PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

TÓPICOS EN ETIQUETAJE DE LAGUNAS.

Mauricio Allendes C.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al grado académico de Magíster en Matemática.

Profesores Guía: Juan Rivera Letelier.
María Isabel Cortez.

Junio 2011.
Santiago, Chile.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

Título de tesis:Tópicos en etiquetaje de lagunas.

Autor: Mauricio Alfredo Allendes Cerda.

Fecha: Junio 2011.

Santiago, Chile.

Jurado Interno:

Rafael Tiedra de Aldecoa.
Departamento de Matemática.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Profesor Guía 1:

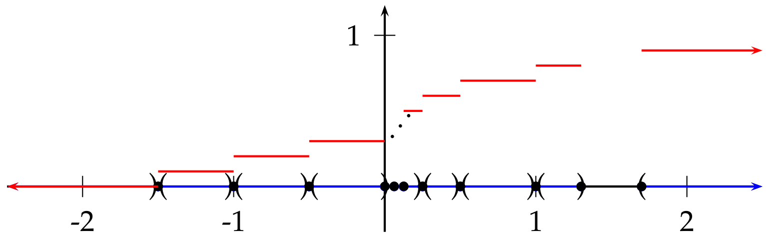
Juan Rivera Letelier.
Departamento de Matemática.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Profesora Guía 2:

María Isabel Cortez Muñoz.
Departamento de Matemática.
Universidad de Santiago de Chile.

Í

1.	Introducción.	1
2.	Preliminares.	4
2.1.	Notación	4
2.2.	Teoría Espectral.	5
2.3.	Sistemas de embaldosados.	25
2.4.	$C^\star$-álgebras.	45
2.5.	**K**-teoría de $C^\star$-álgebras.	80
3.	$C^\star$-álgebra asociada a un embaldosado.	92
3.1.	$C^\star$-álgebra asociada a un embaldosado: Caso Continuo.	92
3.2.	$C^\star$-álgebra asociada a un embaldosado: Caso Discreto.	97
3.3.	Trazas en la $C^\star$-álgebra A_T.	103
3.4.	Equivalencia de Morita.	106
4.	Etiquetaje de lagunas.	110
4.1.	La función de etiquetaje de lagunas.	110
4.2.	La conjetura de etiquetaje de lagunas.	111
4.3.	Algunas consideraciones físicas.	112
Referencias		116



F 1. Ejemplo de función de etiquetaje de lagunas.

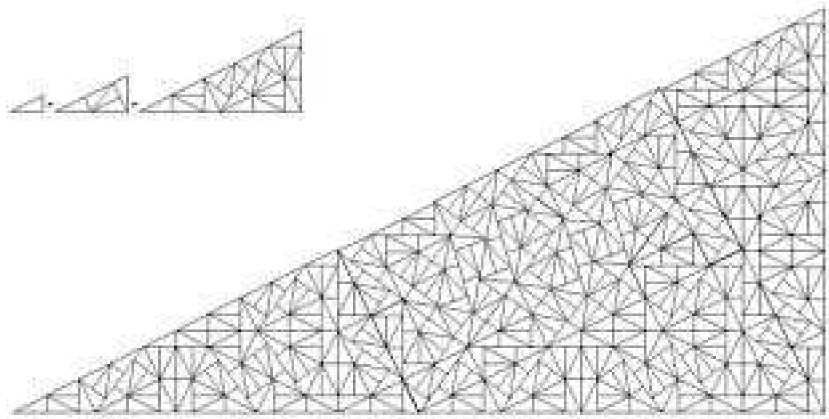
1. I ´ .

El objetivo de este texto es entender el planteamiento de la conjetura del gap-labelling. A través de este texto, traduciremos gap-labelling como **etiquetado de lagunas**.
En el año 2000, Jean Bellissard propone en el articulo [1] la siguiente conjetura:

> ”dada una medida de probabilidad, μ, ergódica e invariante en cierto espacio de embaldosados de $\mathbb{R}^n$ y un operador autoadjunto actuando en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si consideremos una aproximación del operador, que actúa en el espacio de las funciones cuadrado integrables definidas sobre la transversal del espacio de embaldosados. La cantidad de elementos del espectro, que están antes que un cierto $x \in \mathbb{R}$, es un numero en el subgrupo de $\mathbb{R}$ generado por las probabilidades de ocurrencia de motivos finitos en el embaldosado.”

Esta conjetura resultó ser cierta en algunos casos, y fue probada independientemente por tres grupos distintos de matemáticos. El primer grupo, compuesto por J. Bellissard, R. Benedetti y J-M. Gambaudo, probó en el año 2001 que la conjetura era cierta usando Teoría de Índice para espacios foliados, ver [2]. El segundo equipo, compuesto por M. Benameur y H. Oyono-Oyono, validó la conjetura en el año 2002, en su articulo [3], basándose en un análisis más tradicional de topología algebraica. El tercer grupo, formado por J. Kaminker y I. Putnam, probó la conjetura en un artículo publicado el año 2006, ver [13]. Esta prueba se basa en métodos de topología no conmutativa.

En general, estas pruebas utilizan algunas hipótesis de regularidad con respecto a embaldosados compuestos de un número finito de baldosas no equivalentes. En el caso particular del embaldosado de Pinwheel (ver Figura 2), la conjetura fue demostrada en el año 2010 por Haïja Moustafa (ver [17]).



F 2. La construcción del embaldosado de Pinwheel.

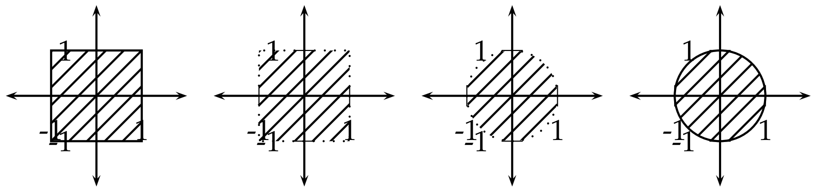
Para entender la conjetura del etiquetaje de lagunas, es necesario estudiar aspectos básicos de las áreas involucradas. Por esta razón, parte importante del cuerpo de este texto son los preliminares de teoría espectral, embaldosados, $C^{\star}$-álgebras y **K**-teoría. Estos capítulos introductorios contienen varios ejemplos y observaciones, con el objetivo de tener una mejor comprensión de las ideas expuestas. En la sección dedicada a la teoría espectral, entregaremos las nociones básicas de teoría de operadores en espacios de Hilbert, y de algunos conjuntos interesantes a estudiar, como lo son el espectro, el conjunto resolvente y las lagunas. Nos enfocaremos en definir lo que llamaremos una proyección espectral de un operador. En la sección dedicada a los embaldosados, definiremos los conceptos de embaldosado y sistema de embaldosados, orientándonos al estudio de dos subconjuntos de un sistema de embaldosados: el casco y la transversal. Tambíen estudiaremos algunos aspectos métricos y dinámicos de los sistemas de embaldosados y su relación con la cristalografía.

Las $C^{\star}$-álgebras tienen su raíz en el álgebra de operadores acotados B(H) actuando en un espacio de Hilbert H. Pues su primera definición fue

> ”es una subalgebra cerrada en norma de B(H) que además es invariante por la función $a \mapsto a^{\star}$, que a cada operador acotado asigna su operador adjunto.”

Nuestra intención es dar una definición mas formal y caracterizar estas $C^{\star}$-álgebras. Para esto, introduciremos todos los conceptos necesarios para probar el teorema de Gelfand-Naimark, que es la mejor caracterización de estas álgebras. Además de esto, trataremos de entender como es el conjunto de las proyecciónes de una $C^{\star}$-álgebra. Finalmente, estudiaremos una $C^{\star}$-álgebra en particular, llamada $C^{\star}$-álgebra límite directo, que nos será de mucha utilidad para definir el grupo K_0 de una $C^{\star}$-álgebra. Para finalizar con los conceptos preliminares, hablaremos de **K**-teoría. En el lenguaje de categorías, un functor es una aplicación de una categoría en otra satisfaciendo algunas propiedades naturales. Al igual que el grupo fundamental o los grupos de homología, la **K**-teoría es la teoría que asocia un grupo a un objeto en general algebraico. Por ejemplo podemos pensar en asociar un grupo de **K**-teoría a un monoide, un anillo, un modulo, un álgebra e incluso a un espacio topológico. Aquí introduciremos con detalle, como se asocia un grupo de **K**-teoría a una $C^\star$-álgebra. Es decir, dada una $C^\star$-álgebra A, definiremos el grupo $\mathbf{K}_0(A)$.

La segunda parte del texto habla principalmente de la relación que tienen los embaldosados y las $C^\star$-álgebras. En particular, expondremos un método para asociar una de estas álgebras a un sistema dinámico. Este método nos dará una idea de como asociar una $C^\star$-álgebra a nuestro caso particular de sistema dinámico, el espacio de embaldosados con la acción natural de $\mathbb{R}^n$. Daremos dos ejemplos de tales construcciónes. Llamaremos a la primera construcción caso continuo, por que trabajaremos con la acción del grupo $\mathbb{R}^n$ en el casco de un embaldosado. La segunda construcción se conoce como caso discreto, pues trabajaremos con la transversal del casco del embaldosado. En esta misma sección introduciremos el concepto de $C^\star$-álgebras fuertemente Morita equivalentes. Concepto que será imposible evitar en el camino a la prueba de la conjetura, pues este nos da un isomorfismo entre grupos de **K**-teoría asociados a un embaldosado, permitiendo así reformular la conjetura en términos más simples. Finalmente, definiremos función de etiquetaje de lagunas y daremos una descripción de tal función en nuestro caso. Luego, expondremos la conjetura de la manera más clara posible y dando todas las referencias necesarias dentro del texto a los muchos conceptos involucrados en su planteamiento. Para finalizar el texto, damos una pequeña e incompleta vista física del tipo de problemas que queremos solucionar con el método del etiquetaje de lagunas.



F 3. Los conjuntos A y B con sus respectivos interiores.

2. P .

A continuación definiremos parte de la notación que utilizaremos en este texto.

2.1. Notación.

Definición 2.1.1. Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números enteros mayores o iguales a 1. Es decir,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Definición 2.1.2. Dado un espacio topológico X y $A \subset X$, denotaremos por $INT(A)$ el conjunto de todos los puntos interiores de A.

Definición 2.1.3. Dado un espacio topológico X y $A \subset X$, denotaremos por $\mathbb{I} : X \to X$ la función identidad y por $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ la función característica sobre el conjunto A.

Ejemplo 2.1.1. *Ver Figura 3.*

- *Si* $X = \mathbb{R}^n$ *y* $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, *entonces*
$$INT(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$
- *Si* $X = \mathbb{R}^n$ *y* $A := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^n : \text{máx}\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\} \leq 1\}$, *entonces*
$$INT(A) = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^n : \text{máx}\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\} < 1\}.$$

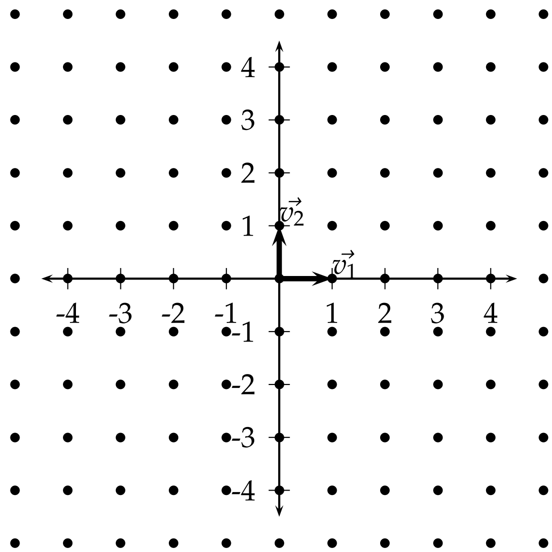
Definición 2.1.4. Sea $a \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ y X un espacio normado. La bola de centro x_0 y radio a en X es el conjunto

$$B_a(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq a\}.$$

Definición 2.1.5. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **enrejado** o **reticulado**, si A es un subgrupo de $\mathbb{R}^n$ con d generadores linealmente independientes.

Observación 2.1.1. *Las palabras enrejado y reticulado son traducciones al castellano de la palabra en inglés* ***lattice.***

Ejemplo 2.1.2. *El producto cartesiano* $\Pi_{i=1}^{d}\mathbb{Z}$, *de* d *copias del conjunto de los números enteros, es un enrejado de* $\mathbb{R}^n$. *Ver Figura 4.*



F 4. $d = 2$.

Definición 2.1.6. Sea X un conjunto cualquiera y G un grupo tal que

$$\begin{array}{rcccc} \rho & : & G \times X & \to & X \\ & & (g,x) & \mapsto & g.x \end{array}$$

es una acción del grupo G en el conjunto X. Dado $g \in G$ fijo, la funció inducida por la acción de g será denotada por

$$\begin{array}{rcccc} \rho_g & : & X & \to & X \\ & & x & \mapsto & g.x \end{array} .$$

Para un conjunto $Y \subset X$ invariante por la acción del grupo G definimos la restricción de la acción ρ al conjunto Y por

$$\begin{array}{rcccc} \rho_Y & : & G \times Y & \to & Y \\ & & (g,y) & \mapsto & g.y \end{array}$$

2.2. Teoría Espectral. La teoría espectral es un área de las matemáticas que generaliza la teoría de espacios y vectores propios de matrices cuadradas. El nombre se debe al matemático David Hilbert, quien lo presentó en su formulación original de la teoría de espacios de Hilbert, en ese entonces en términos de formas cuadráticas en infinitas variables. Una vez descubierta la mecánica cuántica, se observo que la teoría espectral podía explicar las características espectrales de los atomos. Después de la formulación inicial de Hilbert, el desarrollo posterior de los espacios de Hilbert abstractos y de la teoría espectral de un operador normal, se hizo de acuerdo a los requisitos de la física. Estos avances fueron desarrollados principalmente por el matemático John Von Neumann. En el año 1932, ver [27], Von Neumann construyo más de esta teoría en la que incluyo álgebras de Banach, que pueden ser vistas más abstractamente y Transformada de Gelfand.

La mayoría de las definiciones que daremos en esta sección pueden ser generalizadas. Para ver esto con más detalle recomendamos [23].

2.2.1. Aspectos básicos. En toda esta sección, H denota un espacio de Hilbert y H^* su dual topológico. Es decir

$$H^* := \{l : H \to \mathbb{C}/l \text{ es una función lineal continua}\}.$$

Dado $l \in H^*$ definimos

$$\|l\| := \sup_{\substack{x\in H \\ \|x\|=1}} \{|l(x)|\}.$$

Para un espacio de Hilbert H, existen por lo menos dos topologías con las que lo podemos dotar. La primera es la topología de la **norma**, η, en la cual una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ converge a un punto $x \in H$ si ocurre que

$$\|x_n - x\| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

La segunda topología es llamada la topología **débil**, ϖ, y es la menor topología en la que todo funcional $\mathbb{C}$-lineal $l : H \to \mathbb{C}$ es continuo. En la topología débil decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es debilmente convergente a $x \in H$ si para todo $l \in H^*$ se tiene que

$$l(x_n) \to l(x), \text{ cuando } n \to \infty.$$

Cuando una sucesión converga debilmente lo denotaremos por $x_n \xrightarrow{w} x$.

Observación 2.2.1. *Es importante destacar que en espacios de dimensión infinita la topología débil no proviene de una métrica.*

Definición 2.2.1. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Un funcional lineal, l, definido sobre el espacio $C(X)$, se dice **positivo** si para todo $f \in C(X)$ satisfaciendo $f \geq 0$ se cumple que $l(f) \geq 0$.

Proposición 2.1. *Sean η, ϖ las topologías de la norma y debil, respectivamente, en el espacio H.*

1. *La topología de la norma es más fina que la topología débil. Es decir, $\varpi \subset \eta$.*
2. *Toda sucesión debilmente convergente es acotada en norma.*
3. *La topología débil es una topología Hausdorff.*

Demostración:

1. En vista de que, para todo $l \in H^*$ y todo $x \in H$ se tiene que

$$|l(x)| \leq \|l\| \, \|x\|.$$

Consideremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en norma a x. Para cualquier $l \in H^*$ tendremos

$$0 \leq |l(x_n) - l(x)| = |l(x_n - x)| \leq \|l\| \, \|x_n - x\|.$$

Por lo tanto $l(x_n) \to l(x)$, cuando $n \to \infty$. Concluimos que $x_n \xrightarrow{w} x$. En particular, la topología de la norma es más fina que la topología debil.

2. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión debilmente convergente a x_0, $x_n \xrightarrow{w} x_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el funcional $f_n : H \to \mathbb{C}$ por
$$f_n(x) := \langle x_n, x\rangle.$$
Como la sucesión converge debilmente, tenemos que para todo $x \in H$ la sucesión $\{\langle x_n, x\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{C}$ a $< \langle x_0, x\rangle$. En particular, para todo $x \in H$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Por lo tanto para todo $x \in H$,
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty.$$
Luego, por el Teorema de Banach-Steinhaus, se tiene que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty.$$
Esto implica que, para todo $x \in H$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|f_n(x)| \leq C\|x\|$. En particular, para todo $x \in H$ y todo $n \in \mathbb{N}$ tendremos
$$|f_n(x_n)| = \langle x_n, x_n\rangle = \|x_n\|^2 \leq C\|x_n\|.$$
Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\|x_n\| \leq C$. De donde concluimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, ya que
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_C(0).$$

3. Si $a, b \in H$ son tales que $a \neq b$, podemos encontrar $f \in H^*$ tal que
$$f(a) \neq f(b).$$
Luego, considerando $\epsilon = |f(a) - f(b)|$ tendremos que los conjuntos
$$U_f^{a,\frac{\epsilon}{3}} := \left\{x \in H : |f(a) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\right\} = f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(a)))$$
y
$$U_f^{b,\frac{\epsilon}{3}} := \left\{x \in H : |f(b) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\right\} = f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{3}}(f(b))),$$
son abiertos, pues el funcional f es continuo. Y claramente, son no vacios ya que
$$a \in U_f^{a,\frac{\epsilon}{3}} \quad \text{y} \quad b \in U_f^{b,\frac{\epsilon}{3}}.$$
Además
$$U_f^{a,\frac{\epsilon}{3}} \bigcap U_f^{b,\frac{\epsilon}{3}} = \emptyset.$$
En efecto, si existe $x \in U_f^{a,\frac{\epsilon}{3}} \cap U_f^{b,\frac{\epsilon}{3}}$, entonces
$$|f(b) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3}.$$
Lo que es una contradicción por que $|f(b) - f(a)| = \epsilon$. Por lo tanto, ϖ es una topología de Hausdorff para el espacio H.

■

Definición 2.2.2. Un **operador acotado** actuando en H es una función $\mathbb{C}$-lineal y continua

$$A : H \to H.$$

Denotaremos por $B(H)$ el conjunto de todos los operadores acotados actuando en H.

Definición 2.2.3. Sea $A \in B(H)$. Definimos el operador **adjunto** de A como aquella función $\mathbb{C}$-lineal $A^\star : H \to H$ satisfaciendo que para todo $x, y \in H$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle.$$

Ejemplo 2.2.1. *Si H es un espacio de dimensión finita, digamos $n \in \mathbb{N}$, entonces todo operador acotado $A : H \to H$ esta dado por una matriz. Es decir, $A \in M_n(\mathbb{C})$.*

Ejemplo 2.2.2. *Considere el espacio de Hilbert $L^2([0,1])$ y Sea $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ una función continua. El operador*

$$M_g : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) \text{ definido por } M_g(f)(x) := g(x)f(x)$$

tiene operador adjunto $M_g^\star = M_{\overline{g}}$. Pues para cualquier par $f, h \in L^2([0,1])$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle M_g f, h\rangle = \int_0^1 g(x)f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\overline{\overline{g(x)}h(x)}\mathrm{d}x \\ &= \langle f, M_{\overline{g}}h\rangle.\end{aligned}$$

Además, tenemos que para toda $f \in L^2([0,1])$ se cumple

$$\begin{aligned}\|M_g f\|_2^2 = \langle gf, gf\rangle = \int_0^1 g(x)f(x)\overline{g(x)f(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^1 |g(x)|^2|f(x)|^2\mathrm{d}x \\ &\leq \||g|^2\|_\infty \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo esta condición, M_g es un operador acotado.

Otros operadores que vale la pena destacar son.

Definición 2.2.4. Un operador $A \in B(H)$ se dice;

1. **Autoadjunto** si $A = A^\star$.
2. **Normal** si $AA^\star = A^\star A$.
3. **Unitario** si $AA^\star = A^\star A = \mathbb{I}$.
4. **Proyección** si $AA = A^2 = A$.
5. **Compacto** si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

El conjunto de todos los operadores unitarios de un espacio de Hilbert H, es denotado por $U(H)$. Mientras que el de los operadores compactos es denotado por, $K(H)$.

Ejemplo 2.2.3.

- *Claramente, dado cualquier espacio de Hilbert H, el operador identidad $\mathbb{I} : H \to H$ es auto-adjunto, normal, unitario y proyección.*

- *En el contexto del Ejemplo 2.2.2, el operador M_g es normal ya que para todo $f \in L^2([0,1])$ tenemos*
$$M_g \circ M_{\overline{g}}(f) = g(x)\overline{g}(x)f(x) = \overline{g}(x)g(x)f(x) = M_{\overline{g}} \circ M_g(f).$$
Además, si la función $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ satisface que para todo $x \in H$ $g(x) = \overline{g(x)}$, entonces el operador M_g es auto-adjunto pues
$$M_g^\star = M_{\overline{g}} = M_g.$$
- *Claramente, todo operador auto-adjunto es normal ya que*
$$AA^\star = AA = A^\star A.$$
- *Sea $y \in \mathbb{R}$, consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. El operador $T_y : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por*
$$T_y(f(x)) := f(x-y),$$
es unitario ya que $T_y^\star : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ esta definido por
$$T_y^\star(f(x)) := f(x+y) = T_{-y}(f(x)),$$
y un pequeño calculo muestra
$$T_y \circ T_{-y}(f(x)) = T_{-y} \circ T_y(f(x)) = \mathbb{I}(f(x)).$$
- *Sea H un espacio de dimensión finita, digamos n. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base del espacio H. El operador $P_1 : H \to H$ definido por*
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \alpha_1 e_1,$$
es una proyección.
- *Sea $H = l^2(\mathbb{Z})$ y considere el operador* **shift**, *$S : H \to H$, definido por*
$$S((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$
Claramente, tiene un inverso $A : H \to H$ definido por
$$A((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$
Un rapido calculo muestra que $S^\star = A$. En efecto, para
$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$$
tenemos que
$$\begin{aligned} \langle S(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle &= \langle (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n+1}\overline{y_n} \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \overline{y_{k-1}} \\ &= \langle (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (y_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}} \rangle \\ &= \langle (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, A(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto $SS^\star = SA = \mathbb{I} = AS = S^\star S$. Concluimos que el operador shift, S, es unitario.

- *Todo operador de rango finito es compacto.*

La siguiente proposición, nos ayuda a entender un poco más la estructura topologica y geométrica del espacio $B(H)$.

Proposición 2.2. *El espacio $B(H)$ con la norma operador, que es definida por*

$$\|T\| := \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Es un espacio de Banach.

Demostración: Primero probaremos que $B(H)$ es un espacio normado. Sea $A \in B(H)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, para todo $x \in H$ se tiene que $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$. Por lo tanto

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|.$$

Además, para cualquier par $(A_1, A_2) \in B(H) \times B(H)$ y cualquier $x \in H$ con $\|x\| = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \|(A_1 + A_2)x\| = \|A_1x + A_2x\| &\leq \|A_1x\| + \|A_2x\| \\ &\leq (\|A_1\| + \|A_2\|)\,\|x\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|. \end{aligned}$$

De donde, $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$. Si $A \neq 0$, entonces existe $x_0 \in H$ tal que $Ax_0 \neq 0$. En particular, $\|Ax_0\| \neq 0$. Así

$$0 < \left\| A \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| \leq \|A\|.$$

Concluimos que $B(H)$ es un espacio normado.
Mostremos ahora que $B(H)$ es completo con respecto a esta norma. En efecto, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(H)$. En vista de que, para todo $x \in H$ se tiene,

$$\|A_nx - A_mx\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\|$$

y $\|A_n - A_m\| \to 0$, cuando $n, m \to \infty$. Tenemos que para todo $x \in H$ y todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{A_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H.
Así $\lim_{n\to\infty} A_nx = Ax$ existe. Claramente $A : H \to H$ es $\mathbb{C}$-lineal.
Considere $\epsilon > 0$, como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$ se tiene

$$\|A_nx - A_mx\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \leq \epsilon\|x\|.$$

Por lo tanto, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tenemos

$$\|Ax - A_mx\| \leq \epsilon\|x\|.$$

Así

$$\|Ax\| \leq (\|A_m\| + \epsilon)\,\|x\|.$$

De donde, $A \in B(H)$ y $\|A - A_m\| \leq \epsilon$. Concluimos que $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en norma a A y por lo tanto $B(H)$ es un espacio de Banach.

■

Ejemplo 2.2.4. *Considere el espacio de Hilbert* $H = l^2(\mathbb{N})$ *y el operador* **shift** $S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$, *definido por*

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

La norma del operador shift es 1, pues claremente para todo $x \in H$ *se tiene* $\|Sx\| \leq \|x\|$. *Luego*

$$\|S\| := \sup_{\substack{x\in H \\ \|x\|=1}} \|Sx\| \leq 1$$

Así, el supremo se alcanza para $x_0 = (0, 1, 0, \dots) \in H$ *ya que* $\|Sx_0\| = 1$.

Definición 2.2.5. Un operador $A \in B(H)$ se dice **positivo** si para todo $x \in H$ se tiene que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Denotaremos por $A \geq 0$ si A es un operador positivo.

Ejemplo 2.2.5. *Considere cualquier función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
El operador $M_g^2 = M_g \circ M_g$, *definido en el Ejemplo 2.2.2, es positivo pues dada* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *tenemos*

$$\langle M_g^2 f, f\rangle = \langle M_g f, M_g^\star f\rangle = \langle M_g f, M_g f\rangle = \|M_g f\|^2 \geq 0.$$

Es más, si H es un espacio de Hilbert cualquiera y $A \in B(H)$ *es cualquier operador auto-adjunto, entonces*

$$\langle A^2 f, f\rangle = \langle Af, A^\star f\rangle = \langle Af, Af\rangle = \|Af\|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto $A^2 \geq 0$

Observación 2.2.2. *La definición de operador positivo nos permite definir un orden en el conjunto* $B(H)$ *de la siguiente forma: si* $A, B \in B(H)$ *entonces*

$$A \leq B \quad \text{si y solo si} \quad B - A \geq 0.$$

Para comprender mejor el orden definido en $B(H)$ por los operadores positivo veamos el siguiente.

Ejemplo 2.2.6. *Sea H el espacio de Hilbert* $L^2([0,1])$ *y considere los operadores* $M_g : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, *definidos en el Ejemplo 2.2.2. Si* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es una función tal que para todo* $x \in [0,1]$ *se cumple* $g(x) \geq 0$, *entonces* $M_g \geq 0$ *pues para todo* $f \in L^2([0,1])$ *tendremos*

$$\langle M_g f, f\rangle = \int_0^1 g(x) f(x) \overline{f}(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x) |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Si $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *son funciones, entonces*

$$\begin{aligned} \langle M_g - M_h f, f\rangle &= \langle M_g f, f\rangle - \langle M_h f, f\rangle \\ &= \int_0^1 g(x)f(x)\overline{f}(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 h(x)f(x)\overline{f}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 g(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x - \int_0^1 h(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (g(x)-h(x))\,|f(x)|^2\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $M_g \geq M_h$ *si y solo si para todo* $x \in [0,1]$ *se tiene* $g(x) \geq h(x)$.

Dado un espacio de Hilbert H, existen por lo menos tres topologías que podemos definir en el espacio de Banach $B(H)$. La Primera es la topología que induce la norma operador, $\mathfrak{N}$, y la llamaremos topología **uniforme de operadores**, o cuando no haya confusión, simplemente por topología de la **norma**. Una sucesión de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ converge en norma a un operador $T \in B(H)$ si

$$||T_n - T|| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

La segunda topología, $\mathfrak{S}$, es llamada la topología **fuerte de operadores**, o cuando no haya confusión, simplemente topología fuerte. Esta es la menor topología con la que para todo $x \in H$, la función

$$\begin{array}{rccc} E_x : & B(H) & \to & H \\ & T & \mapsto & Tx \end{array}$$

es continua. En esta topología diremos que una sucesión de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ converge fuertemente a un operador $T \in B(H)$ si para todo $x \in H$ se tiene que

$$||T_n x - Tx|| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Escribiremos $T_n \xrightarrow{s} T$ para decir que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a T.
La Tercera topología, $\mathfrak{w}$, es la menor topología con respecto a la que para todo $x \in H$ y para todo funcional $l \in H^*$, la función

$$\begin{array}{rccc} E_{x,l} : & B(H) & \to & \mathbb{C} \\ & T & \mapsto & l(Tx) \end{array}$$

es continua. Esta topología se conoce como la topología **débil de operadores** o simplemente topología **débil**. En esta topología diremos que una sucesión de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ converge debilmente a un operador $T \in B(H)$, si para todo $x \in H$ y para todo $l \in H^*$ tenemos que

$$|l(T_n x) - l(Tx)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

En tal caso denotaremos por $T_n \xrightarrow{w} T$.

Observación 2.2.3. *No se debe confundir la topología débil,* ϖ, *que hemos definido en el espacio* H *con la topología débil,* $\mathfrak{W}$, *que hemos definido en el espacio* $B(H)$.

Estas tres topologías son comparables y con respecto a esto podemos decir.

Proposición 2.3. *En $B(H)$ la topología de la norma es más fina que la topología fuerte, y esta a su vez es más fina que la topología debil. Es decir, $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{N}$.*

Demostración: Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ una sucesión convergente en norma a un operador A. Es decir, $\|A_n - A\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, para todo $x \in H$ se tiene

$$0 \leq \|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\|.$$

Por lo tanto, para todo $x \in H$ se tiene que $\|A_n x - Ax\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. De donde $A_n \xrightarrow{s} A$. En particular, la topología de la norma es más fina que la topología fuerte.
Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$ una sucesión fuertemente convergente. Para cualquier $l \in H^*$ se tiene

$$0 \leq |l(A_n x) - l(Ax)| = |l(A_n x - Ax)| \leq \|l\| \, \|A_n x - Ax\|.$$

Por lo tanto, para todo $l \in H^*$, $|l(A_n x) - l(Ax)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es decir, $A_n \xrightarrow{w} A$. Concluimos que la topología fuerte es más fina que la topología debil.

∎

En general, las otras contenciones no ocurren. Es decir, la topología debil no es más fina que la topología fuerte y la topología fuerte no es más fina que la topología de la norma. Este hecho queda ilustrado en el siguiente.

Ejemplo 2.2.7. *Considere el espacio*

$$H = l^2(\mathbb{C}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el operador $A_n : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ por*

   $$A_n(x_1, x_2, x_3, \dots) := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-ceros}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

   Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador A_n es acotado con $\|A_n\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

   $$A_n(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

   Por lo tanto $A_n \xrightarrow{s} 0$:=operador nulo. Pero $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge al operador nulo en norma pues, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

   $$\|0 - A_n\| = \|A_n\| = 1.$$

2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el operador $A_n : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ por*

   $$A_n(x_1, x_2, x_3, \dots) := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-ceros}, x_1, x_2, \dots).$$

Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador A_n es acotado. Probaremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente al operador nulo. Dado un funcional lineal $l \in H^*$, por el teorema de representación de Riesz existe $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(x) = \langle x, z\rangle$. Luego por definición de A_n, dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendremos

$$f(A_n x) = \langle A_n x, z\rangle = \sum_{j=n+1} x_{j-n} z_j = \sum_{k=1} x_k z_{n+k}.$$

Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$|f(A_n x)|^2 = |\langle A_n x, z\rangle|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} |z_m|^2\right).$$

Como la ultima suma es la cola se una serie convergente, esta tiende a cero cuando $n \to \infty$. De este modo, denotando $\hat{0}$ el operador nulo,

$$|f(A_n x) - f(\hat{0}x)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente al operador nulo. Pero $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge fuertemente al operador nulo pues, para el elemento

$$x = (1, 0, 0, 0, \dots) \in l^2(\mathbb{C})$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|A_n x - \hat{0}x\| = \|A_n x\| = \sqrt{1^2} = 1.$$

Los conceptos escenciales de esta teoría y los que le dan el nombre son ilustrados a continuación.

Definición 2.2.6. Sea $A \in B(H)$.

1. El conjunto **resolvente** de A es

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe el operador } (A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in B(H)\right\}.$$

2. El **espectro** de A, que denotamos $\sigma(A)$, es el complemento del conjunto resolvente. Es decir,

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

De la definición se tiene la siguiente consecuencia.

Proposición 2.4. *Si H es un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador acotado, entonces $\sigma(A) \subseteq B_{\|A\|}(0)$.*

Demostración: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda > \|A\|$. Luego

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^i\right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^i < \infty.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{i} &= \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\\ &= \left(\lambda\left(1-\frac{A}{\lambda}\right)\right)^{-1}\\ &= (\lambda-A)^{-1}.\end{aligned}$$

De este modo, existe $(\lambda - A)^{-1} \in B(H)$ y por lo tanto $\lambda \in \rho(A)$. concluimos que, $\sigma(A) \subseteq B_{\|A\|}(0)$.

■

Ejemplo 2.2.8. 1. *Si $H = M_n(\mathbb{C})$, entonces para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$ se cumple*

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \textit{ no existe el operador } (A-\lambda\mathbb{I})^{-1} \in B(H)\right\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \textit{existe } v \in \mathbb{C}-\{0\} \textit{ tal que } Av = \lambda v\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \textit{ es valor propio de } A\}\end{aligned}$$

2. *Considere el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ y el operador* **shift** $S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$, *definido por*

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Afirmamos que $\sigma(S) = B_1(0)$, en efecto, por la Proposición 2.4 y el Ejemplo 2.2.4 tenemos que $\sigma(S) \subseteq B_1(0)$. Si $\lambda < 1$, entonces para

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e_k = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l^2(\mathbb{N}),$$

tendremos que

$$Sx = (\lambda, \lambda^2, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e_k = \lambda x.$$

Por lo tanto, $x \in \mathcal{NUCLEO}(S - \lambda\mathbb{I})$. Así tenemos que $INT(B_1(0)) \subseteq \sigma(S) \subseteq B_1(0)$. Si $\|\lambda\| = 1$, considere

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} e_k \in l^2(\mathbb{N}).$$

Claramente,

$$\|x_n\| := \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(|1|^2 + \left|\frac{1}{\lambda}\right|^2 + \left|\frac{1}{\lambda^2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{1}{\lambda^n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left\|(S-\lambda^{-1}\mathbb{I})x_n\right\| &= \left\|\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\lambda^{-k}e_{k-1}-\tfrac{\lambda^{-1}}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}e_k\right\| \\ &= \left\|\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-k-1}e_k-\tfrac{\lambda^{-1}}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}e_k\right\| \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left\|\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-k-1}e_k-\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k-1}e_k\right\| \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left\|\lambda^{-n-1}e_n\right\| = \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda^{-1}\in\sigma(S)$. Finalmente hemos mostrado que $\sigma(S)=B_1(0)$.

El siguiente resultado es una generalización del **criterio de Carl Neumann**.

Lema 2.1. *Sean $A_1, A_2 \in B(H)$. Si A_1 es invertible y $\|A_1 - A_2\| < \frac{1}{\|A_1^{-1}\|}$, entonces A_2 es invertible con*

$$A_2^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_1^{-1}(A_1-A_2)\right)^n A_1^{-1}$$

Demostración: Sea $x := A_1^{-1}(A_1-A_2) = 1 - A_1^{-1}A_2$ y note que $A_2 = A_1(1-x)$, por lo tanto basta mostrar que $(1-x)$ es invertible. Observemos que

$$\|x\| = \left\|A_1^{-1}(A_1-A_2)\right\| \leq \left\|A_1^{-1}\right\| \, \|A_1-A_2\| < 1.$$

Por lo que la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^n$$

es abolutamente convergente, de donde $(1-x)$ es invertible. Luego A_2 es invertible con

$$A_2^{-1} = (1-x)^{-1}A_1^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(A_1^{-1}(A_1-A-2)^{-1})^i A_1^{-1}.$$

■

Utilizando este resultado, podemos probar fácilmente lo siguiente.

Proposición 2.5. *Dado un operador $A \in B(H)$ su conjunto resolvente es abierto en el plano complejo.*

Demostración: Si $\lambda\in\rho(A)$, entonces $(A-\lambda\mathbb{I})$ es invertible. Defina $\epsilon = \|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}\|^{-1}$, luego por el Lema 2.1 el conjunto

$$B_\epsilon(A) = \{D \in B(H) : \|D-A\| < \epsilon\}$$

esta contenido en el conjunto de los operadores en $B(H)$ que son invertibles. De este modo, el conjunto $R = \{\alpha\in\mathbb{C} : |\lambda-\alpha| < \epsilon\}$ es un abierto del plano complejo tal que $\lambda \in R \subset \rho(A)$. Concluimos que $\rho(A)$ es un subconjunto abierto del plano complejo.

■

Así como consecuencia se obtiene el siguiente.

Corolario 2.1. *Si $A \in B(H)$, entonces $\sigma(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.*

Demostración: En vista de la Proposición 2.5, el conjunto $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ es cerrado. Por la Proposición 2.4, el espectro es un conjunto acotado del plano complejo. Concluimos que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado y acotado. Por lo tanto, por el Teorema de Heine-Borel, $\sigma(A)$ compacto.

■

Observemos ahora la relación entre el espectro de un operador $A \in B(H)$ y su operador adjunto $A^\star \in B(H)$.

Lema 2.2. *Si $A \in B(H)$, entonces $\sigma(A^\star) = \left\{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(A)\right\} = \overline{\sigma(A)}$.*

Demostración: Solo debemos mostrar la igualdad de conjuntos.

- Supongamos que $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ es tal que $\overline{\lambda} \notin \sigma(A^\star)$. Esto implica que, existe el operador inverso de $A^\star - \overline{\lambda}\mathbb{I}$, que denotaremos por
$$R = \left(A^\star - \overline{\lambda}\mathbb{I}\right)^{-1} \in B(H).$$
Luego
$$\mathbb{I} = \mathbb{I}^\star = \left(\left(A^\star - \overline{\lambda}\mathbb{I}\right)R\right)^\star = R^\star(A - \lambda\mathbb{I}).$$
De donde $\lambda \notin \sigma(A)$. Por lo tanto $\overline{\sigma(A)} \subseteq \sigma(A^\star)$.
- Análogamente, si $\overline{\lambda} \notin \sigma(A)$ existe $R \in B(H)$ tal que $\left(A - \overline{\lambda}\mathbb{I}\right)R = \mathbb{I}$. Luego
$$\mathbb{I} = \mathbb{I}^\star = \left(\left(A - \overline{\lambda}\mathbb{I}\right)R\right)^\star = R^\star(A^\star - \lambda\mathbb{I}).$$
Por lo tanto, $\lambda \notin \sigma(A^\star)$.

Concluimos que $\overline{\sigma(A)} = \sigma(A^\star)$.

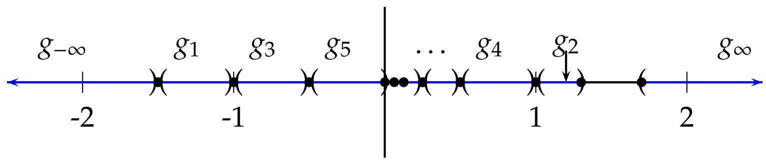
■

Un consecuencia inmediata de esto es la siguiente.

Proposición 2.6. *Si A es un operador acotado y auto-adjunto actuando en H, entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Es más, $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$.*

Demostración: Si $A \in B(H)$ es un operador auto-adjunto, entonces por el Lema 2.2 tendremos
$$\overline{\sigma(A)} = \sigma(A^\star) = \sigma(A).$$
De donde se concluye que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Por la Proposición 2.4, se tiene que $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.

■



F 5. Espectro de un operador A con sus respectivas lagunas.

Sea $A \in B(H)$ un operador auto-adjunto. La Proposición 2.6 implica que el espectro de A es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Luego, por la Proposición 2.5, este conjunto es cerrado. De este modo, el complemento en $\mathbb{R}$ del espectro de A se descompone como unión numerable de intervalos abiertos. Esto induce la siguiente.

Definición 2.2.7. Sea $A \in B(H)$ un operador auto-adjunto. Un intervalo abierto maximal del conjunto $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ lo llamaremos **laguna**. Ver Figura 5. El conjunto de lagunas de un operador A, será denotado por $\mathfrak{L}(A)$.

Observación 2.2.4.

- *La palabra laguna es la traducción al castellano de la palabra inglesa* ***gap****.*
- *El conjunto $\mathfrak{L}(A)$ esta dotado de manera natural por un orden total, inducido por los números reales. En la Figura 5, un ejemplo con*

$$\mathfrak{L}(A) = \{g_{-\infty}, g_\infty, g_1, g_3, g_5, g_2, g_4, \dots\}.$$

A continuación daremos un ejemplo que ilustra la idea de lo que representa el **gap-labelling**, en español **etiquetando lagunas**.

Ejemplo 2.2.9. *(Etiquetando Lagunas) Considere un espacio de Hilbert H de dimensión finita, digamos $n \in \mathbb{N}$. Como ya hemos visto, un operador acotado actuando en H no es más que una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. El Ejemplo 2.2.8.1 nos dice que*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \quad \textit{es valor propio de} \quad A\}.$$

Sin perdida de generalidad, supongamos $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ con $r \leq n$. Definamos la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$G(\alpha) = \sharp\{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \leq \alpha\}.$$

Claramente esta función es constante a trozos y sus saltos están en los puntos del espectro. Esto nos permite, en caso de que no conozcamos el espectro de A pero si la función G, reconstruir el espectro de A mediante esta función. Esta función G recibe el nombre de **etiquetaje de lagunas** *pues ella es constante en cada laguna del espectro de A y esto etiqueta las lagunas por el valor de la función G en cada una de ellas.*

Este ejemplo, es sumamente importante. Pues nuestro principal objetivo, en este texto, es construir una función de etiquetaje de lagunas para el espectro de un operador actuando en un espacio de Hilbert de funciones sobre un cierto espacio que definiremos en la proxima sección.

Ya hemos caracterizado el espectro del operador adjunto de un operador dado A. Ahora caracterizaremos el espectro de un operador polinomio, por medio del siguiente.

Lema 2.3. *Sea $A \in B(H)$ y $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ un polinomio en $\mathbb{C}$. Para el operador $p(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$ tenemos que*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = p(\sigma(A)).$$

Demostración:

- Sea $\lambda \in \sigma(A)$. Como $x = \lambda$ es raíz del polinomio $p(x) - p(\lambda)$, tenemos que $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$. Así $p(A) - p(\lambda) = (A - \lambda)q(A)$ y como $(A - \lambda)$ no tiene inverso, tampoco tendrá inverso $p(A) - p(\lambda)$. Es decir, $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$.
- Reciprocamente, sea $\mu \in \sigma(p(A))$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las raíces del polinomio $p(x) - \mu$. Es decir, $p(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \notin \sigma(A)$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el operador $(A - \lambda_i \mathbb{I})$ tiene inverso y por lo tanto
$$(p(A) - \mu)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1)^{-1} \cdots (A - \lambda_n)^{-1}.$$
Pero $(p(A) - \mu)$ no es invertible, por lo que algún $\lambda_{i_0} \in \sigma(A)$. Luego $p(\lambda_{i_0}) - \mu = 0$, de este modo, $\mu = p(\lambda_{i_0})$. Concluimos que
$$\sigma(p(A)) \subseteq \{p(\lambda) \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

De estos dos puntos, tenemos la igualdad.

■

2.2.2. Cálculo Funcional.

Definición 2.2.8. Sea $A \in B(H)$. El **radio espectral** de A es

$$R(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \{|\lambda|\}.$$

El radio espectral puede ser caracterizado de la siguiente forma.

Teorema 2.1. *Si $A \in B(H)$, entonces $R(A) = \text{lím}_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Demostración: Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces por el Lema 2.3 tenemos que $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Esto implica que $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|A^n\|$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|\lambda| \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. En particular,

$$R(A) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Ahora supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > R(A)$, entonces la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} A^n,$$

converge absolutamente. En particular, $\lambda^{-n}A^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ se tiene $\|\lambda^{-n}A^n\| < 1$. Esto implica que, para todo $n \geq n_0$ se satisface $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} < |\lambda|$. De donde se concluye que,

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq R(A) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

Por lo tanto, $R(A) = \lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

∎

Corolario 2.2. *Si $A \in B(H)$ es auto-adjunto, entonces $R(A) = \|A\|$.*

Demostración: Es claro que

$$\|A\|^2 = \left\|A^{\star}A\right\| = \left\|A^2\right\|.$$

Por inducción se puede mostrar que $\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$. Luego

$$R(A) = \lim_{n\to\infty} \left\|A^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|A\|.$$

∎

Lema 2.4. *Sea $A \in B(H)$ auto-adjunto. Si $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ es un polinomio en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\|p(A)\|_{B(H)} = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)|.$$

Demostración: Como A es auto-adjunto, tenemos

$$p(A)^{\star} = \overline{p}(A) = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} A^n.$$

Luego,

$$\|p(A)\|^2 = \|p(A)^{\star}p(A)\| = \|(\overline{p}p)(A)\|.$$

Como $p(A)^{\star}p(A) = (\overline{p}p)(A)$ es auto-adjunto, por el Corolario 2.2, tenemos

$$\|(\overline{p}p)(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma((\overline{p}p)(A))} \{|\lambda|\}.$$

Así, por el Lema 2.3 tendremos

$$\sup_{\lambda\in\sigma((\overline{p}p)(A))} \{|\lambda|\} = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \{|\overline{p}p(\lambda)|\} = \left(\sup_{\lambda\in\sigma(A)} \{|p(\lambda)|\}\right)^2 .$$

∎

Teorema 2.2. *Sea A un operador acotado y auto-adjunto en un espacio de Hilbert H. Existe una única función $\mathbb{C}$-lineal, $\phi_A : C(\sigma(A)) \to B(H)$ satisfaciendo que*

1. *ϕ_A es un homomorfismo de álgebras, es decir, si $\mathbb{1}_{\sigma(A)}$ es la función característica en $\sigma(A)$ e $\mathbb{I}$ es el operador identidad en H, se tiene que*
$$\phi_A(\mathbb{1}_{\sigma(A)}) = \mathbb{I}.$$
Y para cualquier par $f, g \in C(\sigma(A))$ se tiene que
$$\phi_A(fg) = \phi_A(f) \circ \phi_A(g).$$
2. *Para $f \in C(\sigma(A))$ se cumple $\phi_A\left(\overline{f}\right) = \phi_A(f)^\star$.*
3. *Para toda $f \in C(\sigma(A))$, $\quad \|\phi_A(f)\| = \|f\|_\infty$.*
4. *Para la función identidad $\mathbb{I}$, se tiene que $\phi_A(\mathbb{I}) = A$.*
5. *Si existe $\varphi \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A\varphi = \lambda\varphi$, entonces para toda $f \in C(\sigma(A))$ se cumple que $\phi_A(f)\varphi = f(\lambda)\varphi$.*
6. *Para toda $f \in C(\sigma(A))$ se tiene $\sigma\left(\phi_A(f)\right) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.*
7. *Si $f \in C(\sigma(A))$ es tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x) \geq 0$, entonces $\phi_A(f) \geq 0$.*

Para simplificar notación escribiremos $f(A) = \phi_A(f)$.

Demostración: Si $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ es un polinomio en $\mathbb{C}$, entonces definimos $\phi_A(p) := \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$. Por el Lema 2.4, tenemos que
$$\|\phi(p)\|_{B(H)} = \|p\|_\infty.$$
Como el álgebra de polinomios tiene unidad, contiene los conjugados complejos y separa puntos, por el Teorema de Stone-Weierstrass, el álgebra de los polinomios es densa en $C(\sigma(A))$. Por lo tanto la función ϕ_A se extiende a una función $\phi_A : C(\sigma(A)) \to B(H)$ continua. Las propiedades 1,2,3,4 y 5 son claras por continuidad. Para mostrar 7 basta notar, si $f \geq 0$, entonces existe una función $g : C(\sigma(A)) \to \mathbb{R}$ tal que $f = g^2$. De este modo $\phi_A(f) = \phi_A(g)^2$, donde $\phi_A(g)$ es un operador auto-adjunto pues $g(\sigma(A)) \subset \mathbb{R}$. Por lo tanto, en vista del Ejemplo 2.2.5, tenemos $\phi(f) \geq 0$.
finalmente, para mostrar 6, primero notemos que si $\lambda \notin f(\sigma(A))$, entonces esta bien definida la función $g(x) = (f(x) - \lambda)^{-1} \in C(\sigma(A))$ y satisface que para todo $x \in \sigma(A)$ se cumple $(f(x) - \lambda)g(x) = 1$. Por lo tanto
$$(f(A) - \lambda)g(A) = \mathbb{1}_{\sigma(A)}(A) = \mathbb{I}.$$
Así, $\lambda \notin \sigma(f(A))$. Desde que A es auto-adjunto, para todo polinomio p tendremos que
$$p(A)^\star p(A) = \overline{p}p(A) = p\overline{p}(A) = p(A)p(A)^\star.$$
De este modo, el operador $f(A)$ es normal y también $f(A) - \lambda$. Si $\lambda \in f(\sigma(A))$, entonces $f(A) - \lambda$ no es invertible. Como el operador $f(A) - \lambda$ es normal y no invertible, existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\|\alpha_n\| = 1$ y
$$\|(f(A) - \lambda)\alpha_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Concluimos que $\lambda \in \sigma(f(A))$ y por lo tanto
$$\sigma\left(\phi_A(f)\right) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

■

2.2.3. Teorema Espectral.

Definición 2.2.9. Sean $A \in B(H)$ un operador auto-adjunto y $\psi \in H$. Podemos definir un funcional lineal en $C(\sigma(A))$ por

$$f \mapsto \langle \psi, f(A)\psi \rangle.$$

Observemos que si $f \geq 0$, entonces por (7) del Teorema 2.2 tendremos $f(A) \geq 0$. De donde concluimos que el funcional que hemos definido es positivo según la Definición 2.2.1. Por el Teorema de Riesz-Markov, existe una unica medida μ_ψ en el conjunto compacto $\sigma(A)$ tal que

$$\langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(z)\mathrm{d}\mu_\psi(z).$$

Esta medida μ_ψ es llamada la **medida espectral** asociada al vector ψ.

Esta medida espectral nos permite extender el Teorema 2.2 al conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de las funciones de Borel acotadas definidas sobre $\mathbb{R}$. Sea $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De manera natural podemos definir $g(A)$ tal que se cumpla la igualdad

$$\langle \psi, g(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} g(z)\mathrm{d}\mu_\psi(z).$$

Luego la identidad de Polarización nos permite definir para todo $\psi, \varphi \in H$ el número $\langle \psi, g(A)\varphi \rangle$, de donde se obtiene la definición del operador $g(A)$. Formalmente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea A un operador acotado y auto-adjunto definido sobre un espacio de Hilbert H. Existe una única función $\mathbb{C}$-lineal $\hat{\phi}_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ satisfaciendo:*

1. *$\hat{\phi}_A$ es un homomorfismo de álgebras. Es decir, si $\mathbb{1}$ es la función constante igual a 1 en todo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$ es el operador identidad en H, se tiene*

$$\hat{\phi}_A(\mathbb{1}) = \mathbb{I}.$$

   Y para cualquier par $f, g \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ se cumple

$$\hat{\phi}_A(fg) = \hat{\phi}_A(f) \circ \hat{\phi}_A(g).$$

2. *Para toda $f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ se tiene $\hat{\phi}_A(\overline{f}) = \hat{\phi}_A(f)^\star$.*
3. *Para toda $g \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tenemos que $\|\hat{\phi}_A(g)\| \leq \|g\|_\infty$.*
4. *Para la función identidad $\mathbb{I}$ se tiene $\hat{\phi}_A(\mathbb{I}) = A$.*
5. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ es una sucesión tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$ y $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, entonces $\hat{\phi}_A(f_n)$ converge fuertemente a $\hat{\phi}_A(f)$.*
6. *Si existe $\varphi \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A\varphi = \lambda\varphi$, entonces $\hat{\phi}_A(f)\varphi = f(\lambda)\varphi$.*
7. *Si $f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ es tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(x) \geq 0$, entonces $\hat{\phi}_A(f) \geq 0$.*
8. *Si $B \in B(H)$ es tal que $AB = BA$, entonces $\hat{\phi}_A(f)B = B\hat{\phi}_A(f)$*

Para simplificar notación escribiremos $f(A) = \hat{\phi}_A(f)$.

Demostración: La demostración es analoga a la del Teorema 2.2. La unica parte no trivial es el punto 5. Considere $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ una sucesión tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente y $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado. Luego, para todo $x \in H$ tenemos que

$$\langle x, (f_n(A) - f(A))x\rangle = \int_{\sigma(A)} f_n(\lambda) - f(\lambda)\mathrm{d}\mu_x(\lambda).$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que esta integral converge a cero. De esta forma tenemos que para todo $x \in H$

$$\|f_n(A)x - f(A)x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Concluimos que $f_n(A) \xrightarrow{s} f(A)$.

■

Definición 2.2.10. Sea A un operador acotado y auto-adjunto. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Borel. Si $\mathbb{1}_\Omega$ es la función característica de Ω, entonces $\mathbb{1}_\Omega(A)$ es llamada la **proyección espectral** de A en el conjunto Ω y se denota por P_Ω.

Para ilustrar este concepto veamos el siguiente.

Ejemplo 2.2.10. *Si* $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *un operador lineal auto-adjunto, entonces*

$$A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in M_n(\mathbb{C})$$

es una matriz tal que $A = \overline{A^t} = (\overline{a_{ji}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$. *En vista del Ejemplo 2.2.8, tenemos que*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \textit{ es valor propio de } A\}.$$

Como el operador es auto-adjunto, por la Proposición 2.6, tenemos que

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}.$$

Sea $\sigma(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, *donde los valores propios posiblemente están repetidos. Sean* $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_d} \subset \sigma(A)$ *los valores propios distintos de* A *y para todo* $k \in \{1, \ldots, d\}$ *denotemos por* P_{i_k} *a la proyección en el espacio propio asociado el vector propio* α_{i_k}. *Luego podemos escribir*

$$A = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{i_k} P_{i_k}.$$

De allí, es claro que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\mathbb{I}_{(-\infty,\alpha]}(A) = P_{(-\infty,\alpha]} = \sum_{\substack{k \\ \alpha_{i_k} \le \alpha}} \alpha_{i_k} P_{i_k}.$$

En vista de que la función $\mathbb{I}_{(-\infty,\alpha]}$, *satisface que para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\mathbb{I}_{(-\infty,\alpha]}(x)^2 = \mathbb{I}_{(-\infty,\alpha]}(x) = \mathbb{I}^{\star}_{(-\infty,\alpha]}.$$

La proyección espectral cumple

$$P^2_{(-\infty,\alpha]} = P_{(-\infty,\alpha]} = P^{\star}_{(-\infty,\alpha]}.$$

Para $x \in \mathbb{C}^n$ fijo, la medida espectral asociada, μ_x, satisface

$$\langle x, P_{(-\infty,\alpha]}x\rangle = \langle P_{(-\infty,\alpha]}x, P_{(-\infty,\alpha]}x\rangle = \|P_{(-\infty,\alpha]}x\|^2.$$

Y por definición,

$$\langle x, P_{(-\infty,\alpha]}x\rangle = \int_{\sigma(A)} \mathbb{I}_{(-\infty,\alpha]}(\xi)\mathrm{d}\mu_x(\xi) = \mu_x((-\infty,\alpha]).$$

Concluimos que $\mu_x((-\infty,\alpha]) = \|P_{(-\infty,\alpha]}x\|^2$.

Proposición 2.7. *En el contexto de la definición anterior, sea g una laguna del espectro de A. Para todo $x, y \in g$ se tiene que $P_{(-\infty,x)} = P_{(-\infty,y)}$.*

Demostración: Basta observar que, si g es una laguna y $x, y \in g$, entonces las funciones $\mathbb{1}_{(-\infty,x)}$ y $\mathbb{1}_{(-\infty,y)}$ coinciden en el conjunto $\sigma(A)$. de esto se concluye que $P_{(-\infty,x)} = P_{(-\infty,y)}$.

■

Proposición 2.8. *La familia $\{P_\Omega\}_{\Omega\subset\mathbb{R}\ Borel}$ de proyecciones espectrales de un operador acotado y auto-adjunto, A, satisface las siguientes propiedades:*

1. $P^2_\Omega = P_\Omega = P^\star_\Omega$.
2. *Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P_{(-\infty,a)} = 0$.*
3. *Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P_{(-a,a)} = \mathbb{I}$.*
4. *Si $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ con $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ para $m \neq n$, entonces*

$$P_\Omega = s - \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n} \right).$$

5. $P_{\Omega_1} \circ P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1\cap\Omega_2}$.
6. *Si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, entonces $P_{\Omega_1} \leq P_{\Omega_2}$.*

Demostración: En vista de que las funciones características toman valores reales en el conjunto $\{0,1\}$, tendremos que para cualquier conjunto de borel Ω se cumple

$$\mathbb{1}^2_\Omega = \mathbb{1}_\Omega = \overline{\mathbb{1}_\Omega}.$$

De donde se concluye 1.
Como el operador es acotado, por la Proposición 2.4 tenemos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(A) \subset [-a,a]$. Por lo tanto basta escoger $a_1 < -a$ y $a_2 > a$ para tener $P_{(-\infty,a_1)} = 0$ y $P_{(-a_2,a_2)} = \mathbb{I}$. Concluyendo así 2 y 3.
El punto 4 es consecuencia directa del Teorema 2.3. Pues, sea $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ con $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ para $m \neq n$. La sucesión

$$\left\{ \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^N \Omega_n} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

F 6. Mezquitas.

es tal que, $\mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{N}\Omega_n} \to \mathbb{1}_{\Omega}$ puntualmente y el conjunto $\left\{\left\|\mathbb{1}_{\cup_{i=1}^{N}\Omega_n}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}$ es acotado. Así, en vista de la propiedad 5 del Teorema 2.3, tendremos que

$$P_{\Omega} = s - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}\right).$$

Para mostrar 5, basta observar que

$$\Omega_1 = \{\Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)\} \dot{\cup} (\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Luego, $\mathbb{1}_{\Omega_1} = \mathbb{1}_{\Omega_1\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)} + \mathbb{1}_{(\Omega_1\cap\Omega_2)}$. De donde tenemos que

$$\mathbb{1}_{\Omega_2}\mathbb{1}_{\Omega_1} = \mathbb{1}_{\Omega_2}\mathbb{1}_{\Omega_1\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)} + \mathbb{1}_{\Omega_2}\mathbb{1}_{(\Omega_1\cap\Omega_2)}.$$

Como $\mathbb{1}_{\Omega_2}\mathbb{1}_{\Omega_1\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)} = 0$, se concluye que $P_{\Omega_1} \circ P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1\cap\Omega_2}$.
Análogamente a como mostramos 5, sea $\Omega_1 \subset \Omega_2$ y escribamos
$\Omega_2 = (\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cup \Omega_1$. Luego

$$\mathbb{1}_{\Omega_2} = \mathbb{1}_{(\Omega_2\setminus\Omega_1)} + \mathbb{1}_{\Omega_1}.$$

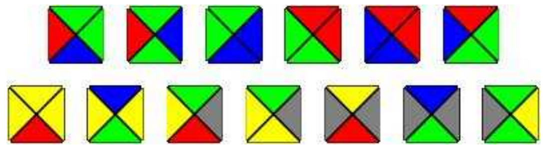
Por lo tanto, $\mathbb{1}_{\Omega_2} - \mathbb{1}_{\Omega_1} = \mathbb{1}_{(\Omega_2\setminus\Omega_1)}$, de donde se concluye que

$$P_{\Omega_2} - P_{\Omega_1} = P_{\Omega_2\setminus\Omega_1} \geq 0,$$

por la propiedad 1 de esta proposición y el Ejemplo 2.2.5. De esto concluimos 6 en la proposición.

■

2.3. Sistemas de embaldosados. En esta sección trataremos de entender lo que es un embaldosado y su estrecha relación con los cristales y cuasicristales. El problema de embaldosar un espacio es más antiguo de lo que se cree, pues ya en los siglos *XII* y *XIII* D.C. los musulmanes adornaron las paredes y los techos de sus mezquitas con complejos embaldosados, como lo muestra la Figura 6.
En los años 60 el matemático y filosofo Hao Wang comenzó a estudiar los embaldosados del plano con cuadrados pintados de distintos colores, ver Figura 7. Se preguntaba principalmente si existía algún algoritmo que permitiera saber si, dado un conjunto de baldosas y uno de reglas para pegar estas baldosas, se puede embaldosar el plano, $\mathbb{R}^2$. En el caso de la



F   7. Las 13 baldosas de Culik.

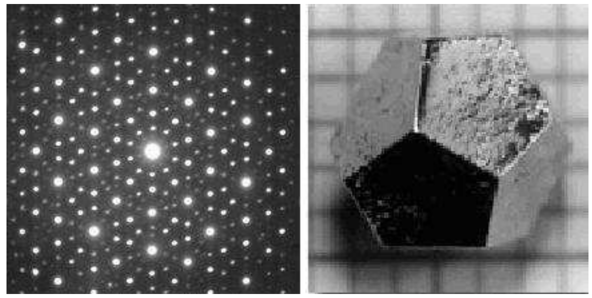
recta real, Wang mostró en su articulo [28], que existía tal algoritmo. Esto lo hizo asociando un grafo dirigido, de la manera siguiente. Consideremos una baldosa en $\mathbb{R}$ como un subconjunto cerrado y conexo, es decir un intervalo cerrado. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de baldosas distintas, es decir intervalos cerrados de largo distinto o del mismo largo pero le asignamos un color diferente a cada uno de tal manera de diferenciarlos. Consideremos un conjunto de reglas para pegar estos intervalos, por ejemplo;

> ”Los intervalos de color verde solo pueden estar al lado de uno de color azul.”

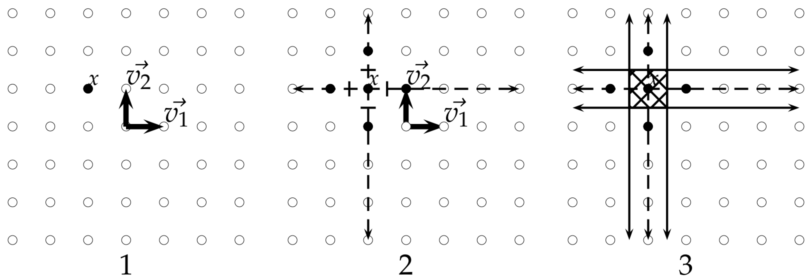
Luego construimos un grafo dirigido, apartir de los conjuntos de baldosas y de reglas, de la siguiente forma. Por cada elemento $a \in \mathcal{A}$ consideramos un vértice ,v_a. Si un intervalo a puede estar a la derecha de uno b, entonces hacemos una flecha dirigida desde el vértice v_b hasta el vértice v_a. De este modo, Wang probo que el problema de embaldosar la recta real era equivalente a encontrar un camino infinito en tal grafo. Para el caso del plano, Wang solo pudo mostrar que si existía tal algoritmo, entonces cada vez que se pudiera embaldosar el plano, también se podría hacer de manera periódica.

En el año 1966, su alumno Robert Berger encontró una colección de 20.426 baldosas del tipo Wang, aunque luego reduciría este conjunto a 104 baldosas, que permitían embaldosar el plano siempre de manera no periódica, Ver [4]. En 1996, el matemático Karel Culik II mostró que solo son necesarias 13 baldosas del tipo Wang para construir un embaldosado no periódico, ver Figura 7. De esta manera, el descubrimiento de Berger más el resultado de Wang, mostró que tal algoritmo no existía en el plano. Sin embargo, los embaldosados no periódicos despertaron la emoción de los científicos recién en los años 80, cuando un grupo de físicos dirigidos por Dany Shechtman logran, por medio de enfriamiento rápido, solidificar la aleación de Aluminio y Manganeso antes de que esta se cristalice, Ver [10]. Este hecho causó mucho revuelo pues, al impedir que el solido se cristalice, este arrojo un patrón de difracción por electrones que tenia una estructura ordenada pero no periódica, ver Figura 8. Este hecho rompía los principios de la cristalografía convencional que solo creía en estructuras ordenadas y periódicas, surgiendo así para la ciencia el concepto de cuasi-cristales. Esto abrió las fronteras de la cristalografía y reformulo sus principios.

Pero que relación tiene los cristales y los cuasi-cristales con los embaldosados?. Estos están muy ligados, pues los cristales y cuasi-cristales son objetos puramente geométricos y existe una forma clara y fiel de asociar un



F 8. Modelos de la aleación Zinc-Mangesio-Holmio.



F 9. Construcción celdas de Voronoi.

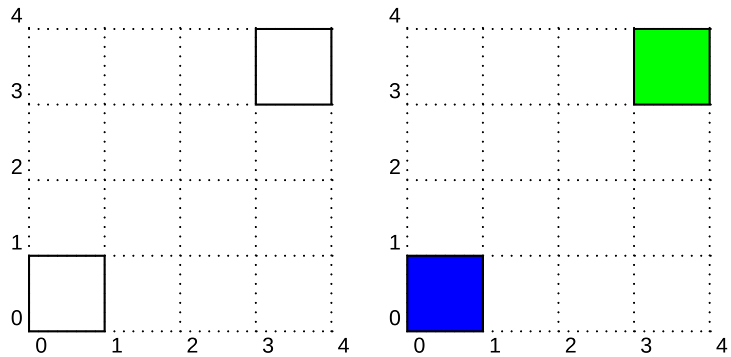
embaldosado a un cristal o cuasi-cristal, llamado **celdas de Voronoi**. En el plano, se comienza con el enrejado $\mathcal{L}$ que define el cristal o cuasi-cristal por medio de su patrón de difracción y se consideran los vectores generadores de este enrejado, supongamos $\vec{v_1}, \vec{v_2}$(ver Figura 9.1). Luego para un punto $x \in \mathcal{L}$ se trazan las rectas paralelas a los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ que pasan por el punto x. En el punto medio de los segmentos, de esas rectas, que unen el punto x con los puntos del enrejado más cercanos a x, que están sobre estas rectas, se trazan rectas perpendiculares a estos segmentos(ver Figura 9.2). Así se define la celda de Voronoi en el punto x como la región encerrada por estas perpendiculares(ver Figura 9.3). Otra definición mucho más simple es: la celda de Voronoi en el punto $x \in \mathcal{L}$ es el conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \text{ Para todo } z \in \mathcal{L} \text{ se tiene } \|y - x\| \leq \|y - z\|\}.$$

Para obtener más detalle acerca de la relación entre embaldosados y cuasi-cristales, los invitamos a leer [25]. Para tener más detalles sobre la teoría de embaldosados recomendamos [26] y [22].

2.3.1. Conceptos básicos.

Definición 2.3.1. A un conjunto $t \subset \mathbb{R}^n$ lo llamaremos **baldosa** en $\mathbb{R}^n$ si es homeomorfo a la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$, que denotamos por B_1. En algunas ocasiones una baldosa en $\mathbb{R}^n$ es considerada como un par $t = (t', l)$, donde t' es un conjunto homeomorfo a B_1 y l es una etiqueta o color. En tal



F 10. Baldosas equivalentes y baldosas no equivalentes.

caso llamaremos a t una **baldosa etiquetada** de $\mathbb{R}^n$. En general llamaremos a una baldosa de $\mathbb{R}^n$, etiquetada o no, simplemente **baldosa**, a menos que no esté clara la dimensión d del espacio al que pertenece.

Observación 2.3.1. 1. *La palabra baldosa es la traducción de la palabra* ***tile*** *del inglés .*
2. *La definición de baldosa se puede generalizar pues no necesariamente debe ser homeomorfa a B_1. Ver por ejemplo* [26]. *Sin embargo, en este texto nosotros nos limitaremos a la Definición 2.3.1.*

Ejemplo 2.3.1. *Todo polígono regular es una baldosa en $\mathbb{R}^2$.*

Definición 2.3.2. Dos baldosas $t, r \subset \mathbb{R}^n$ se dicen **equivalentes** si t es un trasladado de r por algún vector de $\mathbb{R}^n$. En el caso de que $t, r \subset \mathbb{R}^n$ sean baldosas etiquetadas, digamos $t = (t', l_1)$ y $r = (r', l_2)$, diremos que éstas son equivalentes si t' es un trasladado de r' por algún vector en $\mathbb{R}^n$ y si además $l_1 = l_2$.

Ejemplo 2.3.2. *Sea t un cuadrado de lado 1. Supongamos que a denota el color azul y que v denota el color verde. Ver Figura 10.*

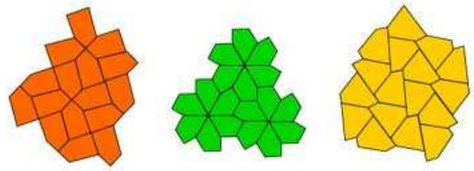
- *Si t tiene un vértice en el orígen y $r = t + (3,3)$ es un cuadrado de lado 1 con un vértice en el punto $(3,3) \in \mathbb{R}^2$, entonces claramente t y r son baldosas equivalentes.*
- *Si $t_1 = (t, a)$ es un cuadrado de lado 1 pintado de color azul con un vértice en el orígen y $t_2 = (t + (3,3), v)$ es un cuadrado de lado 1 pintado de color verde con un vértice en el punto $(3,3) \in \mathbb{R}^2$, entonces t y r no son baldosas equivalentes pues tienen etiquetas distintas.*

Definición 2.3.3. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de baldosas no equivalentes entre si. El soporte de $a \in \mathcal{A}$ es el conjunto

$$SUPP(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in a\}.$$

Si $a = (a_1, l) \in \mathcal{A}$ es una baldosa etiquetada. Su soporte está definido como

$$SUPP(a) = SUPP(a_1) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in a_1\}.$$



F 11. Ejemplos de motivos.

Definición 2.3.4. Un **parche o motivo** en $\mathbb{R}^n$ es una colección finita P de baldosas de $\mathbb{R}^n$ tales que para todo par de baldosas distintas $t, t' \in P$ se tiene que

$$INT(SUPP(t)) \cap INT(SUPP(t')) = \emptyset.$$

Dado un motivo P en $\mathbb{R}^n$, el conjunto

$$SUPP(P) = \cup_{a \in P} SUPP(a)$$

será llamado el **soporte** del motivo P.

Observación 2.3.2.
- *Un motivo puede ser conexo o no.*
- *Las palabras parche o motivo son utilizadas como la traducción al castellano de la palabra en inglés **patch**.*

Definición 2.3.5. El **diámetro del motivo** P es el diámetro del soporte de P y lo denotamos por $DIAM(P)$.

Observación 2.3.3. *La definición de baldosas equivalentes se puede extender a motivos.*

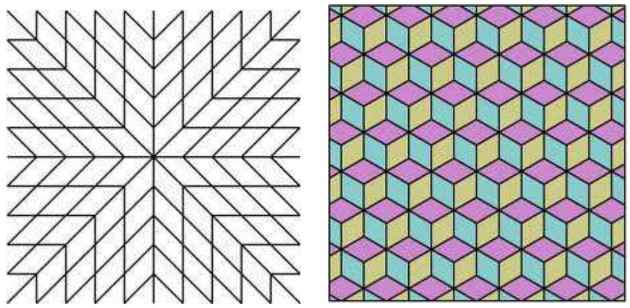
Definición 2.3.6. Un **embaldosado** en $\mathbb{R}^n$ (con $d \geq 1$) es una colección numerable T de baldosas de $\mathbb{R}^n$ que verifican:
- $\mathbb{R}^n = \bigcup_{t \in T} SUPP(t)$.
- $INT(SUPP(t)) \bigcap INT(SUPP(t')) = \emptyset$, para $t, t' \in T$ con $t \neq t'$.

Definición 2.3.7. Sea T un embaldosado de $\mathbb{R}^n$.
1. Un **motivo** del embaldosado T es una colección finita de baldosas P de T tales que para cualquier par de baldosas distintas $t, t' \in T \cap P$ se tiene que $INT(SUPP(t)) \cap INT(SUPP(t')) = \emptyset$.
2. Sea $r > 0$. Denotaremos por $T \cap B_r$ al motivo maximal, con respecto a la inclusión de sus soportes, del embaldosado T contenido en la bola B_r.

Definición 2.3.8. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos **traslación del embaldosado** T por $\vec{v}$ al embaldosado

$$T - \vec{v} = \{t - \vec{v} : t \in T\},$$

donde $t - \vec{v}$ es igual a $(SUPP(t_1) - \vec{v}, l)$, si $t = (t_1, l)$ es una baldosa con etiqueta.



F 12. Ejemplos de embaldosados.

Definición 2.3.9. El **grupo de traslación** de un embaldosado T es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$\Upsilon_T = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : T - \vec{v} = T\}.$$

Ejemplo 2.3.3. *Si T es el embaldosado de $\mathbb{R}^2$ formado por cuadrados de lado 1 con vértices en el conjunto $\{(n, m) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$, entonces*

$$\Upsilon_T = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Definición 2.3.10. Un embaldosado T de $\mathbb{R}^n$ se dice **periódico** si su grupo de traslación es un enrejado. Lo llamaremos **aperiódico** si $\Upsilon_T = \left\{\vec{0}\right\}$.

Observación 2.3.4. *Si el grupo de traslación de un embaldosado tiene por lo menos un vector no nulo y menos de d vectores linealmente independientes, entonces diremos que el embaldosado es* **no periódico**.

Definición 2.3.11. Sea $\mathcal{A}$ una colección de baldosas no equivalentes entre si. Denotaremos por $X_{\mathcal{A}}$ al conjunto de todos los embaldosados cuyas baldosas son equivalentes a algún elemento de $\mathcal{A}$.

Observación 2.3.5. *Podriamos tener $X_{\mathcal{A}} = \emptyset$. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \{B_\epsilon\}$ con ϵ fijo, ver Figura 13, entonces $X_{\mathcal{A}} = \emptyset$.*

Tomando en cuenta esta observación, en adelante asumiremos que $X_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de baldosas no equivalentes entre si. Sobre $X_{\mathcal{A}}$ actúa $\mathbb{R}^n$ como grupo aditivo por traslación:

$$\rho : \mathbb{R}^n \times X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$$

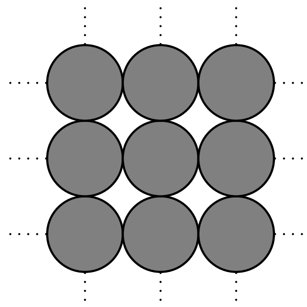
$$(\vec{v}, T) \mapsto \rho^{\vec{v}}(T) = T - \vec{v}$$

Así $(X_{\mathcal{A}}, \mathbb{R}^n, \rho)$ es un sistema dinámico.

Ahora definiremos una topología en $X_{\mathcal{A}}$ con respecto a la cual cada función $\rho^{\vec{v}}$ es un homeomorfismo. En esta topología, dos embaldosados $T_1, T_2 \in X_{\mathcal{A}}$ están cerca si existe $\vec{v_1} \in B_\epsilon$, con ϵ pequeño, tal que

$$(T_1 - \vec{v_1}) \bigcap B_{\frac{1}{\epsilon}} = T_2 \bigcap B_{\frac{1}{\epsilon}}.$$

Esta topología será inducida por una métrica que introduciremos a continuación de la siguiente notación.



F 13. Conjunto de baldosas con $X_{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Definición 2.3.12. Sea $\mathcal{A}$ una colección de baldosas no equivalentes entre si. Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $T \in X_{\mathcal{A}}$. Definimos $T[[K]]$ como el conjunto de todos los motivos P tales que $K \subseteq SUPP(P)$. Escribiremos $T[K]$ para el motivo más pequeño del conjunto $T[[K]]$, es decir;

$$T[K] := \{t \in T : t \cap K \neq \emptyset\}.$$

Definición 2.3.13. Sea $\mathcal{A}$ un colección de baldosas no equivalentes entre si. Para $T_1, T_2 \in X_{\mathcal{A}}$ definimos

$$\tilde{d}(T_1, T_2) = \text{ínf}\Big\{0 < r : \text{existen } P_1 \in T_1\left[\left[B_{\frac{1}{r}}\right]\right] \text{ y } P_2 \in T_2\left[\left[B_{\frac{1}{r}}\right]\right], \text{ para los cuales existe } \vec{v} \in B_r \text{ tal que } P_1 - \vec{v} = P_2\Big\}. \tag{2.1}$$

$$d(T_1, T_2) = \text{mín}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \tilde{d}(T_1, T_2)\right\}. \tag{2.2}$$

Proposición 2.9. *Sea $\mathcal{A}$ un colección de baldosas no equivalentes entre si. La ecuación 2.2 define una función*

$$\begin{array}{cccc} d & : & X_{\mathcal{A}} \times X_{\mathcal{A}} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (T_1, T_2) & \mapsto & d(T_1, T_2) \end{array}$$

*que es una distancia en el conjunto $X_{\mathcal{A}}$ con la cual el espacio métrico $(X_{\mathcal{A}}, d)$ es completo. A esta distancia le llamaremos **distancia de embaldosados**.*

Demostración: Claramente d satisface las propiedades

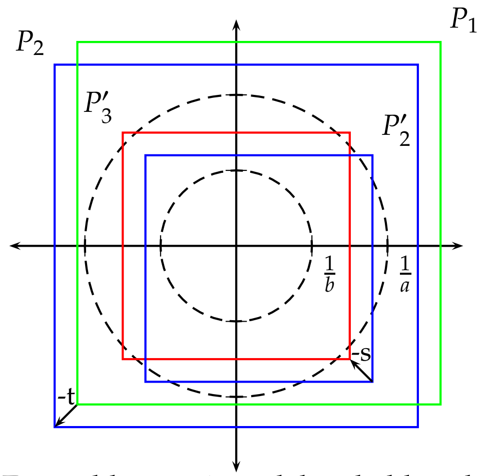
$$d(T_1, T_2) = d(T_2, T_1)$$

$$d(T_1, T_2) \geq 0.$$

$$T_1 = T_2 \text{ implica } d(T_1, T_2) = 0$$

Supongamos que $d(T_1, T_2) = 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existen motivos

$$P_{1,n} \in T_1[[B_n]] \text{ y } P_{2,n} \in T_2[[B_n]]$$



F 14. En azul los motivos del embaldosado T_2, en rojo el motivo del embaldosado T_3 y en verde el motivo del embaldosado T_1.

para los cuales existe $\vec{v} \in B_{\frac{1}{n}}$ satisfaciendo que

$$P_{1,n} - \vec{v} = P_{2,n}.$$

A medida que n crece, los motivos $P_{1,n}, P_{2,n}$ tienen soportes más grandes, y la perturbación $\vec{v}$ admitida es más pequeña, se concluye que $T_1 = T_2$.
Para concluir que d es una métrica solo nos falta comprobar la desigualdad triangular. En efecto; sean $T_1, T_2, T_3 \in X_{\mathcal{A}}$ y mostremos que

$$d(T_1, T_3) \leq d(T_1, T_2) + d(T_2, T_3).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a' = d(T_1, T_2)$ y $b' = d(T_2, T_3)$ satisfacen $a' \leq b'$.
si $a' + b' \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, por definición

$$d(T_1, T_3) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq d(T_1, T_2) + d(T_2, T_3).$$

Supongamos ahora que $a' + b' < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Tomemos $0 < \epsilon < \frac{\sqrt{2}}{2} - (a' + b')$ y definamos $a = a' + \frac{\epsilon}{2}$ y $b = b' + \frac{\epsilon}{2}$. Luego $d(T_1, T_2) < a$ y $d(T_2, T_3) < b$. Por definición de la función d tenemos que existen motivos

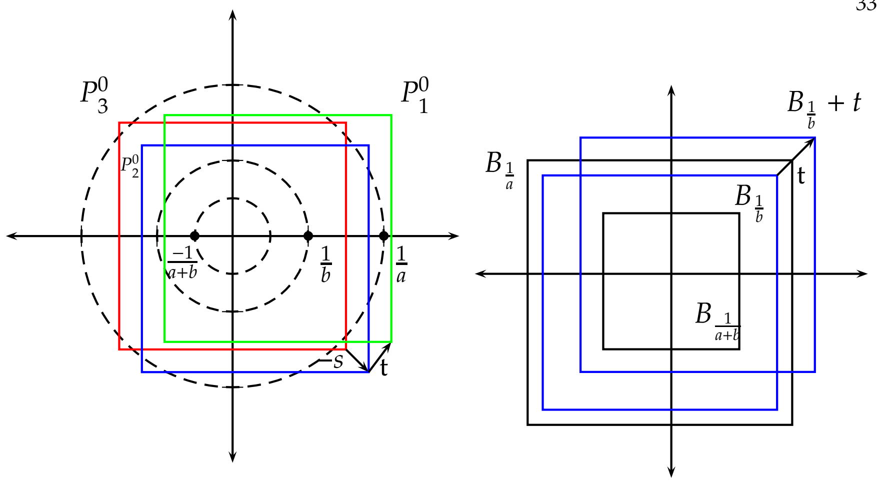
$$P_1 \in T_1\left[\left[B_{\frac{1}{a}}\right]\right], \quad P_2 \in T_2\left[\left[B_{\frac{1}{a}}\right]\right], \quad P'_2 \in T_2\left[\left[B_{\frac{1}{b}}\right]\right], \quad P'_3 \in T_3\left[\left[B_{\frac{1}{b}}\right]\right]$$

y también $t, s \in \mathbb{R}^n$, con $\|t\| \leq a$ y $\|s\| \leq b$, tales que

$$\rho^t(P_1) = P_2 \text{ y } \rho^s(P'_2) = P'_3.$$

Ver Figura 14. Definimos

$$P_2^0 = P_2 \cap P'_2, \quad P_1^0 = \rho^{-t}(P_2^0) \subseteq P_1, \quad P_3^0 = \rho^s(P_2^0).$$



1 2

F 15

En vista de que $a < b$, se tiene

$$P_2^0 \in T_2\left[\left[B_{\frac{1}{b}}\right]\right]$$

$$P_1^0 \in T_1\left[\left[B_{\frac{1}{b}+t}\right]\right]$$

$$P_3^0 \in T_2\left[\left[B_{\frac{1}{b}-s}\right]\right].$$

Esto implica que existe un motivo $P = P_2^0 \in T_2[[B_{\frac{1}{b}}]]$ tal que $P_3^0 = P - s$, de donde $P_3^0 \in T_3[[B_{\frac{1}{b}}]]$. Además

$$\rho^{-(t+s)}(P_3^0) = \rho^{-t}(P_2^0) = P_1^0, \quad \text{donde} \quad \|t + s\| \leq \|t\| + \|s\| \leq a + b.$$

Luego P_3^0 y P_1^0 son motivos de T_3 y T_1 respectivamente, que son iguales en una bola de radio $\frac{1}{a+b}$, salvo una traslación de norma menor ó igual a $(a + b)$. Ver Figura 15.1. De esta forma, para concluir que $d(T_1, T_3) \leq a + b$, sólo bastaría mostrar que

$$B_{\frac{1}{a+b}} \subset B_{\frac{1}{b}} + t.$$

Ver Figura 15.2. En efecto, como $0 < a \leq b < \frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos que $ab < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $b^2 < \frac{1}{2}$, de este modo $ab + b^2 \leq 1$. Por lo tanto, $a(ab + b^2) = (a^2b + ab^2) \leq a$. Luego $0 < b \leq a + b - a^2b - ab^2 = (a + b)(1 - ab)$, lo que implica que

$$0 < \frac{1}{a+b} \leq \frac{1 - ab}{b} = \frac{1}{b} - a.$$

De esto sigue que $B_{\frac{1}{a+b}} \subseteq B_{\frac{1}{b}} + t$.

Hemos mostrado que existen motivos

$$P_1^0 \in T_1\left[\left[B_{\frac{1}{a+b}}\right]\right] \text{ y } P_3^0 \in T_3\left[\left[B_{\frac{1}{a+b}}\right]\right]$$

tales que $\rho^{-(t+s)}(P_3^0) = P_1^0$ con $\|t+s\| \leq a+b$, de donde sigue

$$d(T_1, T_3) \leq a + b = d(T_1, T_2) + d(T_2, T_3) + \epsilon.$$

Y como ϵ es arbitrariamente pequeño, se tiene la desigualdad triangular. Veamos ahora que el espacio $X_{\mathcal{A}}$ con la métrica de embadosados es completo. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_A$ una sucesión de Cauchy de embaldosados. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n < \infty.$$

Como la sucesión es de Cauchy, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que para $k, l \geq m_n$ se tiene que

$$d(T_k, T_l) \leq e_n.$$

Definamos $s_n = d(T_{m_n}, T_{m_{n+1}}) + 2^{-n}$. Así $d(T_{m_n}, T_{m_{n+1}}) < s_n$. Por definición de la métrica, existen motivos

$$P_n \in T_{m_n}\left[\left[B_{\frac{1}{s_n}}\right]\right] \text{ y } P'_n \in T_{m_{n+1}}\left[\left[B_{\frac{1}{s_n}}\right]\right]$$

tales que $P_n - t_n = P'_n$ para algún $\vec{t}_n \in B_{s_n}$. Tomando subsucesiones, podemos asumir que

$$P'_n \subseteq P_{n+1} \text{ y } P_n - \vec{t}_n \subseteq P_{n+1}.$$

Sea $\vec{r}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \vec{t}_k$. Luego

$$P_n - \vec{r}_n = P_n - \vec{t}_n - \vec{r}_{n+1} \subseteq P_{n+1} - \vec{r}_{n+1}.$$

Por lo que $\{P_n - \vec{r}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de motivos crecientes. Así $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(P_n - \vec{r}_n)$ es un embaldosado de X_A tal que $d(T, T_{m_n}) \to 0$ cuando $n \to \infty$. De este modo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en X_A.

■

Corolario 2.3. $(X_{\mathcal{A}}, \mathbb{R}^n, \rho)$ *es un sistema dinámico topológico con* $X_{\mathcal{A}}$ *completo, y* $\rho : \mathbb{R}^n \times X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$ *una acción tal que* $\rho^{\vec{v}}$ *es un homeomorfismo, para todo* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: En vista de la proposición anterior, $X_{\mathcal{A}}$ es completo. Entonces solo basta mostrar que $\mathbb{R}^n$ actúa por homeomorfismos. Como para cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\rho^{\vec{v}} \circ \rho^{-\vec{v}}(T) = T = \rho^{-\vec{v}} \circ \rho^{\vec{v}}(T),$$

es decir que $\rho^{\vec{v}} \circ \rho^{-\vec{v}}$ es la función identidad en $\mathbb{R}^n$, es suficiente demostrar que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ la función $\rho^{\vec{v}}$ es continua. Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $T \in X_{\mathcal{A}}$ y $\epsilon > 0$. Consideremos

$$\delta < \frac{\epsilon}{1 + \epsilon\|\vec{v}\|}.$$

Afirmamos que si $d(T, T') < \delta$ entonces $d(\rho^{\vec{v}}(T), \rho^{\vec{v}}(T')) < \epsilon$. En efecto, Si $d(T, T') < \delta$, existen motivos $P \in T\left[\left[B_{\frac{1}{\delta}}\right]\right]$ y $P' \in T'\left[\left[B_{\frac{1}{\delta}}\right]\right]$ para los cuales existe un vector $\vec{w} \in B_\delta$ satisfaciendo $P = P' - \vec{w}$. Luego, $P - \vec{v} = (P' - \vec{v}) - \vec{w}$. Dado que $\frac{1}{\delta} - \|\vec{v}\| > \frac{1}{\epsilon}$, tendremos que

$$(P - \vec{v}) \in (T - \vec{v})\left[\left[B_{\frac{1}{\epsilon}}\right]\right], \quad (P' - \vec{v}) \in (T' - \vec{v})\left[\left[B_{\frac{1}{\epsilon}}\right]\right] \text{ y } \quad \vec{w} \in B_{\frac{1}{\delta}} \subset B_{\frac{1}{\epsilon}}.$$

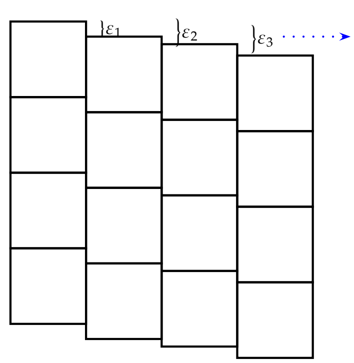
Por lo tanto, $d\left(\rho^{\vec{v}}(T), \rho^{\vec{v}}(T')\right) < \epsilon$. En otras palabras, $\rho^{\vec{v}}$ es continua en T. Como T es arbitrario concluimos que $\rho^{\vec{v}}$ es continua en $X_{\mathcal{A}}$.

■

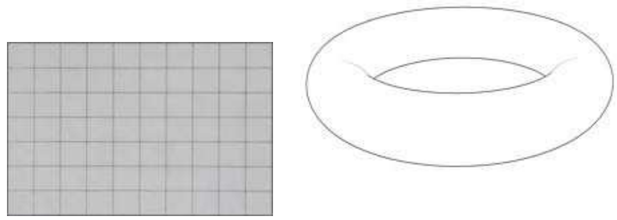
Definición 2.3.14. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de baldosas no equivalentes entre si.

1. Se dice que $X \subseteq X_{\mathcal{A}}$ es un **espacio de embaldosados** si X es cerrado e invariante por la acción ρ. En este caso, el sistema dinámico $(X, \mathbb{R}^n, \rho_X)$ será llamado **sistema de embaldosados**.
2. Si $X \subseteq X_{\mathcal{A}}$ es un espacio de embaldosados, diremos que el motivo P es **X-admisible** si P es un motivo de algún embaldosado $T \in X$.
3. Diremos que un embaldosado $T \in X_{\mathcal{A}}$ tiene **complejidad local finita (FPC)**, si para todo $R > 0$, existe un número finito de motivos P de T con diámetro menor o igual a R módulo equivalencia.
4. Un espacio de embaldosados X tiene **complejidad local finita (FPC)** si para todo $R > 0$, hay un número finito de motivos X-admisibles que tienen diámetro menor o igual a R módulo equivalencia.

Ejemplo 2.3.4. *Si $\mathcal{A}$ es la colección de polígonos regulares de lado 1, entonces los embaldosados $T \in X_{\mathcal{A}}$ cuyas baldosas se tocan lado a lado, tiene complejidad local finita. Sin embargo $X_{\mathcal{A}}$ no tiene complejidad local finita. Pues basta considerar un embaldosado $T_1 \in X_{\mathcal{A}}$ cuyas baldosas no se toquen lado a lado, y claramente T_1 no tiene FPC. Por lo tanto $X_{\mathcal{A}}$ no tiene FPC, Ver Figura 16*



F 16. Embaldosado sin FPC.



F 17. Embaldosado T y su casco continuo Ω_T.

Definición 2.3.15. Sea $\mathcal{A}$ una colección de baldosas no equivalentes entre si y sea $T \in X_{\mathcal{A}}$. Llamaremos el **casco continuo** de T al espacio de embaldosados

$$\Omega_T = \overline{\left\{\rho^{\vec{v}}(T) : \vec{v} \in \mathbb{R}^n\right\}}^d,$$

donde la clausura se toma con respecto a la métrica de embaldosados.

En el contexto de la definición anterior, es claro que los motivos P que son Ω_T-admisibles son todos los motivos del embaldosado T. Por esta razón tenemos lo siguiente.

Proposición 2.10. *$T \in X_{\mathcal{A}}$ tiene FPC si y solo si Ω_T es un espacio de embaldosados con FPC.*

Definición 2.3.16. Decimos que $T \in X_{\mathcal{A}}$ es **repetitivo**, si para todo motivo P en T existe $R_P > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ un motivo equivalente a P aparece en $B(x, R_P) \cap T$.

2.3.2. La Transversal. En toda esta sección $\mathcal{A}$ denota una colección finita de baldosas no equivalentes entre si y centradas, según la siguiente definición.

Definición 2.3.17. Diremos que una baldosa $a \in \mathcal{A}$ está **centrada** en 0, si $0 \in INT(SUPP(a))$. Si $T \in X_{\mathcal{A}}$ es un embaldosado de $\mathbb{R}^n$ y $t \in T$ es una baldosa, entonces diremos que el centro de t es aquel vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $t = a + \vec{v}$ para algún $a \in \mathcal{A}$. Para $t \in T$ denotaremos por $x(t) \in \mathbb{R}^n$ al centro de la baldosa t.

Definición 2.3.18. Sea $X \subseteq X_{\mathcal{A}}$ un espacio de embaldosados. Definimos la **transversal** de X como el conjunto

$$\Gamma = \left\{T \in X : \text{existe } t \in T, x(t) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq X.$$

Observación 2.3.6. *Sea Γ la transversal de un embaldosado T_0.*

- *Para todo $T \in X$ tenemos que para cualquier baldosa $t \in T$*

$$T - x(t) \in \Gamma.$$

- *La transversal en un subconjunto cerrado de X.*

Demostración: Ya que para todo $T \in \Gamma^c$ existe $\delta > 0$ tal que $B(T,\delta) \subset \Gamma^c$. En efecto; sabemos que para todo $t \in T$, se tiene que $x(t) \neq \vec{0}$. Es decir, que el orígen en el embaldosados T no coincide con el centro de alguna baldosa de T. Escogiendo

$$\delta = MIN\{\|x(t)\| : t \in T\} > 0,$$

tenemos que para todo $0 < \delta_1 < \delta$ se cumple

$$B(T,\delta_1) \subset \Gamma^c.$$

Por lo tanto Γ^c es abierto.

■

Sea P un motivo X-admisible tal que para algún $t \in P$ se tiene $x(t) = \vec{0}$. Es decir P esta centrado en cero. Definimos

$$C_P = \{T \in X : P \subseteq T\} \subseteq \Gamma.$$

Notemos que C_P es cerrado en X. En efecto; sea $T \in C_P^c$. Si T no contiene ningún trasladado de P, claramente $B(T,\frac{1}{2}) \subset C_P^c$.
Por otra parte, si existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $P - \vec{v} \subset T$, entonces $\vec{v} \neq \vec{0}$ pues $T \in C_P^c$. Luego, si tomamos cualquier $0 < \delta < \frac{\|\vec{v}\|}{2}$, claramente tendremos

$$B(T,\delta) \subset C_P^c.$$

Por lo tanto, C_P^c es abierto. De esto se deduce que C_P es cerrado.
Pero C_P no es abierto en X. En efecto, sean $T \in C_P$, $0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $0 < \delta_1 < \delta$ tales que $B_{\delta_1} \subseteq SUPP(P)$. Para $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $\|\vec{v}\| < \delta_1$, tendremos que $T - \vec{v} \in B(T,\delta)$. Además $T - \vec{v} \notin C_P$, pues el centro del trasladado de P que aparece en $T - \vec{v}$ esta en $SUPP(P)$ y es distinto del centro que fijamos inicialmente para el motivo P. De esto concluimos que

$$B(T,\delta) \nsubseteq C_P.$$

En otras palabras, ningún $T \in C_P$ es un punto interior de C_P, por lo tanto, C_P no es abierto. Sin embargo, con respecto a la topología inducida en Γ por la métrica de embaldosados los conjuntos C_P son abiertos-cerrados. Para esto, basta observar que los conjuntos C_P son abiertos con respecto a la topología inducida en transversal. Sea $T \in C_P$ y mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que

$$B(T,\delta) \cap \Gamma \subset C_P.$$

Denotemos por

$$R = \text{ínf}\{r > 0 : P \subset B_r\} \quad \text{y} \quad R' = \text{mín}\{\|x(t)\| : t \in P \text{ con } \|t\| \neq 0\}.$$

Afirmamos que $B\left(T, \text{mín}\left\{\frac{1}{R}, R'\right\}\right) \cap \Gamma \subset C_P$. En efecto;
Sea $T' \in B\left(T, \text{mín}\left\{\frac{1}{R}, R'\right\}\right) \cap \Gamma$

- si $\frac{1}{R} \leq R'$, como $d(T, T') < \frac{1}{R}$, existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| < \frac{1}{R}$ tal que
$$T \cap B_R = (T' \cap B_R) + \vec{v}.$$
Pero como $\|\vec{v}\| < \frac{1}{R} \leq R'$, tendremos $\vec{v} = 0$. Luego, $T \cap B_R = T' \cap B_R$ lo que implica $P \subset T'$. En particular, $T' \in C_P$.
- si $R' < \frac{1}{R}$, como $d(T, T') < R'$, existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| < R'$ tal que
$$T \cap B_{\frac{1}{R'}} = (T' \cap B_{\frac{1}{R'}}) + \vec{v}.$$
Pero por la definición de R', tenemos que $\vec{v} = 0$.
Luego $T \cap B_R = T' \cap B_R$, y como $R' < \frac{1}{R}$, en particular $P \subset T'$. Es decir, $T' \in C_P$.

Así concluimos que los conjuntos C_P son abiertos cerrados con respecto a la topología inducida por la métrica de embaldosados en Γ.

Proposición 2.11. *Los conjuntos C_P son una base de la topología inducida en Γ por la métrica de embaldosados.*

Demostración: Sea $T \in \Gamma$ y $r > 0$. Solo es necesario mostrar que existe un motivo P, Γ-admisible y centrado en cero, tal que
$$T \in C_P \subset \overline{B(T, r)} \cap \Gamma.$$
Claramente $P = T\left[B_{\frac{2}{r}}\right]$ es un motivo centrado en cero, para el cual tenemos que $T \in C_P$. Consideremos $T' \in C_P$. Luego $P \subset T'$ y además
$$T\left[B_{\frac{1}{r}}\right] = T'\left[B_{\frac{1}{r}}\right].$$
Por lo tanto, existen motivos
$$P_1 = T\left[B_{\frac{1}{r}}\right] \in T\left[\left[B_{\frac{1}{r}}\right]\right] \quad \text{y} \quad P_2 = T'\left[B_{\frac{1}{r}}\right] \in T'\left[\left[B_{\frac{1}{r}}\right]\right]$$
para los cuales $P_1 = P_2 + \vec{0}$. Como $\vec{0} \in B_r$, concluimos que $d(T, T') \leq r$. Por lo tanto, $T \in C_P \subset \overline{B(T, r)} \cap \Gamma$.

∎

Como la transversal Γ del espacio de embaldosados X tiene como base de la topología inducida por la métrica a conjuntos abierto-cerrados, Γ es totalmente disconexo.

Observación 2.3.7. *Si X posee un embaldosado aperiódico, digamos T, entonces la transversal es un conjunto a lo menos numerable. Ya que por la Observación 2.3.6 el conjunto $\{T - x(t) : t \in T\}$ esta contenido en Γ y como el embaldosado es aperiódico, tenemos que para $t, t' \in T$ con $t \neq t'$ se satisface que $T - x(t) \neq T - x(t')$.*

De la Observación 2.3.7 deducimos que si (X, ρ_X) es un sistema de embaldosados minimal, compacto(más adelante veremos que X compacto es equivalente a que X satisfaga FPC) y que contiene un embaldosado aperiódico, entonces la transversal Γ es un conjunto de Cantor. Y la ausencia de puntos aislados está garantizada por la minimalidad del sistema y por la existencia de un embaldosado aperiódico. Además si X es compacto, al ser

Γ cerrado en X también será compacto. Luego, por la Observación 2.3.7, tendremos que si X posee un embaldosado aperiódico entonces Γ será un conjunto a lo menos numerable, compacto y sin puntos aislados. Es decir, Γ será un conjunto de Cantor.

2.3.3. Principales resultados.

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de baldosas no equivalentes entre si, y sea $X \subseteq X_{\mathcal{A}}$ un espacio de embaldosados. Entonces*

X es compacto si y sólo si X tiene FPC.

Demostración: Esta demostración se basa en el hecho de que el espacio $X_{\mathcal{A}}$ es un espacio métrico completo. Por lo tanto, $X \subset X_{\mathcal{A}}$ es compacto si y solo si X es totalmente acotado. De este forma, basta mostrar que

X es totalmente acotado si y sólo si X tiene FPC.

Primero, supongamos que X es totalmente acotado. Sea $R > 0$. Vamos a mostrar que solo hay un número finito de motivos (módulo equivalencia) de diámetro menor o igual a R en los embaldosados de X.
Como X es totalmente acotado, dado $\epsilon = \frac{2}{R}$, existen
$T_1, \ldots, T_n \in X$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(T_i, \epsilon),$$

donde $B(T_i, \epsilon) = \{T \in X : d(T, T_i) < \epsilon\}$.
Sea $T \in X$ y $P \subset T$ un motivo en T con diámetro menor o igual a R. Llamemos T_P a una traslación del embadosado T, tal que un trasladado del motivo P esté al centro de T_P y esté contenido en $B_{\frac{R}{2}}$. Entonces por lo anterior, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$T_P \in B(T_i, \epsilon).$$

Por lo tanto, el motivo P es el mismo (módulo equivalencia) que algún motivo de T_i en la bola $B_{\frac{1}{\epsilon}+\epsilon} = B_{\frac{R}{2}+\epsilon}$.
Así, como existe un número finito de motivos $P' \subseteq T_i \cap B_{\frac{R}{2}+\epsilon}$, se concluye que existe un número finito de motivos de diámetro menor o igual a R, a saber la unión sobre $i \in \{1, \ldots, n\}$ de los motivos en

$$T_i \cap B_{\frac{R}{2}+\epsilon}.$$

Por lo tanto X tiene complejidad local finita.
Reciprocamente, supongamos que X tiene complejidad local finita (FPC). Nuestro objetivo es mostrar que X es totalmente acotado. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $R = \frac{2}{\epsilon} + 2\eta$, donde η es el diámetro máximo de una baldosa en $\mathcal{A}$. Por la propiedad de complejidad local finita, existe solo un número finito de motivos, módulo equivalencia, con diámetro menor o igual a R. En particular, existe un número finito de motivos $P_1, \ldots, P_n$ en los embaldosados

de X tales que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene

$$\frac{2}{\epsilon} \leq DIAM(P_i) \leq R.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos un embaldosado $T_i \in X$ tal que

$$P_i \subset T_i \cap B_R(0).$$

Como la bola cerrada $B_\eta(0)$ es compacta, existe un número finito de bolas $B_1, \ldots, B_k$ de radio ϵ y centros $v_1, \ldots, v_k$, respectivamente, que cubren $B_\eta(0)$. Consideremos todos los trasladados de T_i por un vector de la familia $\{v_i\}_{i=1}^k$, y llamemos $T_{i,j} = T_i - v_j$. Afirmamos que

$$X \subseteq \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^k B(T_{i,j}, \epsilon).$$

Sea $T \in X$, y escojamos un motivo $P \in \left[\left[B_{\frac{1}{\epsilon}}\right]\right]$ tal que $DIAM(P) \leq R$. Luego, existen $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ y $v \in B_\eta(0)$ tales que

$$P = P_{i_0} + v.$$

Claramente $T \in B(T_{i_0}, \eta)$. Como $B_\eta(0) \subseteq \bigcup_{j=1}^k B_j$, tenemos para algún

$$j_0 \in \{1, \ldots, k\} \text{ que } d(T, T_{i_0, j_0}) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $T \in B(T_{i_0, j_0}, \epsilon)$, de donde concluimos que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^k B(T_{i,j}, \epsilon).$$

■

Esto demuestra que en el espacio de embaldosados $X_{\mathcal{A}}$ todo $X \subseteq X_{\mathcal{A}}$ cumple que

X es compacto si y sólo si X es totalmente acotado si y sólo si X tiene FPC.

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de baldosas en $\mathbb{R}^n$, no equivalentes entre si. Sea $X_{\mathcal{A}}$ su espacio de embaldosados asociado. Si $T_0 \in X_{\mathcal{A}}$ es un embaldosado satisfaciendo FPC entonces*

(Ω_{T_0}, ρ) es minimal si y sólo si T_0 es repetitivo.

Demostración: Primero supongamos que (Ω_{T_0}, ρ) no es minimal. Luego, existe un embaldosado $T \in \Omega_{T_0}$ tal que su órbita

$$\mathcal{O}(T) = \left\{\rho^{\vec{v}}(T) : \vec{v} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

no es densa en Ω_{T_0}. Por lo tanto, existe $T_1 \in \Omega_{T_0}$ y $\epsilon > 0$ tales que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se tiene la condición

$$\rho^{\vec{v}}(T) \notin B(T_1, \epsilon).$$

En particular, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ y para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\rho^{\vec{v}}(T) \notin B\left(T_1, \frac{1}{n}\right).$$

Consideremos el motivo $P = T_1\left[B_{\frac{1}{N_0}}\right]$. Existe $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tal que $P \subset T_0$. Como $T \in \Omega_{T_0}$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$T = \lim_{n\to\infty} T_0 + x_n.$$

Así, para todo $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$P + \vec{y} \nsubseteq (T_0 - x_{n_0}) \cap B_R.$$

Por lo tanto, T_0 no es repetitivo.
Supongamos ahora que T_0 no es repetitivo. Construiremos un embaldosado $T' \in \Omega_{T_0}$ que no tiene órbita densa. De este modo (Ω_{T_0}, ρ) será un sistema dinámico no minimal.
Como T_0 no es repetitivo, existe $P \subseteq T_0$ motivo y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ satisfaciendo que para todo $n \in \mathbb{N}$, ningún motivo equivalente a P aparece en $B(x_n, n) \cap T_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escoger

$$T_n \in B(T - x_n, n).$$

Así, ya que (Ω_{T_0}, d) es un espacio metrico completo, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega_{T_0}$ tiene un punto de acumulación, digamos $T' \in \Omega_{T_0}$. Luego, por construcción $\mathcal{O}(T')$ no es densa en Ω_{T_0}, pues P no aparece en T'. De esto se concluye que (Ω_{T_0}, ρ) no es minimal.

■

De los Teoremas 2.4 y 2.5, se tiene el siguiente.

Corolario 2.4. *Si T es un embaldosado que tiene FPC, es repetitivo y aperiódico, entonces su transversal Γ_T es un conjunto de Cantor.*

Definición 2.3.19. Sea (X, G, α) un sistema dinámico, donde (X, Σ) es un espacio de medida y G un grupo actuando en X por la acción $\alpha : G \times X \to X$. Una medida μ en X se dice G**-invariante**, si para todo $g \in G$ y para todo $A \in \Sigma$ se tiene que

$$\mu(\alpha_g^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Definición 2.3.20. Sea $\mathcal{A}$ una colección de baldosas no equivalentes entre si. Una medida μ definida sobre los boreleanos $\mathfrak{B}(\Gamma)$ de la transversal $\Gamma \subset X_{\mathcal{A}}$, es llamada **medida transversa** si $\mu : \mathfrak{B}(\Gamma) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida satisfaciendo que para todo $A \subset \mathfrak{B}(\Gamma)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ para el cual $A - \vec{v} \in \mathfrak{B}(\Gamma)$, se cumple que $\mu(A - \vec{v}) = \mu(A)$.

Teorema 2.6. *Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de baldosas en $\mathbb{R}^n$ no equivalentes entre si. Sea μ una medida invariante en el sistema de embaldosados $X \subseteq X_{\mathcal{A}}$.*
Sea $\eta \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, tal que para todo $a \in A$ se tiene $B_\eta \subset SUPP(a)$. Para todo $U \in \mathfrak{B}(\Gamma)$, y para todo $\theta \subseteq B_\eta$, existe $\mu_\Gamma(U) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfaciendo

$$\frac{\mu(U + \theta)}{VOL(\theta)} = \mu_\Gamma(U),$$

donde $U + \theta = \{T \in X : T = T' + \vec{v}$ con $T' \in U, \vec{v} \in \theta\}$.

Demostración: Fijemos $U \in \mathfrak{B}(\Gamma)$. Definamos una medida de Borel en la bola B_η por

$$\begin{array}{cccc} \mu_U & : & B_\eta & \rightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & & E & \mapsto & \mu(U+E). \end{array}$$

Por otra parte, si tenemos $T \in \Gamma$ y $v \in B_{2\eta}$ tales que $T - v \in \Gamma$, entonces $v = 0$. De esto se deduce que, si $E_1, E_2 \subset B_\eta$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, tendremos que $(U+E_1) \cap (U+E_2) = \emptyset$. Además, como μ es invariante, si $E \subset B_\eta$ y $E - v \in B_\eta$, entonces $\mu_U(E - v) = \mu(E)$.
Notemos que si $\theta_1, \theta \subset B_\eta$ son abiertos tales que $\theta_1 \subset \theta$, entonces el conjunto $U + \theta$ se puede escribir como unión a lo más contable de conjuntos de la forma $U + \theta_1 + v$. Es decir, existe un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ a lo más numerable tal que

$$U + \theta = \bigcup_{v \in V} (U + \theta_1) + v.$$

De esto tenemos que si existe un abierto $\theta_1 \subset B_\eta$ tal que

$$\mu_U(\theta_1) = \mu(U + \theta_1) = 0,$$

entonces para todo abierto $\theta \subset B_\eta$ tendremos que $\mu_U(\theta) = \mu(U + \theta) = 0$, y podemos definir $\mu_\Gamma(U) = 0$. Análogamente, si existe $\theta_1 \subset B_\eta$ tal que $\mu_U(\theta_1) = \mu(U + \theta_1) = \infty$, entonces para todo $\theta \subset B_\eta$ tendremos que

$$\mu_U(\theta) = \mu(U + \theta) = \infty$$

y podemos definir $\mu_\Gamma(U) = \infty$. Así, podemos suponer que para todo abierto $\theta \subset B_\eta$ tenemos que

$$0 < \mu_U(\theta) < \infty.$$

Consideremos la restricción de μ_Γ al cubo $\prod_{i=1}^{d} [a_i, a_i + h) \subset B_\eta$ y extendamosla a todo $\mathbb{R}^n$ por periodicidad, es decir

$$\nu_U(E) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu\left(U + \left(E \cap \left(\prod_{i=1}^{d} [a_i, a_i + h) + hx\right)\right)\right).$$

Esta es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ que es invariante por traslación, además de ser positiva y finita en conjuntos abiertos y acotados. Luego, es claro que $\nu_U(E) = c_U vol(E)$, donde *vol* es la medida de lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Podemos tomar $\mu_\Gamma(U) = c_U$.

■

Corolario 2.5. *La función* $\mu_\Gamma : \mathfrak{B}(\Gamma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *obtenida en el Teorema 2.6 es una medida transversa.*

Demostración: Claramente $\mu_\Gamma(\emptyset) = 0$. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de conjuntos disjuntos en $\mathfrak{B}(\Gamma)$. Si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, la colección $\{U_n + B_\delta\}_{n \in \mathbb{N}}$ es disjunta, y de la definición de μ_Γ tenemos que

$$\mu_\Gamma(\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\Gamma(U_n).$$

Sean $U \subset \mathfrak{B}(\Gamma)$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $U - v \subset \Gamma$. Para $\delta > 0$ tendremos $\mu(U-v+B_\delta) = \mu(U+B_\delta)$, lo que implica que μ_Γ es invariante bajo traslaciones en la transversal. Por lo tanto μ_Γ es una medida transversa.

■

Observación 2.3.8. *Es importante destacar que existe una función inyectiva entre el conjunto de las medidas σ-finitas invariantes en X_A y el conjunto de las medidas transversas σ-finitas. Para ver esto con más detalle recomendamos dirigirse a* [9]*.*

2.3.4. Existencia de medidas invariantes. En esta sección presentaremos un teorema que asegura la existencia de medidas invariantes para un sistema dinámico (X, G), donde X es un espacio topológico compacto y G es un grupo localmente compacto y promediable actuando en X. Este es el caso que nos interesa, pues generalmente trabajaremos con el espacio Ω_T descrito en la Definición 2.3.15, que es compacto cuando T tiene complejidad local finita, ver Definición 2.3.14. Para estudiar con más detalle todo lo relacionado a esta sección, recomendamos [7] y [20]. Es importante destacar que en toda esta sección denotaremos por $\triangle$ la operación entre conjuntos diferencia simétrica.

Definición 2.3.21. Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida invariante por la izquierda definida en G. Diremos que G satisface la propiedad de **Følner** si para todo compacto $K \subset G$ y todo $\epsilon > 0$, existe un boreleano $U \in \mathfrak{B}(G)$, con $0 < \mu(U) < \infty$, tal que para todo $g \in K$ se tiene

$$\frac{\mu(gU \triangle U)}{\mu(U)} \leq \epsilon.$$

Observación 2.3.9. *La propiedad de Følner es equivalente a que exista una red de subconjuntos de G de medida finita y positiva, digamos $\{F_i\}_{i\in I}$, tales que para todo $g \in G$ se cumple que*

$$\lim_{i\in I} \frac{\mu(gF_i \triangle F_i)}{\mu(F_i)} = 0.$$

*Esta red es llamada **red de Følner**.*

Ejemplo 2.3.5. *Consideremos el grupo topológico $G = \mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue μ. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\epsilon > 0$. Como todo compacto en $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, existe $R = \sup_{x\in K} ||x|| \in \mathbb{R}$. Luego, es claro que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que B_{nr}, la bola cerrada centrada en cero de radio nR, satisface para todo $g \in K$ se cumple*

$$\frac{\mu(gB_{nR} \triangle B_{nR})}{\mu(B_{nR})} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de Følner.

Definición 2.3.22. Diremos que un grupo G es **promediable** si este satisface la propiedad de Følner o equivalentemente, según la Observación 2.3.9, si existe una red de Følner en G.

Observación 2.3.10.

- *La palabra promediable es la traducción del inglés que ocuparemos en este texto de la palabra amenable.*
- *El Ejemplo 2.3.5 muestra que $\mathbb{R}^n$ es un grupo promediable.*

Ejemplo 2.3.6. *Consideremos el grupo topológico $G = \mathbb{Z}$ con la medida de conteo #. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto*

$$F_n = \{-(n-1), \ldots, 0, \ldots, n-1\}.$$

Claramente, para todo $x \in X$ podemos tomar $n_0 = |x| \in \mathbb{N}$ y para todo $m > n_0$ tendremos que $x \in F_m$. Además, para cada $g \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\frac{\#(gF_n \triangle F_n)}{\#(F_n)} = \frac{2|g|}{2n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#(gF_n \triangle F_n)}{\#(F_n)} = 0.$$

De esto concluimos que $\mathbb{Z}$ es un grupo promediable, pues $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Følner en $\mathbb{Z}$.

Observación 2.3.11. *Es importante destacar que en la literatura existen múltiples equivalencias para definir grupo promediable. Nosotros utilizaremos la que hemos presentado en la Definición 2.3.22. Para ver algunas definiciones equivalentes recomendamos* [7].

En general, hay muchas clases de grupos que son promediables, como por ejemplo los grupos finitos y los solubles. El siguiente teorema es una aplicación del teorema del punto fijo de Markov-Kakutani y nos responde esta pregunta para grupos abelianos. Ver demostración en [7].

Teorema 2.7. *Todo grupo abeliano es promediable.*

Ejemplo 2.3.7. *Sea G el grupo libre con dos generadores. Todo grupo conteniendo un subgrupo isomorfo a G no es promediable. En particular, G no es promediable.*

Definición 2.3.23. Sea X un espacio compacto y G un grupo. Si el grupo G está actuando en X por medio de la acción $\phi : G \times X \to X$, diremos que el sistema dinámico (X, G) es un **fluido** si para todo $g \in G$ se tiene que la función $\phi_g : X \to X$ definida por $x \mapsto \phi(g, x)$ es un homeomorfismo.

Ahora presentaremos el teorema principal de esta sección, que nos entregará un criterio para saber cuando existen medidas de probabilidad invariantes en un sistema dinámico. Para su demostración recomendamos ver [20].

Teorema 2.8. *Sea G un grupo localmente compacto. las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *G es promediable.*
2. *Todo fluido (X, G) admite una medida de probabilidad G-invariante.*

En vista del Teorema 2.8 y del Ejemplo 2.3.5, deducimos que para el sistema dinámico $(\Omega_T, \mathbb{R}^n)$ existe una medida $\mathbb{R}^n$-invariante en el espacio Ω_T. Así denotando por $\mathfrak{B}(\Omega_T)$ a la σ-álgebra de Borel del espacio Ω_T, tendremos que existe una medida de probabilidad $\mu : \mathfrak{B}(\Omega_T) \to [0,1]$ tal que para todo elemento $U \in \mathfrak{B}(\Omega_T)$ y todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\mu(U) = \mu(U - \vec{v}),$$

donde $U - \vec{v} = \{T - \vec{v} : T \in U\}$.

Observación 2.3.12. *Todo espacio de embaldosados con complejidad local finita admite medidas invariantes por la acción de $\mathbb{R}^n$.*

2.4. $C^\star$-álgebras. Las álgebras que trataremos a continuación, son un tipo de álgebras de operadores muy utilizadas en física matemática, debido a sus múltiples aplicaciones en la formulación de problemas en mecánica cuántica. En general son fáciles de tratar pues la teoría en estas álgebras esta desarollada completamente, en el sentido que toda $C^\star$-álgebra es isomorfa a un álgebra de operadores acotados en algun espacio de Hilbert. Aunque este espacio de Hilbert suele ser bastante complicado. Esta caracterización es el llamado Teorema de Gelfand-Naimark-Segal que es una de la mejores caracterizaciónes de $C^\star$-álgebras. Estas álgebras fueron introducidas por I. E. Segal en 1947. Segal describió estas álgebras como subalgebras de $B(H)$ cerradas en norma, donde H es un espacio de Hilbert. Segal las llamó de esta forma pues estas son cerradas (de allí la C) y además son cerradas bajo la función que a cada operador le asigna su operador adjunto (de allí la $\star$). Para Tener una idea general del tema, ver [12] o [16]. Para una idea más completa recomendamos [30],[19] o [18].

2.4.1. Terminología Básica.

Definición 2.4.1. Una **$\mathbb{C}$-álgebra** A, es un anillo tal que:

- A es un $\mathbb{C}$-modulo.
- Para todo $k \in \mathbb{C}$ y todo par de elementos $a, b \in A$, se tiene

$$k(ab) = (ka)b = a(kb).$$

Una $\mathbb{C}$-álgebra A se dice con **unidad**, si existe $a \in A$ tal que para todo $b \in A$ se cumple $ab = ba = b$.

Definición 2.4.2. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra. Diremos que una función $\varphi : A \to A$ es una **involución** si:

- φ es lineal conjugada, es decir, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo par de elementos $a, b \in A$ se cumple

$$\varphi(a + \lambda b) = \varphi(a) + \overline{\lambda}\varphi(b).$$

- Para todo par $(a, b) \in A \times A$, se tiene $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$.
- Para todo $a \in A$ se satisface $\varphi(\varphi(a)) = a$.

Denotaremos $a^\star$ a $\varphi(a)$.

Observación 2.4.1. *Una $\mathbb{C}$-álgebra A con solo una involución $\varphi : A \to A$, la llamaremos* ****-álgebra****.*

Definición 2.4.3. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra. Diremos que A es una **álgebra de Banach**, si existe una norma $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}$ tal que $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Es decir, A es un álgebra normada y completa con respecto a $\|\cdot\|$.

Definición 2.4.4. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach, diremos que A es una $C^\star$**-álgebra** si para todo $a, b \in A$ se satisface

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|. \tag{2.3}$$

Y existe una involución $\varphi : A \to A$ tal que para todo $a \in A$ se tiene que

$$\|a^\star a\| = \|a\|^2 \tag{2.4}$$

Definición 2.4.5. Sean A, B dos $C^\star$-álgebras y $\Phi : A \to B$ una función $\mathbb{C}$-lineal.

- Diremos que Φ es un **morfismo** o ***-homomorfismo**, si para todos $a, b \in A$, se tienen las siguientes dos condiciones:

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$$

$$\Phi(a^\star) = \Phi(a)^\star$$

- Un ***-epimorfismo** es un *-homomorfismo que además es epiyectivo.
- Un ***-monomorfismo** es un *-homomorfismo inyectivo.

Observación 2.4.2. *El termino *-homomorfismo también lo ocuparemos para un homomorfismo $\Phi : A \to B$ entre dos *-álgebras A y B, satisfaciendo la propiedad*

$$\Phi(a^\star) = \Phi(a)^\star.$$

Ejemplo 2.4.1. *Los siguientes son los ejemplos canónicos de $C^\star$-álgebras:*

1. *$A = \mathbb{C}$ es la más simple de las $C^\star$-álgebras, donde claramente la involución es $a^\star = \overline{a}$. Es fácil ver que esta álgebra satisface todos los axiomas de la definición.*
2. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y no compacto entonces la clausura con respecto a la norma del supremo de las funciones con soporte compacto definidas en X, $A = \overline{C_0(X)}$, son una $C^\star$-álgebra sin unidad con la suma y producto usual de funciones y una involución definida por el conjugado, es decir, $f(x)^\star = \overline{f(x)}$.*
   Si X es compacto, el espacio $C(X)$ es una $C^\star$-álgebra con unidad, con las operaciónes y involución definidas de la misma manera que para el caso no compacto.
3. *$A = M_n(\mathbb{C})$ es una $C^\star$-álgebra, donde la involución para $a = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ es $a^\star = \overline{a^t} = (\overline{a}_{ji}) \in M_n(\mathbb{C})$*
4. *Una de las $C^\star$-álgebra más importantes, es la de los operadores acotados $A = B(H)$ definidos sobre un espacio de Hilbert H.*

- *Como* $\mathbb{I} : H \to H$, *la función identidad, satisface que* $\|\mathbb{I}\| = 1$ *entonces* $B(H)$ *es una álgebra con identidad con las operaciones usuales de suma y composición de operadores, que además es un espacio de Banach con la norma operador.*
- *La involución esta definida, naturalmente y de alli la notación, por la función* $\varphi : B(H) \to B(H)$ *definida por*

  $$\varphi(h) = h^\star := \text{operador adjunto de } h$$

  que claramente satisface los axiomas pues;
  - φ *es lineal conjugada, ya que para* $z \in \mathbb{C}$ *y todo* $a, b \in B(H)$ *se satisface que para todo* $x, y \in H$

    $$\begin{aligned} \langle (a + zb)x, y\rangle &= \langle ax, y\rangle + z\langle bx, y\rangle \\ &= \langle x, a^\star y\rangle + z\langle x, b^\star y\rangle \\ &= \langle x, a^\star y\rangle + \langle x, \overline{z} b^\star y\rangle \\ &= \langle x, (a^\star + \overline{z} b^\star)y\rangle \end{aligned}$$

    luego por la unicidad del operador adjunto se tiene $(a + zb)^\star = (a^\star + \overline{z} b^\star)$.
  - *También, para todo* $a, b \in B(H)$ *tenemos* $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$. *Ya que para todo* $x, y \in H$ *si* $a, b \in B(H)$ *entonces*

    $$\begin{aligned} \langle (ab)x, y\rangle &= \langle a(bx), y\rangle \\ &= \langle bx, a^\star y\rangle \\ &= \langle x, b^\star a^\star y\rangle \end{aligned}$$

    por lo que se tiene $(ab)^\star = b^\star a^\star$.
  - *Y para todo* $a \in B(H)$ *tenemos que* $\varphi(\varphi(a)) = a$. *Pues si* $a \in B(H)$ *entonces para todo* $x, y \in H$ *se cumple que*

    $$\begin{aligned} \langle x, ay\rangle &= \overline{\langle ay, x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, a^\star x\rangle} \\ &= \langle a^\star x, y\rangle \\ &= \langle x, (a^\star)^\star y\rangle \end{aligned}$$

    de la unicidad se concluye que $a = (a^\star)^\star$.
- *Sabemos además que por definición de norma operador se tiene que* $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$, *en particular* $\|a^\star a\| \leq \|a^\star\|\,\|a\|$.
  La otra desigualdad necesaria para concluir la Ecuación 2.4 de la Definición 2.4.4 sigue de que dado $a \in B(H)$ *fijo, para todo* $z \in H$ *tenemos*

  $$\|az\|^2 = \langle az, az\rangle = \langle z, a^\star az\rangle \leq \|z\|\,\|a^\star az\| \leq \|z\|^2\|a^\star a\|.$$

Motivados por este ultimo ejemplo podemos identificar algunos elementos especiales dentro de una $C^\star$-álgebra.

Definición 2.4.6. Sea A una $C^\star$-álgebra. Un elemento $a \in A$ se dice:

1. **Autoadjunto** si $a = a^\star$.
2. **Normal** si $aa^\star = a^\star a$.
3. **Unitario** si $aa^\star = a^\star a = \mathbb{I}_A$.
4. **Proyección** si $aa = a^2 = a = a^\star$.

Observación 2.4.3. *Es importante notar que si A es una $C^\star$-álgebra, entonces todo elemento en A se escribe como suma de dos elementos auto-adjuntos de A. En efecto, para todo $a \in A$ se tiene*

$$a = \frac{a + a^\star}{2} + i\frac{a - a^\star}{2i}.$$

*$a_1 = \frac{a+a^\star}{2}$ y $a_2 = \frac{a-a^\star}{2i}$ se conocen como **parte real e imaginaria**, respectivamente, de a.*

Al igual que en el álgebra $B(H)$, dos de los conjuntos mas importantes que podemos asociar a un elemento de una $C^\star$-álgebra son los siguientes.

Definición 2.4.7. Sea A una $C^\star$-álgebra con unidad y consideremos un elemento $a \in A$.

- El conjunto **resolvente** de a es el conjunto
$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda\mathbb{I} \quad \text{es invertible en } A\}.$$
- El **espectro** de a es el conjunto
$$\sigma(a) := (\rho(a))^c = \mathbb{C} \setminus \rho(a).$$

Ejemplo 2.4.2. *Para los ejemplos dados en el Ejemplo 2.4.1 tenemos lo siguiente:*

1. *Si $A = \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$, entonces $\sigma(a) = \{a\}$.*
2. *Sea X un espacio de Hausdorff y compacto. Consideremos la $C^\star$-álgebra $C(X)$ y $f \in C(X)$. Luego $\sigma(f) = \{f(x) \in \mathbb{C} : x \in X\}$.*
3. *Para $a \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(a) = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \quad \text{es valor propio}\}$.*
4. *En el álgebra de los operadores acotados definidos sobre el espacio de Hilbert H, la noción de espectro y conjunto resolvente coincide con la usual.*

Una hecho importante de destacar es que todo *-monomorfismo $\Phi : A \to B$ entre dos $C^\star$-álgebras A y B es isometrico, es decir, para todo $a \in A$ tenemos que $\|a\| = \|\Phi(a)\|$. Para Mostrar esto nesecitaremos los siguientes lemas.

Lema 2.5. *Si U y B son dos $C^\star$-álgebras con unidad y $\Phi : U \to B$ es un *-homomorfismo,
entonces para todo $a \in U$ se tiene que $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ y $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$, en particular Φ es continua.*

Demostración: Sea $z \notin \sigma(a)$. Por definición $a - z\mathbb{I}_U$ es invertible en U, digamos $(a - z\mathbb{I}_U)^{-1} = s$. Luego, como $\Phi(\mathbb{I}_U) = \mathbb{I}_B$, tendremos que

$$(a - z\mathbb{I}_U)s = s(a - z\mathbb{I}_U) = \mathbb{I}_U.$$

Aplicando Φ a la ecuación anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(a - z\mathbb{I}_U)\Phi(s) &= \Phi((a - z\mathbb{I}_U)s) \\ &= \Phi(\mathbb{I}_U) \\ &= \mathbb{I}_B \\ &= \Phi(s(a - z\mathbb{I}_U)) \\ &= \Phi(s)\Phi(a - z\mathbb{I}_U).\end{aligned}$$

De donde se deduce que $\Phi(a) - z\mathbb{I}_B$ es invertible por $\Phi(s)$. Así $z \notin \sigma(\Phi(a))$, por lo tanto, $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$. Por otra parte, si $a \in U$ entonces

$$||a||^2 = ||a^\star a|| = R(a^\star a).$$

Además

$$||\Phi(a)||^2 = ||\Phi(a)^\star \Phi(a)|| = ||\Phi(a^\star a)|| = R(\Phi(a^\star a)).$$

Luego, como $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$, tendremos que $R(\Phi(a^\star a)) \leq R(a^\star a)$. De donde se concluye que

$$||\Phi(a)|| \leq ||a||.$$

En particular, para cada par de elementos $a, b \in U$ se tiene

$$||\Phi(a) - \Phi(b)|| = ||\Phi(a - b)|| \leq ||a - b||.$$

Por lo tanto Φ es continua.

■

Lema 2.6. *Sean U y B son dos $C^\star$-álgebras con unidad y $\Phi : U \to B$ un *-homomorfismo. Si $a \in U$ es un elemento auto-adjunto y $f \in C(\sigma(a))$, es una función continua definida sobre el espectro de a, entonces $\Phi(f(a)) = f(\Phi(a))$.*

Demostración: Si $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f en $\sigma(a)$, por el lema anterior también lo hace en $\sigma(\Phi(a))$. Así

$$\Phi(P_n(a)) \to \Phi(f(a)) \text{ y } P_n(\Phi(a)) \to f(\Phi(a))$$

cuando $n \to \infty$. Y como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $P_n(\Phi(a)) = \Phi(P_n(a))$ se tiene la conclusión.

■

Proposición 2.12. *Si U y B son dos $C^\star$-álgebras con unidad y $\Phi : U \to B$ un *-monomorfismo entonces $||\Phi(a)|| = ||a||$.*

Demostración: Sea Φ un *-monomorfismo y $a \in U$ un elemento auto-adjunto. Por el Lema 2.5 tenemos que $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$. Si la inclusión estricta ocurre (i.e. $\sigma(\Phi(a)) \subsetneq \sigma(a)$) entonces existe $f \in C(\sigma(a)) - \{0\}$ cuya restricción a $\sigma(\Phi(a))$ es identicamente nula y por lo tanto $f(a) \neq 0$ luego por el lema anterior

$$\Phi(f(a)) = f(\Phi(a)) = 0$$

lo que es una contradicción ya que Φ es inyectiva.
De donde concluimos que para todo $a \in U$ auto-adjunto se tiene que

$$\sigma(\Phi(a)) = \sigma(a) \text{ y } R(\Phi(a)) = R(a)$$

Sea $a \in U$ y $a' = a^\star a$, de lo anterior se sigue que

$$\|a\|^2 = R(a^\star a) = R(\Phi(a^\star a)) = \|\Phi(a)\|^2$$

por lo tanto $\|\Phi(a)\| = \|a\|$.

■

2.4.2. $C^\star$-álgebras Sin Unidad. Trataremos de explicar brevemente como podemos embeber una $C^\star$-álgebra sin unidad, en una $C^\star$-álgebra que si tenga unidad. Esto es de mucha utilidad pues la mayoría de las demostraciones bastará hacerlas para el caso de las $C^\star$-álgebras con unidad.

Cuando una $C^\star$-álgebra A no tiene unidad siempre podemos agregar una, como sigue: formemos el espacio vectorial $A \oplus \mathbb{C}$ y hagamos de este un espacio vectorial con la multiplicasión por escalar y suma usual. Utilizando la notación $a + \lambda = (a, \lambda)$ en donde la identidad que estamos agregando aparece como $\mathbb{I} = (0, 1)$, definamos un producto y una norma en este espacio vectorial por

$$\begin{aligned} (a+\nu)(b+\mu) &:= (ab + \nu b + \mu a) + \nu\mu. \\ \|a+\nu\| &:= \|a\| + |\nu|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

De estas definiciones se ve claramente que $\|\mathbb{I}\| = 1$ y que el espacio vectorial $A \oplus \mathbb{C}$ con estas operaciones tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra. Además, por las propiedades de la norma en A y el módulo en $\mathbb{C}$ tenemos que

$$\|\nu(a+\mu)\| = |\nu|\ \|a+\mu\|.$$

$$\|(a+\nu)(b+\mu)\| \le \|a\|\ \|b\| + |\nu|\ \|b\| + |\mu|\ \|a\| + |\nu|\ |\mu| = \|(a+\nu)\|\ \|(b+\mu)\|.$$

De estas propiedades es fácil probar que $(A \oplus \mathbb{C}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ es un álgebra de banach con identidad. Si queremos convertir a el álgebra de Banach $A \oplus \mathbb{C}$ en una $C^\star$-álgebra, es natural definir una involución en $A \oplus \mathbb{C}$ por

$$(a+\nu)^\star := a^\star + \overline{\nu}. \tag{2.6}$$

Pero esta involución no satisface en general la Propiedad 2.4 de la Definición 2.4.4 ya que por ejemplo si tomamos $A = \mathbb{C}$ tendremos

$$\begin{aligned} \|(a+\nu)^\star(a+\nu)\| &= \|(a^\star + \overline{\nu})(a+\nu)\| \\ &= \|(a^\star a + \overline{\nu}a + \nu a^\star) + \overline{\nu}\nu\| \\ &= \|a|^2 + \overline{\nu}a + \nu\overline{a}| + |\nu|^2 \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$\|a+\nu\|^2 = (|a| + |\nu|)^2 = |a|^2 + 2|a||\nu| + |\nu|^2$$

de este modo si hacemos $a = 1$ y $\nu = i$ tendremos que

$$\|1+i\|^2 = 4 \neq 2 = \|(1+i)^\star(1+i)\|.$$

Luego para garantizar que $A \oplus \mathbb{C}$ es una $C^\star$-álgebra con unidad, debemos definir una norma adecuada para que se cumpla la propiedad en cuestión.

Proposición 2.13. *Sea A una $C^\star$-álgebra y $B(A)$ el conjunto de operadores lineales acotados que actúan en A*

1. *La función*

$$\begin{array}{ccccccccc} L & : & A & \to & B(A) & & & & \\ & & a & \mapsto & L(a) & : & A & \to & A \\ & & & & & & b & \mapsto & ab \end{array}$$

   es un isomorfismo entre A y $\rho(A) \subset B(A)$.

2. *Si miramos $A \oplus \mathbb{C}$ con el producto y la involución definidos en las Ecuaciones 2.5 y 2.6 respectivamente y dotamos a esta álgebra de Banach con la norma*

$$\|a + \nu\| \quad := \quad \|L(a) + \nu \mathbb{I}\| \tag{2.7}$$

   donde la norma del lado derecho es la norma operador en $B(A)$, entonces $A \oplus \mathbb{C}$ es una $C^\star$-álgebra con unidad denotada $\dot{A}$ y llamada la ***unitización*** *de A.*

Demostración:

1. Claramente para todo $a, b, c \in A$ y $\nu \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$L(\nu a + b)(c) = (\nu a + b)c = \nu ac + bc = \nu L(a)(c) + L(b)(c)$$

   y

$$L(ab)(c) = (ab)c = a(bc) = L(a)(bc) = (L(a) \circ L(b))(c)$$

   por lo tanto L es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Además como A es una $C^\star$-álgebra se satisface la Propiedad 2.3 de la Definición 2.4.4 y de este modo para todo $b \in A$ tendremos que

$$\|L(a)b\| = \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$$

   de donde $\|L(a)\| \leq \|a\|$. Por otro lado usando nuevamente las propiedades de la $C^\star$-álgebra A tendremos

$$\|a\| = \|a^\star\| = \frac{\|aa^\star\|}{\|a^\star\|} = \left\| L(a) \frac{a^\star}{\|a^\star\|} \right\| \leq \|L(a)\|$$

   así concluimos que $\|a\| = \|L(a)\|$, en otras palabras L es una isometria y por lo tanto es inyectiva. Hemos mostrado que L es un monomorfismo de álgebras y por lo tanto L es un isomorfismo entre las álgebras A y $L(A) \subset B(A)$.

2. Es claro que el álgebra $A \oplus \mathbb{C}$ con esta norma es un álgebra de Banach así que solo mostraremos las Propiedades 2.3 y 2.4 de la Definición 2.4.4. Como L es un homomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} \|(a + \nu)(b + \mu)\| &= \|(ab + \mu a + \nu b) + \nu\mu\| \\ &:= \|L(ab + \mu a + \nu b) + \nu\mu \mathbb{I}\| \\ &= \|(L(a) + \nu \mathbb{I})(L(b) + \mu \mathbb{I})\|. \end{aligned}$$

Además en el álgebra de Banach $B(A)$ para todo $a, b \in B(A)$ se satisface la propiedad $||ab|| \leq ||a|| \, ||b||$. Luego, claramente tenemos

$$\begin{aligned} ||(a+\nu)(b+\mu)|| &= ||(L(a)+\nu\mathbb{I})(L(b)+\mu\mathbb{I})|| \\ &\leq ||(L(a)+\nu\mathbb{I})|| \, ||(L(b)+\mu\mathbb{I})|| \\ &= ||(a+\nu)|| \, ||(b+\mu)||. \end{aligned}$$

De este modo solo tenemos que mostrar que para cualesquiera $a \in A$ y $\nu \in \mathbb{C}$, tenemos

$$||(L(a)+\nu\mathbb{I})||^2 \leq ||(L(a)+\nu\mathbb{I})^\star(L(a)+\nu\mathbb{I})||.$$

En efecto, de la definición de norma operador, dado $\omega \in B(A)$ y $\epsilon > 0$, existe $b \in A$ con $||b|| = 1$ tal que

$$||\omega||^2 - \epsilon \leq ||\omega(b)||^2.$$

Utilizando este hecho con $\omega = L(a) + \nu\mathbb{I}$, tendremos que para todo $\epsilon > 0$ existe $b \in A$ tal que

$$\begin{aligned} ||L(a)+\nu\mathbb{I}||^2 - \epsilon &\leq ||(L(a)+\nu\mathbb{I})b||^2 \\ &= ||(ab+\nu b)||^2 \\ &= ||(ab+\nu b)^\star(ab+\nu b)||. \end{aligned}$$

Esta ultima igualdad es debido a que $ab + \nu b \in A$. Luego por la definición de L podemos escribir

$$||(ab+\nu b)^\star(ab+\nu b)|| = ||L(b^\star)L(a^\star+\overline{\nu})L(a+\nu)b||$$

y además

$$||L(b^\star)L(a^\star+\overline{\nu})L(a+\nu)b|| \leq ||L(b^\star)|| \, ||(L(a)+\nu)^\star(L(a)+\nu)|| \, ||b||$$

donde hemos denotado por $(L(a)+\nu\mathbb{I})^\star$ al operador $L(a^\star) + \overline{\nu}\mathbb{I}$. Así como $||L(b^\star)|| = ||b^\star|| = ||b|| = 1$ se tiene que

$$||L(a)+\nu\mathbb{I}||^2 - \epsilon \leq ||(L(a)+\nu\mathbb{I})^\star(L(a)+\nu\mathbb{I})||$$

de donde concluimos que $\dot{A}$ es una $C^\star$-álgebra.

■

Es importante destacar que la unitización de una $C^\star$-álgebra sin unidad A, a pesar de que existen más $C^\star$-álgebras con identidad en las que se puede embeber A, es unica en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 2.14. *Para toda $C^\star$-álgebra sin identidad A, existe una unica $C^\star$-álgebra con identidad $\dot{A}$ y un morfismo isometrico $L : A \to \dot{A}$ tal que el cociente $\dot{A}/A \cong \mathbb{C}$.*

Veamos un ejemplo para comprender de mejor forma como es la unitización de una $C^\star$-álgebra.

Ejemplo 2.4.3. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto pero no compacto. La $C^\star$-álgebra $A = C_0(X)$ es una álgebra sin unidad. Nuestra intención es mostrar que si $\dot{X} = X \cup \{\infty\}$ es la compactificación por un punto del espacio X entonces $\dot{A} \cong C(\dot{X})$. En efecto, definamos $\phi : \dot{A} \to C(\dot{X})$ por*

$$\phi(f, \alpha) = \dot{f}(x) := f(x) + \alpha.$$

Claramente esta bien definida, si definimos $\dot{f}(\infty) := \alpha$. Pues para todo $x \in X$ se tiene que la función $\dot{f}$ es continua en x, ya que $\dot{f}|_X(x) = f(x)$, y para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \dot{X}$ con $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, tendremos que

$$\dot{f}(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = \dot{f}(\infty).$$

Además ϕ es un homomorfismo de álgebras ya que claramente es $\mathbb{C}$-lineal, $\phi(0,0)$ es la función nula en $\dot{X}$ y

$$\begin{array}{rcl} \phi((f,\alpha)(g,\beta)) & = & \phi(fg + f\beta + \alpha g, \alpha\beta) \\ & = & f(x)g(x) + f(x)\beta + \alpha g(x) + \alpha\beta \\ & = & (f(x) + \alpha)(g(x) + \beta) \\ & = & \phi(f,\alpha)\phi(g,\beta). \end{array}$$

Como para todo $(f, \alpha) \in \dot{A}$, se tiene

$$\phi((f,\alpha)^\star) = \phi(f^\star, \overline{\alpha}) = f^\star(x) + \overline{\alpha} = (f(x) + \alpha)^\star = \phi(f,\alpha)^\star.$$

Concluimos que ϕ es un *-homomorfismo de $C^\star$-álgebras. El *-homomorfismo es inyectivo pues, si para algún par $(f, \alpha) \in \dot{A}$ entonces para todo $x \in \dot{X}$ se tiene $\dot{f}(x) = f(x) + \alpha = 0$. En particular, $\dot{f}(\infty) = \alpha = 0$ y para todo $x \in X$ tendremos $\dot{f}(x) = f(x) + \alpha = f(x) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{NUCLEO}\phi = \{0\}$, de donde ϕ es inyectiva.
Dada cualquier función $\dot{f} \in C(\dot{X})$, consiredemos $\alpha = \dot{f}(\infty)$ y para todo $x \in X$ definamos $f(x) := \dot{f}(x) - \alpha$. Un calculo rapido muestra que $f \in C_0(X)$ y así

$$\phi(f, \alpha) = (\dot{f}(x) - \alpha) + \alpha = \dot{f}.$$

De este modo, hemos mostrado que ϕ es un *-isomorfismo entre las $C^\star$-álgebras $\dot{A}$ y $C(\dot{X})$.

2.4.3. La Estructura de Orden. Dada una $C^\star$-álgebra A, definiremos un orden sobre A que nos permita realizar cálculos con mayor facilidad. De esta forma, definiremos en A, conceptos como el de potencia α-ésima de un elemento positivo $a \in A$, en particular, la raíz cuadrada positiva de a.

En un espacio de Hilbert H, un operador lineal acotado A se dice positivo si para todo $x \in H$ se tiene $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Esto en particular implica lo siguiente;

- Para todo $x \in H$

$$\langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle Ax, x\rangle$$

luego por la identidad de polarización

$$\begin{aligned}4\langle Ax, y\rangle &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle \\ &= \langle x+y, A(x+y)\rangle - \langle x-y, A(x-y)\rangle \\ &\quad + i\langle x+iy, A(x+iy)\rangle - i\langle x-iy, A(x-iy)\rangle \\ &= \langle A^\star(x+y), x+y\rangle - \langle A^\star(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i\langle A^\star(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A^\star(x-iy), x-iy\rangle \\ &= 4\langle A^\star x, y\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto $A = A^\star$

- Debido a que A es positivo, como en particular es auto-adjunto, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Así dado $\lambda \in \sigma(A)$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ con todos sus miembros de norma 1 tal que

$$\|(A - \lambda\mathbb{I}_H)x_n\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Así cuando $n \to \infty$ tenemos que $\langle (A - \lambda\mathbb{I}_H)x_n, x_n\rangle \to 0$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\langle \lambda x_n, x_n\rangle = \lambda.$$

De este modo cuando $n \to \infty$ tendremos $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$. Pero como A es positivo para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\langle Ax_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}^+$, por lo que $\lambda \geq 0$. De donde concluimos que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$.

Motivados por este hecho daremos la siguiente definición;

Definición 2.4.8. Sea A es una $C^\star$-álgebra. Diremos que $a \in A$ es positivo si

$$a = a^\star \text{ y } \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+.$$

Denotaremos A^+ al conjunto de todos los elementos positivos de A.

Ejemplo 2.4.4. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. En la $C^\star$-álgebra $C(X)$ tenemos que $f \in C(X)$ es auto-adjunto si y solo si para todo $x \in X$ se tiene que $f(x) \in \mathbb{R}$. Y como $\sigma(f) = \{f(x) : x \in X\}$ ocurre que $f \in C(X)$ es positivo si y solo si para todo $x \in X$ se tiene que $f(x) \geq 0$.*

Lema 2.7. *Si $a = a^\star$ es un elemento de la $\mathbb{C}^\star$-álgebra A y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq \|a\|$ entonces*

$$a \in A^+ \textit{ si y solo si } \|a - \alpha\mathbb{I}_A\| \leq \alpha.$$

Demostración: Como $\sigma(a) \subseteq [-\alpha, \alpha]$ y

$$\|a - \alpha\mathbb{I}_A\| = R(a - \alpha\mathbb{I}_A) = \sup_{t\in\sigma(a)} |t - \alpha| = \sup_{t\in\sigma(a)} (\alpha - t)$$

claramente

$$\|a - \alpha\mathbb{I}_A\| \leq \alpha \text{ si y solo si } \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+.$$

∎

Ahora veremos algunas propiedades del conjunto A^+.

Teorema 2.9. *Suponga que A es una $\mathbb{C}^\star$-álgebra. Luego*

1. *A^+ es cerrado en A*
2. *$a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ implica $\alpha a \in A^+$*
3. *$a, b \in A^+$ implica $a + b \in A^+$*
4. *$a, b \in A^+$ y $ab = ba$ implica $ab \in A^+$*
5. *$a \in A^+$ y $-a \in A^+$ implica $a = 0$*

Demostración:

1. Del Lema 2.7,con $\alpha = ||a||$ tenemos
$$A^+ = \{a \in A : a = a^\star \text{ y } ||a - ||a||\mathbb{I}_A|| \leq ||a||\}$$
$\therefore$ A^+ es cerrado, pues la norma es continua en A.
2. Si $a \in A^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ entonces αa es auto-adjunto pues;
$$(\alpha a)^\star = \overline{\alpha} a^\star = \alpha a$$
y además, $\sigma(\alpha a) = \{\alpha t : t \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}^+$. De donde concluimos que $\alpha a \in A^+$.
3. Sean $a, b \in A^+$, del Lema 2.7 tenemos que
$$||a - ||a||\mathbb{I}_A|| \leq ||a|| \quad \text{y} \quad ||b - ||b||\mathbb{I}_A|| \leq ||b||.$$
Así
$$||a + b - (||a|| + ||b||)\mathbb{I}_A|| \leq ||a - ||a||\mathbb{I}_A|| + ||b - ||b||\mathbb{I}_A|| \leq ||a|| + ||b||.$$
Haciendo $\alpha = ||a|| + ||b|| \geq ||a + b||$ tendremos que $||a + b - \alpha\mathbb{I}_A|| \leq \alpha$. Luego por Lema 2.7 se concluye que $a + b \in A^+$.
4. Como $a, b \in A$ son auto-adjuntos y conmutan, tenemos que
$$(ab)^\star = b^\star a^\star = ba = ab$$
por lo tanto $ab \in A$ es auto-adjunto. Por otra parte, si $\lambda \in \sigma(ab)$, existe $\rho : A \to \mathbb{C}$ homomorfismo tal que $\rho(ab - \lambda\mathbb{I}_A) = 0$, por lo tanto $\lambda = \rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. Luego puesto que $\rho(a) \in \sigma(a)$ y $\rho(b) \in \sigma(b)$ se tiene que $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}^+$, de donde $ab \in A^+$.
5. Si $a, -a \in A^+$ entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ y también
$$\sigma(-a) = \{-t : t \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}^+.$$
De donde se tiene que $\sigma(a) = \{0\}$. Así $||a|| = R(a) = 0$ y por lo tanto $a = 0$.

■

Proposición 2.15. *Supongamos que A es una $\mathbb{C}^\star$-álgebra. Si $a \in A$ es auto-adjunto y $f \in C(\sigma(a))$, entonces*

1. *$f(a) \in A^+$ si y solo si para todo $t \in \sigma(a)$ tenemos $f(t) \geq 0$.*
2. *$||a||\mathbb{I}_A \pm a \in A^+$.*
3. *a puede ser expresado de la forma $a = a^+ - a^-$ donde $a^+, a^- \in A^+$ y $a^+a^- = a^-a^+ = 0$. Estas condiciones determinan unicamente a^+ y a^-, además $||a|| = \text{máx}\{||a^+||, ||a^-||\}$.*

Demostración:

1. Como $f \in C(\sigma(a))$ tenemos que $\sigma(f(a)) = \{f(t) : t \in \sigma(a)\}$.
   - Si $f(a) \in A^+$, en particular, $\sigma(f(a)) \subseteq \mathbb{R}^+$ de este modo
   $$\text{para todo } t \in \sigma(a), \text{ tendremos } f(t) \geq 0.$$
   - Supongamos que para todo $t \in \sigma(a), \quad f(t) \geq 0$. Luego f es real valuada y así
   $$f(a)^\star = \overline{f(a)} = f(a).$$
   Además $\sigma(f(a)) = \{f(t) : t \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}^+$. Por lo tanto
   $$f(a) \in A^+.$$
2. Definamos $f \in C(\sigma(a))$ por $f(t) = \|a\| \pm t$. De este modo para todo $t \in \sigma(a), \quad f(t) \geq 0$. Luego por la parte (1) de esta proposición tenemos que $f(a) = \|a\|\mathbb{I} \pm a \in A^+$.
3. Definamos las funciones continuas y real valuadas, $u, u^+, u^- \in C(\mathbb{R})$ por
$$u(t) = t, \quad u^+(t) = \text{máx}\{t, 0\}, \quad u^-(t) = \text{máx}\{-t, 0\}.$$
Claramente satisfacen que
$$u(t) = u^+(t) - u^-(t) \quad \text{y} \quad u^+(t)u^-(t) = u^-(t)u^+(t) = 0.$$
Luego como $u(a) = a$ tenemos que
$$a = a^+ - a^- \quad \text{y} \quad a^+a^- = a^-a^+ = 0$$
donde $a^+ = u^+(a)$ y $a^- = u^-(a)$. Mas aun por (1) de la Proposición 2.15 se tiene que $a^+, a^- \in A^+$. Finalmente como la norma del supremo de $u \in C(\sigma(a))$ satisface que $\|u\| = \text{máx}\{\|u^+\|, \|u^-\|\}$, se cumple que
$$\|a\| = \text{máx}\{\|a^+\|, \|a^-\|\}.$$
Para probar la unicidad de la descomposición, supongamos que existen $b, c \in A^+$ con $bc = cb = 0$ tales que $a = b - c$. Así para todo $n \in \mathbb{N}, \quad a^n = b^n + (-c)^n$ y por lo tanto $P(a) = P(b) + P(-c)$ cuando P es un polinomio con termino constante igual a cero. Si tomamos $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios con termino contante igual a cero que converge uniformemente a u^+ en $\sigma(a) \cup \sigma(b) \cup \sigma(-c)$, tendremos que
$$u^+(a) = \lim_{n\to\infty} P_n(a) = \lim_{n\to\infty}(P_n(b) - P_n(-c)) = u^+(b) - u^+(-c).$$
Como para todo $s \in \sigma(b)$ tenemos $u^+(s) = s$ y para todo $s \in \sigma(-c)$ tenemos $u^+(s) = 0$. Concluimos que
$$u^+(b) = b \quad \text{y} \quad u^+(-c) = 0.$$
De donde se tiene que
$$b = u^+(a) = a^+ \text{ y } c = b - a = a^+ - a = a^-.$$

■

Como una consecuencia inmediata de esta proposición y de la Observación 2.4.3 tenemos el siguiente corolario;

Corolario 2.6. *Dada una $C^\star$-álgebra A. Todo elemento $a \in A$ es una combinación lineal de a lo más 4 elementos de A^+.*

Demostración: Por la Observación 2.4.3, tenemos que todo elemento $a \in A$ se escribe como $a = h + ik$ donde $h = \frac{a+a^\star}{2}$ y $k = \frac{a-a^\star}{2i}$ son elementos auto-adjuntos. Así por (3) de la Proposición 2.15 tenemos que $h = h^+ - h^-$ y $k = k^+ - k^+$. Luego $a = h^+ - h^- + i(k^+ - k^-)$.

∎

Lema 2.8. *Sea A una $C^\star$-álgebra. Si $a \in A$ y $-a^\star a \in A^+$ entonces a=0.*

Demostración: Sea $a = h + ik$, con h y k como en la Observación 2.4.3. Luego $\sigma(h) \subseteq \mathbb{R}$ y

$$\sigma(h^2) = \left\{t^2 : t \in \sigma(h)\right\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

de donde sigue que h^2 (y análogamente k^2) son positivos. Como $aa^\star$ es auto-adjunto y

$$\sigma(-aa^\star) \subseteq \sigma(-a^\star a) \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

pues $-a^\star a \in A^+$. Luego $-aa^\star$ es auto-adjunto y $\sigma(-aa^\star) \subseteq \mathbb{R}^+$. Por lo tanto $-aa^\star \in A^+$. Ahora

$$a^\star a + aa^\star = (h - ik)(h + ik) + (h + ik)(h - ik) = 2h^2 + 2k^2,$$

de donde $a^\star a = 2h^2 + 2k^2 + (-aa^\star)$. Como $2h^2, 2k^2, -aa^\star \in A^+$ tendremos que $a^\star a \in A^+$. De este modo por el Teorema 2.9, en vista de que
$a^\star a, -a^\star a \in A^+$, se tiene que $a^\star a = 0$. Luego como

$$||a||^2 = ||a^\star a|| = 0$$

se concluye que $a = 0$

∎

Teorema 2.10. *Sea A una $C^\star$-álgebra y $a \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes;*

1. *$a \in A^+$.*
2. *Existe un unico $h \in A^+$ de modo que $a = hh = h^2$.*
3. *Existe $b \in A$ tal que $a = b^\star b$.*
   Si H es un espacio de Hilbert y $A \subseteq B(H)$ las tres condiciones anteriores son equivalentes a
4. *Para todo $x \in H$ si tiene $\langle ax, x\rangle \geq 0$*

Demostración:

- Para (1) implica (2) sea $a \in A^+$. Definimos $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$ que es una función continua, no-negativa y real valuada en $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. Luego tomando $h = f(a)$ tendremos $h \in A^+$ y $h^2 = a$.

- (2) implica (3) Es claro, pues h en el punto anterior es auto-adjunto
$$\text{por lo tanto } a = h^2 = h^\star h$$
- Para (3) implica (1) supongamos que existe $b \in A$ tal que $a = b^\star b$. Como a es auto-adjunto se tiene una descomposición de la forma $a = a^+ - a^-$, como en la Proposición 2.15. Si definimos $c = ba^- \in A$ tendremos que
$$c^\star c = a^- b^\star b a^- = a^-(a^+ - a^-)a^- = -(a^-)^3$$
pues $a^- \in A^+$. Se sigue que $-c^\star c = (a^-)^3 \in A^+$, y del Lema 2.8 tenemos que $c = 0$ luego $(a^-)^3 = 0$ y como a^- es auto-adjunto, en particular normal, se tiene
$$\|a^-\| = R(a^-) = \lim_{n\to\infty} \|(a^-)^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$
de este modo, $a = a^+ \in A^+$.
Notemos que h (en (1) implica (2)) es unico. Sea $k \in A^+$ tal que $k^2 = a$ y sea $h = f(a)$, donde para todo $t \in \sigma(a)$, $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios convergiendo uniformemente a f en $\sigma(a)$ y definamos para todo $n \in \mathbb{N}, q_n(t) = p_n(t^2)$. Como $\sigma(k) \subseteq \mathbb{R}^+$ y $\sigma(a) = \sigma(k^2) = \{t^2 : t \in \sigma(a)\}$ se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} q_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t^2) = f(t^2) = t$$
y la convergencia es uniforme en $\sigma(k)$. De esto
$$k = \lim_{n\to\infty} q_n(k) = \lim_{n\to\infty} q_n(k^2) = \lim_{n\to\infty} p_n(a) = f(a) = h.$$
- Si A es una *-subalgebra de $B(H)$, para algún espacio de hilbert H, entonces claramente (3) implica (4), pues
$$\langle ax, x\rangle = \langle b^\star bx, x\rangle = \langle bx, bx\rangle = \|bx\|^2 \geq 0.$$
Por otro lado si $a \in B(H)$ es tal que para todo $x \in H$ se cumple $\langle ax, x\rangle \geq 0$. Por lo visto al comienzo de esta sección a es auto-adjunto y $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$. De donde $a \in A^+$.

■

Cuando $a \in A^+$, el elemento $h = f(a)$ en el teorema anterior, es llamado **raíz cuadrada positiva** de a.
Un proceso similar puede ser usado para introducir el elemento $a^\alpha \in A^+$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos $f_\alpha(t) = t^\alpha$, claramente f_α es una función continua, no negativa, real valuada en $\sigma(a)$ cuando $\alpha > 0$ (y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, si a es invertible).
Observemos que para todo $t \in \sigma(a)$ y para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cuando a es invertibe tenemos;
$$f_\alpha(t) f_\beta(t) = f_{\alpha+\beta}(t), \quad f_1(t) = t, \quad f_0(t) = 1.$$

Luego definiendo $a^\alpha = f_\alpha(a)$ tendremos para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

$$a^\alpha \in A^+, \quad a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad a^1 = a, \quad a^0 = \mathbb{I}_A.$$

Y si a es invertible entonces estas propiedades se cumplen para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.4.4. El Teorema Fundamental. En esta sección comenzaremos dando un método para construir *-representaciones de una $C^\star$-álgebra a partir de un funcional, con algunas propiedades detalladas más adelante. Este método se conoce como GNS-construcción, y es llamado así por Israel Gelfand, Mark Naimark, Irving Segal. Finalmente presentaremos y demostraremos el teorema fundamental de las $C^\star$-álgebras, el **Teorema de Gelfand-Naimark-Segal**.

Definición 2.4.9. Si A es una $C^\star$-álgebra y H un espacio de Hilbert, Una **representación** de A en H es un *-homomorfismo $\Pi : A \to B(H)$.

Observación 2.4.4. *La imagen de una $C^\star$-álgebra por una representación en algún espacio de Hilbert, es una $C^\star$-subalgebra de $B(H)$.*

Ejemplo 2.4.5. *Pensemos en la $C^\star$-álgebra $A = C_0(\mathbb{R})$ y en el espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R})$, como ejemplo de representación podemos pensar en*

$$\begin{array}{rcccl} \Pi & : & A & \to & B(H) \\ & & f & \mapsto & \Pi(f) \end{array}$$

definida por

$$\begin{array}{rcccl} \Pi(f) & : & H & \to & H \\ & & \psi(x) & \mapsto & f(x)\psi(x). \end{array}$$

Pues, dados $f, g \in A$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\psi \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha f + \beta g)(\psi(x)) &= (\alpha f + \beta g)(x)\psi(x) \\ &= \alpha f(x)\psi(x) + \beta g(x)\psi(x) \\ &= \alpha\Pi(f)(\psi(x)) + \beta\Pi(g)(\psi(x)) \end{aligned}$$

de donde se tiene que Π es $\mathbb{C}$-lineal. Además es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras ya que;

$$\begin{aligned} \Pi(fg)(\psi(x)) &= (fg)(x)\psi(x) \\ &= f(x)g(x)\psi(x) \\ &= f(x)(g(x)\psi(x)) \\ &= \Pi(f)(\Pi(g)(\psi(x))) \\ &= \Pi(f) \circ \Pi(g)(\psi(x)). \end{aligned}$$

Por lo que solo faltaria verificar que es un **-homomorfismo. En efecto, como*

$$\begin{aligned}\Pi(f^\star)(\psi(x)) &= \Pi(\overline{f})(\psi(x)) \\ &= \overline{f(x)}\psi(x),\end{aligned}$$

tenemos que para todos $\psi, \xi \in H$ *se cumple que*

$$\begin{aligned}\langle \xi(x), \Pi(f^\star)\psi(x)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \xi(x)\overline{\Pi(\overline{f})\psi(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(x)\overline{\overline{f(x)}\psi(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(x)f(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\xi(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Pi(f)\xi(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x \\ &= \langle \Pi(f)\xi(x), \psi(x)\rangle.\end{aligned}$$

Así por la unicidad del operador adjunto se concluye que

$$\Pi(f^\star) = \Pi(f)^\star.$$

Luego concluimos que $\Pi : A \to B(H)$ *es una representación.*

Definición 2.4.10. Sea A una $C^\star$-álgebra.

1. Dos representaciones $\Pi_1(A)$ y $\Pi_2(A)$, en espacios de Hilbert H_1 y H_2 respectivamente, se dicen **unitariamente equivalentes** ó simplemente **equivalentes** cuando existe un operador unitario $U : H_1 \to H_2$ tal que para todo $a \in A$,
$$\Pi_2(a) = U \circ \Pi_1(a) \circ U^\star.$$
2. Una representación se dice **fiel** si es un *-homomorfismo inyectivo, es decir un *-monomorfismo.

Debido a la Proposición 2.12, todo *-monomorfismo es isometrico. La mejor caracterización de las $C^\star$-álgebras esta dada por el teorema siguiente.

Teorema 2.11. *Toda* $C^\star$*-álgebra* A *admite una representación fiel* $\Pi : A \to B(H)$*, para algún espacio de Hilbert* H*. En otras palabras, toda* $C^\star$*-álgebra es* **-isomorfa a una* $C^\star$*-subalgebra de* $B(H)$ *cerrada en norma.*

Para mostrar este teorema, conocido en la literatura como el **Teorema de Gelfand-Naimark-Segal**, es necesario introducir un poco de terminología, como los **estados** en una $C^\star$-álgebra, para luego mostrar una versión más debil de este teorema y finalmente con un poco de ingenio mostrar el teorema de Gelfand-Naimark-Segal.

Definición 2.4.11. Sea A una $C^\star$-álgebra con unidad, un funcional $\rho : A \to \mathbb{C}$ se dice;

- **Positivo** si para todo $a \in A, \quad \rho(a^\star a) \geq 0$.
- **Normalizado** si $\rho(\mathbb{I}) = 1$.

Observación 2.4.5. *Un funcional ρ de una $C^\star$-álgebra sin unidad A, se dice **normalizado** si su extensión canonica $\dot{\rho}$ a su unitización dada por*

$$\dot{\rho}(a + \lambda\mathbb{I}) := \rho(a) + \lambda$$

es normalizado.

Definición 2.4.12. Si A es una $C^\star$-álgebra con unidad, a un funcional positivo y normalizado $\rho : A \to \mathbb{C}$ lo llamaremos **estado**.

Ejemplo 2.4.6. *Sea H un espacio de Hilbert y tomemos la $C^\star$-álgebra con unidad $A = B(H)$. A cada $\omega \in H$ con $||\omega|| = 1$ le podemos asociar un estado por*

$$\begin{array}{cccc} \rho_\omega & : & B(H) & \to & \mathbb{C} \\ & & a & \mapsto & \langle a\omega, \omega\rangle. \end{array}$$

Pues claramente

$$\rho_\omega(\mathbb{I}) = \langle\omega, \omega\rangle = ||\omega||^2 = 1$$

y

$$\rho_\omega(a^\star a) = \langle a^\star a\omega, \omega\rangle = \langle a\omega, a\omega\rangle = ||a\omega||^2 \geq 0.$$

En una $C^\star$-álgebra con identidad podemos caracterizar los estados por medio del siguiente teorema.

Teorema 2.12. *Sea A una $C^\star$-álgebra con identidad. Un funcional lineal $\rho : A \to \mathbb{C}$ es positivo si y solo si ρ es acotado y $||\rho|| = \rho(\mathbb{I})$.*

Demostración: Supongamos primero que ρ es positivo.
Sea $a \in A$ y escogamos un elemento $\alpha \in \mathbb{C}$ de norma 1 tal que $\alpha\rho(a) \geq 0$, si denotamos por h la parte real de αa entonces $||h|| \leq ||a||$, así

$$||h||\mathbb{I} \leq ||a||\mathbb{I}.$$

Como $||a||\mathbb{I} - h \in A$ es positivo

$$||a||\rho(\mathbb{I}) - \rho(h) = \rho(||a||\mathbb{I} - h) \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\rho(a)| &= |\alpha\rho(a)| = |\rho(\alpha a)| = \rho(\alpha a) = \overline{\rho(\alpha a)} = \rho(\overline{\alpha}a^\star) \\ &= \rho(\frac{1}{2}(\alpha a + \overline{\alpha}a^\star)) = \rho(h) \leq \rho(\mathbb{I})||a||. \end{aligned}$$

Así, para todo $a \in A$ tendremos $|\rho(a)| \leq \rho(\mathbb{I})||a||$. De donde ρ es acotado con

$$||\rho|| \leq \rho(\mathbb{I}).$$

Y claramente, por definición, $\rho(\mathbb{I}) \leq ||\rho||$. Por lo tanto $||\rho|| = \rho(\mathbb{I})$. Reciprocamente, supongamos que ρ es acotado y $||\rho|| = \rho(\mathbb{I})$. Es suficiente considerar el caso en que $\rho(\mathbb{I}) = 1$ ya que de no ser así se hace el mismo proceso

que realizaremos a continuación pero con el funcional $\tilde{\rho}(a) = \frac{\rho(a)}{\rho(\mathbb{I})}$. Debemos mostrar que para todo $a \in A^+$ tenemos que $\rho(a) \geq 0$. Sea $a \in A^+$ y supongamos que $\rho(a) = \alpha + i\beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De este modo, basta probar que $\alpha \geq 0$ y $\beta = 0$.
Como $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$ podemos elegir $s \in \mathbb{R}^+$, pequeño, tal que

$$\sigma(\mathbb{I} - sa) = \{1 - st : t \in \sigma(a)\} \subseteq [0, 1].$$

Así $\|\mathbb{I} - sa\| = R(\mathbb{I} - sa) \leq 1$. De donde

$$1 - s\alpha \leq |1 - s(\alpha + i\beta)| = |\rho(\mathbb{I} - sa)| \leq 1,$$

por lo tanto $\alpha \geq 0$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ tomamos $b_n \in A$ definido por $b_n = a - \alpha\mathbb{I} + in\beta\mathbb{I}$, notando que $b_n^\star = a - \alpha\mathbb{I} - in\beta\mathbb{I}$ tendremos

$$\|b_n\|^2 = \|b_n^\star b_n\| = \|(a - \alpha\mathbb{I})^2 + n^2\beta^2\mathbb{I}\| = \|a - \alpha\mathbb{I}\|^2 + n^2\beta^2.$$

Luego para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(n^2 + 2n + 1)\beta^2 = |\rho(b_n)|^2 \leq \|a - \alpha\mathbb{I}\| + n^2\beta^2,$$

lo que induce una contradicción, a menos que $\beta = 0$.
De lo anterior se concluye que $\alpha \geq 0$ y $\beta = 0$.

■

De este caracterización cabe resaltar lo siguiente.

Corolario 2.7. *Sea A una $C^\star$-álgebra con unidad, si $a \in A$ y $\alpha \in \sigma(a)$ entonces existe un estado $\rho : A \to \mathbb{C}$ tal que $\rho(a) = \alpha$.*

Demostración: Sean $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, puesto que $(a - \alpha\mathbb{I})$ no es invertible tampoco lo será $\beta(a - \alpha\mathbb{I}) = a\beta - \alpha\beta\mathbb{I}$ luego el elemento

$$\beta a - \alpha\beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{I} - \gamma\mathbb{I} = \beta a + \gamma\mathbb{I} - (\alpha\beta + \gamma)\mathbb{I},$$

no es invertible y por lo tanto $\alpha\beta + \gamma \in \sigma(\beta a + \gamma\mathbb{I})$. De este modo

$$|\alpha\beta + \gamma| \leq \|\beta a + \gamma\mathbb{I}\|.$$

Así la ecuación

$$\rho_0(\beta a + \gamma\mathbb{I}) = \alpha\beta + \gamma,$$

define , sin ambiguedad, un funcional lineal en el subespacio

$$\{\beta a + \gamma\mathbb{I} : \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$$

de A que satisface las propiedades

$$\begin{array}{rcl} \rho_0(a) & = & \alpha \\ \rho_0(\mathbb{I}) & = & 1 \\ \|\rho_0\| & = & 1. \end{array}$$

Luego por el teorema de Hahn-Banach, ρ_0 se extiende a un funcional lineal acotado $\rho : A \to \mathbb{C}$ con $\|\rho\| = \rho(\mathbb{I}) = 1$ y por el teorema anterior esta extención ρ es positivo.

■

Observación 2.4.6. *Sea A es una $C^\star$-álgebra con unidad.*
Si $a \in A$ es un elemento auto-adjunto tal que para todo estado $\rho : A \to \mathbb{C}$ se tiene $\rho(a) = 0$, entonces el corolario anterior implica que $\sigma(a) = \{0\}$. Luego

$$\|a\| = R(a) = 0,$$

y por lo tanto $a = 0$.
Si $a \in A$ no es auto-adjunto pero satisface que para todo estado $\rho : A \to \mathbb{C}$ se tiene $\rho(a) = 0$, entonces escribiendo $a = h + ik$ con $h, k \in A$ auto-adjuntos tendremos que todo estado ρ satisface

$$\rho(a) = \rho(h + ik) = \rho(h) + i\rho(k) = 0.$$

Por lo tanto para todo estado $\rho : A \to \mathbb{C}$, se tiene que $\rho(h) = \rho(k) = 0$. Desde que $\rho(h), \rho(k) \in \mathbb{R}$ aplicando el mismo criterio que al comienzo de la observación tendremos que $h = k = 0$. De donde $a = 0$.
Esto muestra que si un elemento de una $C^\star$-álgebra se anula para todo estado, entonces tal elemento es nulo.

Proposición 2.16. *Sea ρ un estado en una $C^\star$-álgebra A. El conjunto*

$$L_\rho = \{a \in A : \rho(a^\star a) = 0\}$$

es un ideal izquierdo, cerrado en A y $\rho(b^\star a) = 0$ siempre que $a \in L_\rho$ y $b \in A$. Además para todo $a, b \in A$ la ecuación

$$\langle a + L_\rho, b + L_\rho \rangle = \rho(b^\star a)$$

define un producto interno en el espacio cociente A/L_ρ.

Demostración: Para cualquier par de elementos $a, b \in A$ definimos

$$\langle a, b \rangle_0 = \rho(b^\star a).$$

Claramente la ecuación

$$\langle a + L_\rho, b + L_\rho \rangle = \langle a, b \rangle_0 = \rho(b^\star a),$$

define un producto interno en A/L_ρ. Luego si $a \in L_\rho$ y $b \in A$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tendremos

$$|\langle a, b \rangle_0|^2 \leq \langle b, b \rangle_0 \langle a, a \rangle_0.$$

En otras palabras, como $a \in L_\rho$

$$|\rho(b^\star a)|^2 \leq \rho(b^\star b)\rho(a^\star a) = 0.$$

De este modo $\rho(b^\star a) = 0$. Luego reemplazando b por $b^\star ba$ sigue que

$$\rho((b^\star ba)^\star a) = \rho(a^\star b^\star ba) = \rho((ba)^\star ba) = 0.$$

Por lo tanto $ba \in L_\rho$, es decir L_ρ es un ideal izquierdo de A. Además es cerrado pues ρ es continua y A^+ es cerrado.

■

Nos referiremos a L_ρ como el **nucleo** del estado ρ.

Definición 2.4.13. Sea A una $C^\star$-álgebra y H un espacio de Hilbert. Una representación $\pi : A \to B(H)$ se dice **ciclica** si existe $\omega \in H$ tal que

$$\pi(A) = \{\pi(a)\omega : a \in A\} \quad \text{es denso en} \quad H.$$

Al vector ω que satisface esta propiedad lo llamaremos **vector ciclico** para π.

Ahora para cada estado de una $C^\star$-álgebra A definiremos una representación en algún espacio de hilbert. A esta construcción de representaciones, que detallaremos en el siguiente teorema, se le llama la **construcción de Gelfand-Naimark-segal** o simplemente **GNS-construcción**.

Teorema 2.13. *Sea ρ es un estado en una $C^\star$-álgebra A. Existe una representación ciclica π_ρ de A en algun espacio de Hilbert H_ρ, y un vector ciclico unidad $x_\rho \in H_\rho$ para π_ρ tal que para todo $a \in A$*

$$\rho(a) = \langle \pi(a)x_\rho, x_\rho \rangle.$$

Demostración: Con el nucleo de ρ, L_ρ, el espacio cociente A/L_ρ es un espacio Pre-Hilbert relativo al producto interno definido en la proposición anterior; para todo $a, b \in A$

$$\langle a + L_\rho, b + L_\rho \rangle = \rho(b^\star a).$$

Denotaremos a su completación con respecto a este producto interno por H_ρ. Para cada $a \in A$ definamos un operador en el espacio Pre-Hilbert A/L_ρ por

$$\begin{array}{rccc} \pi(a) & : & A/L_\rho & \to & A/L_\rho \\ & & b + L_\rho & \mapsto & ab + L_\rho. \end{array}$$

Este operador esta bien definido pues si $a, b_1, b_2 \in A$ son tales que $b_1 + L_\rho = b_2 + L_\rho$, entonces $b_1 - b_2 \in L_\rho$. Luego como L_ρ es un ideal izquierdo $a(b_1 - b_2) = ab_1 - ab_2 \in L_\rho$, por lo tanto $ab_1 + L_\rho = ab_2 + L_\rho$. De donde $\pi(a)$ esta bien definida y claramente es lineal. Además, en vista de la Proposición 2.15 tenemos

$$||a^\star a||\mathbb{I} - a^\star a = ||a||^2\mathbb{I} - a^\star a \in A^+.$$

En particular existe su raíz cuadrada positiva. De esto, para todo $b \in A$

$$b^\star(||a||^2\mathbb{I} - a^\star a)b = ((||a||^2\mathbb{I} - a^\star a)^{\frac{1}{2}}b)^\star((||a||^2\mathbb{I} - a^\star a)^{\frac{1}{2}}b) \in A^+.$$

Por lo tanto para todo $a, b \in A$ como ρ es positivo tenemos

$$\begin{aligned} ||a||^2||b + L_\rho||^2 - ||\pi(a)(b + L_\rho)||^2 &= ||a||^2||b + L_\rho||^2 - ||ab + L_\rho||^2 \\ &= ||a||^2\langle b + L_\rho, b + L_\rho \rangle \\ &\quad -\langle ab + L_\rho, ab + L_\rho \rangle \\ &= ||a||^2\rho(b^\star b) - \rho((ab)^\star ab) \\ &= \rho(b^\star(||a||^2\mathbb{I} - a^\star a)b) \geq 0. \end{aligned}$$

De esto concluimos que

$$||\pi(a)(b + L_\rho)||^2 \leq ||a||^2||b + L_\rho||^2.$$

Así el operador $\pi(a)$ es acotado con $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. Además, cuando $a, b, c \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ la función

$$\begin{array}{rcccc} \pi & : & A & \to & B(A/L_\rho) \\ & & a & \mapsto & \pi(a) \end{array}$$

es lineal, ya que

$$\begin{aligned} \pi(\alpha a + \beta b)(c + L_\rho) &= (\alpha a + \beta b)(c + L_\rho) &= \alpha(ac + L_\rho) + \beta(bc + L_\rho) \\ & &= (\alpha\pi(a) + \beta\pi(b))(c + L_\rho), \end{aligned}$$

por lo tanto $\pi(\alpha a + \beta b) = (\alpha\pi(a) + \beta\pi(b))$. Además

$$\begin{aligned} \pi(ab)(c + L_\rho) &= (ab)(c + L_\rho) \\ &= abc + L_\rho \\ &= \pi(a)(bc + L_\rho) \\ &= (\pi(a) \circ \pi(b))(c + L_\rho), \end{aligned}$$

de donde π es un homomorfismo de álgebras. Como

$$\begin{aligned} \langle \pi(a)(b + L_\rho), c + L_\rho \rangle &= \langle ab + L_\rho, c + L_\rho \rangle \\ &= \\ &= \rho(c^\star ab) \\ &= \\ &= \rho((a^\star c)^\star b) \\ &= \\ &= \langle b + L_\rho, a^\star c + L_\rho \rangle \\ &= \\ &= \langle b + L_\rho, \pi(a^\star)(c + L_\rho) \rangle, \end{aligned}$$

tenemos $\pi(a)^\star = \pi(a^\star)$. Por lo tanto π es un *-homomorfismo. Luego como A/L_ρ es denso en H_ρ, π se extiende por continuidad a un operador lineal acotado

$$\begin{array}{rcccc} \pi_\rho & : & A & \to & B(H_\rho) \\ & & a & \mapsto & \pi_\rho(a) \end{array}$$

actuando en la completación de A/L_ρ, H_ρ, y por las propiedades anteriores este es un *-homomorfismo. De donde concluimos que $\pi_\rho : A \to B(H)$ es una representación de A en H_ρ.
Además, como $\pi(\mathbb{I})$ es el operador identidad en A/L_ρ tenemos que $\pi_\rho(\mathbb{I})$ es el operador identidad en H_ρ y si denotamos $x_\rho = \mathbb{I} + L_\rho \in A/L_\rho$, entonces para todo $a \in A$ tendremos que

$$\pi_\rho(a)x_\rho = \pi_\rho(a)(\mathbb{I} + L_\rho) = a\mathbb{I} + L_\rho = a + L_\rho.$$

Por lo tanto $\pi_\rho(A) = A/L_\rho$ es denso en H_ρ. De este modo x_ρ es un vector ciclico para la representación π_ρ. Mas aun, para todo $a \in A$

$$\langle \pi_\rho(a)x_\rho, x_\rho \rangle = \langle a + L_rho, \mathbb{I} + L_\rho \rangle = \rho(a)$$

en particular $\|x_\rho\|^2 = \rho(\mathbb{I}) = 1$

■

Observación 2.4.7. *Como el espacio de estados en una $C^\star$-agebra A, que denotaremos por*

$$\mathcal{S}(A) = \{\rho \in A^* : \rho(\mathbb{I}) = 1 \text{ y } \rho(a^\star a) \geq 0, \text{para todo } a \in A\},$$

es un conjunto convexo y debil*-cerrado contenido en la bola unitaria de A^*, que es debil*-compacta, tenemos que $\mathcal{S}(A)$ es un subconjunto de A^* convexo y debil*-compacto. Luego por el teorema de ***Krein-Milman*** *$\mathcal{S}(A)$ es el casco convexo cerrado de sus puntos extremos. Un estado que es un punto extremo de este convexo lo llamaremos* ***estado puro****.*

Proposición 2.17. *Si A es una $C^\star$-álgebra y $a \in A$ no nulo, entonces existe un estado puro ρ de A tal que $\pi_\rho(a) \neq 0$, donde π_ρ es la representación obtenida de ρ por la GNS-construcción.*

Demostración: Como $a \neq 0$ supongamos que para todo ρ estado puro tenemos $\rho(a) = 0$. Como todo estado es una combinación lineal convexa de estados puros se concluye que $\omega(a) = 0$ para todo ω estado de A. Esto induce una contradicción por la Observación 2.4.6. De este modo existe un estado puro ρ tal que $\rho(a) \neq 0$. Luego por el Teorema 2.13 concluimos

$$0 \neq \rho(a) = \langle \pi_\rho(a) x_\rho, x_\rho \rangle.$$

Por lo tanto $\pi_\rho(a) \neq 0$.

■

Terminaremos esta sección haciendo la prueba del teorema de Gelfand-Naimark, para esto debemos introducir el concepto de suma directa de representaciones y de suma directa de espacios de Hilbert. Suponga que A es una $C^\star$-álgebra, B un conjunto de índices, $\{H_b\}_{b\in B}$ una familia de espacio de Hilbert y para cada $b \in B$ tomemos $\varphi_b : A \to H_b$ una representación tal que para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se tiene $\|\varphi_b(a)\| \leq \|a\|$. Con estas hipótesis definimos la suma directa de espacios de Hilbert como el espacio

$$\oplus_{b\in B} H_b := \left\{ v = \{v_b\}_{b\in B} \in \Pi_{b\in B} H_b : \sum_{b\in B} \|v_b\|^2_{H_b} < \infty \right\}.$$

Es un fácil ejercicio de series ver que si esta suma converge implica que solo un subconjunto numerable de $\{v_b\}_{b\in B}$ es distinto de cero. Además se puede probar que este es un espacio completo con el producto interno

$$\langle v, w \rangle := \sum_{b\in B} \langle v_b, w_b \rangle_{H_b}$$

y por ende es un espacio de Hilbert. Luego la función

$$\begin{array}{rcrcl} \oplus_{b\in B}\varphi_b(a) & : & \oplus_{b\in B} H_b & \to & \oplus_{b\in B} H_b \\ & & \{v_b\}_{b\in B} & \mapsto & \oplus_{b\in B}\varphi_b(a)(v_b) \end{array}$$

es un operador lineal acotado actuando en el espacio de Hilbert $\oplus_{b\in B}H_b$. Así es natural definir la suma directa de las representaciones $\{\varphi_b\}_{b\in B}$ por

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi = \oplus_{b\in B}\varphi & : & A & \to & B(\oplus_{b\in B}H_b) \\ & & a & \mapsto & \oplus_{b\in B}\varphi_b(a). \end{array}$$

Claramente φ es una representación de A en el espacio de Hilbert $\oplus_{b\in B}H_b$. Ahora estamos en condiciones de mostrar el teorema de Gelfand-Naimark.

Teorema 2.14. *Toda $C^\star$-álgebra tiene una representación fiel.*

Demostración: Sea A una $C^\star$-álgebra y $\mathcal{S}$ es la familia de estados de A, incluyendo los estados puros. Sea φ la suma directa de las representaciones $\{\pi_\rho : \rho \in \mathcal{S}\}$, donde π_ρ es la representación obtenida para ρ en la GNS-construcción. Luego si $a \in A$ y $\varphi(a) = 0$, entonces como

$$\varphi(a) = \oplus_{\rho\in\mathcal{S}}\pi_\rho(a)$$

tendremos que para todo $\rho \in \mathcal{S}$, $\pi_\rho(a) = 0$. Por lo tanto $a = 0$. De donde concluimos que φ es una representación fiel.

■

Es importante destacar que una representación fiel φ, es inyectiva y por la Proposición 2.12 concluimos que es isométrica es decir $\|a\| = \|\varphi(a)\|$.

2.4.5. Proyecciones en una $C^\star$-álgebra. Ahora hablaremos un poco sobre las proyecciones en una $C^\star$-álgebra A y como están ligadas, en particular, por tres relaciones de equivalencia, cada una más fuerte que la otra. Sin embargo, al momento de definir el grupo K_0 de A estas coincidirán y nos permitirán trabajar con ellas de igual forma o elegir la que nos parezca más conveniente al momento de hacer alguna demostración.

Definición 2.4.14. Sea A una $C^\star$-álgebra, diremos que $v \in A$ es una;

1. **Isometria parcial** si $v^\star v$ es una proyección.
2. **Isometria**, para A con unidad, si v es unitario. Es decir

$$vv^\star = v^\star v = \mathbb{I}.$$

3. **Simetria** si v es una isometria autoadjunta.

Observación 2.4.8. *Es importante notar que si $v \in A$ es una isometria parcial entonces $vv^\star$ también es una proyección, en efecto, si definimos $z = v - vv^\star v$ tendremos*

$$z^\star z = (v^\star - v^\star vv^\star)(v - vv^\star v) = v^\star v - v^\star vv^\star v - v^\star vv^\star v + v^\star vv^\star vv^\star v = 0.$$

Luego como A es una $C^\star$-álgebra $\|z\|^2 = \|z^\star z\| = 0$, de donde se tiene que $z = 0$. Por lo tanto $v = vv^\star v$. Así

$$vv^\star = (vv^\star v)v^\star = (vv^\star)^2,$$

es decir $vv^\star$ es una proyección.

Definición 2.4.15. Dos proyecciones p, q en una $C^\star$-álgebra A se dicen:

1. **Equivalentes** si existe $v \in A$ isometria parcial tal que $p = vv^\star$ y $q = v^\star v$. En tal caso denotaremos $p \sim q$. Y la clase de una proyección $p \in A$ la denotaremos por $[p]$.
2. **Unitariamente equivalentes**, y denotaremos $p \sim^u q$, si existe $u \in \dot{A}$ unitario tal que $p = u^\star q u$. Denotaremos la clase de una proyección $p \in A$ por $[p]_u$.
3. **Homotopicamente equivalentes**, cuando existe un camino de proyecciones, continuo en la topología de la norma, que conecta p y q. En tal caso denotaremos $p \sim^h q$. Y la clase de una proyección $p \in A$ la denotaremos por $[p]_h$.

En toda esta sección denotaremos por A una $C^\star$-álgebra. Durante todo el resto de la sección nos dedicaremos a analizar como están relacionadas estas relaciones de equivalencias, tratando de ver cuales son más fuertes que otras.

Lema 2.9. *Si $p, q \in \dot{A}$ son dos proyecciones y $z \in \dot{A}$ es invertible tal que $q = zpz^{-1}$, entonces $p \sim^u q$.*

Demostración: Como $zp = qz$ y tomando el adjunto en esta igualdad tenemos que $z^\star q = pz^\star$. Luego

$$pz^\star z = z^\star qz = z^\star zp.$$

Por lo tanto p conmuta con $z^\star z$. De este modo, considerando $|z|^{-1} = (z^\star z)^{-\frac{1}{2}}$, donde $|z|$ denota el operador valor absoluto de z, podemos definir el operador unitario $u := z|z|^{-1}$, que se obtiene por la descomposición polar de z. Luego

$$upu^\star = z|z|^{-1}p(|z|^{-1})^\star z^\star = zp|z|^{-1}(|z|^{-1})^\star z^\star = qz|z|^{-1}(z|z|^{-1})^\star = q.$$

Por lo tanto $upu^\star = q$, es decir, $p \sim^u q$.

∎

Proposición 2.18. *Toda simetria $u \in \dot{A}$ es homotopica a la identidad.*

Demostración: Si $u \in \dot{A}$ es una simetria, por definición tendremos que $u^\star = u$ y $u^\star u = uu^\star = 1$. Luego $(1-u)^\star = 1 - u^\star = 1 - u$, es decir $1-u$ es auto-adjunto. Por lo tanto, como la función

$$f(z) = e^{\frac{i\pi z}{2}}$$

es continua para todo $z \in \mathbb{C}$ y $t(1-u)$ es auto-adjunto para todo $t \in [0,1]$, podemos definir el elemento

$$u_t = e^{\frac{i\pi t(1-u)}{2}} \in \dot{A}.$$

Que satisface $u_0 = 1$. Además como

$$(1-u)^2 = 1 - 2u + u^2 = 2 - 2u = 2(1-u)$$

inductivamente, se puede probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(1-u)^n = 2^{n-1}(1-u)$. Así

$$
\begin{aligned}
u_1 = e^{\frac{1\pi(1-u)}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi(1-u))^n}{2^n n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n(1-u)}{2n!} \\
&= 1 + \frac{1-u}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!} \\
&= 1 + \frac{1-u}{2}(e^{i\pi} - 1) \\
&= 1 + \frac{1-u}{2}(-2) \\
&= u.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como la exponencial es continua en norma, $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ es un camino continuo en la topología de la norma desde u hasta 1.

■

Es importante destacar que en esta proposición No hemos mostrado que toda simetria es homotopicamente equivalente a la identidad, pues el camino no es de proyecciones.

Observación 2.4.9. *Como toda proyección $p \in \dot{A}$ satisface $p^\star = p = p^2$, en particular $\sigma(p) \subset \mathbb{R}^+$ pues*

$$\sigma(p) \subset \mathbb{R} \quad y \quad \sigma(p) = \sigma(p^2) = \{t^2 : t \in \sigma(p)\}.$$

Por lo tanto $p \in A^+$, en otras palabras $0 \leq p$. Además como $1 - p$ también es una proyección, ya que

$$(1-p)^2 = 1 - 2p + p^2 = 1 - p \quad y \quad (1-p)^\star = 1 - p^\star = 1 - p.$$

Tenemos que $0 \leq 1-p$. De esto, si p es una proyección entonces $0 \leq p \leq 1$. También es importante destacar, que si p es una proyección entonces $2p-1$ es una simetria. Ya que

$$
\begin{aligned}
(2p-1)^\star &= 2p^\star - 1 = 2p - 1. \\
(2p-1)(2p-1)^\star &= (2p-1)^2 = 4p^2 - 4p + 1 = 1. \\
(2p-1)^\star(2p-1) &= (2p-1)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Proposición 2.19. *Si $p, q \in A$ son proyecciones tales que $\|p - q\| < 1$, entonces p es homotopica a q.*

Demostración: Definamos dos simetrias en $\dot{A}$ por $v_p := 2p - 1$ y $v_q := 2q - 1$. Sea $z_q := v_q v_p + 1$, luego

$$qz_q = q(2q-1)(2p-1) + q = 2qp = (2q-1)(2p-1)p + p = z_q p. \tag{2.8}$$

Como $\|p - q\| < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \|z_q - 2\| &= \|v_q v_p - 1\| = \|v_q(v_p - v_q)\| \\ &\leq \|v_q\|\|v_p - v_q\| = \|v_p - v_q\| = \|2p - 2q\| < 2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por lo tanto, de la Ecuación 2.9 y el criterio de Carl Neumann, se tiene que z_q es invertible. Así, por la Ecuación 2.8 podemos considerar $q = z_q p z_q^{-1}$ y definiendo $u_q = z_q|z_q|^{-1}$ tendremos, por el Lema 2.9, que $q = u_q p u_q^\star$. Observando que

$$\|z_{q_1} - z_{q_2}\| = \|v_{q_1} v_p - v_{q_2} v_p\| \leq \|v_{q_1} - v_{q_2}\|\|v_p\| = 2\|q_1 - q_2\|,$$

es claro que la función que mapea $q \mapsto z_q$ es continua. También la función que mapea $z \mapsto z|z|^{-1}$ es continua en $GL(\dot{A})$, pues se puede interpretar como un operador acotado. Luego sigue de la Ecuación 2.9 que la función que mapea $q \mapsto u_q$ esta bien definida y es continua en el conjunto

$$\{q \in A : q = q^\star = q^2 \text{ y } \|p - q\| < 1\}.$$

Mas aun, definiendo $z_{t,q} := tz_q + 2 - 2t$, tenemos que para todo $t \in [0, 1]$ se satisface

$$\|z_{t,q} - 2\| = t\|z_q - 2\| < 2.$$

Por lo tanto $\{z_{t,q}\}_{t\in[0,1]}$ es una homotopía de invertibles para cada q cercano a p, es decir para todo q con $\|p - q\| < 1$. Finalmente, esto nos da un camino de unitarios continuo en norma $\{u_{t,q}\}_{t\in[0,1]}$, entre los elementos $1 = u_{0,q}$ y $u_q = u_{1,q}$. Por lo tanto $\{u_{t,q} p u_{t,q}^\star\}_{t\in[0,1]}$ es una homotopía de proyecciones entre p y q, es decir $p \sim^h q$.

■

Corolario 2.8. *Si $p, q \in \dot{A}$ son dos proyecciones, entonces p es homotopicamente equivalente a q si y solo si existe una homotopía $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ de unitarios tal que $u_0 = 1$ y $p = u_1 q u_1^\star$.*

Demostración: Supongamos que existe una homotopía $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ de unitarios tal que $u_0 = 1$ y $p = u_1 q u_1^\star$. Como la función que mapea $u_t \to u_t q u_t^\star$ es continua y para todo $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$(u_t q u_t^\star)(u_t q u_t^\star) = u_t q u_t^\star$$

y

$$(u_t q u_t^\star)^\star = u_t q u_t^\star.$$

Por lo tanto $\{u_t q u_t^\star\}_{t\in[0,1]}$ es un camino continuo en norma de proyecciones. Además satisface

$$u_0 q u_0^\star = q \quad \text{y} \quad u_1 q u_1^\star = p.$$

Por lo tanto $p \sim^h q$.
Reciprocamente, supongamos que $p \sim^h q$. Sea $\{p_t\}_{t\in[0,1]}$ tal camino. Si para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $\|p - p_t\| < 1$, entonces la Proposición 2.19 da un camino de unitarios continuo en norma $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$, con $u_0 = 1$ y $p_t = u_t p u_t^\star$ para todo $t \in [0,1]$.
En el caso general, mediante la continuidad del camino $\{p_t\}_{t\in[0,1]}$ y la compacidad del intervalo $[0,1]$, podemos subdividir el camino $\{p_t\}_{t\in[0,1]}$ en un número finito de partes

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1,$$

tales que para todo $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ y todo $t \in [t_k, t_{k+1}]$ se cumpla

$$\|p_t - p_{t_k}\| < 1.$$

Así

$$p = p_0 \sim^h p_{t_1} \sim^h \cdots \sim^h p_{t_{n-1}} \sim^h p_1 = q.$$

Luego para cada sección $[t_k, t_{k+1}]$, por la Proposición 2.19, tendremos un camino de unitarios $\{u_{k,t}\}_{t\in[t_k,t_{k+1}]}$ tal que $u_{t_k} = 1$ y para todo $t \in [t_k, t_{k+1}]$ se cumple $p_t = u_t p_{t_k} u_t^\star$. De este modo concatenando estos caminos tendremos un camino de unitarios $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ tales que

$$u_0 = 1 \quad \text{y} \quad p_t = u_t p u_t^\star.$$

■

Proposición 2.20. *Si $p, q \in \dot{A}$ son dos proyecciones, entonces*

$$p \sim^h q \textit{ implica } p \sim^u q \textit{ implica } p \sim q.$$

Demostración: Si $p \sim^h q$, entonces por el Corolario 2.8 existe un camino $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ de unitarios tal que $\{u_t q u_t^\star\}_{t\in[0,1]}$ es una homotopía de proyecciones entre 1 y $p = u_1 q u_1^\star$. Por otra parte si $p = u^\star q u$, entonces qu es una isometria parcial pues $(qu)^\star qu = u^\star qqu = u^\star qu = p$. Además $qu(qu)^\star = quu^\star q = q$. Por lo tanto $p \sim q$.

■

Proposición 2.21. *Si $p, q \in A$ son dos proyecciones entonces*

$$p \sim q \textit{ implica } \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en $M_2(A)$. Y

$$p \sim^u q \textit{ implica } \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en $M_2(A)$.

Demostración:

- Si $p \sim q$ y $v \in A$ es una isometria parcial tal que $p = v^\star v$ y $q = vv^\star$, definamos
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^\star \end{pmatrix} \in M_2(\dot{A}).$$
Observemos que u es unitario,
$$\begin{aligned} u^\star u &= \begin{pmatrix} v^\star & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^\star \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^\star v + (1-p)^2 & v^\star(1-q) + (1-p)v^\star \\ (1-q)v + v(1-p) & (1-q)^2 + vv^\star \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Como por la Observación 2.4.8 tenemos que
$$v^\star - v^\star q + v^\star - pv^\star = 0 = v - qv + v - vp.$$
Se tiene
$$u^\star u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Análogamente, se tiene
$$uu^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Y claramente
$$u\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}u^\star = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Por lo tanto $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$.
- Si suponemos que $p \sim^u q$, digamos $q = upu^\star$ para algún $u \in \dot{A}$ unitario, entonces escogamos el camino continuo $\{w_t\}_{t\in[0,1]} \subset M_2(\dot{A})$ de unitarios, definido para $t \in [0,1]$ por
$$w_t = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\frac{t\pi}{2}) & -\sin(\frac{t\pi}{2}) \\ \sin(\frac{t\pi}{2}) & \cos(\frac{t\pi}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\frac{t\pi}{2}) & \sin(\frac{t\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{t\pi}{2}) & \cos(\frac{t\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$
Observemos que
$$\begin{aligned} w_0 &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^\star \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & -u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^\star & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uu^\star & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, $p_t := w_t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_t^\star$ es una proyección para todo $t \in [0,1]$, y claramente

$$p_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^\star & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$.

■

2.4.6. La $C^\star$-álgebra límite directo. A continuación daremos un ejemplo de una $C^\star$-álgebra que nos será de mucha utilidad en la sección siguiente. Comenzaremos dando unas definiciones previas con respecto a categorías. Para mayor información sobre categorías y límites inductivos recomendamos ver [11].

Definición 2.4.16. Una **categoría** $\mathfrak{C}$ es una clase de objetos, $OBJ(\mathfrak{C})$, junto con una clase de conjuntos disjuntos dos a dos que denotamos $MOR(\mathfrak{C})$ con las siguientes propiedades. Para cada par $A, B \in OBJ(\mathfrak{C})$ existe un conjunto $mor(A, B) \in MOR(\mathfrak{C})$ de elementos llamados morfismos de A en B. Un elemento $f \in mor(A, B)$ es denotado por $f : A \to B$. Además Para cada triple $A, B, C \in OBJ(\mathfrak{C})$ debe existir una función

$$\begin{array}{ccccc} mor(B,C) & \times & mor(A,B) & \to & mor(A,C) \\ f : B \to C & \times & g : A \to B & \to & f \circ g : A \to C \end{array}$$

que satisface los siguientes axiomas

Asociatividad: Si $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ son morfismos en $\mathfrak{C}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Identidad: Para cada $B \in OBJ(\mathfrak{C})$ existe un morfismo $\mathbb{I}_B : B \to B$ tal que para cada par $A, C \in OBJ(\mathfrak{C})$ y todo par de morfismos $f : A \to B, g : B \to C$ tenemos que

$$\mathbb{I}_B \circ f = f \quad \text{y} \quad g \circ \mathbb{I}_B = g.$$

Ejemplo 2.4.7. *Los ejemplos clasicos de categorías son*

- *La categoría $\mathfrak{C}$ de los conjuntos. Donde $OBJ(\mathfrak{C})$ es la clase de los conjuntos y $MOR(\mathfrak{C})$ son las funciones entre conjuntos.*
- *La categoría $\mathfrak{G}$ de los grupos. Donde $OBJ(\mathfrak{G})$ es la clase de los grupos y $MOR(\mathfrak{G})$ son las homomorfismoss de grupos.*
- *La categoría $\mathfrak{A}$ de los anillos. Donde $OBJ(\mathfrak{A})$ es la clase de los anillos y $MOR(\mathfrak{A})$ son las homomorfismos de anillos.*

Definición 2.4.17. Sea I un conjunto totalmente ordenado y $\mathfrak{C}$ una categoría. Un **sistema directo** en $\mathfrak{C}$ es una familia $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$, tal que para todo $i \in I$ tenemos que $A_i \in OBJ(\mathfrak{C})$ y $\phi_{i,j} \in mor(A_i, A_j)$ es un morfismo satisfaciendo que para todos $i, j, k \in I$ con $i \leq j \leq k$ se cumple

$$\phi_{i,k} = \phi_{j,k} \circ \phi_{i,j}.$$

Para ilustrar esta definición consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.8. *Sea $\mathfrak{A}$ la categoría de los anillos. Fijemos un objeto $A \in OBJ(\mathfrak{A})$. Claramente para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que el conjunto de matrices cuadradas con coeficientes en A de orden n, $M_n(A)$, es un anillo. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $M_n(A) \in OBJ(\mathfrak{A})$. Para dos índices $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$ definamos*

$$\begin{array}{rccc} \phi_{n,m} & : & M_n(A) & \rightarrow & M_m(A) \\ & & a & \mapsto & \left(\begin{array}{cc} a & \tilde{0} \\ \tilde{0}^t & 0_{m-n} \end{array} \right) \end{array}$$

donde $\tilde{0} \in M_{n\times m-n}(A)$ y $0_{m-n} \in M_{m-n}(A)$ son matrices nulas. Es trivial probar que $\{M_n(A), \phi_{n,m}\}_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n\leq m}}$ es un sistema directo.

Definición 2.4.18. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y I un conjunto totalmente ordenado. Sea $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ un sistema directo en $\mathfrak{C}$. Dado $A \in OBJ(\mathfrak{C})$ y una colección $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset MOR(\mathfrak{C})$ tal que para todo $i \in I$, $\varphi_i : A_i \rightarrow A$. Diremos que el par $(A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ es un **límite directo** del sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$, si satisface las siguientes propiedades.

1. Para todo par de índices $i, j \in I$ con $i \leq j$ tenemos $\varphi_j \circ \phi_{i,j} = \varphi_i$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\phi_{i,j}"'] & A \\ A_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

2. Si $Y \in OBJ(\mathfrak{C})$ y $\{\psi_i\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos, con $\psi_i \in mor(A_i, Y)$. Satisfaciendo que para todo $i, j \in I$ con $i \leq j$ se tiene

$\psi_j \circ \phi_{i,j} = \psi_i$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\phi_{i,j}"'] & Y \\ A_j \arrow[ur, "\psi_j"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces existe un unico morfismo $\psi \in mor(A, Y)$ tal que para todo $i \in I$ se cumple $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & Y \\ A \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Usualmente denotaremos por $\varinjlim \{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$, o simplemente por $\varinjlim A_i$ cuando no haya confusión, a un límite directo $(A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ del sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$.

Observación 2.4.10.

- *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría arbitraria, el límite directo de un sistema directo puede no existir.*
- *En caso de que el límite directo exista, este puede no ser unico. Si $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ es un sistema directo tal que $(A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ y $(Y, \{\psi_i\}_{i\in I})$ son dos límites directos. La Propiedad 2 de la Definición 2.4.18 implica que para todo $i \in I$ se tiene que $\psi \circ \varphi \circ \psi_i = \psi_i$ y $\varphi \circ \psi \circ \varphi_i = \varphi_i$. En particular, existe un morfismo biyectivo entre A e Y.*

Ejemplo 2.4.9. *Sea $\mathfrak{C}$ la categoría cuyos objetos son las *-álgebras y donde los morfismos son los *-homomorfismo entre *-álgebras. Afirmamos que en esta categoría existen los límites directos. En efecto, sea $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ un sistema directo. Consideremos el conjunto*

$$A_0 := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i : \text{ existe } i_0 \in I \text{ tal que para cualquier par} \right.$$
$$\left. \text{de índices } j \geq i \geq i_0 \text{ se tiene } \phi_{i,j}(a_i) = a_j \right\}.$$

Definamos una relación de equivalencia en A_0 de la siguiente forma

$$(a_i)_{i\in I} \approx (b_i)_{i\in I} \text{ si y sólo si existe } i_0 \in I \text{ tal que } a_i = b_i \text{ para todo } i \geq i_0.$$

Es claro que el conjunto $A := A_0/\approx$ es una *-álgebra con las operaciones suma, multiplicasión e involución dadas coordenada a coordenada. Para cada $(a_i)_{i\in I} \in A_0$

denotaremos por $[(a_i)_{i\in I}]$ su clase de equivalencia en A. Denotemos por $0_i \in A_i$ el neutro aditivo de la $\star$-álgebra A_i. Para cada $i \in I$ definamos un morfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i & : & A_i & \to & A \\ & & a & \mapsto & [(\varphi_i(a)_j)_{j\in I}] \end{array}$$

en $MOR(A_i, A)$ por

$$\varphi_i(a)_j = \begin{cases} 0_j & si\ j < i; \\ \phi_{i,j}(a) & si\ j \geq i. \end{cases}$$

Probaremos que $\{A, \{\varphi_i\}_{i\in I}\}$ es el límite directo del sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I \\ i\leq j}}$.

1. *Sean $i, j \in I$ con $i \leq j$. Consideremos $a \in A_i$ y denotemos por $\varphi_i(a) = [(a_k)_{k\in I}]$. Por definición $\phi_{i,j}(a) = a_j \in A_j$ y $\varphi_j(a_j) = [(c_k)_{k\in I}]$ donde*

$$c_k = \begin{cases} 0_k & si\ k < j; \\ a_k & si\ k \geq j. \end{cases}$$

   Así, en vista de que para todo $k \geq j$ tenemos que $c_k = a_k$, se concluye que $(c_k)_{k\in I} \approx (a_k)_{k\in I}$. Por lo tanto concluimos que para todo par de índices $i, j \in I$ tal que $i \leq j$, tenemos que para todo $a \in A_i$ se cumple $\varphi_i(a) = [(a_k)_{k\in I}] = [(c_k)_{k\in I}] = \varphi_j \circ \phi_{i,j}(a)$. Es decir $\varphi_i = \varphi_j \circ \phi_{i,j}$.
2. *Sean $Y \in OBJ(\mathfrak{C})$ y $\{\psi_i : A_i \to Y\}_{i\in I} \subset MOR(\mathfrak{C})$ tales que para todo par de índices $i, j \in I$, con $i \leq j$ se cumple $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{i,j}$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\phi_{i,j}"'] & Y \\ A_j \arrow[ur, "\psi_j"'] & \end{tikzcd}$$

   Dado $a = [(a_i)_{i\in I}] \in A$ por definición existe $i_a \in I$ tal que para todo par de índices $i, j \in I$ con $i_a \leq i \leq j$ se tiene $\phi_{i,j}(a_i) = a_j$. Así por hipótesis tenemos que para todo $i \in I$ con $i_a \leq i$ se cumple

$$\psi_i(a_i) = \psi_i(\phi_{i_a,i}(a_{i_a})) = \psi_{i_a}(a_{i_a}).$$

   Por lo que esta bien definida la función

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & A & \to & Y \\ & & [(a_i)_{i\in I}] & \mapsto & \psi_{i_a}(a_{i_a}). \end{array}$$

   Además, claramente para todo $i \in I$ tenemos que si $a \in A_i$, entonces $\psi(\varphi_i(a)) = \psi([(\varphi_i(a)_j)_{j\in I}]) = \psi_i(a)$. Por lo tanto $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$.

De 1 y 2 concluimos que $(A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ es un límite directo del sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I \\ i\leq j}}$ en la categoría $\mathfrak{C}$, es decir $(A, \{\varphi_i\}_{i\in I}) = \varinjlim A_i$. En particular, los límites directos existen en la categoría $\mathfrak{C}$.

De este ejemplo surge una pregunta natural, existen los límites directos en la categoría $\mathfrak{C}^\star$ de la $C^\star$-álgebras?
Es natural pensar que el candidato a límite directo en la categoría $\mathfrak{C}^\star$ es el mismo que en la categoría $\mathfrak{C}$ de las *-álgebras. Si esto fuese cierto, deberíamos dotar a el límite directo en la categoría $\mathfrak{C}$ de una norma con la cual este fuera completo y satisfaciese la Ecuaciones 2.3 y 2.4 de la Definición 2.4.4. Existe un proceso natural para hacer esto ultimo. Si $(a_i)_{i\in I} \in A_0$, entonces existe un índice $i_0 \in I$ tal que para todo $i \geq i_0$ tenemos que $a_i = \phi_{i_0,i}(a_{i_0})$. Luego denotando $\|\cdot\|_i$ la norma en la $C^\star$-álgebra A_i tenemos, por la Proposición 2.5, que para todo $i \geq i_0$ ocurre $\|a_i\|_i \leq \|a_{i_0}\|_{i_0}$. Por lo tanto esta bien definida la función $\alpha : A_0 \to [0,\infty)$ definida por

$$\alpha((a_i)_{i\in I}) := \inf_{j\geq i_0} \sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k\}. \tag{2.10}$$

Observación 2.4.11. *Sea $(a_i)_{i\in I} \in A_0$. Es importante destacar, en vista de que para $i_0 \leq i \leq j$ se tiene $\|a_i\|_i \leq \|a_j\|_j$, que podemos escribir*

$$\alpha((a_i)_{i\in I}) = \inf_{k\geq i_0}\{\|a_k\|_k\}.$$

Así, como $(a_i)^\star_{i\in I} = (a_i^\star)_{i\in I}$ claramente tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha((a_i)_{i\in I}(a_i)^\star_{i\in I}) &= \alpha((a_i a_i^\star)_{i\in I} \\
&:= \inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|a_k a_k^\star\|_k\} \\
&= \inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k^2\} \\
&= \left(\inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k\}\right)^2 \\
&= (\alpha((a_i)_{i\in I}))^2.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\alpha((a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I}) &:= \inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|a_k b_k\|_k\} \\
&\leq \inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k\|b_k\|_k\} \\
&\leq \inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k\}\inf_{j\geq i_0}\sup_{k\geq j}\{\|b_k\|_k\} \\
&= \alpha((a_i)_{i\in I})\alpha((b_i)_{i\in I}).
\end{aligned}$$

También α satisface la desigualdad triangular, pues

$$\begin{array}{rcl}\alpha((a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I}) & := & \inf_{j\geq i_0} \sup_{k\geq j}\{\|a_k + b_k\|_k\} \\ & \leq & \inf_{j\geq i_0} \sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k + \|b_k\|_k\} \\ & \leq & \inf_{j\geq i_0} \sup_{k\geq j}\{\|a_k\|_k\} + \inf_{j\geq i_0} \sup_{k\geq j}\{\|b_k\|_k\} \\ & = & \alpha((a_i)_{i\in I}) + \alpha((b_i)_{i\in I}).\end{array}$$

Por lo tanto esta función satisface las Ecuaciones 2.3 y 2.4 de la Definición 2.4.4. Pero no es una norma en general, ya que podríamos tener un $(a_i)_{i\in I} \in A_0$ tal que para todo índice $i \in I$ tengamos $a_i \neq 0$ y $\|a_i\| \to 0$. Como lo ilustra el siguiente.

Ejemplo 2.4.10. *Sea I un conjunto totalmente ordenado. Para cada $i \in I$ consideremos $A_i = l_2(\mathbb{C})$ y $\phi_{i,j} : A_i \to A_j$ definida por*

$$(\phi_{i,j}((z_k)_{k\in\mathbb{N}}))_r = \begin{cases} 0_r & si\ r \leq j; \\ z_r & si\ r > j. \end{cases}$$

Si $(A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ es un límite directo, en la categoría de las *-álgebras, para el sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$. Dado un elemento $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, claramente se tiene que para todo par de índices $i, j \in I$ con i fijo, e $i \leq j$. El elemento $(a_j)_{j\in I} = (\phi_{i,j}((z_k)_{k\in\mathbb{N}})_j)_{j\in I}$ esta en A y satisface que para todo $j \in I$ con $i \leq j$, se cumple $a_j = \phi_{i,j}((z_k)_{k\in\mathbb{N}}) \neq 0_j$ y $\|a_j\|_j \to 0$.

En otras palabras α es una semi norma en el conjunto A_0. Además por la relación de equivalencia que hemos puesto en A_0 es claro que si $(a_i)_{i\in I} \approx (b_i)_{i\in I}$, entonces $\alpha((a_i)_{i\in I}) = \alpha((b_i)_{i\in I})$. Por lo tanto α se extiende a una semi norma en el conjunto $\varinjlim\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$.

Es importante destacar que si para todo par de índices $i, j \in I$ con $i \leq j$, el *-homomorfismo $\phi_{i,j}$ es inyectivo, entonces para $(a_i)_{i\in I}$ la sucesión $(\|a_i\|_i)_{i\in I}$ es eventualmente constante y por lo tanto α es una norma. Esto se debe a la Proposición 2.12, sin embargo en tal caso, el conjunto $\varinjlim\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ dotado de esta norma puede no ser completo como lo ilustra el siguiente.

Ejemplo 2.4.11. *Sea A una $C^\star$-álgebra. Dado un entero $n \in \mathbb{N}$ consideremos la $C^\star$-álgebra $M_n(A)$, de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en A. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ definamos el *-homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc}\phi_{n,m} & : & M_n(A) & \to & M_m(A) \\ & & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & \tilde{0} \\ \tilde{0}^t & 0_{m-n} \end{pmatrix}\end{array}$$

donde $\tilde{0} \in M_{n\times m-n}(A)$ y $0_{m-n} \in M_{m-n}(A)$ son matrices nulas. Es claro que $\{M_n(A), \phi_{n,m}\}_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n\leq m}}$ es un sistema directo. Luego tenemos, en la categoría $\mathfrak{C}$ de las

*-álgebras, que

$$M_\infty(A) := \Big\{(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : a_{i,j} \in A, \textit{son todos nulos salvo un}$$
$$\textit{número finito de pares } (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\Big\}.$$

Junto con los morfismos $\{\varphi_n : M_n(A) \to M_\infty(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidos para un $n \in \mathbb{N}$ y $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ por

$$(\varphi_n(B))_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \textit{si } i \leq n \textit{ y } j \leq n; \\ 0 & \textit{si } i > n \textit{ o } j > n. \end{cases}$$

forman un límite directo del sistema directo $\{M_n(A), \phi_{n,m}\}_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n\leq m}}$. En la categoría $\mathfrak{C}$ este límite directo será denotado por $\varinjlim M_n(A)$. En este caso para todo par de índices $i, j \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $i \leq j$ los *-homomorfismo $\phi_{i,j}$ son inyectivos, por lo tanto $(M_\infty(A), \alpha)$ es un espacio normado. Para analizar la completitud de este espacio, consideremos por un momento el caso más trivial, $A = \mathbb{C}$. En este contexto

$$M_\infty(\mathbb{C}) = \Big\{(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : a_{i,j} \in \mathbb{C}, \textit{son todos nulos salvo}$$
$$\textit{un número finito de pares } (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\Big\}.$$

Pero este conjunto dotado con la norma α no es completo, ya que se sabe del análisis funcional que la clausura en norma del conjunto $M_\infty(\mathbb{C})$ son los operadores compactos en el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$. Es decir, que en el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$ existen operadores compactos que no están en el conjunto $M_\infty(\mathbb{C})$. Por ejemplo podemos considerar el operador B actuando en $l_2(\mathbb{N})$ definido por

$$B((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \left(\frac{a_i}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Claramente este operador es compacto pues es acotado y es el límite en norma operador de la sucesión $(B_n : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N}))_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$B_n((a_i)_{i\in\mathbb{N}})_j = \begin{cases} \frac{a_i}{i} & \textit{si } i \leq j; \\ 0 & \textit{si } i > j. \end{cases}$$

Por lo tanto $B \notin M_\infty(\mathbb{C})$ y es un operador conpacto por ser el límite en norma de una sucesión de operadores de rango finito. Concluimos que $M_\infty(\mathbb{C})$ no es completo con respecto a la norma α. Así lo unico que le falta a $M_\infty(A)$ para ser una $C^\star$-álgebra, es que sea completa con respecto a la norma α. Luego la $C^\star$-álgebra $\overline{M_\infty(A)}$, donde la clausura es con respecto a la norma α. Junto con los morfismos $\{\varphi_n : M_n(A) \to \overline{M_\infty(A)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que han sido extendidos por continuidad. Forman un límite directo en la categoría de las $C^\star$-álgebras y los *-homomorfismo.
Por analogía con los operadores de rango finito que actúan en un espacio de Hilbert, H, y los operadores compactos actuando en H. La $C^\star$-álgebra $\overline{M_\infty(A)}$ la denotaremos por $A_\infty(A)$.

Esto responde nuestra pregunta, pues $\varinjlim\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ es una *-álgebra normada pero no completa, cuando los morfismos $\phi_{i,j}$ son todos inyectivos.

Como esta *-álgebra satisface las Propiedades 2.3 y 2.4 de la Definición 2.4.4 solo le basta ser completa para convertirse en una $C^\star$-álgebra. Así podemos establecer la siguiente.

Proposición 2.22. *Sea $\mathfrak{C}^\star$ la categoría en donde los objetos son $C^\star$-álgebras y los morfismos son los *-homomorfismos entre $C^\star$-álgebras. Si $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ es un sistema directo en esta categoría, entonces existe el límite directo $\varinjlim A_i$.*

Demostración: En vista del Ejemplo 2.4.9, en la categoría de las *-álgebras existe el límite directo $\varinjlim A_i$ de el sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$. Además, cuando todos los *-homomorfismos $\phi_{i,j}$ son inyectivos, este es un espacio normado y satisface las Ecuaciones 2.4, 2.3 de la Definición 2.4.4 con la norma definida en la Ecuación 2.10. Así concluimos que

$$\overline{\varinjlim \{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}}$$

es el límite directo en la categoría $\mathfrak{C}^\star$ del sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$. Si para algún par de índices $i, j \in I$ con $i \leq j$, el *-homomorfismo $\phi_{i,j}$ no es inyectivo, entonces α es solo una semi norma del límite directo $\varinjlim A_i$ en la categoría $\mathfrak{C}$. Definamos

$$N_\alpha := \{x \in \varinjlim A_i : \alpha(x) = 0\}.$$

Así α es una norma en la *-álgebra cociente

$$\left(\varinjlim \{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}\right)/N_\alpha.$$

Concluimos que la completación de la *-álgebra $\varinjlim \{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}/N_\alpha$ con respecto a la norma definida en la Ecuación 2.10 es el límite directo del sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$, en la categoría $\mathfrak{C}^\star$.

■

La $C^\star$-álgebra $A_\infty(A)$ será de mucha utilidad para definir el grupo $\mathbf{K}_0$ asociado a una $C^\star$-álgebra A.

2.5. K-teoría de $C^\star$-álgebras. La **K**-teoría fue propuesta inicialmente por Alexander Grothendieck en el año 1957. Grothendieck utilizó principalmente la **K**-teoría para formular un resultado conocido hoy en día como el **teorema de Grothendieck-Riemann-Roch**. En los años siguientes, la **K**-teoría se convirtió en una herramienta fundamental en algunas áreas de la matemática, como son la geometría algebraica, la topología algebraica, teoría de operadores e incluso en física. Si bien en todas estas áreas, se podía utilizar la **K**-teoría para dar solución a algunos problemas, los comportamientos de la **K**-teoría en las distintas áreas son distintos. El caso más emblemático quizás sea en la teoría de operadores. Pues si bien existen una infinidad de grupos en **K**-teoría, al igual que el grupo fundamental o los grupos de homología y cohomología, en la teoría de operadores los grupos de **K**-teoría de orden mayor son todos isomorfos a alguno de los dos primeros. Este resultado se conoce como periodicidad de Bott. A continuación introduciremos brevemente como asociar un grupo conmutativo $\mathbf{K}_0$ a una $C^\star$-álgebra. Este grupo es un invariante por equivalencia de Morita. Además probaremos algunas propiedades de estos grupos que nos ayudaran a hacer más fácil el calculo de algunos de estos grupos. Para ver más información de forma amigable dirigirse al texto [29]. Para conocer más de como asociar uno de estos grupos a una $C^\star$-álgebra de manera detallada dirigirse al texto [5]. Durante toda esta sección denotaremos por A una $C^\star$-álgebra con unidad, a menos que digamos lo contrario. Recordemos que una proyección en A es un elemento $p \in A$ tal que $p^2 = p = p^\star$. En toda esta sección denotaremos por 0_A el neutro aditivo de la $C^\star$-álgebra A y por 0_n el elemento neutro aditivo de la $C^\star$-álgebra $M_n(A)$.

2.5.1. El Monoide V_0. Para construir el grupo $\mathbf{K}_0$ asociado a una $C^\star$-álgebra A comenzaremos asociando a A un monoide $V_0(A)$. Luego definiremos el grupo $\mathbf{K}_0(A)$ por medio de la aplicación de Grothendieck.

Lema 2.10. *Si $p, q \in A$ son dos proyecciones tales que $pq = 0_A$, entonces $qp = 0_A$.*

Demostración: Como

$$\|qp\|^2 = \|(qp)^\star(qp)\| = \|p^\star q^\star(qp)\| = \|pqqp\| = \|pqp\| \leq \|pq\|\|p\| = 0_A.$$

Por lo tanto $\|qp\|^2 = 0_A$, de donde $qp = 0_A$.

■

Debido a este lema podemos, sin ambiguedad, hacer la siguiente definición.

Definición 2.5.1. Dadas proyecciones $p, q \in A$ diremos que estas son **ortogonales** si $pq = 0_A$, y denotaremos $p \perp q$ o $q \perp p$.

Consideremos el conjunto de todas las proyecciones de A

$$P_1(A) = \{p \in A : p^2 = p = p^\star\}.$$

Cuando dos proyecciones $p, q \in P_1(A)$ son ortogonales, en vista de que

$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + q^2 = p + q,$$

y

$$(p+q)^\star = p^\star + q^\star = p + q$$

tenemos que $p + q \in P_1(A)$. Esto nos hace pensar en que podemos dotar a $P_1(A)$ con una estructura de monoide, pero esto no es cierto pues no

podemos definir la suma para todo par de elementos de $P_1(A)$, ya que dependemos de que estos sean ortogonales. Como ejemplo pensemos que A tiene unidad. Luego $1_A \in P_1(A)$ y claramente no existen elementos ortogonales a la identidad, por lo que para $p \in P_1(A)$ no podemos definir $1_A + p$ de tal forma que pertenezca a $P_1(A)$.
Para el conjunto de las $C^\star$-álgebras de matrices $\{M_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ consideremos las inclusiones canonicas cuando $n, m \in \mathbb{N}$ son tales que $n \leq m$

$$\begin{array}{cccc} \phi_{n,m} & : & M_n(A) & \to & M_m(A) \\ & & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & \tilde{0} \\ \tilde{0}^t & 0_{m-n} \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $\tilde{0} \in M_{n\times m-n}(A)$ es la matriz nula.

Consideremos el sistema directo $\{A_i, \phi_{i,j}\}_{\substack{i,j\in I \\ i\leq j}}$ y denotemos por $(A_\infty(A), \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, su límite directo como en el Ejemplo 2.4.11. Además recordemos que por definición $A_\infty(A)$ es la completación de la *-álgebra $M_\infty(A)$.

Definición 2.5.2.

1. Para un elemento $a \in M_\infty(A)$ denotaremos por $a|_n$ el elemento de $M_n(A)$ satisfaciendo que para todo par de elementos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple $(a|_n)_{(i,j)} = a_{(i,j)}$.
2. El **soporte** de un elemento $a \in M_\infty(A)$ es el menor entero $n \geq 1$ tal que para todo par $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfaciendo que $i > n$ o $j > n$ tenemos que $a_{(i,j)} = 0_A$.

Consideremos el conjunto de las proyecciones de la $C^\star$-álgebra $A_\infty(A)$

$$P(A) = \{p \in A_\infty(A) : p^2 = p = p^\star\}. \tag{2.11}$$

El de las de $M_\infty(A)$

$$P_\infty(A) = \{p \in M_\infty(A) : p^2 = p = p^\star\}. \tag{2.12}$$

Y el conjunto de las proyecciones de la $C^\star$-álgebra $M_n(A)$

$$P_n(A) = \{p \in M_n(A) : p^2 = p = p^\star\}.$$

Extendamos la relación de equivalencia por unitarios al conjunto $P_n(A)$ de la siguiente forma. Si $p, q \in P_n(A)$, entonces diremos que $p \sim^u q$ cuando exista $u \in M_n(A)$ unitario tal que $p = u^\star qu$. Análogamente extendamos esta relación de equivalencia al conjunto $P(A)$. Es decir, para $p, q \in P(A)$ diremos que $p \sim^u q$ si existe $u \in A_\infty(A)$ unitario tal que $p = u^\star qu$. Denotemos por $[p]$ la clase de equivalencia de $p \in P(A)$ con respecto a $\sim^u$. En vista de la Proposición 2.21 la relación de equivalencia $\sim^u$ coincide en $P_\infty(A)$, y por lo tanto en $P(A)$, con las de la equivalencia por homotopías y la equivalencia simple de la Definición 2.4.15. Desde ahora en adelante para $p \in P(A)$ denotaremos por $[p]$ la clase de equivalencia de p con respecto a esta equivalencia. Luego simplemente el producto de matrices muestra el siguiente lema.

Observación 2.5.1. *El conjunto $P_\infty(A)$ es denso en $P(A)$.*

Lema 2.11. *Si $p \in A$ es una proyeción, entonces en $M_2(A)$*

$$\begin{pmatrix} p & 0_A \\ 0_A & 0_A \end{pmatrix} \sim^u \begin{pmatrix} 0_A & 0_A \\ 0_A & p \end{pmatrix}.$$

Demostración:

$$\begin{pmatrix} p & 0_A \\ 0_A & 0_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_A & 1_A \\ 1_A & 0_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_A & 0_A \\ 0_A & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_A & 1_A \\ 1_A & 0_A \end{pmatrix}.$$

■

Ahora estamos en condidiones de definir un monoide a partir de la $C^\star$-álgebra A.

Lema 2.12. *Si $p, q \in P(A)$, entonces $p \perp q$.*

Demostración: Si $p, q \in P_\infty(A)$ tienen soportes n_p y n_q respectivamente, entonces sin perdida de generalidad podemos suponer $n_p \leq n_q$. Luego, definiendo $q_n = q|_{n_q}$ y $p_n = p|_{n_q}$ por el Lema 2.11, en $M_{2n}(A)$ tendremos

$$\begin{pmatrix} q_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \sim^u \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & q_n \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$p_{2n}q_{2n} = \begin{pmatrix} p_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & q_n \end{pmatrix} = 0_{2n} \in M_{2n}(A).$$

Es decir p_{2n} y q_{2n} son proyeciones ortogonales en $M_{2n}(A)$. Finalmente, como $pq = \varphi_{2n}(p_{2n}q_{2n}) = 0$ tendremos que $p \perp q$. Luego si $p, q \in P(A)$ existen sucesiónes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $M_\infty(A)$ convegientes a p y q respectivamente. Y por lo anterior tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $p_n, q_n \in M_\infty(A)$ y $p_n \perp q_n$. De donde se concluye que $p \perp q$.

■

De este modo la suma de elementos en $P(A)/\sim^u$ esta bien definida, pues dados $[p], [q] \in P_\infty(A)/\sim^u$ con soportes n_p y n_q respectivamente. Para todo $n \geq \max\{n_p, n_q\}$ tenemos que $p|_n, q|_n \in M_n(A)$ son tales que $\varphi_n(p|_n) = p$ y $\varphi_n(q|_n) = q$, donde $\varphi_n : M_n(A) \to A_\infty$ es el morfismo del Ejemplo 2.4.11. Así definimos la suma en $P_\infty(A)/\sim^u$ por

$$[p] + [q] := \left[\varphi_{2n}\left(\left(\begin{array}{cc} p|_n & 0_n \\ 0_n & q|_n \end{array}\right)\right)\right] = [\varphi_{2n}(DIAG(p|_n, q|_n))].$$

Este suma se puede extender al conjunto $P(A)/\sim^u$. Esto induce la siguiente.

Proposición 2.23. *Si A es una $C^\star$-álgebra con unidad, entonces $P(A)/\sim^u$ es un monoide abeliano con identidad $0 = [0_A]$. Además, si B es una $C^\star$-álgebra y $\beta : A \to B$ es un *-homomorfismo, entonces la función inducida por β;*

$$\begin{array}{rccc} V_0(\beta) & : & P(A)/\sim^u & \to & P(B)/\sim^u \\ & & [(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}] & \mapsto & [(\beta(a_{ij})_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}] \end{array}$$

es un homomorfismo de monoides aditivos y además la correspondencia $A \mapsto P(A)/\sim^u$, $\beta \mapsto V_0(\beta)$ *es un functor covariante de la categoría de las* $C^\star$*-álgebras en la categoría de los monoides abelianos.*

Demostración: Sean $[p],[q],[r] \in P(A)/\sim^u$ con soportes n_p, n_q, n_r respectivamente. Si $n \geq \text{máx}\{n_p, n_q\}$ y $m \geq \text{máx}\{2n, n_r\}$ entonces tendremos que

$$\begin{aligned}([p]+[q])+[r] &= [\varphi_{2m}(DIAG(p|_n, q|_n, \tilde{0}_{m-2n}, r|_m))] \\ &= [\varphi_{2m}(DIAG(p|_n, q|_n, r|_m, \tilde{0}_{m-2n}))] \\ &= [p]+([q]+[r]).\end{aligned}$$

Además claramente $[p]+[0_A] = [p]$. De donde concluimos que $P(A)/\sim^u$ es un monoide con el elemento identidad dado por $0 = [0_A]$.
Sean $[p],[q] \in P(A)/\sim^u$ con soportes n_p y n_q respectivamente. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq \text{máx}\{n_p, n_q\}$, entonces

$$\begin{pmatrix} p|_n & 0_n \\ 0_n & q|_n \end{pmatrix} \sim^u \begin{pmatrix} q|_n & 0_n \\ 0_n & p|_n \end{pmatrix}.$$

De donde se tiene que

$$[p]+[q] = [\varphi_{2n}(DIAG(p|_n, q|_n))] = [\varphi_{2n}(DIAG(q|_n, p|_n))] = [q]+[p].$$

Así concluimos que $P(A)/\sim^u$ es un monoide abeliano.
Consideremos B una $C^\star$-álgebra y un *-homomorfismo de $C^\star$-álgebras $\beta : A \to B$. Sean $[p],[q] \in P(A)/\sim^u$ con soportes n_p y n_q respectivamente. Para $n \geq \text{máx}\{n_p, n_q\}$ y la función inducida

$$\begin{array}{cccc} V_0(\beta) & : & P(A)/\sim^u & \to & P(B)/\sim^u \\ & & [(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}] & \mapsto & [(\beta(a_{ij})_{ij})_{1\leq i,j\leq n}] \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}V_0(\beta)([p]+[q]) &= V_0(\beta)([\varphi_{2n}(DIAG(p|_n, q|_n))]) \\ &= V_0(\beta)([\varphi_{2n}(DIAG((p_{ij})_{i,j=1}^n, (q_{ij})_{i,j=1}^n))]) \\ &= V_0(\beta)([\varphi_{2n}(DIAG((\beta(p_{ij})_{ij})_{i,j=1}^n, (\beta(q_{ij})_{ij})_{i,j=1}^n))]) \\ &= V_0(\beta)([p]) + V_0(\beta)([q]).\end{aligned}$$

Por lo tanto $V_0(\beta)$ es un homomorfismo de monoides. En vista de todo lo que hemos probado, es claro que V_0 es un functor covariante.

■

Definición 2.5.3. Al par $(P(A)/\sim^u, +)$ lo llamaremos el **monoide asociado** a la $C^\star$-álgebra A y lo denotaremos por $V_0(A)$.

Ejemplo 2.5.1. *Hagamos el calculo de* $V_0(A)$ *para los ejemplos canonicos de* $C^\star$*-álgebras.*

1. *Para $A = \mathbb{C}$, todo elemento de $V_0(A)$ es representado por una matriz de proyección con coeficientes reales, pues es autoadjunta. Además las proyecciones en $M_n(A)$ son equivalentes cuando sus imagenes, como subespacios de $\mathbb{C}^n$, tienen la misma dimensión. Así tenemos que*
$$V_0(A) = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
2. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para $A = M_k(\mathbb{C})$, tenemos que $M_n(M_k(\mathbb{C})) \cong M_{nk}(\mathbb{C})$. Luego $M_\infty(M_k(\mathbb{C})) \cong M_\infty(\mathbb{C})$. Así por el argumento del punto anterior se tiene que*
$$V_0(A) = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
3. *Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional y separable. Denotemos por $K(H)$ el espacio de los operadores lineales y compactos sobre H, de este modo $M_n(K(H)) \cong K(H^n) \cong K(H)$. Como para toda proyección en $K(H)$ la dimensión de la imagen es finita, se concluye que*
$$V_0(K(H)) = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2.5.2. El grupo $\mathbf{K}_0(A)$*.* Comenzaremos esta sección dando la definición del grupo $\mathbf{K}_0$ para una $C^\star$-álgebra con unidad, para luego definir el grupo $\mathbf{K}_0$ de una $C^\star$-álgebra general. Observamos que si M es un monoide abeliano y dotamos a $M \times M$ con la suma coordenada a coordenada, entonces podemos definir la siguiente relación

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \text{ si y solo si existe } k \in M, \quad m_1 + n_2 + k = m_2 + n_1 + k.$$

Es claro que esta relación es reflexiva y simétrica, así que solo basta ver que es transitiva. Supongamos que $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ y $(n_1, n_2) \sim (n'_1, n'_2)$, luego existen $k, h \in M$ tales que

$$m_1 + n_2 + k = n_1 + m_2 + k \quad \text{y} \quad n_1 + n'_2 + h = n'_1 + n_2 + h.$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$m_1 + n_2 + k + n_1 + n'_2 + h = n_1 + m_2 + k + n'_1 + n_2 + h.$$

Por la conmutatividad del monoide M y asociando tendemos que

$$m_1 + n'_2 + (k + n_1 + n_2 + h) = n'_1 + m_2 + (k + n_1 + n_2 + h).$$

De donde concluimos que $(m_1, m_2) \sim (n'_1, n'_2)$. Así la relación $\sim$ es una relación de equivalencia. Denotaremos las clases de equivalencia por

$$[(m, n)] = \{(m_1, n_1) : (m, n) \sim (m_1, n_1)\}.$$

Es importante destacar que si $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ y $(m'_1, m'_2) \sim (n'_1, n'_2)$, entonces existe $k, k' \in M$ tal que

$$m_1 + n_2 + k = n_1 + m_2 + k \quad \text{y} \quad m'_1 + n'_2 + k' = n'_1 + m'_2 + k'.$$

Luego sumando estas dos ecuaciones, en vista de que el monoide es abeliano, tenemos que

$$m_1 + m'_1 + n_2 + n'_2 + (k + k') = m_2 + m'_2 + n_1 + n'_1 + (k + k').$$

Por lo tanto $(m_1 + m_1', m_2 + m_2') \sim (n_1 + n_1', n_2 + n_2')$. Así la relación de equivalencia es compatible con la estructura aditiva de $M \times M$. Es decir que

$$[(m,n)] + [m',n'] = [m + m', n + n'].$$

Es fácil ver que dado $h \in M$, el elemento $[(h,h)] = \{(n,n) : n \in M\}$ es un neutro para la suma en $(M \times M)/\sim$. Pues dado $[(m,n)] \in (M \times M)/\sim$ y $h \in M$ tenemos que para cualquier $k \in M$ se cumple

$$(m + h) + n + k = m + (n + h) + k$$

por la conmutatividad del monoide M. Luego

$$[(m,n)] + [(h,h)] = [(m + h, n + h)] = [(m,n)],$$

es decir que el elemento neutro para la suma en $(M \times M)/\sim$ es $[(m,m)]$. También tenemos que para cada $[(m,n)] \in (M \times M)/\sim$ su inverso aditivo es $[(n,m)]$, ya que

$$[(m,n)] + [(n,m)] = [(m + n, m + n)].$$

De todo lo anterior se puede concluir que el conjunto $(M \times M)/\sim$ es un grupo abeliano, ya que el ser abeliano lo hereda de M.

Definición 2.5.4. Si M es un monoide el **Grupo de Grothendieck** asociado a M es el conjunto $(M \times M)/\sim$, que denotaremos por $\mathbf{K}_{00}(M)$.

Ejemplo 2.5.2. *Sea X un espacio topologico de Hausdorff, conexo, localmente compacto y no compacto. Calcularemos el grupo de Grothendieck de la $C^\star$-álgebra $C_0(X)$, es decir las funciones continuas en X que se desvanecen al infinito. Podemos identificar $M_n(C_0(X))$ con $C_0(X, M_n(\mathbb{C}))$. Bajo esta identificación, las proyecciones en la $C^\star$-álgebra $M_n(C_0(X))$ son identificadas con las proyecciones en la $C^\star$-álgebra $C_0(X, M_n(\mathbb{C}))$. Denotemos por $T : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ la traza usual. Luego para una proyección $p \in C_0(X, M_n(\mathbb{C}))$, la función*

$$\begin{array}{rccc} \phi_p & : & X & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & T(p(x)). \end{array}$$

es constante pues X es conexo. Pero la unica función constante en $C_0(X, \mathbb{Z})$ es la función nula, pues X no es compacto. Por lo tanto $\phi_p : X \to M_n(\mathbb{C})$ es la función nula. De donde concluimos que toda proyección en $M_n(C_0(X))$ es nula. Así $K_{00}(V_0(C_0(X))) = \{0\}$.

Es importante destacar que si M_1 y M_2 son monoides abelianos y $\alpha : M_1 \to M_2$ es un homomorfismo entre estos monoides, entonces α se extiende a un homomorfismo entre sus grupos de Grothendieck asociados por;

$$\begin{array}{rcccc} K_0(\alpha) & : & \mathbf{K}_{00}(M_1) & \to & \mathbf{K}_{00}(M_2) \\ & & [(m,n)] & \mapsto & [(\alpha(m), \alpha(n))]. \end{array}$$

Definición 2.5.5. Si A es una $C^\star$-álgebra con unidad, definimos el grupo $\mathbf{K}_0(A) := \mathbf{K}_{00}(V_0(A))$. Donde $V_0(A)$ es el monoide de la Definición 2.5.3. En tal caso denotaremos, para $m, n \in V_0(A)$ la clase de equivalencia $[([m],[n])]$ por $[m] - [n]$.

Ejemplo 2.5.3. *Sea X un espacio de Hausdorff, conexo y compacto. Para $p \in P_n(C(X))$ consideremos la función $\phi_p : X \to \mathbb{C}$ definida por*
$\phi_p(x) = T(p(x))$, donde T denota la traza usual de matrices. Como
$p(x) \in M_n(\mathbb{C})$ es una proyección en $\mathbb{C}^n$, su traza es simplemente la dimensión del subespacio $p(x)\mathbb{C}^n$. Luego, para todo $x \in X$ tenemos que $\phi_p(x) \in \mathbb{N}$. Además, si $(p_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, entonces

$$T(p(x)) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(x),$$

y como todas las funciones p_{ii} son continuas, concluimos que ϕ_p es continua. Por lo tanto $\phi_p \in C(X, \mathbb{N})$, y como X es conexo se tiene que ϕ_p es constante. Denotaremos por $T(p)$ el valor de ϕ_p. De esto concluimos que la función

$$\begin{array}{rccc} Dim & : & V_0(C(X)) & \to & \mathbb{N} \\ & & [p] & \mapsto & T(p) \end{array}$$

esta bien definida. Como la función valuación en x

$$\begin{array}{rccc} \tau_x & : & C(X) & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

es un homomorfismo de $C^\star$-álgebra al igual que la función
$T : C(X, M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$. tenemos por la Proposición 2.23 que

$$\begin{array}{rccc} V_0(\tau_x) & : & V_0(C(X)) & \to & V_0(\mathbb{C}) \\ & & [p] & \mapsto & [p(x)] \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} V_0(T) & : & V_0(C(X)) & \to & \mathbb{N} \\ & & [p] & \mapsto & [T(p)] \end{array}$$

son homomorfismo de monoides aditivos. Así, $Dim = V_0(T) \circ V_0(\tau_x)$ es un homomorfismo de monoides aditivos que se extiende a un homomorfismo de grupos aditivos dado por

$$\begin{array}{rccc} K_0(Dim) & : & \mathbf{K}_0(C(X)) & \to & \mathbf{K}_0(\mathbb{C}) \\ & & [p]-[q] & \mapsto & [(T(p))]-[T(q)]. \end{array}$$

Finalmente como X es compacto, tenemos que la función $\mathbb{1}_X$ es una proyección y $1 = \mathbb{1}_X(x) = K_0(Dim)([\mathbb{1}])$. Por lo tanto $K_0(Dim)$ es un homomorfismo de grupos epiyectivo.

Observación 2.5.2. *Es importante destacar, en el Ejemplo anterior, que si el espacio X no es conexo, entonces la función $\phi_p : X \to \mathbb{C}$ definida por $\phi_p(x) := T(p(x))$ no es constante salvo en sus componentes conexas. En particular, en el ejemplo anterior, si reemplazamos X conexo por X totalmente disconexo habremos construido un epimorfismo*

$$\begin{array}{rccc} K_0(Dim) & : & \mathbf{K}_0(C(X)) & \to & C(X, \mathbf{K}_0(\mathbb{C})) \\ & & [p]-[q] & \mapsto & [(T(p(x)))]-[T(q(x))]. \end{array}$$

En vista de que $[(T(p(x)))] - [T(q(x))] = 0$ *para todo* $x \in X$ *si y solo si para todo* $x \in X$ *se tiene* $[(T(p(x)))] = [T(q(x))]$*, concluimos que si* X *es un espacio compacto, Hausdorff y totalmente disconexo, entonces*

$$\mathbf{K}_0(C(X)) \cong C(X, \mathbb{Z}).$$

Proposición 2.24. *Si* A, B *son* $C^\star$*-álgebras homotopicamente equivalentes, entonces sus grupos* K_0 *son isomorfos. Es decir,* $K_0(A) \cong K_0(B)$*.*

Demostración: Como A y B son homotopicamente equivalentes existen $\varphi : A \to B$ y $\phi : B \to A$ *-homomorfismos tales que $\varphi \circ \phi$ es homotopicamente equivalente a la identidad en B y $\phi \circ \varphi$ es homotopicamente equivalente a la identidad en A. Luego, Existe $H_A : [0,1] \times A \to A$ continua tal que para todo $a \in A$ se cumple $H_A(0, a) = \phi \circ \varphi(a)$ y $H_A(1, a) = a$. Por lo tanto, dado $[p] \in V_0(A)$ tendremos

$$V_0(\phi) \circ V_0(\varphi)([p]) = V_0(\phi)([\varphi(p)]) = [\phi \circ \varphi(p)] = [p].$$

Es decir, $V_0(\phi) \circ V_0(\varphi) = \mathbb{I}_{V_0(A)}$. De donde se concluye que $V_0(\varphi)$ es inyectiva. Análogamente, existe $H_B : [0,1] \times B \to B$ continua tal que para todo $b \in B$ se cumple $H_B(0, b) = \varphi \circ \phi(b)$ y $H_B(1, b) = b$. Por lo tanto, dado $[q] \in V_0(B)$ tendremos

$$V_0(\varphi) \circ V_0(\phi)([q]) = V_0(\varphi)([\phi(q)]) = [\varphi \circ \phi(q)] = [q].$$

Es decir, $V_0(\varphi) \circ V_0(\phi) = \mathbb{I}_{V_0(B)}$. De donde se concluye que $V_0(\varphi)$ es sobreyectiva. Finalmente concluimos que $V_0(A)$ y $V_0(B)$ son monoides isomorfos y por lo tanto $K_0(A) \cong K_0(B)$, con el isomorfismo dado por $K_0(\varphi)$ y su inversa por $K_0(\phi)$.

■

Corolario 2.9. *Si* A *es una* $C^\star$*-álgebra contractible, es decir la función identidad* $\mathbb{I} : A \to A$ *es homotopicamente equivalente a la función nula* $0 : A \to A$*. entonces* $K_0(A) \cong \{0\}$*.*

Demostración: Por la Proposición 2.24, tenemos que el isomorfismo viene dado por $K_0(0)$. Que es el homomorfismo nulo.

■

Ejemplo 2.5.4. *Hagamos el calculo del grupo* $\mathbf{K}_0(A)$ *para algunas* $C^\star$*-álgebras* A*.*

1. *Sea* $A = \mathbb{C}$*. Por el Ejemplo 2.5.1 tenemos que* $V_0(\mathbb{C}) = \mathbb{N} \cup \{0\}$*, de este modo* $\mathbf{K}_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$*.*
2. *Sea* X *un espacio de Hausdorff, compacto y contractible. Luego existe* $x_0 \in X$ *y* $\alpha : [0,1] \times X \to X$ *continua tales que*

   $$\alpha(1, x) = x \text{ y } \alpha(0, x) = x_0.$$

   Definamos para cada $t \in [0,1]$ *un* **-homomorfismo*

   $$\varphi_t : C(X) \to C(X) \quad por \quad \varphi_t(f)(x) = f(\alpha(t, x)).$$

   Claramente $\varphi_0(f)(x) = f(x_0)$*,* $\varphi_1(f)(x) = f(x)$ *y la función* $t \to \varphi_t(f)$ *es continua para cada* $f \in C(X)$*. Esto ultimo muestra que*

φ_0 es homotopica a la función identidad en $C(X)$. Consideremos los *-homomorfismos $\varphi : C(X) \to \mathbb{C}$ y $\psi : \mathbb{C} \to C(X)$ definidos por $\varphi(f) = f(x_0)$ y $\psi(z) = z\mathbb{1}(x)$. De esto modo $\varphi \circ \psi = \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ y $\psi \circ \varphi = \varphi_0$ que es homotopica a $\mathbb{I}_{C(X)}$. En vista de la Proposición 2.24, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}_0(C(X)) \arrow[r, "K_0(Dim)"] \arrow[d, "K_0(\varphi)"'] & \mathbb{Z} \\ \mathbf{K}_0(\mathbb{C}) \arrow[ur, "K_0(T)"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo y $K_0(\varphi), K_0(T)$ son isomorfismos. Por lo tanto $K_0(Dim) : \mathbf{K}_0(C(X)) \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos.

Recordemos que si A es una $C^\star$-álgebra sin unidad entonces existe una $C^\star$-álgebra llamada la unitización A que es un $C^\star$-álgebra con unidad el la cual se embebe A. Además recordemos que la unitización de A, no es más que $\dot{A} = A \oplus \mathbb{C}$ con el producto e involución definidos en las Ecuaciones 2.5 y 2.6 respectivamente y la norma de la Proposición 2.13 así que en particular existe una proyección $\phi : \dot{A} \to \mathbb{C}$. En otras palabras la proyección en la segunda coordenada de $\dot{A} = A \oplus \mathbb{C}$. De este modo, existe $V_0(\phi) : V_0(\dot{A}) \to V_0(\mathbb{C})$ homomorfismo de monoides.

Definición 2.5.6. Si A es una $C^\star$-álgebra sin unidad, entonces definimos el grupo $\mathbf{K}_0(A)$ por;

$$\mathbf{K}_0(A) := \mathcal{NUCLEO}(K_0(\phi) : \mathbf{K}_0(\dot{A}) \to \mathbf{K}_0(\mathbb{C}))$$

donde $K_0(\phi)$ es la extención a los grupos de Grothendieck del homomorfismo de monoides $V_0(\phi) : V_0(\dot{A}) \to V(\mathbb{C})$ descrito en el parrafo anterior.

Como el $\mathbf{K}_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, podemos escribir para una $C^\star$-álgebra sin unidad A,

$$\mathbf{K}_0(A) := \mathcal{NUCLEO}\{K_0(\phi) : \mathbf{K}_0(\dot{A}) \to \mathbb{Z}\}$$

Observación 2.5.3. *Si A es una $C^\star$-álgebra sin unidad, entonces el grupo $K_0(A)$ es un subgrupo del grupo $K_0(\dot{A})$.*

Esta proposición a continuación nos será de mucha utilidad para relacionar las dos $C^\star$-álgebras que asociaremos a un embaldosado.

Proposición 2.25. *Sea A una $C^\star$-álgebra. El *-homomorfismo $\phi_n : A \to M_n(A)$ definido por $\phi_n(a) := DIAG(a, 0)$, induce un isomorfismo*

$$K_0(\phi_n) : K_0(A) \to K_0(M_n(A)).$$

Demostración: Basta mostrar que $V_0(\phi_n) : V_0(A) \to V_0(M_n(A))$ es un isomorfismo. Claramente $V_0(\phi_n)$ es inyectiva. Si consideramos una proyección $(a_{ij}) \in P_\infty(M_n(A))$, claramente existe una proyección $(b_{ij}) \in P_\infty(A)$ tal que $V_0(\phi_n)(b_{ij}) = (a_{ij})$. Concluimos que $V_0(\phi_n)$ es un isomorfismo de monoides que se extiende a un isomorfismo de grupos

$$K_0(\phi_n) : K_0(A) \to K_0(M_n(A)).$$

■

De esto se obtiene, con un poco más de trabajo, el siguiente.

Corolario 2.10. *Si A es una $C^\star$-álgebra, entonces para cualquier espacio de Hilbert H se cumple,* $K_0(A) \cong K_0(A \otimes K(H))$.

Para finalizar esta sección enunciaremos un teorema que relaciona el grupo $\mathbf{K}_0$ asociado a una $C^\star$-álgebra de funciones continuas sobre un espacio compacto, con el grupo de cohomología de este espacio. Para su demostración recomendamos referirse a [14].

Teorema 2.15. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces existe un isomorfismo*

$$\zeta : \mathbf{K}_0(C_0(X)) \otimes \mathbb{Q} \to \oplus_{n \in \mathbb{N}} H^{2n}(X; \mathbb{Q}),$$

donde $H^{2n}(X; \mathbb{Q})$ denota el $2n$-esimo grupo de cohomología del espacio X con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

2.5.3. Trazas. En esta sección introduciremos el concepto de traza en la $\mathbf{K}$-teoría de una $C^\star$-álgebra. Este concepto es fundamental para comprender la conjetura del etiquetamiento de lagunas que tratamos de entender. Consideremos A una $C^\star$-álgebra sin unidad.

Definición 2.5.7. Un funcional $\mathbb{C}$-lineal $\tau : A \to \mathbb{C}$ es llamado **traza** si para todos $x, y \in A$ satisface la propiedad

$$\tau(xy) = \tau(yx).$$

Si en el caso que A tiene unidad τ es además un estado, según la Definición 2.4.12, entonces lo llamaremos **estado tracial** ó **traza normalizada**.

Consideremos la *-álgebra $M_\infty(A)$, definida en el Ejemplo 2.4.11. Sean $x, y \in M_\infty(A)$ con soportes n_x, n_y respectivamente y $n \geq \max\{n_x, n_y\}$. Además supongamos que $x \sim^u y$, luego

$$x|_n = (x_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}, \quad y|_n = (y_{ij})_{0 \leq i,j \leq n} \in M_n(A)$$

son tales que $x|_n \sim^u y|_n$, por lo tanto existe $v = (v_{ij})_{0 \leq i,j \leq n} \in M_n(A)$ isometria parcial tal que $x|_n = vv^\star$ y $y|_n = v^\star v$. Luego

$$\begin{aligned} \tau(x_{ii}) &= \tau\left(\textstyle\sum_{k=1}^n v_{ik} v_{ki}^\star\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \tau(v_{ik} v_{ki}^\star) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \tau(v_{ki}^\star v_{ik}). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\tau(x_{ii}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\tau(v_{ki}^{\star}v_{ik})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\tau(v_{ki}^{\star}v_{ik})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\tau\left(\sum_{i=1}^{n}v_{ki}^{\star}v_{ik}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\tau(y_{kk}).\end{aligned}$$

Podemos extender, por continuidad, esta traza a la $C^{\star}$-álgebra $A_{\infty}(A)$. Luego, por lo anterior, al monoide $V_0(A)$ de la Definición 2.5.3 y por linealidad a $K_0(A)$.

Definición 2.5.8. Sea τ una traza en la $C^{\star}$-álgebra A.

1. Dado $y = (y_{ij})_{0\leq i,j\leq n} \in P_n(A)$ definimos la traza $\tau_n : P_n(A) \to \mathbb{C}$ por
$$\tau_n(y) = \sum_{i=1}^{n}\tau(y_{ii}).$$
2. Dado $[x] \in M_{\infty}(A)$ denotemos su soporte por $n \in \mathbb{N}$. definimos la traza $\tau_{\infty} : M_{\infty}(A) \to \mathbb{C}$ por
$$\tau_{\infty}([x]) = \tau_n(x|_n) = \sum_{i=1}^{n}\tau(x_{ii}).$$
Por continuidad puede ser extendida a $\tau_{\infty} : A_{\infty}(A) \to \mathbb{C}$.
3. Como τ_{∞} es invariante por la relación de equivalencia $\sim^{u}$, podemos extenderla a $V_0(\tau) : V_0(A) \to \mathbb{C}$.

Observación 2.5.4. *De la definición anterior se puede definir una traza en el grupo $K_0(A)$ por linealidad. Para $g \in K_0(A)$ existen $[p],[q] \in V_0(A)$ tales que $g = [p] - [q]$. Así la traza $K_0(\tau) : K_0(A) \to \mathbb{C}$ se define por*
$$K_0(\tau)(g) = V_0(\tau)([p]) - V_0(\tau)([q]).$$
Además si $p \in M_{\infty}(A)$ tiene soporte $n_p \in \mathbb{N}$ y es una proyección, entonces debido a que $p = p^{\star} = p^2$ y $p|_n = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$ tendremos
$$p_{ii} = p_{ii}^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n_p} p_j^{\star}p_j.$$
De donde se tiene que para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ se cumple $p_{ii} \geq 0$, por ser suma de elementos positivos. Por lo tanto $\tau_{\infty}(p) \geq 0$. Concluimos, por continuidad y linealidad, que $V_0(\tau) : V_0(A) \to \mathbb{R}^{+}$ y $K_0(\tau) : K_0(A) \to \mathbb{R}$.

3. $C^\star$-´ .

En esta sección introduciremos dos métodos para construir una $C^\star$-álgebra a partir de un embaldosado. La diferencia principal de estos dos métodos es el espacio inicial en el que trabajaremos. En el primero, que llamaremos caso continuo, construiremos la $C^\star$-álgebra a partir del casco continuo del embaldosado en cuestión. Mientras que en el segundo caso, llamado caso discreto, la construiremos a partir de la transversal del casco continuo. La idea principal de como construir estas $C^\star$-álgebras proviene de las álgebras llamadas **$C^\star$-álgebras productos cruzados**, ver [30]. A pesar de que las $C^\star$-álgebras en el caso continuo y discreto son distintas, se puede probar que son equivalentes en el sentido de Morita, esto implica en particular que sus **K**-teorías son iguales. Para más información ver [15]. Además definiremos una traza (ver Definición 2.5.7) en la $C^\star$-álgebra del caso discreto. Esta traza es parte importante de la función de etiquetaje de lagunas que deseamos construir.

3.1. $C^\star$-álgebra asociada a un embaldosado: Caso Continuo. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de baldosas en $\mathbb{R}^d$ y fijemos un Embaldosado $T_0 \in X_{\mathcal{A}}$ que satisfaga FPC (ver Definición 2.3.14). Denotemos por Ω_{T_0} al casco continuo asociado al embaldosado T_0. Comenzemos nuestra construcción con el espacio vectorial $C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ de las funciones continuas a soporte compacto con valores en $\mathbb{C}$ definidas en $\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d$.

3.1.1. Definición del producto y la involución. Para $f, g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ tomemos $T \in \Omega_{T_0}$, $x \in \mathbb{R}^d$ y definamos el producto e involución en este espacio por

$$f * g(T,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(T,y)g(T-y,x-y)\mathrm{d}y. \tag{3.1}$$

$$f^\star(T,x) = \overline{f}(T-x,-x). \tag{3.2}$$

Puesto que $f, g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$, es claro que $f * g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$. Por lo que el producto esta bien definido. Además es trivial probar que para $a \in \mathbb{C}$ tenemos

- $(f + ag)^\star = f^\star + \overline{a}g^\star$.
- $(f^\star)^\star = f$.

Así que para mostrar que la aplicación $f \to f^\star$ es realmente una involución, basta probar que $(f * g)^\star = g^\star * f^\star$. En efecto, sean $f, g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$,

$T \in \Omega_{T_0}, x \in \mathbb{R}^d$. luego

$$\begin{array}{rcl}
[f * g]^\star(T,x) & = & \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(T,y)g(T-y,x-y)\mathrm{d}y\right)^\star \\
 & = & \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(T-x,y)g(T-x-y,-x-y)\mathrm{d}y\right)} \\
\text{haciendo } z = x+y & & \\
 & = & \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(T-x,-x+z)g(T-z,z)\mathrm{d}z\right)} \\
 & = & \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g}(T-z,z)\overline{f}(T-x,-x+z)\mathrm{d}z \\
 & = & \int_{\mathbb{R}^d} g^\star(T,z)f^\star(T-z,x-z)\mathrm{d}z \\
 & = & g^\star * f^\star(T,x).
\end{array}$$

De donde concluimos que la aplicación $\star$ que hemos definido es una involución.
Pero en general el álgebra $(C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d), +, *)$ no es completa con la norma del supremo y no satisface las Ecuaciones 2.3 y 2.4 de la Definición 2.4.4. Esto nos obliga a definir una nueva norma que satisfaga las condiciones impuestas en la Definición 2.4.4 para lograr nuestro objetivo de construir una $C^\star$-álgebra.

3.1.2. Construcción de la norma. Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$, un embaldosado $T_1 \in \Omega_{T_0}$ y definamos para cada $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ un operador $\lambda_{T_1}(f)$ por

$$\begin{array}{rcccl}
\lambda_{T_1}(f) & : & L^2(\mathbb{R}^d) & \to & L^2(\mathbb{R}^d) \\
 & & \xi & \mapsto & \lambda_{T_1}(f)(\xi).
\end{array}$$

Donde la función $\lambda_{T_1}(f)(\xi)$ esta definida por

$$\lambda_{T_1}(f)(\xi)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(T_1 + x, y)\xi(x-y)\mathrm{d}y.$$

Claramente este operador es lineal y además es acotado ya que si $\|\xi\|_2 = 1$, entonces

$$\|\lambda_{T_1}(f)\xi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(T_1 + x, y)\xi(x-y)\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Luego como la función $y \mapsto f(T_1 + x, y)$ esta en $L^2(\mathbb{R}^d)$ por ser continua a soporte compacto tenemos, utilizando la desigualdad de Hölder, que

$$\begin{aligned}
\|\lambda_{T_1}(f)\xi\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(T_1+x,y)\xi(x-y)\right|\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\|f(T_1+x,\cdot)\|_2^2\|\xi\|_2^2\mathrm{d}x \\
&\leq K\,\text{máx}\left\{|f(T_1+x,y)|^2 : x,y\in\mathbb{R}^d\right\} \\
&\leq K\|f\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

De donde concluimos que la norma operador de $\lambda_{T_1}(f)$ es menor o igual a la norma infinito de f por una constante K que es la medida de lebesgue del soporte de f. Como esta cota no depende del embaldosado T_1, tenemos que para todo $T \in \Omega_{T_0}$ el operador de la forma $\lambda_T(f)$ tiene norma acotada. En otras palabras, para todo $T \in \Omega_{T_0}$ tenemos que $\lambda_T(f) \in B(L^2(\mathbb{R}^d))$.

Lema 3.1. *Si $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, entonces existe $T \in \Omega_{T_0}$ tal que $\|\lambda_T(f)\| \neq 0$*

Demostración: Si $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, entonces existe $(T_1, x_1) \in \Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d$ tal que $f(T_1, x_1) \neq 0$. Además, Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(T, x) \in B_\delta(T_1, x_1)$ se tiene

$$f(T, x) \neq 0.$$

Afirmamos que el operador

$$\lambda_{T_1}(f) : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d),$$

no tiene norma cero. En efecto, definamos $\xi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ por

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -x \in \pi_2\left(B_\delta(T_1, x_1)\right); \\ 0 & \text{si} \quad -x \notin \pi_2\left(B_\delta(T_1, x_1)\right). \end{cases}$$

Luego, la función continua $\lambda_{T_1}(f)\xi$ es tal que

$$\lambda_{T_1}(f)\xi(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(T_1, y)\xi(-y)\mathrm{d}y = \int_{\pi_2(B_\delta(T_1,x_1))} f(T_1, y)\mathrm{d}y \neq 0.$$

De donde concluimos que,

$$\|\lambda_{T_1}(f)\xi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(T_1 + x, y)\xi(x-y)\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \neq 0.$$

Por lo tanto, si $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, entonces $\|\lambda_{T_0}(f)\| > 0$.

■

Esto nos permite definir $\|\cdot\|_\star : C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$ por

$$\|f\|_\star := \sup_{T \in \Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)\|.$$

Claramente $\|\cdot\|_\star$ satisface la desigualdad triangular. Además para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ se tiene

$$\|\alpha f\|_\star = |\alpha| \, \|f\|_\star.$$

Por el Lema 3.1, se sigue que, toda función $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ satisface

$$0 < \sup_{T \in \Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)\| \leq K \|f\|_\infty^2.$$

Concluimos que $\|\cdot\|_\star$ es un norma para el espacio $C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$.

Además para todo $T \in \Omega_{T_0}$ la función $\lambda_T : C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \to B(L^2(\mathbb{R}^d))$ definida por $f \mapsto \lambda_T(f)$ es un homomorfismo de álgebras que satisface

$$\lambda_T(f^\star) = (\lambda_T(f))^\star := \quad \text{operador adjunto de} \quad \lambda_T(f).$$

En efecto, para todo $a \in \mathbb{C}$ y $f, g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ la propiedad

$$\lambda_T(f + ag) = \lambda_T(f) + a\lambda_T(g)$$

es clara. Así, basta mostrar que para todo $f, g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ tenemos

- $\lambda_T(f * g) = \lambda_T(f) \circ \lambda_T(g)$.
- $\lambda_T(f^\star) = (\lambda_T(f))^\star$.

Consideremos $T \in \Omega_{T_0}$ fijo. Sean $f, g \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ y $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Luego

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda_T(f) \circ \lambda_T(g)\xi)(x) & = & \lambda_T(f)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(T + x, y)\xi(x - y)\mathrm{d}y\right) \\
& = & \int_{\mathbb{R}^d} f(T + x, z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(T + x - z, y)\xi(x - z - y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
& = & \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(T + x, z)g(T + x - z, y)\xi(x - z - y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
\text{haciendo } u = z + y & & \\
& = & \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(T + x, z)g(T + x - z, u - z)\xi(x - u)\mathrm{d}u\mathrm{d}z \\
& = & \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(T + x, z)g(T + x - z, u - z)\mathrm{d}z\right)\xi(x - u)\mathrm{d}u \\
& = & \int_{\mathbb{R}^d} (f * g(T + x, u))\,\xi(x - u)\mathrm{d}u \\
& = & (\lambda_T(f * g)\xi)(x).
\end{array}$$

Por lo tanto $\lambda_T(f) \circ \lambda_T(g) = \lambda_T(f * g)$.
Para probar la otra propiedad, considere $f \in C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$ y $\xi, \eta \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Luego

$$\begin{aligned}
\langle \xi(x), (\lambda_T(f^\star)\eta)(x)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \xi(x)\overline{\lambda_T(f^\star)\eta}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \xi(x)\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(T+x-y,-y)\eta(x-y)\mathrm{d}y\Big)}\mathrm{d}x \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \xi(x) f(T+x-y,-y)\overline{\eta}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
\text{haciendo } z = x-y \quad &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(T+z,-y)\xi(z+y)\overline{\eta}(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(T+z,-y)\xi(z+y)\mathrm{d}y\Big)\overline{\eta}(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(T+z,y)\xi(z-y)\mathrm{d}y\Big)\overline{\eta}(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}(\lambda_T(f)\xi)(z)\overline{\eta}(z)\mathrm{d}z \\
&= \langle(\lambda_T(f)\xi)(x), \eta(x)\rangle
\end{aligned}$$

de donde, por la unicidad del operador adjunto, tenemos que

$$(\lambda_T(f))^\star = \lambda_T(f^\star).$$

Con esto hemos concluido que para todo $T \in \Omega_{T_0}$ la función λ_T es un homomorfismo entre las álgebras $C_c(\Omega_{T_0}\times\mathbb{R}^d)$ y $B(L^2(\mathbb{R}^d))$ que satisface la propiedad

$$\lambda_T(f^\star) = (\lambda_T(f))^\star.$$

Denotemos por $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d$ la completación de la álgebra con involución $(C_c(\Omega_{T_0}\times\mathbb{R}^d), +, *, ^\star)$ con respecto a la norma

$$\|f\|_\star := \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)\|.$$

Como la álgebra $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d$ es un álgebra completa con involución solo basta comprobar que satisface las propiedades de la Definición 2.4.4 para concluir que es una $C^\star$-álgebra. En efecto si $f, g \in C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_\star = \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f*g)\| &= \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)\circ\lambda_T(g)\| \\
&\leq \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)\|\,\|\lambda_T(g)\| = \|f\|_\star\,\|g\|_\star.
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\|f^\star * f\|_\star = \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f^\star * f)\| = \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f^\star)\circ\lambda_T(f)\|$$
$$= \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)^\star \circ \lambda_T(f)\| = \sup_{T\in\Omega_{T_0}} \|\lambda_T(f)\|^2 = \|f\|_\star^2.$$

Así concluimos que $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d$ es una $C^\star$-álgebra.

Observación 3.1.1. *Si en la transversal $\Gamma_{T_0} \subset \Omega_{T_0}$ actúa un grupo G, entonces podemos definir de la misma forma que antes la $C^\star$-álgebra $C(\Gamma_{T_0}) \rtimes G$.*

3.2. $C^\star$-álgebra asociada a un embaldosado: Caso Discreto. En el mismo contexto del caso continuo construiremos ahora una $C^\star$-álgebra que denotaremos por A_{T_0}, para $T_0 \in X_{\mathcal{A}}$ satisfaciendo la condición FPC. Denotemos por $\Gamma_{T_0} \subset \Omega_{T_0}$ a la transversal del casco continuo Ω_{T_0} asociado al embaldosado T_0. Definamos el conjunto

$$R = \left\{(T_1, T_2) \in \Gamma_{T_0} \times \Gamma_{T_0} : \text{existe } x \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } T_1 = T_2 + x\right\}.$$

Este induce una relación de equivalencia $\sim_R$, en Γ_{T_0} cuyas clases son simplemente las $\mathbb{R}^d$-órbitas en Γ_{T_0}. En vista de que el conjunto de estas clases $\Psi = \Gamma_{T_0}/\sim_R$ no es un espacio de Hausdorff con la topología cociente, se le llama **espacio no conmutativo** del embaldosado T_0. El matemático frances Alain Connes propone, en su libro [8], que el estudio de espacios topologícos dificiles de tratar, como por ejemplo espacios no localmente compactos, o no Hausdorff, se haga a través del espacio de las funciones continuas definidas sobre este espacio. Inspirados en esto, comenzaremos a construir nuestra álgebra.

Dotemos a R de una distancia. Para $(T_1, T_1 + x_1), (T_2, T_2 + x_2) \in R$, definimos

$$d(T_1, T_1 + x_1), (T_2, T_2 + x_2)) = d(T_1, T_2) + d(T_1 + x_1, T_2 + x_2).$$

Esta función claramente es una distancia.

Llamemos $\mathfrak{T}$ a la topología en R inducida por d. Es decir, la topología generada por las bolas

$$B_d((T, T'), r) = \{(T_1, T_2) \in R : d((T, T'), (T_1, T_2)) < r\}.$$

Observación 3.2.1. *Sea $T \in \Gamma_{T_0}$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Si $\|x - y\|$ es suficientemente pequeña, entonces*

$$d(T + x, T + y) = \|x - y\|.$$

En general el conjunto R no es cerrado. Sin embargo, podemos describir la topología $\mathfrak{T}$ en base a la siguiente.

Proposición 3.1. *La topología $\mathfrak{T}$ esta generada por los conjuntos compactos*

$$U_{M,x,x'} = \{(T, T - (x' - x)) \in R : M - x \subset T\}$$

donde M es un motivo de T_0 y $x, x' \in \mathbb{R}^d$ son tales que existen dos baldosas $a, b \in M$ tales que $x = x(a)$ y $x' = x(b)$.

Demostración: Sea M es un motivo de T_0 y sean $x, x' \in \mathbb{R}^d$ tales que existen dos baldosas $a, b \in M$ tales que $x = x(a)$ y $x' = x(b)$. Basta observar que el conjunto $U_{M,x,x'}$ es la intersección del producto cartesiano de los cilindros C_{M-x} y $C_{M-x'}$ con el conjunto R. Es decir,

$$U_{M,x,x'} = R \cap (C_{M-x} \times C_{M-x'}).$$

Como los conjuntos $\{C_P : P \subset T_0\}$ forman una base de la topología de Γ_{T_0}, ver Proposición 2.11, se concluye que la familia

$$\{U_{M,x(a),x(b)} : M \text{ motivo de } T_0, \text{ y } a, b \in M\}$$

es una base para la topología $\mathfrak{T}$.
Además, $U_{M,x,x'}$ es cerrado pues C_{M-x} y $C_{M-x'}$ son cerrados en la transversal Γ_{T_0}. Por lo tanto $U_{M,x,x'} \subset \Gamma_{T_0} \times \Gamma_{T_0}$ es cerrado, en el conjunto compacto $\Gamma_{T_0} \times \Gamma_{T_0}$. Se concluye que $U_{M,x,x'}$ es compacto.

■

Sean $M \subset T_0$ un motivo y $a, b \in M$ dos baldosas para las cuales denotaremos $x = x(a)$ y $x' = x(b)$. La función característica $e_{M,x,x'} : R \to \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{aligned} e_{M,x,x'}(T, T') &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (T, T') \in U_{M,x,x'}; \\ 0 & \text{si } (T, T') \notin U_{M,x,x'}. \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } M - x \subset T \text{ y } T' = T - (x' - x); \\ 0 & \text{si no.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

es continua y con soporte compacto $U_{M,x,x'}$. Luego como estos conjuntos forman una base de la topología de R tendremos que el conjunto generado por la familia de funciones

$$\mathfrak{F} = \{e_{M,x,x'} : M \subset T_0 \text{ un motivo y } a, b \in M \text{ baldosas tales que } x = x(a), x' = x(b)\}.$$

es denso en $C_c(R)$. Es decir, $SPAN\{\mathfrak{F}\}$ es denso en $C_c(R)$.

3.2.1. Definición del producto y la involución. En el espacio $C_c(R)$ de las funciones continuas de soporte compacto con valores en $\mathbb{C}$ definidas sobre R, definamos un producto e involución por

$$f * g(T_1, T_2) = \sum_{\substack{T' \\ (T_1, T') \in R}} f(T_1, T')g(T', T_2) \tag{3.3}$$

$$f^\star(T_1, T_2) = \overline{f}(T_2, T_1). \tag{3.4}$$

Observación 3.2.2. *Es importante observar que la cantidad de $T' \in \Gamma_{T_0}$ tales que $(T_1, T') \in R$ es a lo más numerable pues solo hay un número numerable de baldosas* *en $T_1 \in \Gamma_{T_0}$ y como f tiene soporte compacto se observa que la suma es finita y se puede escribir en función de las baldosas de T_1 de la forma*

$$f * g(T_1, T_1 + x) = \sum_{a \in T_1} f(T_1, T_1 + x(a)) g(T_1 + x(a), T_1 + x).$$

Claramente la función

$$\begin{array}{cccc} \star & : & C_c(R) & \to & C_c(R) \\ & & f & \mapsto & f^\star \end{array}$$

es lineal conjugada y $(f^\star)^\star = f$, además

$$\begin{aligned} (f * g)^\star(T_1, T_2) = \overline{(f * g)}(T_2, T_1) &= \sum_{\substack{T' \\ (T_2, T') \in R}} \overline{f}(T_2, T')\overline{g}(T', T_1) \\ &= \sum_{\substack{T' \\ (T_2, T') \in R}} g^\star(T_1, T') f^\star(T', T_2). \end{aligned}$$

En vista de que $(T_2, T') \in R$ es lo mismo que decir que $(T_1, T') \in R$, tendremos

$$(f * g)^\star(T_1, T_2) = g^\star * f^\star(T_1, T_2)$$

de donde concluimos que la función * es una involución.
Como es claro que el conjunto $(C_c(R), +)$ es un $\mathbb{C}$-modulo, que además, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo par de elementos $f, g \in C_c(R)$ satisface

$$\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g),$$

concluimos que $(C_c(R), +, *, ^\star)$ es una *-álgebra.

Observación 3.2.3. *La involución en una función del tipo $e_{M,x,x'}$ es de la forma*

$$\begin{aligned} e^\star_{M,x,x'}(T, T') &= e_{M,x,x'}(T', T) \\ &= \begin{cases} 1 & si\ M - x \subset T' \quad y \quad T = T' - (x' - x); \\ 0 & si\ no. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & si\ M - x \subset T' \quad y \quad T' = T - (x - x'); \\ 0 & si\ no. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & si\ M - x' \subset T \quad y \quad T' = T - (x - x'); \\ 0 & si\ no. \end{cases} \\ &= e_{M,x',x}(T, T'). \end{aligned}$$

Por otro lado, para el producto de dos funciones $e_{M,x,x'}, e_{M',y,y'} \in \mathfrak{F}$ se tiene

$$e_{M,x,x'}(T, T') * e_{M',y,y'}(T, T') = \begin{cases} e_{M \cup M', x, y'} & si\ x = y; \\ 0 & si\ no. \end{cases}$$

3.2.2. Construcción de la norma. Al igual que en el caso continuo la álgebra $(C_c(R), *, +, ^\star)$ no es completa con respecto a la norma del supremo y no satisface las Ecuaciones 2.3 y 2.4 de la Definición 2.4.4. Por este motivo definiremos una nueva norma que la convierta en un álgebra de Banach que satisfaga estas ecuaciones y por lo tanto en una $C^\star$-álgebra. Fijemos $T \in \Gamma_{T_0}$ y definamos el conjunto, a lo más contable;

$$R^T = \{(T, T+x) : \text{existe una baldosa } a \in T \text{ satisfaciendo } x = x(a)\}.$$

Consideremos la función

$$\begin{array}{cccc} \pi_T & : & C_c(R) & \to & B(l^2(R^T)) \\ & & f & \mapsto & \pi_T(f) \end{array}$$

definida por

$$\begin{array}{cccc} \pi_T(f) & : & l^2(R^T) & \to & l^2(R^T) \\ & & \psi(T,T') & \mapsto & (\pi_T(f)\psi)(T,T') = \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T'}} \psi(T,T'')f(T',T''). \end{array}$$

Donde hemos denotado $T'' \sim_R T'$ en vez de $(T', T'') \in R$ para simplificar la notación. Y para $\psi \in l^2(R^T)$ denotemos simplemente por $\psi(T') = \psi(T, T')$. Claramente la función π_T es $\mathbb{C}$-lineal y esta bien definida pues

$$\begin{aligned} \|\pi_T(f)\|_O^2 = \sup_{\|\psi\|_2=1} \|\pi_T(f)\psi\|_2^2 &= \sup_{\|\psi\|_2=1} \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T}} \left|(\pi_T(f)\psi)(T')\right|^2 \\ &= \sup_{\|\psi\|_2=1} \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T}} \left|\sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T'}} f(T',T'')\psi(T'')\right|^2. \end{aligned}$$

Luego, en vista de que

$$\left|\sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T'}} f(T',T'')\psi(T'')\right|^2 \leq \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T'}} \left|f(T',T'')\psi(T'')\right|^2$$

tendremos que

$$\|\pi_T(f)\|_O^2 \leq \sup_{\|\psi\|_2=1} \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T}} \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T'}} |f(T',T'')|^2 |\psi(T'')|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|\psi\|_2 \leq \|f\|_\infty^2.$$

Por lo tanto $\pi_T(f) \in B(l^2(R^T))$.

Lema 3.2. *Si $f \in C_c(R) \setminus \{0\}$, entonces existe $T_1 \in \Gamma_{T_0}$ tal que $\|\pi_{T_1}(f)\| > 0$.*

Demostración: Si $f \in C_c(R) \setminus \{0\}$, entonces existe $(T_1, T_1 + x_1) \in R$ tal que $f(T_1, T_1 + x_1) \neq 0$. De este modo, podemos escoger $\delta > 0$ tal que para todo (T', T'') en el abierto $U = f^{-1}(B_\delta(f(T_1, T_1 + x_1))) \subset R$, se tiene $f(T', T'') \neq 0$. Luego consideremos la función $\psi : R^{T_1} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(T_1, T'') := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (T_1, T'') \in U; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Claramente el operador $\pi_{T_1}(f) : l^2(R^{T_1}) \to l^2(R^{T_1})$ es no nulo, pues tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\pi_{T_1}(f)\psi\|_2^2 &= \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T_1}} \left| \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T'}} f(T', T'')\psi(T_1, T'') \right|^2 \\
&= \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T_1}} \left| \sum_{\substack{T' \\ (T', T'') \in U}} f(T', T'') \right|^2 \\
&\geq |f(T_1, T_1 + x_1)|^2 \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

■

De esto, al igual que en el caso continuo, se concluye que la función $\|\cdot\|_\star : C_c(R) \to [0, \infty)$ definida por

$$\|f\|_\star := \sup_{T \in \Gamma_{T_0}} \|\pi_T(f)\|,$$

es una norma.

Así, definimos la álgebra A_{T_0} como la completación de la álgebra $(C_c(R), +, *, ^\star)$ con la norma

$$\|f\|_\star := \sup_{T \in \Gamma_{T_0}} \|\pi_T(f)\|. \tag{3.5}$$

Afirmamos que la álgebra $(A_{T_0}, +, *, ^\star)$ es una $C^\star$-álgebra. En efecto, por construcción, ya sabemos que A_{T_0} es una álgebra de Banach con una involución así que solo tenemos que mostrar las propiedades de la Definición 2.4.4.

Primero observemos que dado $\xi \in l^2(R^T)$ se tiene

$$
\begin{array}{rcl}
(\pi_T(f) \circ \pi_T(g)\xi)(T, T_2) & = & [\pi_T(f)(\pi_T(g)\xi)](T, T_2) \\
& = & \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T_2}} f(T_2, T'')(\pi_T(g)\xi)(T, T'') \\
& = & \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T_2}} f(T_2, T'') \left(\sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T''}} g(T'', T')\xi(T, T') \right) \\
& = & \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T_2}} \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T''}} f(T_2, T'')g(T'', T')\xi(T, T') \\
& = & \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T_2}} \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T_2}} f(T_2, T'')g(T'', T')\xi(T, T') \\
& = & \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T_2}} \sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T_2}} f(T_2, T'')g(T'', T')\xi(T, T') \\
& = & \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T_2}} \left(\sum_{\substack{T'' \\ T'' \sim_R T_2}} f(T_2, T'')g(T'', T') \right) \xi(T, T') \\
& = & \sum_{\substack{T' \\ T' \sim_R T_2}} (f * g)(T_2, T')\xi(T, T') \\
& = & (\pi_T(f * g)\xi)(T, T_2).
\end{array}
$$

Es decir π_T es un homomorfismo de álgebras, en particular

$$
\begin{array}{rcl}
\|f * g\|_\star := \sup_{T \in \Gamma_{T_0}} \|\pi_T(f * g)\| & = & \sup_{T \in \Gamma_{T_0}} \|\pi_T(f) \circ \pi_T(g)\| \\
& \leq & \sup_{T \in \Gamma_{T_0}} \|\pi_T(f)\| \, \|\pi_T(g)\| \\
& \leq & \|f\|_\star \|g\|_\star .
\end{array}
$$

Para mostrar la propiedad fundamental de las $C^\star$-aĺgebras basta notar que para todos $\xi,\eta\in l^2(R^T)$ se cumple

$$\begin{aligned}
\langle \xi(T'),(\pi_T(f^\star)\eta)(T')\rangle &= \sum_{T'\sim_R T}^{T'} \xi(T')\overline{(\sum_{T''\sim_R T'}^{T''} f^\star(T',T'')\eta(T''))}\\
&= \sum_{T'\sim_R T}^{T'} \xi(T')\overline{(\sum_{T''\sim_R T'}^{T''} \overline{f}(T'',T')\eta(T''))}\\
&= \sum_{T'\sim_R T}^{T'} \xi(T')(\sum_{T''\sim_R T'}^{T''} f(T'',T')\overline{\eta}(T''))\\
&= \sum_{T'\sim_R T}^{T'} \sum_{T''\sim_R T'}^{T''} \xi(T')f(T'',T')\overline{\eta}(T'')\\
&= \sum_{T''\sim_R T}^{T''} \sum_{T'\sim_R T''}^{T'} \xi(T')f(T'',T')\overline{\eta}(T'')\\
&= \sum_{T''\sim_R T}^{T''} (\sum_{T'\sim_R T''}^{T'} f(T'',T')\xi(T'))\overline{\eta}(T'')\\
&= \sum_{T''\sim_R T}^{T''} (\pi_T(f)\xi)(T'')\overline{\eta}(T'')\\
&= \langle(\pi_T(f)\xi)(T''),\eta(T'')\rangle
\end{aligned}$$

de donde, por la unicidad del operador adjunto tenemos que
$\pi_T(f^\star)=(\pi_T(f))^\star$. Luego

$$\begin{aligned}
\|f^\star * f\|_\star &:= \sup_{T\in\Gamma_{T_0}}\|\pi_T(f^\star * f)\|\\
&= \sup_{T\in\Gamma_{T_0}}\|\pi_T(f^\star)\circ\pi_T(f)\|\\
&= \sup_{T\in\Gamma_{T_0}}\|(\pi_T(f))^\star\circ\pi_T(f)\|\\
&= \sup_{T\in\Gamma_{T_0}}\|(\pi_T(f))\|^2\\
&= \sup_{T\in\Gamma_{T_0}}\|\pi_T(f)\|^2=\|f\|_\star^2.
\end{aligned}$$

Finalmente concluimos que $(A_{T_0},+,*,^\star)$ es una $C^\star$-álgebra.

Observación 3.2.4. *El SPAN de la familia $\mathfrak{F}$ es denso en A_{T_0}.*

Esta álgebra juega un rol principal, tanto en la conjetura como en su solución.

3.3. Trazas en la $C^\star$-álgebra A_T. A continuación construiremos una traza, según la Definición 2.5.7, para la $C^\star$-álgebra A_{T_0}. Comezemos fijando un embaldosado T_0 que tenga FPC, sea repetitivo y aperiódico. Llamemos Ω_{T_0}

su casco continuo, según la Definición 2.3.15 y Γ_{T_0} su transversal, según la Definición 2.3.18. Por el Corolario 2.4, Γ_{T_0} es un conjunto de Cantor. Por el Teorema 2.8, tenemos que existe una medida de probabilidad $\mathbb{R}^d$-invariante en Ω_{T_0}. En vista del Teorema 2.6, esta medida induce una medida transversa (ver Definición 2.6) en Γ_{T_0}. Denotaremos esta medida por $\nu : \mathfrak{B}(\Gamma_{T_0}) \to \overline{\mathbb{R}^+}$. Para un motivo $P \subset T_0$ y una baldosa $t \in P$ denotemos por

$$U(P, t_1) := \{T \in \Gamma_{T_0} : P - x(t_1) \subset T\}.$$

Dados un motivo $P \subset T_0$, y dos baldosas $t_1, t_2 \in P$, claramente tenemos que

$$\nu(U(P, t_1)) = \nu(U(P, t_2)).$$

De este modo, podemos definir una función por $\tau : C_c(R) \to \mathbb{C}$ definida como

$$\tau(f) := \int_{\Gamma_{T_0}} f(T, T) \mathrm{d}\nu(T).$$

Observación 3.3.1. *Para una función de la familia $e_{M,x,y} \in \mathfrak{F}$, definida en la Sección anterior, se tiene que*

$$e_{M,x,y}(T, T) = \begin{cases} 1 & si\ x = y; \\ 0 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\tau(e_{M,x,y}) = \begin{cases} \nu(U(P, x)) & si\ x = y; \\ 0 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

De esto se tiene el siguiente.

Lema 3.3. *La función $\tau : C_c(R) \to \mathbb{C}$, satisface las propiedades de una traza.*

Demostración: Por la Observación 3.2.3 y la observación anterior, para $e_{P_1,x_1,y_1}, e_{P_2,x_2,y_2} \in \mathfrak{F}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\tau(e_{P_1,x_1,y_1} * e_{P_2,x_2,y_2}) &= \begin{cases} \tau\left(e_{P_1\cup P_2,x_1,y_2}\right) & \text{si } y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \nu(U(P_1 \cup P_2, x_1)) & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_1 \neq x_2. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \nu(U(P_1 \cup P_2, x_1)) & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 \neq x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 \neq x_2. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \nu(U(P_1 \cup P_2, y_1)) & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 \neq x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 \neq x_2. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \nu(U(P_1 \cup P_2, y_1)) & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 \neq x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1,\ y_1 \neq x_2. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \nu(U(P_1 \cup P_2, y_1)) & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 = x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 = x_1,\ y_1 \neq x_2; \\ 0 & \text{si } y_2 \neq x_1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \tau\left(e_{P_1\cup P_2,y_1,x_2}\right) & \text{si } y_2 = x_1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \\
&= \tau(e_{P_2,x_2,y_2} * e_{P_1,x_1,y_1}).
\end{aligned}
$$

Además, claramente, para toda $e_{P,x,y} \in \mathfrak{F}$ se tiene $\tau(e_{P,x,y}) \geq 0$. Por lo tanto, como la familia $\mathfrak{F}$ es denso en $C_c(R)$, se concluye que τ satisface que para todo par de funciónes $f, g \in C_c(R)$ se tiene

$$\tau(f * g) = \tau(g * f).$$

Es claro que para toda función $f \in C_c(R)$ satisfaciendo $f = f^\star$ y $f(R) \subset [0, \infty)$, se tiene $\tau(f) \geq 0$.

■

De este tendremos que τ se extiende a una traza, que denotaremos τ^ν, en la $C^\star$-álgebra A_{T_0}.

Observación 3.3.2. *En la $C^\star$-álgebra $C^\star(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$, nos gustaría definir una traza $\tau : C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ por*

$$\tau(f) := \int_{\Omega_{T_0}} f(T,0)\mathrm{d}\mu(T).$$

Pero el hecho de no tener una base de conjuntos compactos para $C_c(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$, como en R, hace que la extención de esta traza pueda no estar bien definida en todo el espacio, $C^\star(\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^d)$.

3.4. Equivalencia de Morita. En esta sección mostraremos que las $C^\star$-álgebras, $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d$) y A_{T_0}, asociadas a un embaldosado tienen grupos K_0 isomorfos. Comenzaremos dando la definición de equivalencia de Morita y luego enumeraremos algunos resultados con respecto a esta equivalencia.

Definición 3.4.1. Sean A, B dos $C^\star$-álgebras

1. Un B**-módulo derecho**, E, es un grupo abeliano dotado de una función
$$\begin{array}{ccc} B \times E & \to & E \\ (r,a) & \mapsto & ra. \end{array}$$
tal que para todo par de elementos $r, s \in B$ y todo par de elementos $a, b \in E$ se tiene
   - (a+b)r=ar+br.
   - a(r+s)=ar+as.
   - (as)r=a(sr).
   - Si B tiene identidad, para todo $a \in E$ se tiene $a1_B = a$.
2. Un A**-módulo izquierdo**, E, es un grupo abeliano dotado de una función
$$\begin{array}{ccc} A \times E & \to & E \\ (r,a) & \mapsto & ra. \end{array}$$
tal que para todo par de elementos $r, s \in A$ y todo par de elementos $a, b \in E$ se tiene
   - r(a+b)=ra+rb.
   - (r+s)a=ra+sa.
   - r(sa)=(rs)a.
   - Si A tiene identidad, para todo $a \in E$ se tiene $1_B a = a$.
3. Un **producto interno** B**-valuado** en E es una forma sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to B$, conjugada en la primera variable, tal que
   - Para todo $x \in E$, se tiene, $\langle x, x \rangle \geq 0$ y
   $$\langle x, x \rangle = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = 0.$$
   - Para todo par de elementos $x, y \in E$, se cumple,
   $$\langle x, y \rangle^\star = \langle y, x \rangle.$$
   - Dado cualquier $b \in B$ y cualquier par de elementos $x, y \in E$, se satisface, $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b$.

4. Si E puede ser dotado de un producto interno B-valuado, diremos que E es un **pre-$C^\star$-módulo de Hilbert derecho** sobre B.

Definición 3.4.2. 1. Considere $x \in E$ y defina

$$|||x||| := \|\langle x, x\rangle\|_B^{\frac{1}{2}}.$$

Si $|||\cdot||| : E \to [0, \infty)$ es una norma en E tal que el espacio normado $(E, |||\ |||)$ es completo, diremos que E es un **$C^\star$-módulo de Hilbert derecho** o simplemente un **B-módulo de Hilbert derecho**.

2. Sea E un B-módulo de Hilbert derecho. Diremos que E es **pleno** si

$$SPAN(IM(\langle\cdot,\cdot\rangle_B)) \subset B \quad \text{es densa.}$$

3. Si E es un A-módulo de Hilbert izquierdo, un B-módulo de Hilbert derecho y para todo trio de elementos $x, y, z \in E$ se cumple

$${}_A\langle x, y\rangle z = x\langle y, z\rangle_B,$$

diremos que E es un **$A - B$-bimodulo de Hilbert**.

4. Un $A - B$-bimodulo, E, se dice **bi-pleno** si

$$SPAN(IM(\langle\cdot,\cdot\rangle_B)) \quad \text{es densa en } B$$

y

$$SPAN(IM({}_A\langle\cdot,\cdot\rangle)) \quad \text{es densa en } A.$$

Ejemplo 3.4.1.

- *Sea B una $C^\star$-álgebra y considere*

$$E = l^2(B) := \left\{(b_1, b_2 \ldots) : \textit{para todo} \quad i \in \mathbb{N}, b_i \in B \ y \ \sum_{i\in\mathbb{N}} \|b_i\|^2 < \infty\right\}.$$

Si definimos $\langle , \rangle : E \times E \to B$ por

$$\langle (b_i)_{i\in\mathbb{N}}, (c_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i^\star c_i,$$

entonces E es un B-módulo de Hilbert derecho.

- *Sea B una $C^\star$-álgebra. Si definimos $\langle , \rangle_B : B \times B \to B$ por*

$$\langle x, y\rangle_B := x^\star y,$$

entonces B es un B-módulo de Hilbert derecho. Si definimos ${}_B\langle , \rangle : B \times B \to B$ por

$${}_B\langle x, y\rangle := xy^\star,$$

entonces B es un B-módulo de Hilbert izquierdo. Por lo tanto, en vista de que para todo $x, y, z \in B$ se cumple

$${}_B\langle x, y\rangle z := (xy^\star)z = x(y^\star z) =: x\langle y, z\rangle_B,$$

concluimos que B es un $B - B$-bimodulo de Hilbert.

- *Si consideramos $E = B^n$, claramente, E es un $B - M_n(B)$-bimodulo de Hilbert.*

Definición 3.4.3. Dos $C^\star$-álgebras A, B se dicen **fuertemente Morita equivalentes** si existe un $A-B$-bimodulo de Hilbert bi-pleno. En general, para dos $C^\star$-álgebras A, B fuertemente Morita equivalentes, denotaremos; $A \sim^{M.E.} B$.

Ejemplo 3.4.2. *En vista del Ejemplo 3.4.1, tenemos que para cualquier $C^\star$-álgebra B y para todo $n \in \mathbb{N}$ las $C^\star$-álgebras B y $M_n(B)$ son fuertemente Morita equivalentes. Es decir $B \sim^{M.E.} M_n(B)$.*

Es importante destacar, que si A es una $C^\star$-álgebra, entonces existe un espacio de Hilbert H tal que

$$A \otimes K(H) \cong A.$$

La equivalencia fuerte de Morita es importante para nuestros propositos por la siguiente.

Proposición 3.2. *Si A, B son dos $C^\star$-álgebras fuertemente Morita equivalentes, entonces existe un espacio de Hilbert H tal que $A \otimes K(H) \cong B \otimes K(H)$. Ver* [6].

Ya que de esta proposición se obtiene.

Corolario 3.1. *Si dos $C^\star$-álgebras A, B son fuertemente Morita equivalentes, entonces $K_0(A) \cong K_0(B)$.*

Demostración: En vista del Corolario 2.10, tenemos

$$K_0(A) \cong K_0(A \otimes K(H)) = K_0(B \otimes K(H)) \cong K_0(B).$$

■

Observación 3.4.1. *Supongamos que $\mathbb{Z}^d$ esta actuando en un espacio topológico Σ y que $\mathbb{R}^d$ actúa en un espacio topológico Ω. M.A. Rieffel en su articulo* [21], *mostró en particular, que si $\Omega = (\Sigma \times \mathbb{R}^d)/\mathbb{Z}^d$, entonces las $C^\star$-álgebras $C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^d$ y $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^d$ (construidas de la misma manera que la $C^\star$-álgebra $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d$) son Morita equivalentes.*

Teorema 3.1. *Suponga que T es un embalosado aperiódico que satisface FPC (según Definición 2.3.14), que es repetitivo (según Definición 2.3.16) y que tiene una cantidad finita de orientaciones en sus baldosas. Si Ω_{T_0} es el casco continuo asociado a T, dotado de la acción natural de $\mathbb{R}^n$, entonces existe un conjunto de cantor Σ, con una acción minimal de $\mathbb{Z}^n$, tal que las $C^\star$-álgebra $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^n$ y $C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^n$ son Morita equivalentes.*

Demostración: Bajo las hipótesis que hemos puesto sobre el embaldosado T, Lorenzo Sadun y Robert Williams mostraron en el año 2003 en su articulo [24], que existe un conjunto de cantor Σ provisto de una acción minimal tal que el espacio

$$\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n := (\Sigma \times \mathbb{R}^n)/\mathbb{Z}^n$$

es homeomorfo a Ω_{T_0}. Por otra parte, el espacio $\Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^n$ es isomorfo (como grupoide topológico) al grupoide fundamental $\Pi(\Omega_{T_0})$. Mediante el isomorfismo que envia a cada par $(T, x) \in \Omega_{T_0} \times \mathbb{R}^n$ en el camino $\alpha(t) := T + tx$.

Este isomorfismo induce un isomorfismo entre sus $C^\star$-álgebras asociadas. Análogamente podemos probar que $(\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ es isomorfo, como grupoide topológico, a $\Pi(\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n)$. De esto se concluye, en vista de que $\Pi(\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n) \cong \Pi(\Omega_{T_0})$, que las $C^\star$-álgebras $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^n$ y $C(\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n) \rtimes \mathbb{R}^n$ son isomorfas. Así, por la Observación 3.4.1, tenemos que $C(\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n) \rtimes \mathbb{R}^n$ es fuertemente Morita equivalente a $C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^n$. Finalmente tenemos que

$$C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^n \cong C(\Sigma \times_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n) \rtimes \mathbb{R}^n \sim^{M.E.} C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^n.$$

■

Observación 3.4.2. *Como ya vimos en la Observación 2.4, si un embaldosado es aperiódico, satisface FPC y es repetitivo, entonces la transversal de su casco continuo es un conjunto de Cantor. Por lo que este seria el candidato natural en el Teorema de Sadun y Williams. Pero en general, este no es el conjunto que se obtiene al aplicar el resultado de Sadun y Williams. Por lo tanto, El Teorema 3.1 no implica que las $C^\star$-álgebras del caso continuo,$C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^n$ y del caso discreto, A_{T_0}, son Morita equivalentes.*

4. E .

En esta sección reuniremos todas las ideas planteadas en este texto con el fin de entender el problema del etiquetaje de lagunas. Específicamente, deseamos construir una función de etiquetaje de lagunas y comprender esta función en su forma geométrica y algunas de sus consideraciones físicas. Comenzaremos fijando el contexto en el que trabajaremos. Consideremos un conjunto finito $\mathcal{A}$ de baldosas de $\mathbb{R}^d$ no equivalentes entre si y centradas, según la Definición 2.3.17. Sea $T_0 \in X_{\mathcal{A}}$ un embaldosado que es aperiódico, repetitivo y tiene FPC. Denotemos por Ω_{T_0} el casco continuo de T_0 según la Definición 2.3.15 y por Γ_{T_0} a la transversal del casco continuo Ω_{T_0} según la Definición 2.3.18. Consideremos la $C^\star$-álgebra A_{T_0} definida en el caso discreto, según lo visto en la Sección 3.2. Si consideramos un elemento $a \in A_{T_0}$ auto-adjunto, su espectro estará contenido en los números reales. El conjunto, $\mathfrak{L}(a)$, de todas las lagunas de a será fundamental en lo que sigue.

4.1. La función de etiquetaje de lagunas. Para etiquetar el espectro de un elemento auto-adjunto $B \in A_{T_0}$, establezcamos la siguiente definición.

Definición 4.1.1. Una **función de etiquetaje de lagunas**, para el elemento auto-adjunto $a \in A_{T_0}$, es una función $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es constante en cada elemento de $\mathfrak{L}(a)$

Recordemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, la proyección espectral de a es el operador $P_{(-\infty,x]}(a) := \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(a)$, de la Definición 2.2.10. También, en vista de que toda $C^\star$-álgebra es cerrada en norma, se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$ el operador $P_{(-\infty,x]}(a) \in A_{T_0}$. Además, dado cualquier laguna $l \in \mathfrak{L}(a)$ y cualquier par de puntos $x, y \in l$, tenemos que

$$P_{(-\infty,x]}(a) := \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(a) = \mathbb{1}_{(-\infty,y]}(a) =: P_{(-\infty,y]}(a).$$

Así la función

$$\begin{array}{rccc} f_a & : & \mathbb{R} & \to & A_{T_0} \\ & & x & \mapsto & P_{(-\infty,x]}(a) \end{array}$$

es constante en cada laguna $l \in \mathfrak{L}$. Esto nos da una primera aproximación a la función que queremos construir. Ahora construiremos una función desde el álgebra A_{T_0} a su grupo de **K**-teoría, $K_0(A_{T_0})$ y mediante una traza definida en el álgebra A_{T_0} construiremos una función desde $K_0(A_{T_0})$ a los números reales. Obteniendo así, por composicíon, una función de etiquetaje de lagunas. Recordando la construcción hecha en el Ejemplo 2.4.11, tenemos que existe un monomorfismo

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_1 & : & A_{T_0} & \to & A_\infty(A_{T_0}) \\ & & x & \mapsto & \varphi_1(x). \end{array}$$

Así, para los conjuntos $P(A_{T_0})$, de las proyecciones de la $C^\star$-álgebra límite directo $A_\infty(A_{T-0})$ y $P_\infty(A_{T_0})$ de las proyecciones de la *-álgebra $M_\infty(A_{T_0})$, definidos en las Ecuaciónes 2.11 y 2.12 respectivamente, tenemos que

$$\varphi_1(P_1(A_{T_0})) \subset P_\infty(A_{T_0}) \subset P(A_{T_0}) \subset A_\infty(A_{T_0}).$$

Luego, en el conjunto $P(A_{T_0})$ de las proyecciónes de la $C^\star$-álgebra límite directo, existe una relacion de equivalencia (definida en la Sección 2.5.2) que dota al espacio cuociente de una estructura de monoide. De donde se obtiene una proyeción canonica al monoide $V_0(A_{T_0})$, de la Definición 2.5.3. Por lo que tenemos, una función

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & P(A_{T_0}) & \to & V_0(A_{T_0}) \\ & & x & \mapsto & [x]. \end{array}$$

Además, por construcción del grupo $K_0(A_{T_0})$ asociado a una $C^\star$-álgebra, tenemos que existe una función $\pi_0 : V_0(A_{T_0}) \to K_0(A_{T_0})$, ver Sección 2.5.2. Todo esto, nos da como resultado una aplicación

$$\begin{array}{rcccc} l_{0,a} & : & \mathbb{R} & \to & K_0(A_{T_0}) \\ & & x & \mapsto & \pi_0\Big(\Big[\varphi_1\Big(P_{(-\infty,x]}(a)\Big)\Big]\Big). \end{array}$$

Ahora debemos encontrar una función de $K_0(A_{T_0})$ en los número reales. Para esto basta encontrar una traza en la $C^\star$-álgebra A_{T_0} y luego extender esta traza a su grupo de **K**-teoría.
En la Sección 3.4 se establece la existencia de una traza en el álgebra A_{T_0}, denotada por $\tau^\nu : A_{T_0} \to \mathbb{C}$. Esta traza esta determinada por una medida de probabilidad invariante ν en Γ_{T_0}. Luego podemos extender esta traza a una función

$$K_0(\tau^\nu) : K_0(A_{T_0}) \to \mathbb{R},$$

como se explica en la Sección 2.5.3. De este modo concluimos que la función

$$\begin{array}{rcccc} G_a & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (K_0(\tau^\nu) \circ l_0)(x). \end{array}$$

es una función de etiquetaje de lagunas para el elemento a.

4.2. La conjetura de etiquetaje de lagunas. En esta sección plantearemos la conjetura que motiva este breve texto.
Fijemos el mismo contexto que la sección anterior. Sea μ una medida en Ω_{T_0} de probabilidad e invariante por traslación. Podemos definir una traza τ^μ, por medio de esta medida. Denotemos por

$$K_0(\tau^\mu) : K_0(C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d)) \to \mathbb{R}$$

la extención de la traza τ^μ, según la Observación 2.5.4, al grupo K_0 de la $C^\star$-álgebra $C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d)$ construida en la Sección 3.1. Denotemos por $\nu := \mu_{\Gamma_{T_0}}$ la medida transversa definida en el Teorema 2.6 y $C(\Gamma_{T_0}, \mathbb{Z})$ el espacio de las funciones continuas con valores en $\mathbb{Z}$ definidas sobre Γ_{T_0}.
Bajo este contexto Bellissard conjeturo en su articulo [1] que

$$K_0(\tau^\mu)\Big(K_0\Big(C(\Omega_{T_0}) \rtimes \mathbb{R}^d\Big)\Big) = \left\{ \int_{\Gamma_{T_0}} f \mathrm{d}\nu : f \in C(\Gamma_{T_0}, \mathbb{Z}) \right\}. \tag{4.1}$$

El interes de la conjetura es que el conjunto

$$\left\{ \int_{\Gamma_{T_0}} f \mathrm{d}\nu : f \in C(\Gamma_{T_0}, \mathbb{Z}) \right\},$$

es numerable y por lo tanto la función construida solo puede asignar a cada laguna un valor en este subconjunto enumerable de $\mathbb{R}$.
En vista de nuestras hipotesis, el teorema que Lorenzo Sadun y Robert Williams mostraron en el año 2003 en su articulo [24], nos da la existencia de un conjunto de cantor Σ provisto de una acción minimal de $\mathbb{Z}^d$ tal que el espacio

$$\Sigma \times_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{R}^d := (\Sigma \times \mathbb{R}^d)/\mathbb{Z}^d$$

es homeomorfo a Ω_{T_0}. En otras palabras, podemos interpretar a la transversal Γ_{T_0}, como una nueva transversal Σ con la acción de $\mathbb{Z}^d$. Si construimos el álgebra $C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^d$, considerando la transversal Σ con la acción de $\mathbb{Z}^d$, entonces por el Teorema 3.1 podemos establecer la conjetura de la siguiente manera.

$$K_0(\tau^\nu)\left(K_0\left(C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^d\right)\right) = \left\{ \int_{\Gamma_{T_0}} f \mathrm{d}\nu : f \in C(\Sigma, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Si construimos el álgebra A_{T_0}, a partir de la transversal Σ, entonces tenemos que A_{T_0} es isomorfa a $C(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}^d$. Esto permite reformular la conjetura de la siguiente manera.

$$K_0(\tau^\nu)\left(K_0\left(A_{T_0}\right)\right) = \left\{ \int_{\Gamma_{T_0}} f \mathrm{d}\nu : f \in C(\Sigma, \mathbb{Z}) \right\}.$$

4.3. Algunas consideraciones físicas. A continuación, daremos un contexto físico en el cual se puede aplicar el método del etiquetaje de lagunas para obtener información sobre el fenómeno. Este contexto sera explicado desde un punto de vista mas informal. Esto nos ayudara a entender de mejor manera la importancia de la conjetura del etiquetaje de lagunas.

Consideremos un operador B actuando en el espacio de funciónes de onda definidas sobre un cuasi-cristal d-dimensional. Es decir, el un operador actuando en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definición 4.3.1. Sea $d \geq 1$ un entero y sea B un operador actuando en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{L}$ un enrejado de $\mathbb{R}^d$, ver Definición 2.1.5. Una **aproximación de amarre fuerte** o **aproximación de lazo estrecho** del operador B, es un operador $\tilde{B}$ actuando en $L^2(\mathcal{L})$ de la misma forma que B actúa en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Para comprender mejor esta definición, consideremos el siguiente.

Ejemplo 4.3.1. *Considere $d = 2$ y el operador Laplaciano $D : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$. Claramente este operador esta definido en un subconjunto de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Una aproximación de lazo estrecho, es el operador $\tilde{D} : L^2(\mathbb{Z}^2) \to L^2(\mathbb{Z}^2)$ definido por*

$$(\tilde{D}\psi)(\vec{x}) := 4\psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x} - (0,1)) - \psi(\vec{x} - (0,-1)) - \psi(\vec{x} - (-1,0)) - \psi(\vec{x} - (1,0)).$$

F 18. Zona de interacción de una partícula.

Otro ejemplo interesante es el operador posición $P : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$*, definido por* $(P\psi)(x_1, x_2) := x_1 x_2 \psi(x_1, x_2)$*. Una aproximación de lazo estrecho para el operador posición es* $\tilde{P} : L^2(\mathbb{Z}^2) \to L^2(\mathbb{Z}^2)$ *definido por*

$$(\tilde{P}\psi)(x_1, x_2) := x_1 x_2 \psi(x_1, x_2).$$

Si consideramos un cuasi-cristal, como vimos en la sección de embaldosados, su patrón de difracción es no periódico. Por lo tanto asociando las celdas de Voronoi a su enrejado tendremos un embaldosado aperiódico, T_0, que modela el cuasi-cristal. La idea de esto es que si consideramos una partícula moviendose en el cuasi-cristal bajo al fuerza del operador B actuando en las funciónes de onda del cuasi-cristal, entonces mediante el proceso de considerar una aproximación de amarre fuerte, $\tilde{B}$, podemos discretizar el movimiento de la partícula. Así consideramos que la partícula salta de baldosa en baldosa bajo la fuerza del operador $\tilde{B}$.

En este contexto, el espacio de funciónes de onda $L^2(\mathbb{R}^d)$ es reemplazado por el espacio de funciónes de onda definidas sobre las baldosas, $L^2(\Gamma_{T_0})$ y la zona de interacción de la partícula puede ser interpretada como el soporte de un motivo modulo traslación, ver Figura 18. Esto trae algunas consecuencias inmediatas, la primera es que el operador $\tilde{B}$ es acotado y tendrá espectro discreto. La segunda, es que la posición de la partícula estará determinada completamente por su posición en una baldosa centrada, modulo traslación. Además, el momento es reemplazado por una traslación finita o estrictamente hablando, el salto de una baldosa a otra.
Esto le da mucha importancia a nuestra álgebra A_{T_0}, pues recordemos que esta álgebra esta generada por la familia de funciónes $\mathfrak{F}$, definida en la Sección 3.2. Así, podemos pensar que una función del tipo $e_{M,x,x'} \in \mathfrak{F}$ representa al operador momento asociado a la partícula que se encuentra en la baldosa de centro x con radio de interacción M y saltara a la baldosa de centro x'. Bajo esta consideración, la posición de la partícula esta descrita por el operador $e_{M,x,x} \in \mathfrak{F}$.

Observación 4.3.1. *Consideremos la* $C^\star$*-subalgebra de* $B(L^2(\Gamma_{T_0}))$ *generada por el operador momento,* $M_{x,x'} : L^2(\Gamma_{T_0}) \to L^2(\Gamma_{T_0})$ *y el operador posición,*

$M_x : L^2(\Gamma_{T_0}) \to L^2(\Gamma_{T_0})$, definidos por

$$(M_{x,x'}\psi)(T_0 + x(a)) := \psi(T_0 - (x - x(a))) - \psi(T_0 - (x' - x(a))),$$

y

$$(M_x\psi)(T_0 + x(a)) := (x - x(a))_1 \dots (x - x(a))_d \psi(T_0 - (x - x(a))).$$

Donde $x - x(a) = ((x - x(a))_1, \dots, (x - x(a))_d)$.
Es importante hacer notar que solo hemos definido estos operadores para el subconjunto de Γ_{T_0} formado por todas las traslaciones de T_0, es decir el conjunto

$$\{T_0 - x(a) : a \quad \text{es una baldosa en} \quad T_0\}.$$

Pero de todos modos se pueden extender por continuidad a todo Γ_{T_0}.
La $C^\star$-álgebra A_{T_0} se representa como la subalgebra de operadores acotados que esta generada por este operador momento y posición.

Consideramos el operado unitario, V_x, que es la traslación por $x \in \mathbb{R}^d$ y esta definido para $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ por

$$(V_x\psi)(y) := \psi(y - x).$$

Podemos definir el **casco fuerte** del operador B como

$$HULL(B) := \overline{\{V_x^\star B V_x : x \in \mathbb{R}^d\}}^{STO},$$

donde la clausura es con respecto a la topología fuerte de operadores. Además, $\mathbb{R}^d$ actúa en el casco fuerte por traslación, convirtiéndolo así en un sistema dinámico. Por el año 1993 se observo que si el operador B tenia cierta periodicidad con respecto al embaldosado T_0, entonces los sistemas dinamicos

$$\left(HULL, \mathbb{R}^d\right) \text{ y } \left(\Omega_{T_0}, \mathbb{R}^d\right)$$

son conjugados. Es decir, existe un homeomorfismo

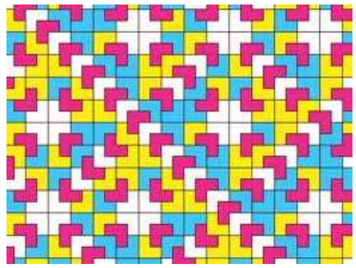
$$h : HULL(B) \to \Omega_{T_0}$$

que conjuga una dinámica en la otra o equivalentemente, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ se tiene

$$\rho_2^{\vec{v}} = h \circ \rho_1^{\vec{v}} \circ h^{-1}.$$

Donde hemos denotado por ρ_1 y ρ_2 la acción de $\mathbb{R}^d$ en los conjuntos $HULL(B)$ y Ω_{T_0} respectivamente. Además, Bellissard también noto que esto ocurría cuando considerábamos una aproximación de amarre fuerte del operador B, la transversal Γ_{T_0} y un grupo amenable, discreto cumpliendo el rol de $\mathbb{R}^d$. De esto tenemos la importancia física de los espacio Ω_{T_0} y Γ_{T_0}.

En general si el operador B no tiene grados internos de libertad, como el spin y no considera fuerzas externas actuando en el cuasi-cristal, como campos magnéticos, entonces el operador B puede ser construido a partir del operador momento y posición. Esto nos dice que la aproximación de amarre fuerte, $\tilde{B}$, es un operador acotado, auto-adjunto, y puede ser construido a partir del operador momento y posición. Así, concluimos que el operador



F 19. Ejemplo de embaldosado aperiódico.

$\tilde{B}$ esta en nuestra álgebra A_{T_0} y por lo tanto tiene una función de etiquetaje de lagunas, como la definida en la Sección 4.1. De donde se obtiene, que la conjetura del etiquetaje de lagunas establecida en la Sección 4.2 da los valores exactos alcanzados por la función de etiquetaje de lagunas para una aproximación de amarre fuerte del operador B actuando en un cuasi-cristal.

R

1. J. Bellissard, D. J. L. Herrmann, and M. Zarrouati, *Hulls of aperiodic solids and gap labeling theorems*, Directions in mathematical quasicrystals, CRM Monogr. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 207–258. MR 1798994 (2002a:82101)
2. Jean Bellissard, Riccardo Benedetti, and Jean-Marc Gambaudo, *Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling*, Comm. Math. Phys. **261** (2006), no. 1, 1–41. MR 2193205 (2007c:46063)
3. Moulay-Tahar Benameur and Hervé Oyono-Oyono, *Calcul du label des gaps pour les quasi-cristaux*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 8, 667–670. MR 1903367 (2003c:52033)
4. Robert Berger, *The undecidability of the domino problem*, Mem. Amer. Math. Soc. No. **66** (1966), 72. MR 0216954 (36 #49)
5. B. Blackadar, *Operator algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III. MR 2188261 (2006k:46082)
6. Lawrence G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^*-algebras*, Pacific J. Math. **71** (1977), no. 2, 335–348. MR 0454645 (56 #12894)
7. Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010. MR 2683112
8. Alain Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994. MR 1303779 (95j:46063)
9. M. I. Cortez and B. Solomyak, *Invariant measures for non-primitive tiling substitutions*, ArXiv e-prints (2010).
10. D. Gratias D. Schechtman, I. Blech and J. W. Cahn, *Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry*, (1984), Phys. Rev. Letters 53 (1984), 1951ï¿$\frac{1}{2}$1953.
11. Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 73, Springer-Verlag, New York, 1980, Reprint of the 1974 original. MR 600654 (82a:00006)
12. Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, Elementary theory, Reprint of the 1983 original. MR MR1468229 (98f:46001a)
13. Jerome Kaminker and Ian Putnam, *A proof of the gap labeling conjecture*, Michigan Math. J. **51** (2003), no. 3, 537–546. MR MR2021006 (2005f:46121b)
14. Max Karoubi, *K-theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008, An introduction, Reprint of the 1978 edition, With a new postface by the author and a list of errata. MR 2458205 (2009i:19001)
15. Johannes Kellendonk and Ian F. Putnam, *Tilings, C^*-algebras, and K-theory*, Directions in mathematical quasicrystals, CRM Monogr. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 177–206. MR MR1798993 (2001m:46153)
16. N.P.(Klaas) Landsman, *Course on c*-algebras and k-theory*, (2003).
17. H. Moustafa, *An index theorem to solve the gap-labeling conjecture for the pinwheel tiling*, ArXiv e-prints (2010).
18. Gerard J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. MR MR1074574 (91m:46084)
19. Gert K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979. MR MR548006 (81e:46037)
20. Jean-Paul Pier, *Amenable locally compact groups*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, A Wiley-Interscience Publication. MR 767264 (86a:43001)
21. Marc A. Rieffel, *Applications of strong Morita equivalence to transformation group C^*-algebras*, Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980), Proc. Sympos. Pure

Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 299–310. MR 679709 (84k:46046)

22. E. Arthur Robinson, Jr., *Symbolic dynamics and tilings of* $\mathbb{R}^d$, Symbolic dynamics and its applications, Proc. Sympos. Appl. Math., vol. 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 81–119. MR MR2078847 (2005h:37036)
23. Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991. MR 1157815 (92k:46001)
24. Lorenzo Sadun and R. F. Williams, *Tiling spaces are Cantor set fiber bundles*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 1, 307–316. MR 1971208 (2004a:37023)
25. Marjorie Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 1340198 (96c:52038)
26. Boris Solomyak, *Tilings and dynamics*, (2006), http://www.math.washington.edu/ solomyak/personal.html.
27. John von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996, Translated from the German and with a preface by Robert T. Beyer, Twelfth printing, Princeton Paperbacks. MR 1435976 (98b:81006)
28. Hao Wang, *Proving theorems by pattern recognition ii*, (1961), Bell System Technical Journal 40 (1961), 1ï¿$\frac{1}{2}$42.
29. N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, A friendly approach. MR MR1222415 (95c:46116)
30. Dana P. Williams, *Crossed products of C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. MR MR2288954 (2007m:46003)