalentes) con acción de  $\mathbb{Z}_p$  y firma  $(0, p, p, p)$ , estas superficies se denominan *Superficies de Lefschetz*.

## 2.2. Grupos que actúan en Superficies de Riemann de género pequeño

El siguiente resultado es bien conocido y nos proporciona una cota para el orden del grupo que actúa en una superficie de Riemann compacta:

**Teorema 2.2.1. Teorema de Hurwitz**

*Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$  de género  $g \geq 2$ . Entonces,*

$$|G| \leq 84(g-1)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [F-K, pág.242] ■



En efecto, el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$  es un grupo finito, esto implica en particular que:

$$|Aut(\mathcal{W})| \leq 84(g(\mathcal{W}) - 1),$$

Dado que el grupo completo  $|Aut(\mathcal{W})|$  actúa holomorfa y efectivamente en  $\mathcal{W}$ . Esta cota motiva la siguiente definición:

**Definición 2.2.1. Grupo de Hurwitz** Un grupo de Hurwitz es un grupo que actúa sobre una superficie de Riemann, cuyo orden es igual a la cota de Hurwitz.

Son ejemplos de estos grupos,  $PSL(2, 7)$  en género 3, y  $PSL(2, 8)$  en género 7.

En efecto, si consideramos  $g = 3$ , entonces por la fórmula de Riemann-Hurwitz dada en 1.2.1 tenemos la firma  $(0; 2, 3, 7)$  que es alcanzada por la acción del grupo

$$PSL(2, 7) = \left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

usando su representación módulo 7, con vector generador  $(x, y, (xy)^{-1})$

A continuación veremos algunos ejemplos en los cuales usaremos los resultados antes expuestos para determinar los grupos que pueden actuar en superficies de género 0, 2 y 3:

1. **En género cero.** Sea  $\mathcal{W} = \widehat{\mathbb{C}}$ , la esfera de Riemann, encontraremos los grupos  $G$  que actúan sobre dicha superficie:

Sea  $G$  un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , como esta superficie tiene género cero, entonces también la superficie cociente  $\widehat{\mathbb{C}} = \widehat{\mathbb{C}}_G$  tiene género cero (la esfera de Riemann, pero con algunos puntos especiales) y la fórmula de Riemann-Hurwitz se convierte en:

$$-2 = |G|(-2) + R \quad \text{con} \quad R = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right).$$

y analizando las soluciones a la ecuación anterior obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 2.1: Acción de Grupos en Superficies de Género 0.

Firma	Grupo	$ G $
$(0: -)$	1	1

continúa...

continuación...

Firma	Grupo	$ G $
$(0:n,n)$	$n$	$Z_n$
$(0:2,2,n)$	$2n$	$D_n$
$(0:2,3,3)$	12	$A_4$
$(0:2,3,4)$	24	$S_4$
$(0:2,3,5)$	60	$A_5$

Analicemos el caso:  $(0:2,3,3)$ , sabemos que  $|G| = 12$ , y probaremos que en este caso  $G \cong A_4$  como lo indica la tabla anterior.

$(0:2,3,3)$  quiere decir que el género de  $\widehat{C}_G$  es cero y que en  $G$  existen elementos  $a, b, c$  de ordenes 2, 3, 3 respectivamente con  $abc = 1$  y  $G = \langle a, b, c \rangle$ .

Este grupo de orden 12 tiene 1 o 4 subgrupos de Sylow, para el primo  $p = 3$ . Si fuese solamente 1, entonces  $\langle b \rangle \triangleleft G$ ,  $\langle b \rangle = \langle c \rangle$  y  $\langle bc \rangle = \langle b \rangle$ , luego  $|a| = 1$ , en contradicción con la hipótesis.

Luego,  $G$  tiene 4 subgrupos de Sylow para  $p = 3$ , así  $G$  no es abeliano. Un simple conteo muestra que  $G$  tiene un único subgrupo de Sylow, para  $p = 2$ , digamos  $S$ , de este modo,  $S \triangleleft G$ , más aún  $S \cong Z_2 \times Z_2$ , pues si fuera cíclico, el grupo tendría un solo subgrupo de Sylow para  $p = 3$ , por tanto  $G = A_4$ .

2. En género dos. Sea  $G$ , tal que  $|G| = 6$ . Usando la ecuación de Riemann-Hurwitz encontramos las posibilidades listadas en la tabla, para la firma. En este caso damos también el grupo correspondiente.

Firma	Grupo
$(0:3,6,6)$	$Z_6$
$(0:2,2,2,6)$	no
$(0:2,2,3,3)$	$S_3, Z_6$

En el primer caso, la firma  $(0:3,6,6)$ , es realizada por la acción de  $Z_6 = \langle x \rangle$  y tenemos dos posibilidades para elegir el vector generador  $(x^4, x, x)$  y  $(x^2, x^{-1}, x^{-1})$ .

Y dado que el grupo de automorfismos de  $\mathbb{Z}_6$ , es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ , y sus elementos son de la forma  $\Phi_i(x) = x^i$ ,  $i = 1, 5$ , es claro que

$$(x^4, x, x) \xrightarrow{\Phi_5} (x^2, x^{-1}, x^{-1}),$$

de tal forma que las acciones son equivalentes.

La segunda firma es imposible de ser realizada por un grupo de orden seis.

En el tercer caso, tenemos la firma  $(0:2,2,3,3)$  que es realizada por la acción de los dos grupos de orden 6,  $\mathbb{Z}_6 = \langle x \rangle$  y  $\mathbb{S}_3$ , en efecto:

Sea  $G = \mathbb{Z}_6 = \langle x \rangle$  tenemos el vector generador  $(x^3, x^3, x^2, x^4)$ , que es la única posibilidad para elegir el vector generador.

Sea  $G = \mathbb{S}_3 = \langle x, y : x^3 = y^2 = 1, xyxy = 1 \rangle$ . Tenemos las siguientes posibilidades para vectores generadores:

a	b	c	d
$xy,$	$y$	$x,$	$x$
$y,$	$x^2y$	$x,$	$x$
$y,$	$xy,$	$x^{-1},$	$x^{-1}$
$y,$	$x^2y,$	$x^{-1},$	$x^{-1}$
$y,$	$y,$	$x,$	$x^{-1}$
$xy,$	$xy,$	$x,$	$x^{-1}$
$x^2y,$	$x^2y,$	$x,$	$x^{-1}$

sin embargo podemos reducir algunas de dichas posibilidades puesto que son equivalentes, esto es, existe un automorfismo de  $\mathbb{S}_3$ , que lleva un vector en otro. En particular usaremos automorfismos internos, que denotaremos por  $\Phi_g$ ,  $g \in \mathbb{S}_3$ , a saber:  $\Phi_g(x) = gxg^{-1}$ , para todo  $x \in \mathbb{S}_3$ . Así,

$$(xy, y, x, x) \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\Phi_x} (y, x^2y, x, x) \\ \xrightarrow{\Phi_{x^2y}} (y, xy, x^{-1}, x^{-1}) \\ \xrightarrow{\Phi_y} (y, x^2y, x^{-1}, x^{-1}) \end{array} \right.$$

$$(y, y, x, x^{-1}) \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\Phi_{x^2}} (xy, xy, x, x^{-1}) \\ \xrightarrow{\Phi_x} (x^2y, x^2y, x, x^{-1}) \end{array} \right.$$

Tenemos finalmente dos posibilidades,  $(xy, y, x, x)$  y  $(y, y, x, x^{-1})$  y puede ser probado que son equivalentes.

3. En género 3

a) Sea  $G = \mathbb{Z}_7$ ,  $|G| = 7$ . Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, Obtenemos la firma  $(0, 7, 7, 7)$  y supongamos que  $G = \langle x \rangle$  tenemos  $(6 * 5 = 30)$  posibilidades para elegir el vector generador, aunque en varios casos vamos a obtener vectores equivalentes, para simplificar, consideremos el grupo de automorfismos de  $\mathbb{Z}_7$ ,  $Aut(\mathbb{Z}_7) \simeq \mathbb{Z}_6$ , cuyos elementos son  $\Phi_i(x) = x^i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , así, si escogemos como vectores generadores:

$$\begin{aligned} (x, x, x^5) & \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\Phi_2} (x^2, x^2, x^3) \\ \xrightarrow{\Phi_3} (x^3, x^3, x) \\ \xrightarrow{\Phi_4} (x^4, x^4, x^6) \\ \xrightarrow{\Phi_5} (x^5, x^5, x^4) \\ \xrightarrow{\Phi_6} (x^6, x^6, x^2) \end{array} \right. \\ (x, x^2, x^4) & \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\Phi_3} (x^3, x^6, x^5) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos dos vectores generadores  $(x, x, x^5)$  y  $(x, x^2, x^4)$  que corresponden a dos superficies distintas, topológicamente, según el teorema 2.1.2.

b) Sea  $G$ , tal que  $|G| = 24$ . Analizando las soluciones de la ecuación de Riemann-Hurwitz, teorema 1.2.1 y usando la estructura de los grupos de orden 24 obtenemos la siguiente tabla:

Firma	Grupo
$(0:3, 4, 4)$	$S_4$
$(0:3, 3, 6)$	$SL(2, 3)$
$(0:2, 4, 12)$	$D_{12}$
$(0:2, 2, 2, 3)$	$S_4$

Analicemos la firma  $(0:3, 4, 4)$ . Recordemos que en este caso, estamos pensando en un vector generador  $(a, b, c)$ , tal que  $|a| = 3$ ,  $|b| = 4$ ,  $|c| = 4$ ,  $|abc| = 1$ . Particularmente el grupo  $G \cong \langle a, b, c \rangle$  no tiene subgrupo de Sylow  $S$  normal para el primo  $p = 2$ , puesto que si  $S \triangleleft G$ , tendríamos que  $b, c$  estarían en  $S$ , y  $|G| = 8$ . No tiene un subgrupo de Sylow normal para el primo  $p = 3$ , pues de lo contrario tomamos  $P = \langle a \rangle$  y tenemos que  $G \cong \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ , así  $|G| = 12$ . De tal forma que  $G$  no tiene subgrupos de Sylow normales, luego es isomorfo a  $S_4$ .

De acuerdo al artículo [Br] de S. M. Broughton la lista completa de todos los grupos que actúan en superficies de Riemann de géneros 2 y 3 están consignados en las tablas 3.2 y 3.6 presentadas a continuación. El próximo capítulo será dedicado a la realización de los grupos que aparecen en dichas tablas.

Tabla 2.2: Acción de Grupos Finitos en Superficies de Género 2.

Grupo	$ G $	Valores de Ramificación	Presentación	Vector Generador
$\mathbb{Z}_2$	2	$(2^6)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(x, x, x, x, x, x)$
$\mathbb{Z}_2$	2	$(1 : 2^2)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(1, 1, x, x)$
$\mathbb{Z}_3$	3	$(3^4)$	$\langle x : x^3 = 1 \rangle$	$(x, x, x^{-1}, x^{-1})$
$\mathbb{Z}_4$	4	$(2^2, 4^2)$	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	$(x^2, x^2, x, x^{-1})$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	$(2^5)$	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, x, x, y, xy)$
$\mathbb{Z}_5$	5	$(5, 5, 5)$	$\langle x : x^5 = 1 \rangle$	$(x, x, x^3)$
$\mathbb{Z}_6$	6	$(3, 6, 6)$	$\langle x : x^6 = 1 \rangle$	$(x^4, x, x)$
$\mathbb{Z}_6$	6	$(2^2, 3^2)$	$\langle x : x^6 = 1 \rangle$	$(x^3, x^3, x^2, x^4)$
$D_3$	6	$(2^2, 3^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, x, y, y^{-1})$
$\mathbb{Z}_8$	8	$(2, 8, 8)$	$\langle x : x^8 = 1 \rangle$	$(x^4, x^3, x)$
$Q_8$	8	$(4, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, y, xy)$
$D_4$	8	$(2^3, 4)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, xy, y^2, y)$
$\mathbb{Z}_{10}$	10	$(2, 5, 10)$	$\langle x : x^{10} = 1 \rangle$	$(x^5, x^4, x)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	12	$(2, 6, 6)$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, xy, y^{-1})$
$D_{4,3,1}$	12	$(3, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(y, (xy)^{-1}, x)$
$D_6$	12	$(2^3, 3)$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, xy, y^3, y^2)$
$D_{2,8,3}$	16	$(2, 4, 8)$	$\langle x, y : x^2 = y^8 = 1, xyx^{-1} = y^3 \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$	24	$(2, 4, 6)$	$\langle x, y, z, w : x^2 = y^2 = z^2 = w^3 = [y, z] = [y, w] = [z, w] = 1, xyx^{-1} = y, xzx^{-1} = zy, xwx^{-1} = w^{-1} \rangle$	$(x, (zwx)^{-1}, zw)$
$SL_2(3)$	24	$(3, 3, 4)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$GL_2(3)$	48	$(2, 3, 8)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$

Notemos que, la presentación de los grupos  $SL(2,3)$  y  $GL(2,3)$  están dadas módulo 3.

Tabla 2.3: Acción de Grupos Finitos en Superficies de Género 3.

Grupo	$ G $	Valores de Ramificación	Presentación	Vector Generador
$\mathbb{Z}_2$	2	$(2^8)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(x, x, x, x, x, x, x, x)$
$\mathbb{Z}_2$	2	$(1 : 2^4)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(1, 1, x, x, x, x)$
$\mathbb{Z}_2$	2	$(2 : -)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(x, 1, 1, 1)$

continúa...

continuación...

Grupo	$ G $	Valores de Ramificación	Presentación	Vector Generador
$\mathbb{Z}_3$	3	$(3^5)$	$\langle x : x^3 = 1 \rangle$	$(x, x, x, x, x^{-1})$
$\mathbb{Z}_3$	3	$(1 : 3^2)$	$\langle x : x^3 = 1 \rangle$	$(1, 1, x, x^{-1})$
$\mathbb{Z}_4$	4	$(4^4)$	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	$(x, x, x, x)$
$\mathbb{Z}_4$	4	$(2^3, 4^2)$	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	$(x^2, x^2, x^2, x, x)$
$\mathbb{Z}_4$	4	$(1 : 2^2)$	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	$(x, 1, x^2, x^2)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	$(2^6)$	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, x, y, y, xy, xy)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	$(1 : 2^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle$	$(y, 1, x, x)$
$\mathbb{Z}_6$	6	$(2^2, 6^2)$	$\langle x : x^6 = 1 \rangle$	$(x^3, x^3, x, x^{-1})$
$\mathbb{Z}_6$	6	$(2, 3^2, 6)$	$\langle x : x^6 = 1 \rangle$	$(x^3, x^4, x^4, x)$
$S_3$	6	$(2^4, 3)$	$\langle x, y : x^2 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, x, x, xy^{-1}, y)$
$S_3$	6	$(1 : 3)$	$\langle x, y : x^2 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, xy, y)$
$\mathbb{Z}_7$	7	$(7, 7, 7)$	$\langle x : x^7 = 1 \rangle$	$(x, x, x^5)$
$\mathbb{Z}_7$	7	$(7, 7, 7)$	$\langle x : x^7 = 1 \rangle$	$(x, x^2, x^4)$
$\mathbb{Z}_8$	8	$(4, 8, 8)$	$\langle x : x^8 = 1 \rangle$	$(x^6, x, x)$
$\mathbb{Z}_8$	8	$(4, 8, 8)$	$\langle x : x^8 = 1 \rangle$	$(x^2, x, x^5)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	8	$(2^2, 4^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, x, y^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	8	$(2^5)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y : y^2 = 1 \rangle \times \langle z : z^2 = 1 \rangle$	$(x, y, z, yz)$
$D_4$	8	$(2^2, 4^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, x, y^{-1}, y)$
$D_4$	8	$(2^5)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, x, xy, xy^3, y^2)$
$D_4$	8	$(1 : 2)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, xy, y^2)$
$Q_8$	8	$(1 : 2)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, y, x^2)$
$\mathbb{Z}_9$	9	$(3, 9, 9)$	$\langle x : x^9 = 1 \rangle$	$(x^3, x^5, x)$
$\mathbb{Z}_{12}$	12	$(2, 12, 12)$	$\langle x, x^{12} = 1 \rangle$	$(x^6, x^5, x)$
$\mathbb{Z}_{12}$	12	$(3, 4, 12)$	$\langle x, x^{12} = 1 \rangle$	$(x^8, x^3, x)$
$D_{4,3,1}$	12	$(4, 4, 6)$	$\langle x, y : x^4 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, xy^{-1}, x^2y)$
$D_6$	12	$(2^3, 6)$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, xy^2, y^3, y)$
$A_4$	12	$(2^2, 3^2)$	$\langle x, y : x = (1, 2)(3, 4), y = (1, 2, 3) \rangle$	$(x, x, y, y^{-1})$
$\mathbb{Z}_{14}$	14	$(2, 7, 14)$	$\langle x : x^{14} = 1 \rangle$	$(x^7, x^6, x)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$	16	$(2, 8, 8)$	$\langle x, y : x^2 = y^8 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, xy^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	16	$(4, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$
$D_{2,8,5}$	16	$(2, 8, 8)$	$\langle x, y : x^2 = y^8 = 1, xyx^{-1} = y^5 \rangle$	$(x, xy^{-1}, y)$
$D_{4,4,-1}$	16	$(4, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \times D_4$	16	$(2^3, 4)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y, z : y^2 = z^4 = 1, yzy^{-1} = z^{-1} \rangle$	$(x, y, yxz^{-1}, z)$
$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$	16	$(2^3, 4)$	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^4 = [y, z] = 1, [x, z] = 1, xyx^{-1} = yz^2 \rangle$	$(x, xzy, y, z^{-1}),$ $(x, xyz, z^2, z^2, xy)$
$D_{3,7,2}$	21	$(3, 3, 7)$	$\langle x, y : x^3 = y^7 = 1, xyx^{-1} = y^2 \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$D_{2,12,5}$	24	$(2, 4, 12)$	$\langle x, y : x^2 = y^{12} = 1, xyx^{-1} = y^5 \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \times A_4$	24	$(2, 6, 6)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle x, y : x = (1, 2)(3, 4), y = (1, 2, 3) \rangle$	$(y, xz, x(yz)^{-1})$
$SL_2(3)$	24	$(3, 3, 6)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$
$S_4$	24	$(3, 4, 4)$	$\langle x, y : x = (1, 2, 3, 4), y = (1, 4, 3, 2) \rangle$	$((xy)^{-1}, x, y)$
$S_4$	24	$(2^3, 3)$	$\langle x, y, z : x = (1, 2), y = (2, 3), z = (3, 4) \rangle$	$(x, y, yxzy, yz)$

continúa...

continuación...

Grupo	$ G $	Valores de Ramificación	Presentación	Vector Generador
$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$	32	(2, 4, 8)	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^8 = [y, z] = 1, [x, y] = 1, xzx^{-1} = yz^3 \rangle$	$(x, xz, z^{-1})$
$\mathbb{Z}_2 \times D_{2,8,5}$	32	(2, 4, 8)	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^8 yzy^{-1} = z^5, xyx^{-1} = yz^4 = xzx^{-1} = yz^3 \rangle$	$(x, xz, z^{-1})$
$\mathbb{Z}_2 \times S_4$	48	(2, 4, 6)	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y, z : y = (1, 2), z = (2, 3, 4) \rangle$	$(xy, (zy)^{-1}, xz)$
$\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$	48	(3, 3, 4)	$\langle x, y, z : x^3 = y^4 = z^4 = [y, z] = 1, xyx^{-1} = z, xzx^{-1} = (yz)^{-1} \rangle$	$(x, (xy)^{-1}, y)$
$S_3 \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$	96	(2, 3, 8)	$\langle x, y, z, w : x^3 = y^4 = z^4 = w^4 = 1, [y, z] = 1, xyx^{-1} = y^{-1}, xzx^{-1} = w, xwx^{-1} = z, yzy^{-1} = w, ywy^{-1} = (zw)^{-1} \rangle$	$(xy^{-1}, yw, xz^{-1})$
$PSL_2(7)$	168	(2, 3, 7)	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$

Las presentaciones de los grupos  $PSL(2, 7)$  y  $SL(2, 3)$  están dadas módulo 7 y módulo 3, respectivamente.

## Realización de Acciones de Grupos finitos en Superficies de Género Pequeño

Como mencionamos en la introducción, comenzaremos este capítulo dando un par de ejemplos detallados de la realización de la acción de grupo en una superficie de Riemann compacta.

### 3.1. Ejemplos

1. Sea  $\mathcal{W}$  la normalización de

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : y^2 z^3 - x(x^2 - z^2)(x - az)(x - a^{-1}z) = 0\},$$

entonces para cada  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \notin \{0, 1, -1\}$   $\mathcal{W}$  es una superficie de Riemann compacta de género 2, esto nos da un ejemplo de una familia de superficies de Riemann compactas con acción del grupo diedral  $\mathbf{D}_4$ .

En efecto, si denotamos por  $F(x, y, z) = y^2 z^3 - x(x^2 - z^2)(x - az)(x - a^{-1}z)$ , se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = (x^2 - z^2)(x - az)(x - a^{-1}z) - 2x^2(x - az)(x - a^{-1}z) - x(x^2 - z^2)(x - a^{-1}z) - x(x^2 - z^2)(x - az)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2yz^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 y^2 + x(x - az)(x - a^{-1}z) + ax(x^2 - z^2)(x - a^{-1}z) + \frac{1}{a}x(x^2 - z^2)(x - z)$$

Entonces, si  $P(x_0, y_0, z_0)$  es un punto singular de  $\widetilde{\mathcal{W}}$ , se debe tener que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$$



así de  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$  tenemos,  $z_0 = 0$  o  $y_0 = 0$ . Ahora, si  $z_0 = 0$ , de  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  tenemos que  $x_0 = 0$ , luego  $P(0, 1, 0)$  es un punto singular de  $\widetilde{\mathcal{W}}$ , cualquiera sea el valor de  $a$ . Si  $y_0 = 0$ , entonces de  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$  se tiene que  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = z_0$ ,  $x_0 = -z_0$ ,  $x_0 = az_0$  o  $x_0 = a^{-1}z_0$ , en este caso para  $a = 1$ ,  $P(1, 0, 1)$  es un punto singular de  $\widetilde{\mathcal{W}}$  y para  $a = -1$ ,  $P(-1, 0, 1)$ , luego para estos valores de  $a$  se tienen dos puntos singulares, de hecho en ambos casos el género de la superficie es 1.

Para hallar los automorfismos de la superficie, consideramos el automorfismo  $\phi$  definido por:

$$\phi([x, y, z]) = [x, -y, z]$$

el cual, en el caso de las superficies hiperelípticas es un elemento del centro del grupo de automorfismos, ver [F-K, pág. 102], así  $N = \langle \phi \rangle \triangleleft Aut(\mathcal{W})$  y se considera la acción de  $N$  en  $\mathcal{W}$  la cual produce una superficie cociente  $\mathcal{W}_N$  isomorfa a  $\widehat{\mathbb{C}}$  con algunos puntos distinguidos, a saber  $-1, 1, a, \frac{1}{a}, 0, \infty$ , tales que cualquier automorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  lleva al conjunto de estos puntos sobre sí mismo, esto permite encontrar el grupo de automorfismos del grupo cociente, el cual es, en este caso, isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , explícitamente:

$$Aut(\mathcal{W}_N) = \left\langle T_1(x) = \frac{1}{x}, T_2(x) = \frac{x-a}{ax-1} \right\rangle$$

Esto establece a  $\mathbf{D}_4$  como grupo de automorfismos de  $\mathcal{W}$ . De hecho,

$$Aut(\mathcal{W}) = \langle \phi_1, \phi_2 : \phi_1^4 = \phi_2^2 = 1, \phi_2\phi_1\phi_2 = \phi_1^{-1} \rangle,$$

donde:

$$\phi_1(x, y, z) = (zx^2, iyz^2, x^3), \phi_2(x, y, z) = ((x-az)(ax-z)^2, (1-a^2)^{3/2}yz^2, (ax-z)^3).$$

Ahora, para  $a = \frac{2}{3}$  se tiene que la superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$  es la normalización de  $\mathcal{W} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : y^2z^3 - x(x^2 - z^2)(x - 2z)(x - \frac{1}{2}z) = 0\}$  y nuevamente se considera la superficie cociente  $\mathcal{W}_N$  isomorfa a  $\widehat{\mathbb{C}}$  con los puntos distinguidos:  $-1, 1, 2, \frac{1}{2}, 0, \infty$ , de esta forma el grupo de automorfismos de la superficie cociente es isomorfo a  $\mathbf{D}_6$ , explícitamente:

$$Aut(\mathcal{W}_N) = \left\langle T_1(x) = \frac{1}{x}, T_2(x) = \frac{x+1}{2-x} : T_1^2 = T_2^6 = 1, T_1T_2T_1 = T_2^{-1} \right\rangle$$

Entonces el grupo de automorfismos de la superficie tiene 24 elementos, más aún

$$Aut(\mathcal{W}) \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \rangle,$$

donde

$$\phi_1(x, y, z) = (-(-2z+x)(x+z)^2, -3\sqrt{3}yz^2, (x+z)^3),$$

$$\begin{aligned}\phi_2(x, y, z) &= (x, -y, z), \\ \phi_3(x, y, z) &= ((2x - z)^2(x - 2z), 3i\sqrt{3}yz^2, (2x - z)^3), \\ \phi_4(x, y, z) &= ((x - z)^2z, -yz^2, -(x - z)^3).\end{aligned}$$

Así se tiene la firma  $(2, 4, 6)$ , tomando  $(\phi_1, \phi_5, \phi_6)$ , donde  $\phi_5(x, y, z) = (zx^2, iyz^2, x^3)$ ,  $\phi_6(x, y, z) = ((2z - x)^2(x + z), 3\sqrt{3}iyz^2, (2z - x)^3)$ .

Finalmente si tomamos  $a = i$ , se se tiene que la superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$  es la normalización de  $\widehat{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : y^2z^3 - x(x^4 - z^4) = 0\}$  y nuevamente consideramos la superficie cociente  $\mathcal{W}_N$  isomorfa a  $\widehat{\mathbb{C}}$  con los puntos especiales:  $-1, 1, i, -i, 0, \infty$ , de esta forma el grupo de automorfismos de la superficie cociente es isomorfo a  $\mathbf{S}_4$ , explícitamente:

$$\text{Aut}(\mathcal{W}_N) = \left\langle T_1(x) = ix, T_2(x) = \frac{i(ix + i + x - 1)}{ix + i - x + 1}, T_3(x) = \frac{i(ix + i - x - 1)}{ix + i - x + 1} \right\rangle$$

Entonces el grupo de automorfismos de la superficie tiene 48 elementos, más aún

$$\text{Aut}(\mathcal{W}) \simeq GL(2, 3) = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle,$$

tomando

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y, z) &= (ix, \xi_8 y, z), \\ \phi_2(x, y, z) &= (i(ix + iz + x - z)(ix + iz - x + z)^2, 8iyz^2, (ix + iz - x + z)^2), \\ \phi_3(x, y, z) &= (i(-x + iz + ix - z)(x - iz + ix - z)^2, (-4 + 4i)\sqrt{2}yz^2, -(x - iz + ix - z)^3),\end{aligned}$$

donde,  $\xi_8$  denota la raíz octava primitiva de la unidad. Estos automorfismos realizan la firma  $(2, 3, 8)$ , tomando  $(\phi_3, \phi_2, \phi_1)$ .

2. En [V, pág. 63], Vermeulen lista los posibles grupos de automorfismos de curvas planas suaves. Los tres grupos de mayor orden ocurren para exactamente una curva, módulo isomorfismos. Estas 3 curvas son, la curva de Klein,  $x^3z + yz^3 + y^3x = 0$ , con 168 automorfismos, la curva de Fermat,  $x^4 + y^4 + z^4 = 0$ , con 96 automorfismos y la curva  $x_v^4 + y_v^4 + 2\sqrt{-3}x_v^2y_v^2 + z_v^4 = 0$ , con 48 automorfismos.

Sea

$$\mathcal{W} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : y^3z + z^4 = x^4\},$$

$\mathcal{W}$  es una superficie de Riemann compacta de género 3 y las curvas  $x_v^4 + y_v^4 + 2\sqrt{-3}x_v^2y_v^2 + z_v^4 = 0$  y  $y^3z + z^4 = x^4$  son isomorfas via:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9-6\sqrt{3}}} & \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9+6\sqrt{3}}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{9-6\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt[4]{9+6\sqrt{3}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}.$$

Así  $Aut(\mathcal{W})$  tiene 48 elementos y es isomorfo a  $SL(2,3) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle a, b, c \rangle \rtimes \langle d \rangle$ , donde :

$$a = \begin{pmatrix} -\xi_3 & \xi_3^2 \\ \xi_3^2 & \xi_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & -\xi_3 \\ 0 & \xi_3^2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} i\xi_3^2 & i\xi_3 \\ i\xi_3 & -i\xi_3^2 \end{pmatrix}$$

cuyos ordenes son respectivamente 4, 4, 3, 2. De este modo tenemos,  $|cd| = 12$ ,  $G = \langle c, d \rangle$  y el vector  $(d, c^2, cd)$  es un  $(2,3,12)$  vector generador.

Sea  $G = SL(2,3) \rtimes \mathbb{Z}_2$ . Entonces  $G$  tiene 3 clases de conjugación de elementos de orden 4, las cuales tienen 6, 1, 1 elementos respectivamente. El centro de este grupo  $Z(G)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$  y todo subgrupo cíclico de orden 4 es normal, usaremos uno de estos grupos el que se use para construir los automorfismos.

Observe que  $\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ , definido por  $\Phi([x, y, z]) = [-ix, y, z]$  es un automorfismo de orden 4 de  $\mathcal{W}$ , luego  $N = \langle \Phi \rangle \trianglelefteq G$ . Consideremos la superficie cociente  $\mathcal{W}_N \cong \widehat{\mathbb{C}}$  con los puntos especiales:  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  y  $\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , así bajo esta condición, se tiene  $Aut(\mathcal{W}_N) \cong A_4$ , con firma  $(0:3,4,4)$ . Exactamente,

$$Aut(\mathcal{W}_N) = \langle T_1, T_2, T_3 : T_3T_2T_1 \rangle,$$

donde:

$$T_1(y) = \left( \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) y, \quad T_2(y) = \frac{\left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) y - (1 + i\sqrt{3})}{y + 1}, \quad T_3(y) = \frac{\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) y - 1 + i\sqrt{3}}{y - \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)}$$

Ahora, dado que  $G/N \cong A_4$ , se puede establecer el grupo de automorfismos de  $\mathcal{W}$ .

Es así como se obtiene que:

$$Aut(\mathcal{W}) = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 : \phi_1^2, \phi_2^3, \phi_3^{12} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle,$$

donde,

$$\begin{aligned}\phi_1([x, y, z]) &= [i\sqrt{3}x, -iy + 2iz, i(y + z)], \\ \phi_2([x, y, z]) &= [-3x, \frac{-3y}{2} - \frac{iy\sqrt{3}}{2} - 2iz\sqrt{3}, 2iz\sqrt{3}], \\ \phi_3([x, y, z]) &= [i\sqrt{3}x, -iy + 2iz, i(y + z)].\end{aligned}$$

## 3.2. Realizaciones en género 2

Las superficies de género 2 son hiperelípticas y pueden ser realizadas como un cubrimiento doble de la esfera de Riemann con los puntos de Weierstrass señalados como seis valores de ramificación, imágenes de puntos de ramificación 2.

El conjunto  $W$  de puntos de Weierstrass en una superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$  de género  $g \geq 2$  consiste de todos los puntos  $p \in \mathcal{W}$  tales que  $\mathcal{W}$  admite una función meromorfa con un único polo de orden menor que  $g + 1$  en  $p$ . Por un resultado clásico de Hurwitz de [F-K, pág. 242] una superficie cerrada de género  $g \geq 2$  tiene por lo menos  $2g + 2$  puntos de Weierstrass, donde el menor valor para la cota es alcanzada si y sólo si  $\mathcal{W}$  es hiperelíptica. En este caso el cuerpo de funciones meromorfas de  $\mathcal{W}$  es generado por dos funciones  $y$  y  $x$  que satisfacen ecuación algebraica :

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)\dots(x - e_{2g+2})$$

La función hiperelíptica, inducida por la variable  $x$  determina la superficie  $\mathcal{W}$  como un cubrimiento doble de la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , los distintos valores de ramificación  $e_1, e_2, \dots, e_{2g+1}$  de  $x$  son las imágenes de los puntos de Weierstrass de  $\mathcal{W}$ .

### 3.2.1. Grupo Reducido de Automorfismos de una Superficie Hiperelíptica

Por el teorema 2.2.1, el grupo de Hurwitz  $Aut(\mathcal{W})$  de una superficie de Riemann compacta  $\mathcal{W}$  de género  $g \geq 2$  es finito. Para una superficie hiperelíptica, un lema de Hurwitz, ver [F-K, pág. 102], o también [H], establece que si  $\phi \in Aut(\mathcal{W})$  tiene más de 4 puntos fijos, entonces  $\phi$  es la involución hiperelíptica  $P$  o la identidad. Ahora, si  $\phi \in Aut(\mathcal{W})$  es cualquier automorfismo de la superficie hiperelíptica  $\mathcal{W}$ , entonces  $\phi \circ P \circ \phi^{-1}$  tiene al menos  $2g + 2 \geq 6$  puntos fijos, luego  $\phi \circ P \circ \phi^{-1} = P$ . Así,  $P$  conmuta con  $\phi$ , de modo que cualquier automorfismo  $\phi \in Aut(\mathcal{W})$  se proyecta en una transformación de Möbius  $\phi_{\hat{\mathbb{C}}} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{W}_{\langle P \rangle}$ . Cada automorfismo reducido  $\phi_{\hat{\mathbb{C}}}$  lleva el conjunto  $W$  de puntos de Weierstrass sobre si mismo, luego el grupo reducido de automorfismos  $Aut(\mathcal{W}_{\langle P \rangle})$  puede ser pensado como el grupo de simetrías de la esfera de Riemann con puntos distinguidos, los puntos de Weierstrass.

Como se sabe toda superficie de Riemann compacta de género 2 es hiperelíptica, entonces las consideraciones antes expuestas conducen, en este caso, a una determinación

completa de los grupos de automorfismos. Observe que si un grupo de rotación de  $\mathcal{W}_{(P)}$  no preserva ningún eje de rotación, una órbita de largo 6 consiste en los vértices de un octaedro regular. Así, además de grupos cíclicos y grupos diedrales, la única opción restante para el grupo reducido de automorfismos  $Aut(\mathcal{W}_{(P)})$  es el grupo simétrico  $S_4$ .

Para comenzar clasificaremos los grupos cíclicos maximales,  $\langle \phi_{\mathbb{C}} \rangle$  del grupo reducido de automorfismos  $Aut(\mathcal{W}_{(P)})$ . Dado que  $\phi_{\mathbb{C}}$  lleva el conjunto de puntos de Weierstrass sobre sí mismo, el orden de  $\langle \phi_{\mathbb{C}} \rangle$  es la longitud de un ciclo de  $S_6$ , esto es 2, 3, 4, 5 o 6, luego los posibles grupos cíclicos maximales son isomorfos a  $\mathbb{Z}_n$ , con  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ .

A continuación, en la tabla 3.1 se da una ecuación algebraica representando a una superficie hiperelíptica  $\mathcal{W}$ , esta superficie de Riemann compacta de género 2 es la normalización de  $\tilde{\mathcal{W}}$ , donde  $\tilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$ , para  $F$  función homogénea correspondiente a cada ecuación de la lista. En cada caso, el automorfismo  $\phi$  inducido por  $\phi_{\mathbb{C}}$  es de orden maximal, entonces lo podemos encontrar en la forma:

$$(x, y) \mapsto (\phi_{\mathbb{C}}(x), y').$$

Tabla 3.1: Curvas de género 2

Caso	Ecuación	$\phi : (x, y) \mapsto (\phi_{\mathbb{C}}(x), y')$
1	$y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b) \left(x - \frac{b(1-a)}{1-b}\right)$	$(x, y) \mapsto \left(\frac{b(x-a)}{x-b}, \frac{(b(b-a))^{\frac{3}{2}}y}{(x-b)^3}\right)$
2	$y^2 = x(x^2-1)(x-a)(x-a^{-1})$	$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{iy}{x^3}\right)$
3	$y^2 = (x^3-a)(x^3-a^{-1})$	$(x, y) \mapsto (\xi_3x, -y)$
4	$y^2 = x^5-1$	$(x, y) \mapsto (\xi_5x, -y)$
5	$y^2 = x^6-1$	$(x, y) \mapsto (\xi_6x, y)$
6	$y^2 = x(x^4-1)$	$(x, y) \mapsto (ix, \xi_8y)$

Por simplicidad, las ecuaciones son normalizadas, esto es que los puntos fijos  $\phi_{\mathbb{C}}(x)$  son 0 e infinito ( $\infty$ ) y las raíces se ubican simétricamente con respecto al ecuador en la esfera de Riemann. Esto es posible excepto en el caso 1. Para el caso 1, suponemos que  $a \notin \{0, 1\}$  y  $b \notin \{0, 1\}$  y para los casos 2 y 3,  $a \notin \{0, 1, -1\}$ .

En la siguiente tabla describiremos los grupos maximales que actúan en las curvas correspondientes en cada caso. Notemos que en el caso 6 la presentación del grupo está dada módulo 3.

Tabla 3.2: Grupos de Automorfismos

Caso	Grupo	Presentación
1	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle$
2	$D_4$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$
3	$D_6$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$
4	$\mathbb{Z}_{10}$	$\langle x : x^{10} = 1 \rangle$
5	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\left\langle a, b, c : a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3^2 \end{pmatrix} \right\rangle$
6	$GL(2, 3)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Consideremos en particular el caso de la superficie definida por la curva  $y^2 = x^6 - 1$ , cuyo grupo de automorfismos es:  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$ , donde :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3^2 \end{pmatrix}$$

cuyos ordenes son respectivamente 2, 2, 3. Así se tiene,  $|bc| = 6$ ,  $|abc| = 4$ , luego el vector  $(a, abc, bc)$  es un  $(0; 2, 4, 6)$ -vector generador. Por otra parte, podemos considerar la acción de  $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$  y la fórmula dada en la proposición 1.3.2 :

$$g(\mathcal{W}_H) = |G : H|(g(\mathcal{W}_G) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r (|G : H| - |H \backslash G / G_j|)$$

que relaciona el género de  $\mathcal{W}_G$  y  $\mathcal{W}_H$ , donde  $H \leq G$  para obtener el género de la superficie cociente  $\mathcal{W}_{(a)}$ .

Así, tomando  $H = \langle a \rangle$  y dado que:

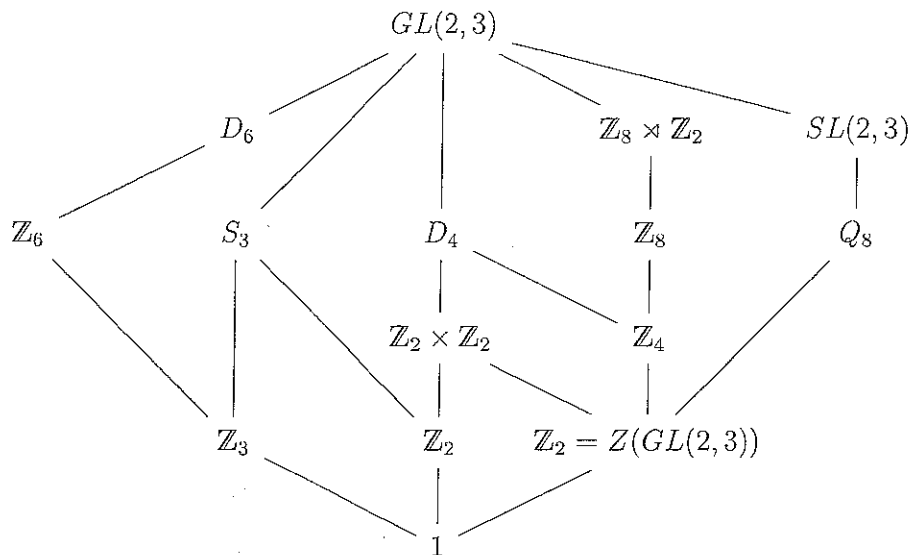
$$|\langle a \rangle \backslash G / \langle a \rangle| = 7, |\langle a \rangle \backslash G / \langle bc \rangle| = 2 \text{ y } |\langle a \rangle \backslash G / \langle abc \rangle| = 3$$

tenemos:

$$g(\mathcal{W}_{(a)}) = 12(-1) + \frac{1}{2}(12 - 7 + 12 - 2 + 12 - 3) = 1$$

es decir,  $\langle a \rangle$  actúa en la superficie definida por la curva  $y^2 = x^6 - 1$ , según la firma  $(1:2,2)$ ,  $\langle c \rangle$  actúa en esta misma curva según la firma  $(3^4)$ .

De la misma forma, para la curva  $y = x(x^4 - 1)$ , en la cual actúa  $GL(2, 3)$  obtenemos la firma de sus subgrupos, actuando en la misma superficie de acuerdo al siguiente reticulado.



Así, considerando la tabla 3.2, y seguimos un algoritmo similar al descrito anteriormente, podemos escribir, la firma con la cual actúa cada subgrupo del grupo de automorfismos de la curva y obtenemos una lista de grupos de automorfismos para superficies de género 2, la cual presentamos en la siguiente tabla:

Tabla 3.3: Grupos de Automorfismos

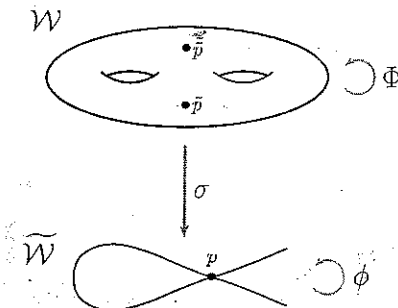
Caso	Ecuación	Firma	Grupos	Orden del grupo
1	$y^2 = y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b) \left(x - \frac{b(1-a)}{1-b}\right)$	$(2^5)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4
2	$y^2 = x(x^2 - 1)(x - a)(x - a^{-1})$	$(2^3, 4)$	$D_4$	8
3	$y^2 = (x^3 - a)(x^3 - a^{-1})$	$(2^3, 3)$	$D_6$	12
4	$y^2 = x^5 - 1$	$(2, 5, 10)$	$\mathbb{Z}_{10}$	10
		$(5, 5, 5)$	$\mathbb{Z}_5$	5
5	$y^2 = x^6 - 1$	$(2, 4, 6)$	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	24
		$(2, 6, 6)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	12
		$(3, 6, 6)$	$\mathbb{Z}_6$	6
		$(3, 4, 4)$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$	12
6	$y^2 = x(x^4 - 1)$	$(2, 3, 8)$	$GL(2, 3) \cong Q_8 \rtimes S_3$	48
		$(3, 3, 4)$	$SL(2, 3) \cong Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_3$	24

continúa...

...continuación

Caso	Ecuación	Firma	Grupos	Orden del grupo
		(2, 4, 8)	$\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	16
		(2 <sup>3</sup> , 3)	$D_6$	12
		(2 <sup>3</sup> , 4)	$D_4$	8
		(2, 8, 8)	$\mathbb{Z}_8$	8
		(4, 4, 4)	$Q_8$	8
		(2 <sup>2</sup> , 3 <sup>3</sup> )	$\mathbb{Z}_6$	6
		(2 <sup>2</sup> , 3 <sup>2</sup> )	$S_3$	6
		(2 <sup>5</sup> )	$\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$	4
		(2 <sup>2</sup> , 4 <sup>2</sup> )	$\mathbb{Z}_4$	4
		(1 : 2 <sup>2</sup> )	$\mathbb{Z}_2$	2
		(2 <sup>6</sup> )	$\mathbb{Z}_2$	2

A continuación presentaremos explícitamente los generadores de cada subgrupo que aparece en la tabla anterior. Aquí,  $\xi_n$  denota la raíz  $n$ -ésima primitiva de 1. Recordemos que  $\mathcal{W}$  es la normalización de  $\mathcal{W} = \{[x, y, z] \in \mathbb{C}P^2 : F(x, y, z) = 0\}$ , es decir, existe una función analítica  $\sigma : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tal que  $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$  y tal que  $\sigma$  es uno a uno en la imagen inversa del conjunto de puntos lisos de  $\widetilde{\mathcal{W}}$ . De lo anterior, se tiene que, básicamente los automorfismos se definen en  $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$ , con la consideración del conjunto finito de puntos especiales, que son preimágenes, mediante  $\sigma$ , de puntos singulares. en la figura vemos una superficie de género 2, correspondiente a una curva algebraica con un punto singular, así los automorfismos de  $\mathcal{W}$  son los definidos en  $\widetilde{\mathcal{W}}$ , excepto en  $\tilde{p}, \tilde{\tilde{p}}$  que son preimágenes mediante  $\sigma$  del punto singular  $p$ .



Así obtenemos, para  $\widetilde{\mathcal{W}}$ , la siguiente tabla de automorfismos:

Tabla 3.4: Automorfismos

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos
1	$y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b) \left(x - \frac{b(1-a)}{1-b}\right)$	(2 <sup>5</sup> )	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (x, -y, z)$

continúa...



...continuación

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos
			$\phi_3(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_4(x, y, z) = (b(x - az)(x - bz)^2, yb^{\frac{3}{2}}(b - a)^{\frac{3}{2}}z^2, (x - bz)^3)$ $\phi_5(x, y, z) = (-b(-x + az)(x - bz)^2, -yb^{\frac{3}{2}}(b - a)^{\frac{3}{2}}z^2, (x - bz)^3)$
2	$y^2 = x(x^2 - 1)(x - a)(x - a^{-1})$	(2 <sup>3</sup> , 4)	$\phi_1(x, y, z) = ((x - az)(ax - z)^2, \sqrt{(1 - a^2)^3}yz^2, (ax - z)^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (-xa - z)(-x + az)^2, i\sqrt{(1 - a^2)^3}yz^2, (-x + az)^3)$ $\phi_3(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_4(x, y, z) = (zx^2, iyz^2, x^3)$
3	$y^2 = (x^3 - a)(x^3 - a^{-1})$	(2, 2, 2, 3)	$\phi_1(x, y, z) = (zx^2, yz^2, x^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_3^2zx^2, -yz^2, x^3)$ $\phi_3(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_4(x, y, z) = (\xi_3^2x, y, z)$
4	$y^2 = x^5 - z^5$	(2, 5, 10)	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_5^4x, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_5x, -y, z)$
		(5, 5, 5)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_5x, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_5x, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_5^3x, y, z)$
5	$y^2 = x^6 - 1$	(2, 4, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_6x^2z, iz^2y, x^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (x^2z, iz^2y, x^3)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_6x, -y, z)$
		(2, 6, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_6^5x, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_6^5x, -y, z)$
		(3, 6, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_6^2x, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_6^5x, -y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_6x, -y, z)$
		(3, 4, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_6^2x, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (x^2z, iz^2y, x^3)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_6^2x^2z, iz^2y, x^3)$
6	$y^2 = x(x^4 - 1)$	(2, 3, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (i(-x - z + ix + iz)(x - z + ix - iz)^2, 8\xi_8^3yz^2, -(x - z + ix - iz)^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (i(ix + iz + x - z)(ix + iz - x + z)^2, 8iyz^2, (ix + iz - x + z)^3)$ $\phi_3(x, y, z) = (x, \xi_8y, iz)$
		(3, 3, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (-i(ix + iz + x - z)(ix + iz - x + z)^2, -8yz^2, (ix + iz - x + z)^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (i(ix + iz + x - z)(ix + iz - x + z)^2, 8iyz^2, (ix + iz - x + z)^3)$ $\phi_3(x, y, z) = (-(ix + iz - x - z)(ix - iz + x - z)^2, -8iyz^2, -(ix - iz + x - z)^3)$
		(2, 4, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (i(-x - z + ix + iz)(x - z + ix - iz)^2, -8\xi_8^3yz^2, -(x - z + ix - iz)^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (-(ix + iz - x - z)(ix - iz + x - z)^2, -8iyz^2, -(ix - iz + x - z)^3)$

continúa...

...continuación

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos
			$\phi_3(x, y, z) = (-(ix + iz - x - z)(ix - iz - x - z))^2,$ $-8\xi_8^3 yz^2, -(ix - iz - x - z)^3)$
		(2, 8, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (i(ix + iz - x + z)(-x - z + ix - iz))^2,$ $-8yz^2, (-z + ix - iz - x)^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (ix, \xi_8 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (-(ix - iz + x - z)(x + z + ix + iz))^2,$ $8\xi_8 yz^2, -(x + z + ix + iz)^3)$
		(4, 4, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (zx^2, yz^2, -x^3)$ $\phi_2(x, y, z) = (-x, iy, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (zx^2, iyz^2, x^3)$

Para tener los automorfismos definidos en toda la superficie  $\mathcal{W}$  resta definirlos en la preimagen de los puntos singulares en cada caso, así, por ejemplo en el caso 3.3,  $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : y^2 z^3 - x^5 - z^5 = 0\}$ , tiene un punto singular, el punto  $p = [0, 1, 0]$ , y para su normalización se han agregado dos punto  $\tilde{p}, \tilde{\tilde{p}}$  Ahora, si se considera el automorfismo  $\phi_1([x, y, z]) = (x, -y, z)$ , se tiene que:

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ -y = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases}$$

de donde, si  $xz \neq 0$ ,  $\lambda = 1$  y luego  $y = 0$ , así, los puntos  $(\xi_6^j, 0, 1)$  para  $j = 0, 1, \dots, 6$  son fijos por  $\phi$ , de tal forma que se tienen ya el máximo posible de puntos fijos, así que  $\phi(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}$  y  $\phi(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p}$ . Si tomamos ahora  $\phi_2(x, y, z) = (\xi_5^4 x, y, z)$ , entonces sus puntos fijos son:  $(0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$  En este caso, entonces todos los automorfismos de dicha superficie se describen con los ya descritos en la tabla 3.4.:

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= (x, -y, z), \phi_1(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}, \phi_1(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p} \\ \phi_2(x, y, z) &= (\xi_5^4 x, y, z), \phi_2(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}, \phi_2(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p} \\ \phi_3(x, y, z) &= (\xi_5 x, -y, z), \phi_3(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}, \phi_3(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p}. \end{aligned}$$

### 3.3. Realizaciones en género 3

Sea  $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$ , donde  $F$  esta dada por alguna función de la tabla 3.5, entonces  $\mathcal{W} = \widetilde{\mathcal{W}}$ , en los casos 1, 2, 3, 8, 9, y 10 o  $\mathcal{W}$ , es la normalización de  $\widetilde{\mathcal{W}}$ , en los otros casos, es una superficie de Riemann Compacta de género 3 con grupo de automorfismos  $Aut(\mathcal{W})$  como se indica en la tabla 3.6. Para el caso 1, suponemos que  $a, b \neq 0, 1$ , para el caso 2,  $a \neq 1, 0, \frac{1}{2}$ .

Las superficies de género 3 que estamos considerando en este trabajo, correspondientes a las curvas listadas en la tabla 3.5, son en los casos 4, 5, 6 y 7 hipereĺipticas, luego para encontrar su grupo de automorfismos se siguió el mismo procedimiento que en el caso de las superficies de género 2. Es decir hallamos el grupo de automorfismos  $Aut(\mathcal{W})$ , a partir del grupo de automorfismos de la superficie cociente  $\mathcal{W}_{(P)}$  donde  $P$  es la involución hipereĺiptica.

Para tratar las superficies asociadas a las curvas algebraicas correspondientes a los casos restantes, usaremos resultados de [V] y [M-S-S-V] que dan un listado de algunas curvas algebraicas suaves con grupo de automorfismos. Una vez que conocemos el grupo de automorfismos con el cual vamos a trabajar, observamos, menos en el caso de  $PSL(2, 7)$ , que cada grupo contiene un subgrupo normal,  $N$ , cuyos generadores podemos encontrar de forma sencilla y como en el caso de género 2, en general este grupo actúa en la superficie dada, produciendo una superficie cociente  $\mathcal{W}_N$  de género cero. De esta forma nuevamente nos preocupamos de encontrar los automorfismos de la esfera con algunos puntos especiales y considerando el grupo cociente  $Aut(\mathcal{W}_N)$ , obtenemos todo el grupo de automorfismos  $Aut(\mathcal{W})$ .

La siguiente tabla lista las superficies de género 3 que son la realización de las acciones listadas en la tabla 2.3:

Tabla 3.5: Curvas de género tres

Caso	Ecuación
1	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-b)$
2	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-(1-a))$
3	$y^3 = x(x^3-1)$
4	$y^2 = x^8 - x$
5	$y^2 = x^7 - x$
6	$y^2 = x^8 - 1$
7	$y^2 = x^8 + 14x^4 + 1$
8	$y^3 = x^4 - 1$
9	$y^4 = x^4 + 1$
10	$y^3x + y + x^3 = 0$

Cuyos grupo de automorfismos es en cada caso:

Tabla 3.6: Grupos de Automorfismos

Caso	Grupo	Presentación
1	$\mathbb{Z}_3$	$\langle x, x^3 = 1 \rangle$
2	$\mathbb{Z}_6$	$\langle x, x^6 = 1 \rangle$
3	$\mathbb{Z}_9$	$\langle x, x^9 = 1 \rangle$
4	$\mathbb{Z}_{14}$	$\langle x, x^{14} = 1 \rangle$
5	$S_3 \times \mathbb{Z}_4$	$\langle x, y : x^2 = y^{12} = 1, xyx^{-1} = y^5 \rangle$
6	$(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^8 = 1, [y, z] = 1, [x, y] = 1, xzx^{-1} = yz^3 \rangle$
7	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y, z : y = (1, 2), z = (2, 3, 4) \rangle$
8	$SL(2, 3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\left\langle a = \begin{pmatrix} -\xi_3 & \xi_3^2 \\ \xi_3^2 & \xi_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & -\xi_3 \\ 0 & \xi_3^2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} i\xi_3^2 & i\xi_3 \\ i\xi_3 & -i\xi_3^2 \end{pmatrix} \right\rangle$
9	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes S_3$	$\langle x, y, z, w : x^3 = y^4 = z^4 = w^4 = 1, [y, z] = 1, xyx^{-1} = y^{-1}, xzx^{-1} = w, xwx^{-1} = z, yzy^{-1} = w, ywy^{-1} = (zw)^{-1} \rangle$
10	$PSL(2, 7)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

La siguiente tabla contiene las firmas con las cuales actúan los subgrupos de cada grupo de automorfismos, incluido en la tabla anterior, para obtener la lista de grupos que actúan en género 3, con sus respectivas firmas:

Tabla 3.7: Automorfismos

Caso	Ecuación	Firma	Grupos	Orden del grupo
1	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-b)$	$(3^5)$	$\mathbb{Z}_3$	3
2	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-(1-a))$	$(2, 3, 3, 6)$	$\mathbb{Z}_6$	6
3	$y^3 = x(x^3 - 1)$	$(3, 3, 9)$	$\mathbb{Z}_9$	9
4	$y^2 = x^8 - x$	$(2, 7, 14)$	$\mathbb{Z}_{14}$	14
		$(7, 7, 7)$	$\mathbb{Z}_7$	7
5	$y^2 = x^7 - x$	$(2, 4, 12)$	$S_3 \times \mathbb{Z}_4$	24
		$(2, 12, 12)$	$\mathbb{Z}_{12}$	12
		$(4, 4, 6)$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	12
6	$y^2 = x^8 - 1$	$(2, 4, 8)$	$(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	32
		$(2, 8, 8)$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$	16
		$(4, 8, 8)$	$\mathbb{Z}_8$	8
		$(4, 4, 4)$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	16
7	$y^2 = x^8 + 14x^4 + 1$	$(2, 4, 6)$	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$	48
		$(2, 6, 6)$	$A_4 \times \mathbb{Z}_2$	24
		$(3, 4, 4)$	$\mathbb{Z}_{12}$	12

continúa...

...continuación

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos	Orden del grupo
8	$y^3 = x^4 - 1$	(2, 3, 12)	$SL(2, 3) \times \mathbb{Z}_2$	48
		(3, 3, 6)	$SL(2, 3)$	24
		(3, 4, 12)	$\mathbb{Z}_{12}$	12
9	$y^4 = x^4 + 1$	(2, 3, 8)	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes S_3$	96
		(3, 3, 4)	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_3$	48
		(2, 4, 8)	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2$	32
		(4, 4, 4)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	16
		(2, 8, 8)	$\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	16
10	$y^3x + y + x^3 = 0$	(2, 3, 7)	$PSL(2, 7)$	168
		(3, 3, 7)	$\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	21
		(7, 7, 7)	$\mathbb{Z}_7$	7

Finalmente, presentaremos explícitamente los generadores de cada subgrupo que aparece en la tabla anterior. Nuevamente,  $\xi_n$  denota la raíz  $n$ -ésima primitiva de 1. Recordemos que en los casos 4, 5, 6, 7,  $\mathcal{W}$  es la normalización de  $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$ ; es decir, existe una función analítica  $\sigma : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tal que  $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$  y tal que  $\sigma$  es uno a uno en la imagen inversa del conjunto de puntos lisos de  $\widetilde{\mathcal{W}}$ . De lo anterior, se tiene que, básicamente los automorfismos se definen en  $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$ , con la consideración del conjunto finito de puntos especiales, que son preimágenes, mediante  $\sigma$ , de puntos singulares. En los otros casos, los automorfismos son los que aparecen en la tabla siguiente:

Tabla 3.8: Automorfismos

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos
1	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-b)$	$(3^5)$	$\phi_1(x, y, z) = (x, \xi_3 y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (x, \xi_3^2 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (x, \xi_3 y, z)$ $\phi_4(x, y, z) = (x, \xi_3^2 y, z)$ $\phi_5(x, y, z) = (x, \xi_3^2 y, z)$
2	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-(1-a))$	$(2, 3^2, 6)$	$\phi_1(x, y, z) = (z-x, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (x, \xi_3 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (x, \xi_3^2 y, z)$ $\phi_4(x, y, z) = (z-x, \xi_3 y, z)$
3	$y^3 = x(x^3-1)$	$(3, 9, 9)$	$\phi_1(x, y, z) = (x, \xi_9^3 y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_9^6 x, \xi_9^5 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_9^3 x, \xi_9 y, z)$
4	$y^2 = x^6 - x$	$(2, 7, 14)$	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_7^2 x, \xi_7 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_7^2 x, -\xi_7 y, z)$

continúa...

...continuación

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos
		(7, 7, 7)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_7^4 x, \xi_7^2 y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_7 x, \xi_7^4 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_7^5 x, \xi_7^6 y, z)$
5	$y^2 = x^7 - x$	(2, 4, 12)	$\phi_1(x, y, z) = (-zx^3, yz^3, x^4)$ $\phi_2(x, y, z) = (-\xi_6^5 zx^3, -\xi_{12}^5 yz^3, x^4)$ $\phi_3(x, y, z) = (-\xi_6 x, -\xi_{12} y, z)$
		(2, 12, 12)	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_6 x, \xi_{12} y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_6 x, -\xi_{12} y, z)$
		(4, 4, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (-\xi_6^2 zx^3, -\xi_{12}^2 yz^3, x^4)$ $\phi_2(x, y, z) = (-zx^3, yz^3, x^4)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_6^2 x, \xi_{12}^2 y, z)$
6	$y^2 = x^8 - 1$	(2, 4, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (zx^3, yz^3, x^4)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_8 zx^3, yz^3, x^4)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_8^3 x, y, -z)$
		(2, 8, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (-x, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_8^3 x, y, -z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_8^3 x, -y, z)$
		(4, 8, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (ix, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_8 x, -y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_8^3 x, -y, z)$
		(4, 4, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_8 zx^3, yz^3, x^4)$ $\phi_2(x, y, z) = (-ix, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_8^3 zx^3, yz^3, x^4)$
7	$y^2 = x^8 + 14x^4 + 1$	(2, 4, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (ixx^3, -yz^3, x^4)$ $\phi_2(x, y, z) = ((x-z)(x+z)^3, -4yz^3, (x+z)^4)$ $\phi_3(x, y, z) = (i(x+z)(x-z)^3, 4yz^3, (x-z)^4)$
		(2, 6, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (-zx^3, yz^3, x^4)$ $\phi_2(x, y, z) = ((x+iz)(x-iz)^3, 4yz^3, (x-iz)^4)$ $\phi_3(x, y, z) = (-(x-iz)(x+iz)^3, 4yz^3, (x+iz)^4)$
		(3, 4, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (i(x+z)(x-z)^3, -4yz^3, (x-z)^4)$ $\phi_2(x, y, z) = ((x-z)(x+z)^3, 4yz^3, (x+z)^4)$ $\phi_3(x, y, z) = (-ix, -y, z)$
8	$y^3 = x^4 - 1$	(2, 3, 12)	$\phi_1(x, y, z) = (i\sqrt{3}x, -iy + 2iz, i(y+z))$ $\phi_2(x, y, z) = (-3x, -3/2y - 1/2iy\sqrt{3} - 2iz\sqrt{3},$ $3/2y + 1/2iy\sqrt{3} - iz\sqrt{3})$ $\phi_3(x, y, z) = (i\sqrt{3}x, -iy + 2iz, i(y+z))$
		(3, 3, 6)	$\phi_1(x, y, z) = (-3x, 1/2iy\sqrt{3} - 3/2y - 3z - iz\sqrt{3},$ $-3/2y - 1/2iy\sqrt{3} + iz\sqrt{3})$ $\phi_2(x, y, z) = (i\sqrt{3}x, -\xi_3^2 y + 2\xi_3^2 z, y+z)$ $\phi_3(x, y, z) = (x, -\xi_3 y, -z)$
		(3, 4, 12)	$\phi_1(x, y, z) = (x, \xi_3 y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (ix, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (ix, \xi_3 y, z)$

continúa...

...continuación

Caso	Ecuación	Firma	Automorfismos
9	$y^4 = x^4 + 1$	(2, 3, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (z, y, x)$ $\phi_2(x, y, z) = (z, \xi_8 x, \xi_8 y)$ $\phi_3(x, y, z) = (y, x, \xi_8^{-1} z)$
		(3, 3, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (\xi_8 z, x, -y)$ $\phi_2(x, y, z) = (y, z, \xi_8 x)$ $\phi_3(x, y, z) = (ix, y, -z)$
		(2, 4, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (z, y, x)$ $\phi_2(x, y, z) = (ix, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (z, y, ix)$
		(4, 4, 4)	$\phi_1(x, y, z) = (x, iy, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (ix, y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (i, iy, z)$
		(2, 8, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (-x, y, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (y, x, \xi_8 z)$ $\phi_3(x, y, z) = (-y, x, \xi_8 z)$
		(4, 8, 8)	$\phi_1(x, y, z) = (ix, iy, z)$ $\phi_2(x, y, z) = (y, x, \xi_8 z)$ $\phi_3(x, y, z) = (ix, iy, \xi_8 z)$
10	$y^3 x + y + x^3 = 0$	(2, 3, 7)	$\phi_1(x, y, z) = (ax + by + cz, bx + cy + az, cx + ay + bz)$ $\phi_2(x, y, z) = (\zeta_7 y, \zeta_7^2 z, \xi_7^3 x)$ $\phi_3(x, y, z) = (y - \xi_7^3 y + z \zeta_7^2 - z \xi_7^3 + x \zeta_7 - x \zeta_7^2, \zeta_7 y - \zeta_7^3 y + z \zeta_7 - z + x \zeta_7^3 - x, \xi_7^2 y - \xi_7 y + z \zeta_7 - z \xi_7^2 + x \xi_7^3 - \xi_7 x)$
		(3, 3, 7)	$\phi_1(x, y, z) = (y, z, x)$ $\phi_2(x, y, z) = (z, \xi_7 x, \xi_7^3 y)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_7 x, \xi_7^3 y, z)$
		(7, 7, 7)	$\phi_1(x, y, z) = (x, \xi_7 y, \xi_7^3 z)$ $\phi_2(x, y, z) = (\xi_7 x, \xi_7^3 y, z)$ $\phi_3(x, y, z) = (\xi_7 x, \zeta_7^3 y, \xi_7^3 z)$

En el último caso  $a = \xi_7 - \xi_7^4$ ,  $b = 1 - \xi_7^5$ ,  $c = \xi_7^3 - \xi_7^2$  y  $\zeta_7 = \overline{\xi_7}$ .

En este capítulo conseguimos dar realizaciones para los grupos que actúan en géneros 2 y 3, nos gustaría dar realizaciones de acciones de grupo en superficies de géneros mayores. En particular en género 4, Kuribayashi, en [K] da una completa clasificación de acciones de grupo en género 4, en la cual aparecen superficies con acción de grupos simples como el grupo alternante  $A_5$ . Queremos entonces, encontrar un método en que podamos seguir en los casos en los que aparecen grupos simples.

## BIBLIOGRAFÍA

- [Ac] Accola, R. *On the number of automorphisms of a closed Riemann Surface*, Trans. Amer. Math. Soc, **131**, 398 - 408, (1968).
- [B] Breuer, T. *Characters an Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces*, Cambridge University Press. (2000)
- [Br] Broughton, S.A. *Classifying finite group actions on surfaces of low genus*, Journal of Pure and Applied Algebra, **Vol 69**, 1990, 233-270.
- [Br1] Broughton, S., Bujalance, E. Costa, A. Gamboa, J. and Gromadzki, G. *Symmetries of Riemann surfaces on which  $PSL(2, q)$  acts as a Hurwitz automorphisms groups*, J. Pure and Applied Algebra, **106**, 113 - 126, (1996).
- [Co] Cohen, J. *On Hurwitz extensions of  $PSL(2, 7)$* , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **86**, 395 - 400, (1985).
- [Gro] Gromadzki, G. and Maclachlan, C. *Supersoluble groups of compact Riemann surfaces*, Glasgow Math. J., **31**, 321 - 327, (1989).
- [F-K] Farkas, H y Kra, I, *Riemann Surfaces*, Graduate Text in Mathematics, **V.72**, Springer 1996.
- [Ha] Harvey, W. *Cyclic groups of automorphisms of compact Riemann Surfaces*, Quart. J. Oxford Ser. **17**, 86 - 97, (1966).
- [H] Hurwitz, A. *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Mathematische Werke, Bd. I. Basel, Birkhauser, 1932, 392-430.
- [K] Kuribayashi, A. *Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera three an four*, J. Pure Appl. Algebra **65**, **3**, 277-292, (1990).
- [Kle] Klein, F. *Über die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*, Math. Ann. **14**, 428 - 471, (1879).



- [Ku] Kuribayashi, A. *A survey of Riemann Surfaces of genus 3 through the Eichler Trace formula*, Essays in Celebration of 100'th Anniversary of Chuo University, Chuo University, 37 - 66, (1985).
- [Ku-Ki] Kuribayashi, A. and Kimura, H. *On Automorphism groups of Riemann Surfaces of genus 5 I and II*, Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ. Ser. I. Math, **29**, 1 - 80, (1986) and **30**, 7 - 42, (1987).
- [Kur] Kuribayashi, I. *On automorphisms of prime order of a Riemann surface as matrices*, Manuscripta Math. **44**, 103 - 108, (1983).
- [Ma] Macbeath, A. *On a curve of genus 7*, Proc. London Math. Soc. **3**, 527 - 542, (1965).
- [Mac] MacLachlan, C. and Talu, Y. *p-groups of symmetries of surfaces*, Michigan Math. J. **45**, 315 - 330, (1998).
- [M] Miranda, R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, **V.5**, American Mathematical Society 1995.
- [M-S-S-V] Magaard, K. Shaska, S. Shpectorov, Volklein, H. *The locus of curves with prescribed automorphism group* Arxiv Math, 2002.
- [MW] MASSEY, W.S. *Introducción a la Topología Algebraica*, Reverté, 1982.
- [R] Rojas Rodriguez A.M. *Group Actions on Jacobian Varieties*, Rev. Mat. Iberoamericana **23**, No. 2, 397 - 420, (2007).
- [S] Suzuki, M. *Group Theory*, Springer 1982-1986.
- [Sh] Shafarevich, I. R. *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1977.
- [Tu] Tucker, T. *Finite groups acting on surfaces and the genus of a group*, J. Combin. Theory **306**, 82 - 98, (1983).
- [U] G.C. Urzua, *Riemann surfaces of genus  $g$  with an automorphism of order  $p$  prime and  $p > g$* , Manuscripta Math. **121**, 169 - 189, (2006).
- [V] A. M. Vermeulen, *Weierstrass points of weight two on curves of genus three*, Ph.D. Thesis, University of Amsterdam, 1983.