Función Zeta y El Teorema de los Números Primos en Sistemas Dinámicos

Nicolás José Arancibia Robert

25 de Agosto 2010

Índice general

Introducción

El año 1737, **Leonhard Euler**, en su trabajo de tesis, **Variae observationes circa series infinitas** (Varias observaciones sobre series infinitas), conecta la función **Zeta de Riemann**:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

con el estudio de los números primos, mediante la expresión:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1},$$

donde el producto es tomado sobre el conjunto de los números primos. Esta expresión llamada **Producto de Euler** para la función Zeta otorga una expresión analítica al teorema fundamental de la aritmética.
Años posteriores, **Bernhard Riemmann (ver [20])**, influido por los desarrollos del análisis complejo, tiene la revolucionaria idea de considerar la función Zeta como una función analítica, así demuestra la posibilidad de continuar analíticamente $\zeta(s)$ a todo el plano complejo en una función meromorfa con una única singularidad en $s = 1$, donde poseerá además un polo simple. Y da la ecuación funcional:

$$\zeta(1 - s) = \pi^{1/2-s}\Gamma(s/2)/\Gamma((1 - s)/2)\zeta(s),$$

con Γ la función Gamma de Euler definida por:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \exp(-x)dx.$$

Ecuación de donde deduce la posibilidad de representar $\zeta(s)$ en la forma:

$$s(1 - s)\Gamma(s/2)\zeta(s) = -\exp(bs) \prod_{\rho} (1 - s/\rho) \exp(s/\rho),$$

donde ρ corre sobre los ceros de ζ contenidos en $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Real}(s) \leq 1\}$. Del uso de esta última representación para ζ unido al producto de Euler, Riemann

obtiene una formula asintótica para el número de primos menores que cierto número x.
Encontrando de este modo una relación entre la función Zeta, mas específicamente los ceros de esta, con la distribución de los números primos. Las anteriores ideas de Riemann acerca del estudio de los números primos fueron decisivas para que en el año 1896 los matemáticos **Jacques Salomon Hadamard** y **Charles Jean de la Vallée-Poussin**, probaran de manera independiente el **Teorema de los Números Primos** . Conjeturado a finales del siglo $XVIII$ por **Carl Friedrich Gauss** y **Adrien-Marie Legendre**, el Teorema de los Números Primos viene a decir que, si para $x \geq 1$ denotamos por $\pi(x)$ al número de primos menores que x, entonces **(ver [25])**:

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \log x / x = 1$$

Variadas son las demostraciones al Teorema de los Números Primos aparecidas en los años posteriores a las dadas por Hadamard y De la Vallée-Poussin, entre ellas resaltan las elementales dadas por **Atle Selberg (ver [24])** y **Paul Erdös (ver [10])** y la formulada mediante el uso del **Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara (ver [15], [28])**.

Son diversos los ámbitos de la matemática donde se han introducido funciones similares a la Zeta de Riemann. Ejemplos de estas, son la **Zeta de Selberg**, introducida para el estudio de las geodésicas cerradas en una superficie compacta M de curvatura constante negativa. Denotando por τ toda geodésica cerrada de M y por $\lambda(\tau)$ su largo, definimos la Zeta de Selberg por :

$$\zeta(s) = \prod_{\tau} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \exp((s+k)\lambda(\tau)))^{-1}$$

O la **Zeta de Artin-Mazur (ver [5])** definida para un Sistema Dinámico discreto (X, T) mediante la serie formal:

$$\zeta(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{Cardinalidad}\{x \in X \ : \ T^n x = x\}.$$

Los matemáticos **William Parry** y **Mark Pollicott** en su artículo titulado **An analogue of the prime number theorem for closed orbit Axiom A flows (ver [18])**, son capaces de demostrar para un flujo hiperbólico débilmente mezclante que el número de órbitas periódicas de periodo menor que cierta cantidad x, es asintóticamente igual a:

$$\exp(hx)/hx,$$

con h la entropía topológica para el flujo. Una reformulación de lo anterior permite demostrar que el número de órbitas periódicas de periodo menor que $\exp(hx)$ para cierta cantidad x es asintóticamente igual a:

$x/\log x$.

Siendo asombrosa la relación con el Teorema de los Números Primos.
Si bien este resultado ya había sido demostrado el año 1969 por **Grigory Margulis (ver [16])** para el caso de flujos geodésicos en superficies de curvatura constante negativa, Parry, Pollicott fueron los primeros en hacerlo por medio del uso de una función zeta definida para el flujo hiperbólico. Denotando por τ toda orbita periódica del flujo hiperbólico y por $\lambda(\tau)$ su periodo, la función Zeta para el flujo hiperbólico será definida para Real$(s) > h$ a través del producto:

$$\zeta(s) = \prod_{\tau}(1 - \exp(-sh\lambda(\tau)))^{-1}.$$

A diferencia de lo ocurrido para la función Zeta de Riemman, la función Zeta para un flujo hiperbólico débilmente mezclante no es en general posible de ser continuada analíticamente a todo el plano complejo a través de una función meromorfa pero si, de ser continuada analíticamente a la banda Real$(s) \geq h$ excepto para $s = h$, donde poseerá un polo simple.

Un método usado de manera bastante frecuente para el estudio del flujo hiperbólico es el de introducir las llamadas **particiones de Markov**, desarrollado principalmente por los matemáticos **Rufus Bowen** y **Yakov G. Sinai**, este método modela el flujo mediante el uso de la **Suspensión** de un **Sub-shift de tipo finito**. De este modo el estudio de la Zeta para un flujo hiperbólico se hará por medio del análisis de una función Zeta para la Suspensión que lo modela. Importante en la compresión de está última Zeta, será la relación que existe entre los polos de ella con el espectro del llamado **operador de transferencia**. Así, la posición en el plano complejo de la línea crítica donde la función Zeta es extendida, está íntimamente ligada al módulo de los valores propios aislados de multiplicidad algebraica finita del operador de transferencia.

Una vez extendida la función Zeta para el flujo, a la banda crítica, la demostración del **Teorema de los Número Primos para un Flujo Hiperbólico** será análoga a la seguida por Ikhehara al momento de demostrar por medio del uso del Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara, el Teorema de los Números Primos.

El presente trabajo de Tesis viene a ser una revisión de los trabajos realizados por Parry y Pollicott acerca del estudio de la función Zeta (**ver [19]**) antes mencionada.

Organizada en 7 capítulos, el primero bajo el titulo de Preliminares, consiste en una pequeña revisión a una serie de conceptos necesarios para los capítulos posteriores. Se introducen los aspectos básicos de **Teoría Espectral** y **Teoria de Perturbación** ligados principalmente al estudio de un sistema finito de valores propios. Se definen los conceptos de **analiticidad** para funciones definidas sobre espacios de Banach a valores en espacios de Banach. Se da además un resumen de ciertas propiedades topológicas del espacio de medidas de probabilidad. Al final del capítulo se da una demostración al Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara.

El capítulo dos es una pequeña introducción a algunos conceptos básicos de **Dinámica Topológica** y **Teoría Ergódica**. Se definen los Sistemas Dinámicos sobre los cuales centraremos nuestro estudio, **El Sub-Shift de Tipo Finito** y **El Flujo de Suspensión** y se dan algunas propiedades de estos.

El capítulo tres es un resumen de ciertos aspectos propios del **Formalismo Termodinámico**. Se definen los conceptos de **entropía métrica** y **entropía topológica** dando en este último caso la definición mediante el uso tanto de **cubrimientos abiertos** como de **bolas de Bowen**. Una vez hecho esto se sigue un esquema similar para definir la **Presión Toplógica** para finalizar con la formulación del **Principio Variacional** y algunos ejemplos.

Se comienza el capítulo cuatro con la definición del **Operador de Transferencia**, para luego centrarse en el estudio de sus propiedades espectrales para el caso en que se encuentre actuando sobre el espacio de las **funciones continuas** o **Holder continuas** de un Sub-Shift de tipo finito. Se demuestra el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius** tanto el caso real como complejo y mediante el se prueban ciertas propiedades espectrales del operador de transferencia.

En el capítulo cinco se extiende la definición de Presión a cierto tipo de funciones a valores complejos y se prueba un resultado para la Presión en el flujo de suspensión.

Durante el capítulo seis se introducen funciones Zeta para el Sub-Shift de tipo Finito y el Flujo de Suspensión, se estudia su dominio de definición, sus propiedades de regularidad y se demuestran algunos teoremas de extensión.

Finalmente el capítulo siete está devoto a formular y demostrar el **Teorema de los Número Primos para un Flujo Hiperbólico**.

Notación

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
- $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$.
- Para $f \in \mathcal{C}(X)$, $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
- $f^n := \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n \text{ veces}}$.
- Si $T : X \to X$ y $f : X \to \mathbb{C}$, entonces $S_n f := \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Banach

Definición 1.1.1. Diremos que el espacio métrico $(X,\ d)$, es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 1.1.2. Denotaremos por **Espacio de Banach,** a todo espacio Vectorial normado que a su vez es completo.

Definición 1.1.3. (**Funciones Contínuas**) Dados los espacios métricos (X, d_1) y (Y, d_2), definimos $\mathcal{C}(X, Y)$ como el espacio de las funciones acotadas y continuas de X en Y. Escribiremos $\mathcal{C}(X)$, en lugar de $\mathcal{C}(X, Y)$ en caso de tener $Y = \mathbb{C}$ y d_2 la norma euclideana en $\mathbb{C}$. Introducimos además la aplicación, $||\cdot||_\infty : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$, por:

$$||f||_\infty = \sup\{| f(x) |: x \in X\}.$$

Es claro que $\mathcal{C}(X, Y)$ es un espacio vectorial y que $||\cdot||_\infty$ es una norma en este espacio.
Finalmente, para Y completo, $(\mathcal{C}(X, Y), ||\cdot||_\infty)$ será de Banach.

Definición 1.1.4. (**Funciones δ - Hölder**) Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios metricos. Entonces dado $\delta > 0$, la función $f : X \to Y$, se dirá **δ-Hölder continua**, si existe $c > 0$, de modo que para todo $x,\ y \in X$ tengamos:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y)^\delta.$$

Dado el espacio métrico compacto (X, d), denotaremos al conjunto de las funciones $\delta-$Hölder continuas de X en $\mathbb{C}$, por:

$$\mathcal{H}_\delta(X) = \{g \in \mathcal{C}(X) : g \text{ es } \delta - \text{Hölder continua}\}.$$

Definimos luego para cada $g \in \mathcal{H}_\delta(X)$, el número:

$$c_g = \text{ínf}\{c > 0 :| g(x) - g(y) |\leq d(x, y)^\delta \text{ para todo } x,\ y \in X\}.$$

En otras palabras c_g es la menor constante que hace de g, una función $\delta-$Hölder continua.

Observación 1.1.5. La función $c_{(\cdot)} : \mathcal{H}_\delta(X) \to \mathbb{C}$ define una seminorma pero no una norma en $\mathcal{H}_\delta(X)$, puesto que para toda función constante g tenemos $c_g = 0$.

Finalmente para cada $g \in \mathcal{H}_\delta(X)$, definimos:

$$|| \ g \ ||_\delta = || \ g \ ||_\infty + c_g.$$

Teorema 1.1.6. I. La función $|| \cdot ||_\delta$: $\mathcal{H}_\delta(X) \to \mathbb{R}$ define una norma en $\mathcal{H}_\delta$.

II. Si X es compacto, entonces el espacio normado $(\mathcal{H}_\delta(X), \quad || \cdot ||)$, es de Banach.

Definición 1.1.7. (**Operadores Lineales**) Sean $(B_1, || \cdot ||_{B_1})$ y $(B_2, || \cdot ||_{B_2})$ dos espacios vectoriales normados. Entonces el operador lineal $T : B_1 \to B_2$, se dirá **acotado,** si existe constante $C \geq 0$, de modo que para todo $x \in B_1$ tengamos:

$$|| \ T(x) \ ||_{B_2} \leq C \ || \ x \ ||_{B_1} \ .$$

Proposición 1.1.8. Sean $(B_1, || \cdot ||_{B_1})$ y $(B_2, || \cdot ||_{B_2})$ dos espacios vectoriales normados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador lineal $T : B_1 \to B_2$ es acotado.
2. El operador lineal $T : B_1 \to B_2$ es continuo.
3. El operador lineal $T : B_1 \to B_2$ es continuo en un punto $x \in B_1$.

Sean $(B_1, || \cdot ||_{B_1})$ y $(B_2, || \cdot ||_{B_2})$ dos espacios vectoriales normados. Entonces denotaremos al espacio vectorial de los operadores lineales acotados de B_1 en B_2 por, $\mathcal{L}(B_1, B_2)$, conjunto sobre el cuál introducimos la norma:

$$||T||_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} = \sup_{x \in X, \ x \neq 0} \frac{||T(x)||_{B_2}}{||x||_{B_1}}.$$

En caso de $B_2 = B_1$, escribimos $\mathcal{L}(B_1)$ en lugar de $\mathcal{L}(B_1, B_1)$. Finalmente si $B_2 = \mathbb{C}$ escribimos B_1^* en lugar de $\mathcal{L}(B_1, \mathbb{C})$, este último sera denotado como **el espacio dual** de B_1, cada elemento contenido en B_1^* será denominado **funcional lineal**.

Proposición 1.1.9. Sea $(B_2, ||\cdot||_{B_2})$, un espacio de Banach. Entonces para todo espacio normado $(B_1, \ ||\cdot||_{B_1})$, el espacio de los operadores lineales, $(\mathcal{L}(B_1, B_2), ||\cdot||_{\mathcal{L}(B_1, \ B_2)})$, es de Banach.

Un operador lineal $K \in (\mathcal{L}(B_1, B_2), || \cdot ||_{\mathcal{L}(B_1,B_2)})$, se dirá **compacto,** si la imagén $\{T(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de toda sucesión acotada $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en B_1, contiene una subsucesión de Cauchy.

Proposición 1.1.10. (**ver [13, Teorema III.4.8]**) La composición de un operador compacto con un operador acotado, es un operador compacto.

1.2. Analiticidad

Definición 1.2.1. Dado, $D \subseteq \mathbb{C}$, abierto, conexo, sea $f : D \to \mathbb{C}$. Entonces diremos que:

1. f es **diferenciable** en $z \in D$ si el limite:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$
existe.

2. f es **holomorfa** en $z \in D$, si es diferenciable en una vecindad de z.

3. f es **holomorfa** en el abierto $U \subset D$, si es **holomorfa** en cada punto $z \in U$.

Definición 1.2.2. Dado el espacio de Banach, $(B, ||\cdot||_B)$, sobre el cuerpo de los complejos y $D \subseteq \mathbb{C}$, abierto, conexo, sea $f : D \to B$. Entonces diremos que f es **holomorfa** en $z \in D$, si el limite:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$
existe.
Diremos que f es **holomorfa** en D, si es **holomorfa** en cada punto $z \in D$

Teorema 1.2.3. (ver [13, Teorema III.1.37]) Dado el espacio de Banach complejo $(B, ||\cdot||_B)$ y $D \subseteq \mathbb{C}$, abierto, conexo, sea $f : D \to B$. Entonces f será holomorfa en D si y solo si para todo funcional lineal, $l^* \in B^*$, acotado, la composición $l^* \circ f$, es holomorfa .

Definición 1.2.4. (ver [12, pág. 71-85]) Dados los espacio de Banach complejos, $(B_1, || \ ||_{B_1})$, $(B_2, || \ ||_{B_2})$, sea $B \subseteq B_1$ abierto y $f : B \to B_2$. Entonces diremos que f es **holomorfa en** B si f es localmente acotada en B y para todo par de puntos, $v \in B, v_1 \in B_1$ el limite:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(v + hv_1) - f(v)}{h},$$
existe .

Teorema 1.2.5. (**Teorema de Weierstrass (ver [3, pág. 138])**) Dado, $D \subseteq \mathbb{C}$, abierto, conexo, sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D a valores en $\mathbb{C}$, que converge puntualmente y uniformemente en compactos a una función $f : D \to \mathbb{C}$. Entonces f será holomorfa en D y $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en forma uniforme en compactos de D a f'.

Corolario 1.2.6. Dado un espacio de Banach complejo, $(B, ||\cdot||_B)$ y $D \subseteq \mathbb{C}$, abierto, conexo, sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D a valores en B, que converge puntualmente y uniformemente en compactos a una función $f : D \to B$. Entonces f es holomorfa en D.

Corolario 1.2.7. (Teorema de Weierstrass Generalizado (ver [12, Teorema 4.6.2])) Dados los espacio de Banach complejos, $(B_1, || \ ||_{B_1})$, $(B_2, || \ ||_{B_2})$, sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas definidas un abierto B de B_1 a valores en B_2, que converge puntualmente y uniformemente en compactos a una función $f : B \to B_2$. Entonces f es holomorfa en B_2 .

1.3. Introducción a la Teoría Espectral

Definición 1.3.1. Dado el espacio de Banach $(B, || \cdot ||_B)$ y el operador lineal acotado $T : B \to B$, definimos el **Resolvente de T, $\rho(T)$,** como el conjunto de elementos λ en $\mathbb{C}$, para los cuales el operador lineal acotado $T - \lambda I$, es invertible de inversa acotada. El conjunto $\text{Esp}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es llamado el **Espectro de T**.

Proposición 1.3.2. Sea $(B, || \cdot ||_B)$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(B)$ acotado. Entonces $\text{Esp}(T)$, es compacto en $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.3. Sea $(B, || \cdot ||_B)$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(B)$ acotado. Un número $\lambda \in \text{Esp}(T)$, tal que:

$$\text{Nucleo}(T - \lambda I) \neq \{0_B\},$$

será llamado **Valor Propio o Autovalor de T.** Luego definimos:

I. Cada $v \in \text{Nucleo}(T - \lambda I)$, será llamado **Vector Propio o Autovector de T respecto al vector propio o autovalor λ.**

II. Cada elemento $v \in B$ para el cual exista entero $m > 1$, de modo que:

$$(T - \lambda I)^m v = 0_B,$$

será llamado **Vector Propio Generalizado o Autovector Generalizado de T.**

III. Definimos la **Multiplicidad Geométrica** de λ, como la dimensión del espacio:

$$\text{Nucleo}(T - \lambda I).$$

IV. Definimos la **Multiplicidad Algebraica** de λ, como la dimensión del espacio:

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{Nucleo}(T - \lambda I)^m.$$

V. Finalmente si la **Multiplicidad Algebraica** de λ es 1, diremos que λ es un valor propio **simple**.

Definición 1.3.4. (**ver [8]**) Dado el espacio de Banach $(B, ||\cdot||_B)$ y el operador lineal acotado $T \in \mathcal{L}(B)$, definimos el **Espectro Esencial de** T**,** $\mathrm{Esp}_{ess}(T)$, como el conjunto formado por todos aquellos elementos de $\mathrm{Esp}(T)$, que cumplen con alguna de las siguientes propiedades:

I. La imagen de $T - \lambda I$ no es cerrada en B.

II. λ es punto límite de $\mathrm{Esp}(T)$.

III. λ es un autovalor de multiplicidad algebraica infinita.

Observación 1.3.5. Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach y $T : B \to B$, un operador lineal acotado. Entonces todo elemento $\lambda \in \mathrm{Esp}(T) \backslash \mathrm{Esp}_{ess}(T)$, será un valor propio aislado de multiplicidad algebraica finita.

Definición 1.3.6. Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach y $T : B \to B$, un operador lineal acotado. Entonces definimos:

1. El **Radio Espectral** $R(T)$ de T por:

$$R(T) := \sup\{| z |: z \in \mathrm{Esp}(T)\}.$$

2. El **Radio Esencial** $R_{ess}(T)$ de T por:

$$R_{ess}(T) := \sup\{| z |: z \in \mathrm{Esp}_{ess}(T)\}.$$

Teorema 1.3.7. (**Fórmula del Radio Espectral (ver [13, pág. 27-28])**) Sea $(B, |||\cdot||_B)$ un espacio de Banach y $T : B \to B$, un operador lineal acotado. Entonces

$$R(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||_{\mathcal{L}(B)}^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||_{\mathcal{L}(B)}^{\frac{1}{n}}.$$

Teorema 1.3.8. (**Fórmula del Espectro Esencial (ver [17])**)
Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(B)$ y sea:

$$||T||_{ess} := \inf\{||T - K||_B : \ K \in \mathcal{L}B \text{ es un operador compacto}\}.$$

Luego tendremos:

$$R_{ess}(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||_{ess}^{\frac{1}{n}}.$$

1.3.1. Teoría de Perturbación

Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach y $T : B \to B$, un operador lineal acotado. La presente sección tiene por objetivo estudiar el comportamiento de, $\mathrm{Esp}(T)$, a medida que T es sometido a pequeñas perturbaciones. Es decir, las propiedades de regularidad que posee la función definida sobre $\mathcal{L}(B)$:

$$S \mapsto \mathrm{Esp}(S).$$

Antes de comenzar con los resultados, dado $\delta > 0$ definimos el conjunto:

$$B(T, \delta) = \{\hat{T} \in \mathcal{L}(B) : ||T - \hat{T}||_B < \delta\}$$

Proposición 1.3.9. **(ver [13, pág. 208-209]**) Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach. Entonces la función definida en $\mathcal{L}(B)$ por:

$$T \mapsto \text{Esp}(T),$$

es semicontinua superior: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para todo $S \in B(T, \delta)$ tengamos:

$$\sup_{\lambda \in Esp(S)} \left(\inf_{\alpha \in Esp(T)} |\lambda - \alpha| \right) < \epsilon.$$

Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(B)$ un operador lineal acotado. Consideremos una curva suave, cerrada, simple Γ en $\mathbb{C}$, disjunta de $\text{Esp}(T)$, y sea $\text{Esp}(T)_\Gamma$ la parte de $\text{Esp}(T)$ en el interior de Γ. Entonces el operador lineal acotado $P : B \to B$:

$$P_{T,\Gamma} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (zI - T)^{-1} dz, \tag{1.1}$$

definirá una proyección, es decir $P_{T,\Gamma}^2 = P_{T,\Gamma}$ y $||P_T||_B = 1$, de manera de tener:

$$B = P_{T,\Gamma}(B) \oplus (I - P_{T,\Gamma})(B).$$

y

$$\text{Esp}(T|_{P_{T,\Gamma}(B)}) = \text{Esp}(T)_\Gamma, \ \text{Esp}(T|_{(I-P_{T,\Gamma})(B)}) = \text{Esp}(T) \setminus \text{Esp}(T)_\Gamma.$$

Observemos que $P_{T,\Gamma}$ depende de $\text{Esp}(T)_\Gamma$ y no de Γ. Esta proyección será llamada,**Proyección Espectral de** T **Sobre Esp**$(T)_\Gamma$.

Teorema 1.3.10. **(ver [13, pág. 212-214]**) Sea $(B, ||\cdot||_B)$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(B)$ y sea Γ una curva suave, cerrada, simple y disjunta de $\text{Esp}(T)$. Supongamos que $\text{Esp}(T)_\Gamma$, consiste en un número finito de valores propios de multiplicidad algebraica finita. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que tenemos las siguientes propiedades.

I. Para todo $\hat{T} \in B(T, \delta)$:

$$\sup_{\lambda \in \text{Esp}(T)} \inf_{\hat{\lambda} \in \text{Esp}(\hat{T})} |\lambda - \hat{\lambda}| < \epsilon$$

y

$$\inf_{\lambda \in \text{Esp}(T)} \sup_{\hat{\lambda} \in \text{Esp}(\hat{T})} |\lambda - \hat{\lambda}| < \epsilon.$$

II. Para todo $\hat{T} \in B(T, \delta)$ el conjunto $\text{Esp}(\hat{T})_\Gamma$ consiste en un número finito de valores propios de $\hat{T}$ de multiplicidad algebraica finita. Para cada $\hat{\lambda} \in$

$\mathrm{Esp}(\hat{T})_\Gamma$ sea $\kappa(\hat{T}, \hat{\lambda})$ la multiplicidad algebraica de $\hat{\lambda}$ como autovalor de $\hat{T}$. Entonces:

$$\sum_{\hat{\lambda} \in \mathrm{Esp}(\hat{T})_\Gamma} \kappa(\hat{T}, \hat{\lambda}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Esp}(T)_\Gamma} \kappa(T, \lambda),$$

y las funciones definidas en $B(T, \delta)$:

$$\hat{T} \mapsto \sum_{\hat{\lambda} \in \mathrm{Esp}(\hat{T})_\Gamma} \kappa(\hat{T}, \hat{\lambda})\hat{\lambda}, \tag{1.2}$$

$$\hat{T} \mapsto \prod_{\hat{\lambda} \in \mathrm{Esp}(\hat{T})_\Gamma} \hat{\lambda}^{\kappa(\hat{T}, \hat{\lambda})}, \tag{1.3}$$

son ambas holomorfas.

Teorema de Perturbación 1.3.11. Sea $(B, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(B)$. Supongamos que Esp_T posee un valor propio λ_0 que es aislado y simple con correspondiente autovector v_0. Entonces existe $\delta > 0$, de modo de poder definir en $B(T, \epsilon)$, las funciones holomorfas:

$$\begin{aligned} \lambda &: B(T, \epsilon) \to \mathbb{C} \\ v &: B(T, \epsilon) \to B. \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= \lambda_0, \\ v(T) &= v_0 \end{aligned}$$

y para cada $\hat{T} \in B(T, \epsilon)$ tenemos:

I. $\lambda(\hat{T})$ es un valor propio de $\hat{T}$.

II. $v(\hat{T})$ es un vector propio de $\hat{T}$.

Teorema 1.3.12. (**ver [13, Teorema IV.3.15]**) Sea $(B, ||\cdot||)$ un espacio de Banach. Entonces para cada $T \in \mathcal{L}(B)$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Esp}(T)$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\hat{T} \in B(T, \delta)$ y todo $z \in B(\zeta, \delta)$ la inversa $\left(zI - \hat{T}\right)^{-1}$ de $zI - \hat{T}$ este bien definida y:

$$\left|\left|(\zeta I - T)^{-1} - \left(zI - \hat{T}\right)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(B)} < \epsilon.$$

Es decir la función:

$$(z, \hat{T}) \mapsto \left(zI - \hat{T}\right)^{-1},$$

es continua en $(z, \hat{T}) = (\zeta, T)$.

1.4. Espacio de medidas

Definición 1.4.1. Dado el espacio topológico compacto $(X,\ \tau)$ y la $\sigma-$algebra de **Borel** $\mathcal{B}$, generada por los abiertos, que denotaremos de **Borel**, definimos $\mathcal{M}(X)$, como el conjunto de las medidas Borelianas de probabilidad de X.

En lo que queda de sección, nuestra meta estará en introducir una topología $\tau_{\mathcal{M}(X)}$ sobre $\mathcal{M}(X)$, tal que el espacio topológico $(\mathcal{M}(X), \tau_{\mathcal{M}(X)})$ sea compacto y metrizable. Para hacer esto, definiremos sobre $\mathcal{C}(X)^*$ la topología denomidada $*-$débil, así, por el Teorema de representación de Riez, podremos a través de la asociación de cierto subconjunto de $\mathcal{C}(X)^*$ con las medidas de probabilidad, extrapolar la topología $*-$débil al espacio $\mathcal{M}(X)$.

Definición 1.4.2. Definimos en el dual topológico B^*, del espacio de Banach B, la topología denominada $*-$**débil**, como la topología más débil que para cada $x \in B$ la función $l \mapsto l(x)$, sea continua.
Una base para dicha topología estará dada por la colección de conjuntos:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_k, l_0, \epsilon) = \{l \in B^* :\mid l_0(x_i) - l(x_i) \mid < \epsilon,\ 1 \leq i \leq k\}$$

Donde $l_0 \in B^*\ x_i \in B,\ 1 \leq i \leq k$ y $\epsilon > 0$.

Observación 1.4.3. Es importante notar que dada cualquier medida de probabilidad, $\mu \in \mathcal{M}(X)$, la función $\mu(\cdot) : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\mu(f) = \int f d\mu,$$

cumple con:

I. $\mu(\mathbb{1}) = \mu(X) = 1$.

II. A partir de la linealidad de la integral tenemos para toda $f,\ g \in \mathcal{C}(X),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$:
$$\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g).$$

III. $\mu(f) \leq \parallel f \parallel_\infty$.

Entonces $\mu(\cdot)$, definirá un funcional lineal positivo (i.e. Si $f \geq 0$ entonces $l(f) \geq 0$) y nos será posible para cada medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}(X)$ establecer la relación:
$$\mu \mapsto \mu(\cdot),$$
con el elemento $\mu(\cdot)$ de $C(X)^*$.

La relación inversa se obtiene a partir del siguiente resultado.

Teorema 1.4.4. (**Teorema de representación de Riez (ver [27, Teorema 6.3]**)) Sea X un espacio métrico compacto, $l : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo (i.e. Si $f \geq 0$ entonces $l(f) \geq 0$) tal que $l(\mathbb{1}) = 1$. Entonces existe única medida $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $l = \mu(\cdot)$.

De esta correspondencia biunívoca nos es posible extrapolar la topología $*-$débil en $\mathcal{C}(X)^*$ a $\mathcal{M}(X)$ en la forma:

Definición 1.4.5. Sea X, un espacio métrico compacto. Definimos la topología $*-$**débil** en $\mathcal{M}(X)$ como la topología más débil tal que para cada $f \in \mathcal{C}(X)$, la función, $\mu(\cdot)$, sea continua.
Una base para dicha topología estará dada por la colección de conjuntos:

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_k,\ \mu, \epsilon) = \left\{ m \in \mathcal{M}(X) : \left| \int_X f dm - \int_X f d\mu \right| < \epsilon,\ 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Donde $\mu \in \mathcal{M}(X),\ f_i \in \mathcal{C}(X),\ 1 \leq i \leq k$ y $\epsilon > 0$.

Lema 1.4.6. Una sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X)$ converge a $\mu \in \mathcal{M}(X)$ en la topología $*-$débil si para todo $f \in \mathcal{C}(X)$ tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Finalmente, el siguiente resultado termina de caracterizar nuestro conjunto $\mathcal{M}(X)$.

Teorema 1.4.7. (ver [27, Teorema 6.4, 6.5]) El espacio topológico ($\mathcal{M}(X)$, $*-$débil) es compacto, convexo y metrizable.

1.5. Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara

Está sección esta destinada a introducir y demostrar el **Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara**, con el cuál, **Norbert Wiener** y **Shikao Ikehara**, formula una nueva prueba para el **Teorema de lo Números Primos**. Del mismo modo, el Teorema nos permitirá durante el capítulo 6, probar una formula asintótica para el número de órbitas periódicas de cierta clase de Sistema Dinámico.

Antes de comenzar con la formulación y posterior demostración del Teorema, deberemos introducir algunos conceptos.

Definición 1.5.1. Definimos para $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ la **Transformada de Fourier** $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, de f, por:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt. \tag{1.4}$$

Definición 1.5.2. Definimos para el par $f,\ g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ la **Convolución**, $f * g$, entre f y g por:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt. \tag{1.5}$$

Proposición 1.5.3. (**Formula de inversión de Fourier (ver [22, 9.11]**)) Para $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ y para x en un conjunto de medida de lebesgue total en $\mathbb{R}$, entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x).$$

Proposición 1.5.4. (ver [22, Teorema 9.2]) Sean $f,\ g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Entonces:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Definición 1.5.5. Definimos para $\lambda \in (0, \infty)$ el **Kernel de Fejér**, $K_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$K_\lambda(t) = \frac{1 - \cos(\lambda t)}{\pi \lambda t^2} = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\sin(\frac{\lambda t}{2})}{\frac{\lambda t}{2}}\right)^2. \tag{1.6}$$

Si denotamos $K(t) = K_1(t)$, tendremos para todo $\lambda \in (0, \infty)$ la igualdad:

$$K_\lambda(t) = \lambda K(\lambda t).$$

Además:

$$\mathcal{F}(K_\lambda)(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y|}{\lambda} & \text{si } |y| \leq \lambda; \\ 0 & \text{si } |y| > \lambda. \end{cases}$$

Observemos finalmente que:

$$\int_{\mathbb{R}} K_1(v)dv = 1.$$

Lema 1.5.6. (**Riemann-Lebesgue Lema (ver [14, 2.8]**)) Sea $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Entonces:

$$\lim_{z \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(izt) f(t) dt = 0;$$

$$\lim_{z \to -\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(izt) f(t) dt = 0.$$

El siguiente resultado nos facilitará la demostración de El Teorema de Wiener-Ikehara.

Proposición 1.5.7. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ igual a cero para $t < 0$, no negativa para $t \geq 0$ y tal que la integral:

$$F(z) = \int_0^\infty \varphi(t) \exp(-zt) dt,$$

existe para $\mathrm{Real}(z) > 0$.
Supongamos además la existencia de cierta constante A y de una función continua $G_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x > 0$ la función $G_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$G_x(y) = F(x + iy) - \frac{A}{x + iy},$$

sea tal que para cada $\lambda > 0$ la función G_x converga a G_0 en $\mathrm{L}^1[-\lambda, \lambda]$ cuando $x \mapsto 0$. Entonces:

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda u} \varphi(u - v/\lambda) K(v) dv = A.$$

Demostración. Si definimos $E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ por $E(t) := \varphi(t)\exp(-xt)$, por **La Formula de Inversión de Fourier (1.5.3)**, tendremos para casi todo $u > 0$ la igualdad:

$$\begin{aligned}
(K_\lambda * E)(u) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}(K_\lambda * E))(-u) \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(K_\lambda\right) \cdot \mathcal{F}\left(E\right)\right)(-u).
\end{aligned}$$

De este modo de la relación:

$$\mathcal{F}(E)(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ity)\varphi(t)\exp(-xt)dt = F(x + iy),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(u - t)\varphi(t)\exp(-xt)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)F(x + iy)\exp(iuy)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)F(x + iy)\exp(iuy)dy.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Luego si definimos:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0; \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

y denotamos por $F_1(x+iy)$ la Transformada de Fourier de la función $E_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $E_1(t) := \varphi_1(t)\exp(-xt)$ obtendremos:

$$F_1(x + iy) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x + iy)t)\varphi_1(t)dt = \frac{1}{x + iy}. \tag{1.8}$$

Así, reemplazando en la identidad **(1.7)**, φ por φ_1 y F por F_1, obtenemos:

$$\int_0^\infty K_\lambda(u - t)\varphi_1(t)\exp(-xt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)F_1(x + iy)\exp(iuy)dy.$$

De esta manera, si multiplicamos la anterior identidad por A y luego se la restamos a la **(ecuación (1.7))** tendremos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty K_\lambda(u - t)\varphi(t)\exp(-xt)dt - A\int_0^\infty K_\lambda(u - t)\varphi_1(t)\exp(-xt)dt \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)(F(x + iy) - AF_1(x + iy))\exp(iuy)dy \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)G_x(y)\exp(iuy)dy.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}(K_\lambda)$ es continua y por hipótesis $G_x(y)$ tiende a la función $y \to G_0(y) \in \mathrm{L}^1([-\lambda, \lambda])$ a medida que $x \searrow 0$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \searrow 0} \int_0^\infty K_\lambda(u-t)\varphi(t)\exp(-xt)dt \\
&\qquad = \lim_{x \searrow 0} A \int_0^\infty K_\lambda(u-t)\varphi_1(t)\exp(-xt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)G_x(y)\exp(iuy)dy \\
&\qquad = A\int_0^\infty K_\lambda(u-t)\varphi_1(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)G_0(y)\exp(iuy)dy.
\end{aligned}$$

Por la positividad del producto $K_\lambda(u-t)\varphi(t)$ el **Teorema de Convergencia Monótona** nos permitirá concluir haciendo $x \searrow 0$, que:

$$\int_0^\infty K_\lambda(u-t)\varphi(t)dt = A\int_0^\infty K_\lambda(u-t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(K_\lambda)(y)G_0(y)\exp(iuy)dy.$$

Finalmente, por el **Lema de Riemman-Lebesgue (1.5.6)** el último termino de la anterior igualdad, tenderá a cero a medida que $u \to \infty$. Y del cambio de variable $v = \lambda(u-t)$ obtenemos:

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda u} \varphi(u - v/\lambda)K_1(v)dv = \lim_{u\to\infty} A\int_{-\infty}^{\lambda u} K_1(v)dv = A.$$

□

Antes de comenzar con la demostración del Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara, definamos:

Definición 1.5.8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ acotadas. Sea $P = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Una suma de la forma:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})),$$

se llama una **suma de Riemann Stieltjes** del intervalo. Diremos que f es **Riemann Stieltjes integrable** respecto a α si existe un número A que satisface las siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que para cada partición P mas fina que P_ϵ y para cada elección de los puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene:

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon.$$

En este caso denotaremos A por:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

Teorema 1.5.9. (**Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara**) Sea $S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ igual a cero para $t \leq 0$, no decreciente y continua por la derecha para $t > 0$ y tal que la integral:

$$f(\zeta) = \int_0^\infty \exp(-\zeta t) d(S(t)),$$

existe para $\text{Real}(\zeta) > 1$.
Supongamos además la existencia de cierta constante A y de una función continua $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x > 1$ la función $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$g_x(y) = f(x + iy) - \frac{A}{x + iy - 1},$$

sea tal que para cada $\lambda > 0$ la función g_x converga a g_1 en $\mathrm{L}^1[-\lambda, \lambda]$ cuando $x \mapsto 1$. Entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-t) S(t) = A.$$

Demostración. El uso del método de integración por partes nos permite para $\text{Real}(z) > 1$ obtener la igualdad:

$$f(z) = \int_0^\infty \exp(-zt) d(S(t)) = (\exp(-zt) S(t))|_0^\infty + z \int_0^\infty \exp(-zt) S(t) dt.$$

Ahora, de la finitud de $f(z)$ para $\text{Real}(z) > 1$, concluimos:

$$(\exp(-zt) S(t))|_0^\infty = 0,$$

$$z \int_0^\infty \exp(-zt) S(t) dt < \infty.$$

Así, si escribimos $\varphi(t) = \exp(-t) S(t)$, podremos para $\text{Real}(z) > 0$ definir:

$$F(z) = \int_0^\infty \exp(-zt) \varphi(t) dt$$

y para $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$:

$$G_x(y) = F(x + iy) - \frac{A}{x + iy}.$$

Las cuales además cumplen con:

$$F(z) = \frac{f(z+1)}{z+1},$$

$$G(z) = \frac{g(z+1) - A}{z+1}.$$

De este modo de las hipótesis del **teorema** tendremos que φ, F y G_x cumplen con las condiciones de la **proposición** anterior y por ende:

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda u} \varphi(u - v/\lambda) K(v) dv = A.$$

Ahora de la monoticidad de S para todo para $w,\ w'$ con $w \leq w'$ tenemos:

$$\varphi(w') \geq \varphi(w)\exp(w - w').$$

De esta manera para cualquier $a > 0$, tendremos:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{u\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda u} \varphi(u - v/\lambda)K(v)dt \\
&\geq \limsup_{u\to\infty} \int_{-a}^{a} \varphi(u - v/\lambda)K(v)dv \\
&\geq \limsup_{u\to\infty} \varphi(u - a/\lambda)\exp(\frac{-2a}{\lambda}) \int_{-a}^{a} K(v)dv.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\limsup_{u\to\infty} \varphi(u - a/\lambda) \leq \frac{\exp(\frac{2a}{\lambda})}{\int_{-a}^{a} K(v)dv} A.$$

Tomando $a = \sqrt{\lambda}$ obtenemos una cota superior de la forma $C(\lambda)A$, donde $C(\lambda)$ es cercano a 1 para grandes valores de λ. Así, al hacer λ tender a infinito, obtenemos:

$$\limsup_{u\to\infty} \varphi(u) \leq A.$$

Por lo que $M = \sup_{\mathbb{R}} \varphi < \infty$. Entonces si notamos que:

$$K(v) \leq \frac{2}{\pi v^2} < \frac{1}{v^2},$$

obtendremos para cada $b > 0$:

$$\begin{aligned}
\liminf_{u\to\infty} \varphi\left(u + \frac{b}{\lambda}\right)\exp\left(\frac{2b}{\lambda}\right)\int_{-b}^{b} K(v)dv &\geq \liminf_{u\to\infty} \int_{-b}^{b} \varphi\left(u - \frac{v}{\lambda}\right)K(v)dv \\
&\geq \lim_{u\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(u - \frac{v}{\lambda}\right)K(v)dv \\
- \limsup_{u\to\infty} \int_{-\infty}^{-b} \varphi\left(u - \frac{v}{\lambda}\right)K(v)dv &- \limsup_{u\to\infty} \int_{b}^{\infty} \varphi\left(u - \frac{v}{\lambda}\right)K(v)dv \\
&\geq A - 2M \int_{b}^{\infty} \left(\frac{1}{v^2}\right) dv \\
&= A - 2M/b.
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\liminf_{u\to\infty} \varphi(u + b/\lambda) \geq \frac{A - 2M/b}{\int_{-b}^{b} K(v)dv}.$$

Al igual que antes, concluimos:

$$\liminf_{u\to\infty} \varphi(u) \geq A.$$

Lo que termina con la demostración. $\square$

Capítulo 2

Introducción a los Sistemas Dinámicos y la Teoría Ergódica

2.1. Dinámica Topológica

Definición 2.1.1. Dado el espacio topológico (X, τ) y la aplicación $T : X \to X$. Definimos el **Sistema Dinámico Discreto** (X, T), como la aplicación $F : \mathbb{Z}^+ \times X \to X$, dada por:

I. $F(0, \cdot) = id$.

II. $F(n, x) = T^n(x)$ para todo $x \in X,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Para T invertible definimos el **Sistema Dinámico Discreto Invertible** (X, T), como la aplicación $F : \mathbb{Z} \times X \to X$ dada por:

I. $F(0, \cdot) = id$.

II. $F(n, x) = T^n(x)$ para todo $x \in X,\ n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.1.2. Sea $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ una familia de funciones de X en X, tal que para todo, $x \in X,\ t,\ s \geq 0$, tenemos, $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$. Entonces definimos el **Sistema Dinámico Continuo** o **flujo**, (X, ϕ), como la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ dada por:

I. $\Phi(0, \cdot) = id$.

II. $\Phi(t, x) = \phi_t(x)$ para todo $x \in X,\ t > 0$.

Si además para cada $t \geq 0$, ϕ_t es invertible, definimos el **Sistema Dinámico Continuo Invertible** o **Flujo Invertible** (X, ϕ), como la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ dada por:

I. $\Phi(0,\cdot) = id$.

II. $\Phi(t,x) = \phi_t(x)$ para todo $x \in X,\ t \in \mathbb{R}$.

Notar respectivamente para cada $t \geq 0$ o $t \in \mathbb{R}$, que el par, (X, ϕ_t), define un Sistema Dinámico Discreto.

Definición 2.1.3. Dado el espacio topológico (X, τ) y la aplicación $T : X \to X$, decimos que X es **invariante bajo** T si y solo si $T(X) \subseteq X$.

Definiciónn 2.1.4. Dado el espacio topológico, (X, τ), diremos que la función continua $T : X \to X$, es:

I. **Topológicamente transitiva**, si para todo par de abiertos no vacios $U,\ V$, de (X, τ), existe entero positivo K tal que:

$$T^K(U) \cap V \neq \emptyset.$$

II. **Topológicamente mezclante**, si para todo par de abiertos no vacios U, V, de (X, τ), existe entero positivo K tal que para todo $k \geq K$, tenemos:

$$T^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definición 2.1.5. Dado el Sistema Dinámico discreto no invertible (X, T), definimos la órbita $\mathcal{O}_T(x)$, de $x \in X$ bajo T, como el conjunto:

$$\mathcal{O}_T(x) = \{T^j(x) : j \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Si por otro lado T es invertible, definimos:

$$\mathcal{O}_T(x) = \{T^j(x) : j \in \mathbb{Z}\}.$$

En forma equivalente, dado el flujo no invertible (X, ϕ), definimos la órbita de $x \in X$ bajo ϕ, como el conjunto:

$$\mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi_t(x) : t \geq 0\}.$$

Si por otro lado T es invertible, definimos:

$$\mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Definició 2.1.6. Dado el Sistema Dinámico Discreto (X, T). Llamaremos al elemento x de X:

I. **Punto fijo,** si:

$$T(x) = x.$$

II. **Punto periódico**, si existe un entero positivo $k > 0$, tal que:

$$T^k(x) = x.$$

Al menor de tales enteros lo llamaremos **periodo mínimo de** x.

De manera equivalente, dado el flujo (X, Φ), llamaremos al elemento x de X:

I. **Punto fijo,** si para todo $t > 0$ tenemos:

$$\phi_t(x) = x.$$

II. **Punto periódico**, si existe un real $t_0 > 0$ tal que:

$$\phi_{t_0}(x) = x.$$

Si x no es fijo, existirá un mínimo t_0 con esta propiedad, que llamaremos **periodo mínimo de** x.

2.2. Espacio Simbólico, Sub-Shift de Tipo Finito, Flujo de Suspensión

Introduciremos a continuación tres importantes Sistemas Dinámicos, dos discretos y uno continuo, que serán el objeto principal de nuestro posterior estudio. Comencemos con los más simples, pero no por eso menos importantes, Sistemas Dinámicos discretos.

2.2.1. Espacio Simbólico

Definición 2.2.1. Dado el entero $n \geq 1$, sea $\{1, 2, \ldots, n\}$, el conjunto formado por los n primeros números naturales, asignémosle la topología discreta y definamos:

$$\Sigma_n = \prod_{\mathbb{Z}} \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{2.1}$$

$$\Sigma_n^+ = \prod_{\mathbb{Z}^+} \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.2}$$

Observación 2.2.2. El conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ provisto de la **topología discreta,** es compacto. Luego por el **Teorema de Tychonoff**, los conjuntos Σ_n, Σ_n^+, equipados con la **topología producto,** τ_{prod}, τ_{prod}^+ serán compactos.

Definición 2.2.3. Dados los enteros $m \geq 1$ y $s \in \mathbb{Z}$ (resp. $s \in \mathbb{Z}^+$), sea $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, una sucesión de enteros entre 1 y n. Entonces llamaremos **cilindros de largo** m**,** al conjunto:

$$[a_0, \ldots, a_{m-1}]_s = \{y \in \Sigma_n \text{ (resp. } \Sigma_n^+) : y_s = a_0,\ y_{s+1} = a_1 \ldots,\ y_{s+m-1} = a_m\}. \tag{2.3}$$

En caso de $s = 0$, escribimos $[a_0, \ldots, a_m]$, en lugar de $[a_0, \ldots, a_m]_0$. Finalmente para $x \in \Sigma_A$ (resp.Σ_A^+), $m \geq 1$ y $s \in \mathbb{Z}$ (resp. $s \in \mathbb{Z}^+$), definimos:

$$[x|m]_s = [x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+m-1}].$$

Observación 2.2.4. Los cilindros de largo 1 forman tanto en Σ_n como en Σ_n^+, una sub-base para la topología producto, luego los cilindros de largo arbitrario formarán una base para dicha topología.

Una característica importante, de los espacios topológicos $(\Sigma_n, \tau_{\text{prod}})$ y $(\Sigma_n^+, \tau_{\text{prod}}^+)$, es la de ser metrizables. Para mostrar lo anterior, definamos para todo par de puntos $x,\ y \in \Sigma_n$ (resp. Σ_n^+) con $x_0 = y_0$:

$$K_{x,y} = \sup\{k \in \mathbb{N} : x_i = y_i \text{ para todo } i \text{ con } |i| < k\}.$$

En otras palabras $K_{x,y}$, resultara ser para todo par de elementos $x \neq y$, con $x_0 = y_0$, el menor entero que cumpla con, $x_i \neq y_i$, para todo i con $|i| \geq\ K_{x,y}$. Entonces para cada $\theta \in (0,1)$, definimos:

$$d_\theta \text{ (resp. } d_\theta^+) : \Sigma_n \times \Sigma_n \text{ (resp. } \Sigma_n^+ \times \Sigma_n^+) \ \rightarrow\ \mathbb{R}^+$$

$$d_\theta(x,y) \ (resp.\ \rho_\theta^+(x,\ y)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ \theta^{K_{x,y}} & \text{si } x_0 = y_0 \text{ pero } x \neq y; \\ 1 & \text{si } x_0 \neq y_0. \end{cases}$$

Proposición 2.2.5. La función $d_\theta : \Sigma_n \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^+$, (resp. $d_\theta^+ : \Sigma_n^+ \times \Sigma_n^+ \to \mathbb{R}^+$) define una métrica sobre Σ_n (resp. Σ_n^+).

Demostración. Sean $x,\ y,\ z \in \Sigma_n$, $\theta \in (0,1)$ entonces:

I. Por construcción de d_θ, tendremos, $d_\theta(x,y) \geq 0$ con igualdad si y solamente si $x = y$.

II. Además $d_\theta(x,y) = d_\theta(y,x)$.

III. Si $x_0 \neq y_0$ tendremos $x_0 \neq z_0$ o $y_0 \neq z_0$ En cualquier caso llegaremos a la desigualdad:
$$d_\theta(x,y) = 1 \leq d_\theta(x,z) + d_\theta(z,y).$$
Si $x_0 = y_0$ y $z_0 \neq x_0$ entonces la desigualdad se satisface trivialmente. Si $x_0 = y_0 = z_0$, entonces tendremos tres casos; $K_{x,z} = K_{z,y} \leq K_{x,y}$, $K_{x,z} \geq K_{z,y} = K_{x,y}$ o $K_{z,y} \geq K_{x,z} = K_{x,y}$. En cualquier caso llegaremos a la desigualdad:
$$d_\theta(x,y) \leq d_\theta(x,z) + d_\theta(z,y).$$

□

Teorema 2.2.6. Los espacios topológicos $(\Sigma_n,\ \tau_{prod})$, $(\Sigma_n^+,\ \tau_{prod}^+)$ son metrizables.

Demostración. Sea τ_{d_θ} la topología inducida por la métrica d_θ. Demostraremos:

$$\tau_{d_\theta} = \tau_{\text{prod}}.$$

Dado el abierto U de τ_{d_θ}, sean $x \in U$ y $r > 0$, de modo que la bola de radio r y centro x, $B(x,r)$, este contenida en U. Entonces si escojemos entero positivo $K > 0$, de modo que $\theta^K < r$, tendremos que el cilindro:

$$\{y \in \Sigma_A^+ : y_i = x_i, |i| < K\},$$

será subconjunto de U. Finalmente la arbitrariedad en las elecciones de $U \in \tau_{d_\theta}$ y $x \in U$, nos permite concluir la contención, $\tau_{d_\theta} \subset \tau_{\text{prod}}$.
Por otro lado como los cilindros generan una base para la topología producto y estos son evidentemente abiertos de la topología inducida por la métrica, τ_{d_θ}, concluimos la equivalencia entre ambas topologías.
(La demostración para el caso de $(\Sigma_n^+,\ \tau_{prod}^+)$ se hace de manera análoga.) $\square$

Notación 2.2.7. En lo que sigue y mientras no amerite confusión, denotaremos la métrica, d_θ^+, definida sobre el conjunto, Σ_n^+, simplemente por d_θ.

La posibilidad de metrizar nos permite probar con mayor facilidad algunas propiedades topológicas de los conjuntos, $\Sigma_n,\ \Sigma_n^+$, como por ejemplo, la que nos entrega el siguiente resultado.

Proposición 2.2.8. Los espacios métricos (Σ_n, d_θ) y (Σ_n^+, d_θ) son totalmente disconexos.

Construidos los conjuntos Σ_n y Σ_n^+, nos queda el introducir sobre cada uno ellos una aplicación del conjunto en si mismo, para lo cual definimos:

Definición 2.2.9. Definimos la **aplicación de desplazamiento** o **shift**, σ (resp. σ^+), como la función que a cada punto x en Σ_n (resp. Σ_n^+) le asocia el elemento:

$$\sigma(x)_i = x_{i+1} \qquad i \in \mathbb{Z},$$

respectivamente,

$$\sigma^+(x)_i = x_{i+1} \qquad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Definición 2.2.10. Dados los conjuntos, $\Sigma_n,\ \Sigma_n^+$ y las aplicaciones de desplazamiento, σ, σ^+ definimos respectivamente los Sistemas Dinámicos (Σ_n, σ), (Σ_n^+, σ^+), los cuales serán denotados por, **Espacio Simbólico o Full-Shift en n-símbolos en dos direcciones** y **en una dirección**, respectivamente.

Proposición 2.2.11. I. La aplicación de desplazamiento, σ, define un homeomorfismo de Σ_n en si mismo.

II. La aplicación de desplazamiento, σ^+, define una función continua de Σ_n^+ en si mismo

Demostración. Definimos σ^{-1} como aquella función que a cada punto $x \in \Sigma_n$ le asocia el elemento:

$$\left\{\sigma^{-1}(x)\right\}_i = \{x\}_{i+1}.$$

De este modo para todo $x \in \Sigma_n$ tendremos:

$$\sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma(\sigma^{-1}(x)) = x$$

y σ será invertible.
Dado $\epsilon > 0$, escojamos el entero positivo $K > 0$ de modo que $\theta^{K-1} < \epsilon$, así para todo par de puntos $x, y \in \Sigma_n$ con $d_\theta(x,y) < \theta^K$ tendremos:

$$d_\theta(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \theta^{K-1} < \epsilon,$$
$$d_\theta(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \leq \theta^{K-1} < \epsilon.$$

Y tanto σ como σ^{-1} serán continuas.
(La continuidad de σ^+ se prueba de manera análoga.) □

Proposición 2.2.12. El subconjunto de Σ_n (resp. Σ_n^+), definido por todos los puntos periódicos de σ (resp. σ^+), es denso en Σ_n (resp Σ_n^+).

Demostración. Definimos para cada $x \in \Sigma_n$ y $m \in \mathbb{N}$, el elemento $y^m \in \Sigma_n$ por:

$$y_i^m = x_j \qquad \text{si } i \equiv j \pmod{m} \text{ para todo } 0 \leq j < m,\ i \in \mathbb{Z}.$$

Entonces y^m, será punto periódico de σ y:

$$\lim_{m\to\infty} d_\theta(x, y^m) \leq \lim_{n\to\infty} \theta^m = 0.$$

Luego el conjunto de todos los puntos periódicos de σ, será denso en Σ_n.
(La demostración para el caso de (Σ_n, σ^+) se hace de manera análoga) □

2.2.2. Sub-Shift de Tipo Finito

Antes de comenzar con nuestro segundo ejemplo, deberemos dar algunas definiciones.

Definición 2.2.13. Sean $m,\ p,\ i,\ j$ enteros positivos, $1 \leq i,\ j \leq m$ y M matriz de $m \times m$. Entonces denotamos por:

1. $M_{i,j}$, la (i,j)-esima entrada de M,
2. M^p, la p-esima potencia de M y $M_{i,j}^p$ la entrada (i,j)-esima de M^p.

Diremos además que:

1. M es **positiva** si para todo $1 \leq i,\ j \leq k$ tenemos $M_{i,j} > 0$.
2. M es **aperiódica** si existe entero positivo $S > 0$, de modo que M^S sea positiva.

Definición 2.2.14. Dado el entero $n \geq 2$ y la matriz cuadrada A, de orden n, con entradas en $\{0,1\}$, definimos:

$$\Sigma_A = \{x \in \Sigma_n : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.4}$$

$$\Sigma_A^+ = \{x \in \Sigma_n^+ : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}^+\}. \tag{2.5}$$

Definición 2.2.15. Finalmente la matriz, A, será llamada, **de transición**, denotaremos además por σ_A, σ_A^+ las respectivas restricciones de σ, σ^+ a los conjuntos Σ_A, Σ_A^+.

Lema 2.2.16. Los espacios Σ_A, Σ_A^+ equipados con la topología del subespacio son compactos.

Demostración. Por la compacidad de Σ_n, la prueba del **lema** estará en demostrar que, Σ_A es un conjunto cerrado de Σ_n o en forma equivalente el complemento de Σ_A que denotaremos por $(\Sigma_A)^c$ define un conjunto abierto de Σ_n. Dado $x \in (\Sigma_A)^c$, sea $i \in \mathbb{Z}$ de modo que $A_{x_i,x_{i+1}} = 0$. Luego:

$$x \in [x_i, x_{i+1}]_i \subset (\Sigma_A)^c$$

y $(\Sigma_A)^c$ será abierto en Σ_n. De este modo Σ_A será cerrado en Σ_n y podemos concluir su compacidad.
(La demostración para el caso de Σ_A^+ se hace de manera equivalente) $\square$

Los siguiente resultados nos vendrán a mostrar, la íntima relación que existe entre las propiedades dinámicas de la aplicación σ y la matriz de transición A.

Lema 2.2.17.

I. El espacio topológico Σ_A es invariante bajo σ_A y $\sigma_A(\Sigma_A) = \Sigma_A$.

II. Si la matriz de transición, A, de orden n no tiene fila ni columna idénticamente cero, entonces Σ_A^+ es invariante bajo σ_A^+ y $\sigma_A^+(\Sigma_A^+) = \Sigma_A^+$.

Demostración.

I. Dado $y \in \sigma_A(\Sigma_A)$ sea $x \in \Sigma_A$ tal que $\sigma(x) = y$. Entonces para todo $i \in \mathbb{Z}$ tendremos:

$$A_{y_i,y_{i+1}} = A_{x_{i+1},x_{i+2}} \neq 0.$$

Así y estará contenido en Σ_A y $\sigma(\Sigma_A) \subset \Sigma_A$.
Por otro lado para $x \in \Sigma_A$, el elemento y, definido por:

$$y_i = x_{i+1}, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

está contenido en Σ_A y cumple con:

$$\sigma(y) = x.$$

II. Dado $y \in \sigma_A^+(\Sigma_A^+)$ sea $x \in \Sigma_A^+$ tal que $\sigma^+(x) = y$. De este modo para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ tendremos:

$$A_{y_i,y_{i+1}} = A_{x_{i+1},x_{i+2}} \neq 0.$$

Así y estará contenido en Σ_A^+ y $\sigma^+(\Sigma_A^+) \subset \Sigma_A^+$.
Por otro lado como en A no hay fila ni columna idénticamente cero, tendremos para cada $x \in \Sigma_A^+$ la existencia de un entero $j \in \{0, 1 \ldots, n\}$ de modo que $A_{j,x_0} \neq 0$. Así el elemento y, definido por, $y_0 = j$ y para $i \geq 1$, $y_i = x_{i-1}$, estará contenido en Σ_A^+ y cumplirá con:

$$\sigma_A^+(y) = x.$$

$\square$

Definición 2.2.18. Dada la matriz de transición, A, sin fila ni columna idénticamente cero, definimos los sistemas dinámicos $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$, $(\Sigma_A^+,\ \sigma_A^+)$ los cuales serán respectivamente llamados por, **Sub-Shift de tipo finito en dos direcciones** y en **una dirección**.

Teorema 2.2.19. Los sistemas dinámicos (Σ_A, σ_A), (Σ_A^+, σ_A^+) son topológicamente mezclantes si y solo si la matriz de transición, A es aperiódica.

Demostración. Supongamos A aperiódica. Entonces existe un natural $M \geq 2$, de modo que para todo par de enteros i, j con $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ tengamos:

$$A_{i,j}^M \neq 0.$$

Ahora, para cada $m \geq M$ y cada par de abiertos U, V de Σ_A, con $u \in V$, $v \in V$ existe $t > 0$ de modo que los cilindros $[u_{-t+1}, \dots, u_0, \dots, u_{t-1}]$, $[v_{-t+1}, \dots, v_0, \dots, v_{t-1},]$ estén respectivamente contenidos en U y V. Consideremos una palabra permitida $\rho_0 \dots \rho_m$ con $\rho_0 = u_{t-1}$ y $\rho_m = v_{-t+1}$ Así, el elemento $z \in \Sigma_A^+$ definido para $i \in \mathbb{Z}$ por:

$$z_i = \begin{cases} v_i & \text{si } i \leq t-1; \\ \rho_{i+1-t} & \text{si } i \in \{t, \dots, t+m-2\}; \\ u_{i+2-2t-m} & \text{si } i \geq t+m-1, \end{cases} ,$$

estará contenido en $\sigma_A^{2t+m-2}(U) \cap V$ y σ_A será fuertemente mezclante.

Por otro lado si suponemos σ_A débilmente mezclante, entonces para todo par $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ existirá un entero $M_{i,j}$ de modo que, para todo $m \geq M$ tengamos:

$$\sigma_A([i]_0)^m \cup [j]_0 \neq \emptyset.$$

De este modo si elejimos $M = \sup_{i,j}(M_{i,j})$, para cada $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ tendremos, $\sigma_A([i]_0)^M \cup [j]_0 \neq \emptyset$. Así para cada $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ existirá una palabra permitida $p_0 \dots p_M$ en Σ_A^+ con $p_0 = i$ y $p_m = j$. De esta manera A^M sera positiva y A será aperiódica.
(La demostración para el caso de σ_A^+ se hace de manera análoga.) $\square$

Corolario 2.2.20. Sea A, una matriz de transición aperiódica y $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en Σ_A^+. Entonces el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_A^{-k}\{y_k\}$ es denso en Σ_A^+.

Demostración. Dada A matriz aperiódica, sea M un entero positivo de modo de tener $A^M > 0$. Entonces dado $x \in \Sigma_A^+$, existe para cada $j \geq 0$, una palabra permitida $p_{0,j}p_{1,j} \dots p_{M,j}$ tal que, $p_{0,j} = x_j$ y $p_{M,j} = y_{M+j,0}$. Luego $z^j \in \Sigma_A^+$ definido para $i \in \mathbb{Z}^+$ por:

$$z_i^j = \begin{cases} x_i & \text{si } i \leq j; \\ p_{i-j} & \text{si } i \in \{j+1, \dots, M+j-1\}; \\ y_{M+j, i-M-j} & \text{si } i \geq M+j \end{cases} ,$$

es un punto de $(\sigma_A^+)^{-(M+j)}\{y_{m+M}\}$. Finalmente de la arbitrariedad en la elección de x y de j obtenemos la densidad sobre Σ_A^+ del conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_A^{-k}\{y_k\}$. $\square$

En lo que sigue y mientras no amerite confusión, escribiremos σ en lugar de σ_A, σ_A^+

2.2.3. Flujos de Suspensión

Dada la matriz de transición A, sea (Σ_A^+, σ), un Sub-Shift de tipo finito y $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$. Entonces definimos el **Espacio de Suspensión de Peso** f, Σ_A^f, como el cuociente de $\Sigma_A^+ \times \mathbb{R}$, por la acción de:

$$\begin{aligned} T_f : \Sigma_A^+ \times \mathbb{R} &\to \Sigma_A^+ \times \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto (\sigma(x), y - f(x)). \end{aligned}$$

Observemos que el conjunto:

$$\widehat{\Sigma_A^f} := \{(x,y) \in \Sigma_A \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\},$$

es un dominio fundamental.
Denotaremos por $[x,t]$ a la clase de equivalencia en Σ_A^f de $(x,t) \in \Sigma_A \times \mathbb{R}$.

Definición 2.2.21. Dada la matriz de transición, A y $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$, definimos el flujo:

$$\tilde{\sigma}_f : (\Sigma_A \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \to \Sigma_A \times \mathbb{R},$$

por, $\tilde{\sigma}_{f,t}(x,y) = (x, y+t)$. Notemos:

$$\tilde{\sigma}_f \circ T_f = T_f \circ \tilde{\sigma}_f$$

luego $\tilde{\sigma}_f$ induce un flujo en Σ_A^+. Definimos entonces el **Flujo de Suspensión de Peso** f:

$$\sigma_f : \Sigma_A^f \times \mathbb{R}^+ \to \Sigma_A^f,$$

por, $\sigma_{f,t}[x,y] = [x, y+t]$.

Dadas las anteriores definiciones, tenemos el siguiente resultado que viene a relacionar las órbitas periódicas de la aplicación de desplazamiento con las órbitas periódicas del flujo de suspensión.

Proposición 2.2.22. Dada la matriz de transición aperiódica A y la función $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$ y (Σ_A^f, σ_f), su suspensión. Si $x \in \Sigma_A^+$ es un punto periódico de σ de periodo mínimo $m \geq 1$, entonces la órbita de $[x,0] \in \Sigma_A^+$ por σ_f es periódica de periodo mínimo $S_m f(x)$. Inversamente, si $x \in \Sigma_A^+$ es tal que la órbita de $[x,0] \in \Sigma_A^f$ por σ_f es periódica, entonces $x \in \Sigma_A^+$ es periódico por σ. En particular existe una correspondencia biunívoca entre las órbitas periódicas del shift con las órbitas periódicas del flujo de suspensión.

Demostración. Dado el punto periódico, $x \in \Sigma_A^+$, de periodo mínimo, m, sea $\mathcal{O}_\sigma(x)$ la órbita de x. Entonces para $[x,0] \in \Sigma_A^f$ tendremos:

$$\sigma_{f,S_m f(x)}([x,0]) = [x, S_m f(x)] = [\sigma^m(x), 0] = [x,0]$$

y la órbita $\mathcal{O}_{\sigma_f}([x,0])$ en Σ_A^f por σ_f será periódica. Por otro lado, sea $x \in \Sigma_A^+$ tal que la órbita $[x,0]$ por σ_f es periódica de periodo $T > 0$. Entonces:

$$[x,T] = \sigma_{f,T}([x,0]) = [x,0].$$

Luego existe un entero $m \geq 1$ tal que:

$$(\sigma^m(x), T - S_m f(x)) = T_f^m((x,T)) = (x,0).$$

Es decir, $\sigma^m(x) = x$ y $T = S_m f(x)$.
Falta demostrar que si $x \in \Sigma_A^+$ es periódico de periodo mínimo m, entonces $S_m f(x)$ es el periodo mínimo de $[x,0]$ por σ_f. En efecto, si $T > 0$ es el periodo mínimo de $[x,0]$, por σ_f, entonces $T \leq S_m f(x)$ y como vimos arriba existe $m' \geq 1$ tal que $\sigma^{m'}(x) = x$ y $S_{m'} f(x) = T$. Luego $m' \geq m$ y $T \geq S_{m'}(f(x)) \geq S_m f(x)$. Por lo tanto $T = S_m f(x)$ y $m' = m$. $\square$

2.3. Teoría Ergódica

Definición 2.3.1. Dados los espacios medibles $(X_1, \mathfrak{B}_1)$, $(X_2, \mathfrak{B}_2)$, sea μ una medida en $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ y $T : B_1 \to B_2$ una función medible. Entonces definimos la medida $T_*\mu$ en $\mathfrak{B}_2$ por:

$$T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Definición 2.3.2. Dado el espacio de probabilidad $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, sea $T : X \to X$ una función medible, tal que $T_*\mu = \mu$. Entonces definimos el **Sistema Dinamico Medible** $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$, como el cuadruple formado por:

1. El espacio de probabilidad $(X, \mathfrak{B}, \mu)$.
2. Una función medible $T : X \to X$.

Definición 2.3.3. Dados los espacios de probabilidad $(X_1,\ \mathcal{B}_1,\ \mu_1)$, $(X_2,\ \mathcal{B}_2,\ \mu_2)$, diremos que $T : X_1 \to X_2$ **preserva medida** si T es médible y $T_*\mu_1 = \mu_2$.

Definición 2.3.4. Dado el espacio medible $(X,\ \mathfrak{B})$ y la transformación medible $T : X \to X$, diremos que la medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es $T-$**inavariante**, si T preserva medida. Denotaremos el conjunto de las medidas probabilidad $T-$**invariantes** por:

$$\mathcal{M}_T(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)\}.$$

Es decir $\mathcal{M}_T(X)$ es el conjunto de las medidas de probabilidad que hacen de T una función que preserva medida.

Lema 2.3.5. Dado el espacio medible, $(X, \mathfrak{B})$, y la transformación medible, $T : X \to X$, tendremos que la medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}(X)$ será $T-$invariante si y solo si para toda función $g \in \mathrm{L}^1(X, \mathbb{R})$ tenemos:

$$\mu(g \circ \sigma) = \int g \circ \sigma \; d\mu \; = \int g \; d\mu = \mu(g).$$

Demostración. Supongamos, $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $T-$invariante, entonces para todo $B \in \mathfrak{B}$ tenemos:

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B).$$

De esta manera para cualquier $B \in \mathfrak{B}$ tenemos:

$$\int \mathbb{1}_B \circ T d\mu = \int \mathbb{1}_{T^{-1}(B)} d_\mu = \mu(T^{-1}(B))$$

$$= \mu(B) = \int \mathbb{1}_B d\mu.$$

Y la igualdad será cierta para toda función indicatriz y por ende para toda función simple. Ahora como para toda función no negativa $f \in \mathrm{L}^1(X)$ existe sucesión creciente $\{f_n\}_n^\infty$ de funciones simples convergentes en forma puntual a f de modo que:

$$\int f_n \circ T d\mu = \int f_n d\mu.$$

Entonces aplicando el **Teorema de Convergencia Monotona** a ambos lado de la anterior igualdad, obtendremos:

$$\int f \circ T d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \circ T d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Luego para $f \in \mathrm{L}^1(X, \mathbb{R})$ la igualdad quedará demostrada al considerar la parte positiva y negativa de f.

Si suponemos ahora:

$$\mu(g \circ \sigma) = \int g \circ \sigma \; d\mu \; = \mu(g) = \int g \; d\mu,$$

para toda función $g \in \mathrm{L}^1(X, \mathbb{R})$, tendremos para cualquier $B \in \mathfrak{B}$, la igualdad:

$$\mu(B) = \int \mathbb{1}_B d\mu = \int \mathbb{1}_B \circ T d\mu$$

$$\int \mathbb{1}_{T^{-1}(B)} d_\mu = \mu(T^{-1}(B)).$$

Lo que concluye con la demostración. $\square$

2.3.1. Medida de Markov

Procederemos a introducir sobre Sub-Shift de tipo finito una familia de medidas $\sigma-$invariantes, denominadas **Medidas de Markov**. Para lo cuál necesitaremos algunas definiciones:

Definición 2.3.6. 1. Una matriz cuadrada P se dirá **estocástica** si sus entradas son no negativas y la suma en cada una de sus filas es igual a 1.

2. Las matrices cuadradas P y A, se dirán **compatibles** si:

$$A_{i,j} = 0 \leftrightarrow P_{i,j} = 0$$

3. Un vector de probabilidad, $\vec{p}$, se dice **estacionario** respecto a la matriz, P si tenemos la igualdad $\vec{p}P = \vec{p}$

De esta manera dada la matriz de transición, A, sea (Σ_A, σ), un sub-shift de tipo finito, tomemos P matriz estocástica compatible con A y $\vec{p}$, vector de probabilidad estacionario respecto a P. Entonces definimos sobre los cilindros de Σ_A la medida que llamaremos de **Markov**, $\mu_{P,\vec{p}}$, por:

$$\mu_{P,\vec{p}}([a_0, \ \ldots, \ a_k]_s) = p_{a_0} P_{a_0,a_1} \ldots P_{a_{k-1},a_k}.$$

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.3.7. La medida de probabilidad $\mu_{P,\vec{p}}$ es $\sigma-$invariante.

Demostración. Dado el cilindro $[a_0a_1 \ldots a_m]_s$ de σ_A tenemos:

$$\sigma^{-1}([a_0a_1 \ldots a_m]_s) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots n\}: A_{i,a_0}=1} [ia_0a_1 \ldots a_m]_s.$$

Así:

$$\begin{aligned}
\mu_{P,\vec{p}}(\sigma^{-1}([a_0a_1 \ldots a_m]_s)) &= \sum_{i \in \{1,\ldots n\}: A_{i,a_0}=1} p_i P_{ia_0} P_{a_0a_1} P_{a_1a_2} \cdots P_{a_{m-1}a_m} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} p_i P_{ia_0} P_{a_0a_1} P_{a_1a_2} \cdots P_{a_{m-1}a_m} \\
&= p_{a_0} P_{a_0a_1} P_{a_1a_2} \cdots P_{a_{m-1}a_m} \\
&= \mu_{P,\vec{p}}([a_0a_1 \ldots a_m]_s)
\end{aligned}$$

y $\mu_{P,\vec{p}}$ será $\sigma-$invariante.

□

Llamaremos al sistema dinámico medible, $(\Sigma_A^+, \ \mathcal{B}, \mu_{P,\vec{p}}, \sigma)$, **Shift de Markov correspondiente al par** $(P, \vec{p})$ o simplemente, **Shift de Markov**, mientras no haya duda respecto al par $(P, \vec{p})$ que estemos usando.
Cuando todas las entradas de A son iguales a 1 y todas las columnas de P son iguales a $\vec{p}$, tenemos $\sum_A = \sum_n$ y la medida $\mu_{P,\vec{p}}$ es denotada simplemente por $\mu_{\vec{p}}$ y será llamada **Medida de Bernoulli**.

2.3.2. Medidas invariantes sobre el Espacio de Suspensión

Dada la matriz de transición A, sea (Σ_A^+,σ) el Sub-Shift de tipo finito respectivo, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$ y $\Pi_f : \Sigma_A^+ \times \mathbb{R} \to \Sigma_A^f$, la aplicación cuociente.

Definición 2.3.8. Dada una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}\left(\Sigma_A^f\right)$ diremos que esta es σ_f-**invariante** si para todo conjunto medible B y $t \geq 0$ tenemos:

$$\mu\left(\sigma_{f,t}^{-1}(B)\right) = \mu(B).$$

El espacio de la medidas de probabilidad σ_f-invariantes, será denotado por $\mathcal{M}_{\sigma_f}\left(\Sigma_A^f\right)$.
Ahora si tomamos una médida $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A^+)$ y denotamos por m_L, **la medida de Lebesgue en** $\mathbb{R}$, entonces la medida inducida en Σ_A^f por el producto $\mu \times m_L$:

$$(\Pi_f)_*\left(\mu \times m_L|_{\widehat{\Sigma_A^f}}\right),$$

resultará ser σ_f-invariante.
Así, dada cualquier medida $\sigma-$invariante μ, la medida obtenida al normalizar el producto $\mu \times m_L$, inducirá una medida en $\mathcal{M}_{\sigma_f}\left(\Sigma_A^f\right)$ y tendremos por tanto una inyección de $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A^+)$ en $\mathcal{M}_{\sigma_f}\left(\Sigma_A^f\right)$, que de hecho, tal como nos dice el siguiente resultado, resultará ser biyectiva:

Proposición 2.3.9. (ver [4]) Dada la matriz de transición A, y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$. Sea $\Pi_f : \Sigma_A^+ \times \mathbb{R} \to \Sigma_A^f$, la aplicación cuociente. Entonces la función:

$$\begin{aligned} W : \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{M}_{\sigma_f}(\Sigma_A^f) \\ \mu &\mapsto (\Pi_f)_*\left(\mu \times m_L|_{\widehat{\Sigma_A^f}}\right), \end{aligned}$$

es una biyección.

2.3.3. Ergodicidad

Definición 2.3.10. Dado el sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, diremos que $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ es **Ergódica respecto a** T si para todo boreliano $B \in \mathcal{B}$ con $T^{-1}(B) = B$ tenemos $\mu(B) = 0$ o $\mu(X \setminus B) = 0$.

Ejemplo 2.3.11. (**ver [27, Teorema 1.13]**) Sea P una matriz estocástica y $\vec{p}$ vector de probabilidad estacionario respecto a P. Entonces la Medida de Bernoulli $\mu_{\vec{p}}$ definida en la **Sección (2.2.1)** es ergódica, si además P es aperiódica entonces la Medida de Markov $\mu_{P,\vec{p}}$ definida en la **Sección (2.3.1)** será ergódica.

Proposición 2.3.12. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible tal que μ es ergódica. Entonces para todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(T^{-1}B\Delta(B)) = 0$ tenemos $\mu(B) = 0$ o $\mu(B) = 1$.

Demostración. Para $m \geq 0$ tenemos:

$$T^{-m}B\Delta B \subset \bigcup_{i=0}^{m-1}(T^{-(i+1)}B\Delta T^{-i}B) = \bigcup_{i=0}^{m-1} T^{-i}(T^{-1}B\Delta B).$$

De este modo por la T-invarianza de μ:

$$\mu(T^{-m}B\Delta B) \leq n\mu(T^{-1}B\Delta B) = 0.$$

Entonces, si definimos:

$$B' = \bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty} T^{-i}B,$$

tendremos:

$$\mu\left(B\Delta\bigcup_{i=m}^{\infty} T^{-i}B\right) \leq \sum_{i=m}^{\infty}\mu(B\Delta T^{-i}B) = 0.$$

Finalmente obtendremos:

$$\mu(B\Delta B') = 0.$$

Y podremos finalmente concluir:

$$\begin{aligned} T^{-1}B' &= \bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty} T^{-(i+1)}B \\ &= \bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty} T^{-i}B = B'. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.13. Dado el sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ las siguientes afirmaciones serán equivalentes:

I. μ es ergódica.

II. Toda función $f \in L^1(X, \mathfrak{B}, \mu)$ con $f \circ T = f$ $\mu-$c.t.p, es constante $\mu-$c.t.p.

Demostración. Supongamos μ ergódica. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ con $f \circ T = f$ $\mu-$c.t.p. Definimos para $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$X(k, m) = \left\{x \in X : \frac{k}{2^m} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^m}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right).$$

El cual pertenece a $\mathfrak{B}$ al ser f medible. Ahora:

$$T^{-1}(X(k,m))\Delta X(k,m) = T^{-1}(X(k,m)) \setminus X(k,m) \bigcup X(k,m) \setminus T^{-1}(X(k,m))$$

$$\subset \{x \in X : f(T(x)) \neq f(x)\}.$$

Entonces:

$$\mu(T^{-1}(X(k,m))\Delta X(k,m)) = 0.$$

Y por la ergodicidad de μ tendremos $\mu(X(k,m)) = 1$ o $\mu(X(k,m)) = 0$. Ahora, como para m fijo la union $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X(k,m)$ es disjunta, tendremos:

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X(k,m)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(X(k,m)) = \mu(X) = 1.$$

Entonces existe un único k_m de modo que $\mu(X(k_m,m)) = 1$. Sea:

$$Y = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} X(k_m,m).$$

Entonces $\mu(Y) = 1$ y por construcción f es constante en Y. Luego f es constante $\mu-$c.t.p.
Supongamos ahora (II). Sea $B \in \mathfrak{B}$ de modo que $B = T^{-1}(B)$. Entonces la función indicatriz $\mathbb{1}_B$ está en $L^1(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ y cumple con $\mathbb{1}_B \circ T = \mathbb{1}_B$. De este modo $\mathbb{1}_B$ será constante μ-c.t.p y por ende $\mathbb{1}_B = 1$ μ-c.t.p o $\mathbb{1}_B = 0$ μ-c.t.p. Con lo cual tendremos:

$$\mu_B = 0 \text{ o } \mu_B = 1.$$

y μ será ergódica. $\square$

Capítulo 3

Introducción al Formalismo Termodinámico

3.1. Entropía Métrica

A lo largo de todo el capítulo, el trio, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, representará un espacio de probabilidad.

Definición 3.1.1. Definimos una **partición,** $\mathcal{C}$ de $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, como una colección disjunta de elementos de $\mathfrak{B}$, cuya unión es todo X. Diremos que la partición $\mathcal{C}$, es **finita**, si el número de sus elemetos es finito.

Definición 3.1.2. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, dos particiones de, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Entonces definimos la partición:

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \{C \cap D : C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}.$$

Definición 3.1.3. Dada la partición finita $\mathcal{C}$, definimos la **Entropía de la partición** $\mathcal{C}$ por:

$$H_\mu(\mathcal{C}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} -\mu(C) \log \mu(C). \tag{3.1}$$

Lema 3.1.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, dos particiones finitas de, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Entonces:

$$H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leq \mathrm{H}_\mu(\mathcal{C}) + H_\mu(\mathcal{D}).$$

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) - H_\mu(\mathcal{C}) &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{D \in \mathcal{D}} -\mu\left(C \cap D\right) \log\left(\mu\left(C \cap D\right)\right) - \sum_{C \in \mathcal{C}} -\mu(C) \log(\mu(C)) \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{D \in \mathcal{D}} -\mu\left(C \cap D\right) \log\left(\mu\left(C \cap D\right)\right) - \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{D \in \mathcal{D}} \mu(C \cap D) \log(\mu(C)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{C\in\mathcal{C}} \sum_{D\in\mathcal{D}} -\mu\left(C\cap D\right)\log\frac{\left(\mu\left(C\cap D\right)\right)}{\left(\mu\left(C\right)\right)} \\
&= \sum_{C\in\mathcal{C}} \sum_{D\in\mathcal{D}} -\mu\left(C\right)\frac{\mu\left(C\cap D\right)}{\mu\left(C\right)}\log\frac{\left(\mu\left(C\cap D\right)\right)}{\left(\mu\left(C\right)\right)}.
\end{aligned}
$$

Luego, de la concavidad en $[0,1]$ de la función:

$$
f(x) = \begin{cases} -x\log x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases},
$$

obtenemos para cada $D\in\mathcal{D}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{C\in\mathcal{C}} \mu\left(C\right) f\left(\frac{\mu\left(C\cap D\right)}{\mu\left(C\right)}\right) &\leq f\left(\sum_{C\in\mathcal{C}} \mu(C)\left(\frac{\mu\left(C\cap D\right)}{\mu\left(C\right)}\right)\right) \\
&= f(\mu(D)).
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
H_\mu(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}) - H_\mu(\mathcal{C}) &\leq \sum_{D\in\mathcal{D}} \mu(D)\log(\mu(D)) \\
&= H_\mu(\mathcal{D})
\end{aligned}
$$

y concluimos finalmente la desigualdad:

$$
H_\mu(\mathcal{C}\vee\mathcal{D}) \leq H_\mu(\mathcal{C}) + H_\mu(\mathcal{D}).
$$

□

Lema 3.1.5. Si la sucesión, $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, satisface $\inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{a_m}{m} > -\infty$ y para todo $m, r\in\mathbb{N}$ tenemos $a_{m+r}\leq a_m + a_r$, entonces $\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}$ existe y es igual a $\inf_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_m}{m}$.

Demostración. Sea $m>0$. Dado $j>0$ escribamos, $j=km+r$ donde $0\leq r<m$. Luego:

$$
\frac{a_j}{j} = \frac{a_{km+r}}{km+r} \leq \frac{a_{km}}{km} + \frac{a_r}{km} \leq \frac{ka_m}{km} + \frac{a_r}{km}.
$$

Haciendo tender j a infinito, k tenderá a infinito y tendremos:

$$
\limsup_{j\to\infty}\frac{a_j}{j} \leq \frac{a_{m\in\mathbb{N}}}{m}
$$

Entonces:

$$
\limsup_{j\to\infty}\frac{a_j}{j} \leq \inf_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_m}{m}.
$$

Ahora, como:

$$
\liminf_{j\to\infty}\frac{a_j}{j} \geq \inf_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_m}{m}.
$$

y

$$
\inf_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_m}{m} > -\infty,
$$

podemos finalmente concluir que $\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m} = \inf_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_m}{m}$. □

Definición 3.1.6. Sea $T : X \to X$ una tranformación que preserva medida y $\mathcal{C}$ una partición de $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Entonces definimos la partición:

$$T^{-1}(\mathcal{C}) = \{T^{-1}C : C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposición 3.1.7. Sea $T : X \to X$, una tranformación que preserva medida y $\mathcal{C}$, una partición finita de $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Entonces el límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-k+1}(\mathcal{C})), \tag{3.2}$$

existe.

Demostración. Si definimos para cada entero $m \geq 1$:

$$a_m = H_\mu(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-m+1}(\mathcal{C})),$$

tendremos del **Lema (3.1.4)**, para cada $m, n \geq 1$, la desigualdad:

$$a_{m+n} \leq H_\mu(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-m+1}(\mathcal{C})) + H_\mu(T^{-m}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-m-n+1}(\mathcal{C})).$$

Ahora, de la $T-$invarianza de μ, obtenemos:

$$H_\mu(T^{-m}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-m-n+1}(\mathcal{C})) = H_\mu(T^{-m}(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-n+1}(\mathcal{C})))$$

y podemos finalmente concluir que:

$$a_{m+k} \leq a_m + a_n.$$

Entonces por el **Lema (3.1.5)**, el límite:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-m+1}(\mathcal{C})),$$

existe y es igual a:

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m} H_\mu(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-m+1}(\mathcal{C})).$$

□

Definición 3.1.8. Sea $T : X \to X$, una tranformación que preserva medida y $\mathcal{C}$, una partición finita de $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Entonces definimos la **Entropía de T respecto a la Partición** $\mathcal{C}$, por:

$$h(T, \mathcal{C}, \mu) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathrm{H}(\mathcal{C} \vee T^{-1}\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-k+1}(\mathcal{C})).$$

Luego, definimos la **Entropía de T respecto a la Medida** μ, por:

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{C}} h(T, \mathcal{C}, \mu).$$

3.2. Entropía Topológica

A lo largo de toda la sección el par (X,τ) representará un espacio topológico compacto.

Definición 3.2.1. Definimos un **cubrimiento** $\mathcal{A}$ de (X,τ), como una colección de subconjuntos de X cuya unión es todo X. El cubrimiento $\mathcal{A}$ se dirá, **abierto**, si sus elemetos son abiertos de τ y **finito**, si el número de sus elemetos es finito.

Definición 3.2.2. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos cubrimientos abiertos de (X,τ). Entonces definimos:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

En forma similar, dada una sucesión finita , $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^{j-1}$, de cubrimientos abiertos de (X,τ), definimos:

$$\bigvee_{i=0}^{j-1} \mathcal{A}_i = \left\{ \bigcap_{i=0}^{j-1} A_i : A_i \in \mathcal{A}_i,\ i \in \{0,\dots,j-1\} \right\}.$$

Definición 3.2.3. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos cubrimientos abiertos de (X,τ). Entonces diremos que, $\mathcal{A}$ es **un refinamiento** de $\mathcal{B}$, si cada elemento de $\mathcal{A}$ es subconjunto de algun elemento de $\mathcal{B}$.

Definición 3.2.4. Sea $\mathcal{A}$, un cubrimiento abierto de (X,τ) y $T : X \to X$, una transformación continua. Entonces definimos el cubrimiento abierto, $T^{-1}(\mathcal{A})$, por:

$$T^{-1}(\mathcal{A}) = \left\{T^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

Definición 3.2.5. Sean $\mathcal{A}$ y $\bar{\mathcal{A}}$ dos cubrimientos abiertos de (X,τ), tales que $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$. Entonces diremos que $\bar{\mathcal{A}}$ es un **subcubrimiento** realativo a $\mathcal{A}$ de (X,τ).

Por la compacidad de (X,τ), todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ tendrá un subcubrimiento finito.

Definición 3.2.6. Dado $\mathcal{A}$, un cubrimiento abierto de (X,τ), definimos:

$$N(\mathcal{A}) = \min\{\#\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ es subcubrimiento finito de } \mathcal{A}\}$$

y la **Entropía del cubrimiento** $\mathcal{A}$ por:

$$H(\mathcal{A}) = \log N(\mathcal{A}).$$

Proposición 3.2.7. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos cubrimientos abiertos de (X,τ). Entonces:

I $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B})$.

II Si además, $T : X \to X$, es continua, tendremos

$$H(T^{-1}(\mathcal{A})) \leq H(\mathcal{A}).$$

Demostración. I. Sea $\mathcal{A}'$ (resp.$\mathcal{B}'$), un subcubrimiento de $\mathcal{A}$ (resp $\mathcal{B}$) tal que $\#\mathcal{A}' = N(\mathcal{A})$ (resp.$\#\mathcal{A}' = N(\mathcal{A})$). Entonces $\mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, tal que $N(\mathcal{A}' \vee \mathcal{B}') \leq N(\mathcal{A})N(\mathcal{B})$.
Luego:

$$N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq N(\mathcal{A}' \vee \mathcal{B}') \leq N(\mathcal{A})N(\mathcal{B})$$

y

$$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}).$$

II. Sea $\mathcal{A}'$, un subcubrimiento finito de cardinalidad minimal de $\mathcal{A}$. Entonces, $T^{-1}(\mathcal{A}')$ es un subcubrimiento finito de $T^{-1}(\mathcal{A})$ y:

$$N(T^{-1}(\mathcal{A})) \leq N(\mathcal{A}).$$

Luego:

$$H(T^{-1}(\mathcal{A})) \leq H(\mathcal{A}).$$

□

Proposición 3.2.8. Sea $\mathcal{A}$, un cubrimiento abierto de (X, τ) y $T : X \to X$, una transformación continua. Entonces el límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right),$$

existe.

Demostración. Si definimos para $m \geq 1$, el número:

$$a_m = \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{A}),$$

de la (**Proposición 3.2.7 (I)**), obtendremos para cada $m, k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{m+k} &= H\left(\bigvee_{j=0}^{m+k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right) \\ &\leq H\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right) + H\left(T^{-m}\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right)\right). \end{aligned}$$

Entonces por (**3.2.7 (II)**), tenemos:

$$H\left(T^{-m}\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right)\right) \leq H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right)$$

y concluimos:

$$a_{m+k} = a_m + a_k.$$

Finalmente por el **Lema (3.1.5)**, el límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right)$$

existe y es igual a:

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m} H\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right).$$

□

Resultado que nos lleva a las siguientes definiciones.

Definición 3.2.9. Sea $\mathcal{A}$, un cubrimiento abierto de (X,τ) y $T : X \to X$, una transformación continua. Entonces definimos la **entropía de T relativa a $\mathcal{A}$**, por:

$$h(T,\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right).$$

Definición 3.2.10. Sea $T : X \to X$, una transformación continua. Entonces definimos la **entropía topológica de T**, por:

$$h_{top}(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(T,\mathcal{A}),$$

donde $\mathcal{A}$ recorre los cubrimientos abiertos de (X,τ).

3.3. Entropía de Bowen

A lo largo de toda esta sección el par, (X,d), representará un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una transformación continua.

Definición 3.3.1. Dado el entero positivo $k \geq 0$, definimos sobre X, la métrica d_k, por:

$$d_k(x,y) = \max\{d(T^i(x),T^i(y)) : i \in \{0,1,\dots,k-1\}\}.$$

Definición 3.3.2. Dado el entero $k \geq 0$ y $\epsilon > 0$, el conjunto $F \subseteq X$, se dirá $(k,\epsilon)-$**separado** respecto a T, si para todo par de puntos $x,\ y \in F$ con $x \neq y$ tenemos:

$$d_k(x,y) > \epsilon.$$

Proposición 3.3.3. ([27, pág. 168-176]) Dado el entero $k \geq 0$ y $\epsilon > 0$, definimos el número:

$$S_k(T,\epsilon) = \max\{\text{Cardinalidad}(F) : F \text{ es } (k,\epsilon) - \text{separado}\}.$$

Luego el límite:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log S_k(T,\epsilon),$$

existe y es igual a $h_{top}(T)$

3.4. Presión Topológica

En lo que sigue sean, (X, d) un espacio métrico compacto, $T : X \to X$ una transformación continua y $\phi : X \to \mathbb{R}$ una función continua.

Definición 3.4.1. Denotemos para todo $x \in X$ y todo entero $m \geq 0$:

$$S_m\phi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(T^i(x)).$$

Definición 3.4.2. Sea $\mathcal{A}$, un cubrimiento abierto de (X, d). Entonces definimos para cada $k \geq 1$, el número:

$$P_k(T, \phi, \mathcal{A}) = \inf \left\{ \sum_{B \in \mathcal{B}} \sup_{x \in B} \exp(S_k\phi(x)) : \mathcal{B} \text{ es un subcubrimiento finito de } \mathcal{A} \right\}.$$

Proposición 3.4.3. Sea $\mathcal{A}$, un cubrimiento abierto de (X, d). Entonces el límite:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log P_k(T,\ \phi, \mathcal{A}),$$

existe y es igual a:

$$\inf_k \frac{1}{k} \log P_k(T,\ \phi, \mathcal{A}).$$

Demostración. Dados los enteros, $k,\ m > 0$, sea $\mathcal{B}$, un subcubrimiento finito de, $\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{C}$ un subcubrimiento finito de, $\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B} \vee T^{-m}\mathcal{C}$, define un subcubrimiento finito de $\bigvee_{j=0}^{m+k-1} T^{-j}(\mathcal{A})$.
Así:

$$\begin{aligned}
&\sum_{B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}} \left(\sup_{x \in B \cap T^{-m}(C)} \exp(S_{m+k}\phi(x)) \right) \\
&\leq \sum_{B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}} \left(\sup_{x \in B} \exp(S_m\phi(x)) \sup_{x \in T^{-m}(C)} \exp(S_k\phi(T^m(x))) \right) \\
&\leq \left(\sum_{B \in \mathcal{B}} \sup_{x \in B} \exp(S_m\phi(x)) \right) \left(\sum_{C \in \mathcal{C}} \sup_{x \in C} \exp(S_k\phi(x)) \right).
\end{aligned}$$

Tendremos:

$$P_{m+k}(T, \phi, \mathcal{A}) \leq P_m(T, \phi, \mathcal{A}) P_k(T, \phi, \mathcal{A}).$$

Luego si para cada $m \geq 1$ definimos:

$$a_m = \log P_m(T,\ \phi, \mathcal{A}),$$

Entonces para cada $m \geq 1$:

$$a_{m+k} \leq a_m + a_k$$

y podremos gracias al **Lema (3.1.5)** concluir que el límite:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log P_m(T,\ \phi, \mathcal{A}),$$

existe y es igual a:

$$\inf_m \frac{1}{m} \log P_m(T,\ \phi, \mathcal{A}).$$

□

Definición 3.4.4. Definimos finalmente **la Presión Topológica de ϕ respecto a T** por:

$$P_T(\phi) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\mathcal{A}} \{P(T, \phi, \mathcal{A}) : \mathcal{A}\,\text{es un cubrimiento abierto de } X \text{ con}\,\text{diam}(\mathcal{A}) < \delta\}.$$

En forma equivalente a lo hecho al momento de introducir el concepto de **Entropía Topológica**, nos es posible definir la **Presión** a partir del uso de conjuntos $(k, \epsilon)-$separados.

Proposición 3.4.5. (ver [27, pág. 207-214]) Dado el entero $m \geq 0$ y $\epsilon > 0$, definimos el número:

$$P_k^B(T, \phi, \epsilon) = \sup \left\{ \sum_F \exp(S_k\phi(x)) : F\text{es } (k, \epsilon) - \text{separado} \right\}.$$

Luego el límite:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log P_k(T, \phi, \epsilon),$$

existe y es igual a $P_T(\phi)$.

Teorema 3.4.6. (**Principio Variacional (ver [27, Teorema 9.10]**)) Sea (X, d), un espacio métrico compacto, $T : X \to X$, una transformación continua y $\phi : X \to \mathbb{R}$, una función continua, entonces:

$$P_T(\phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_T(X)} \left\{ h_\mu(T) + \int \phi d\mu \right\}.$$

En particular para $\phi \equiv 0$ tendremos:

$$h_{top}(T) = \sup \{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}_T(X)\}.$$

Definición 3.4.7. Una medida de probabilidad $T-$invariante μ, se dirá **estado de equilibrio** del potencial, ϕ, si y solo si satisface la condición:

$$P(\phi) = h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu.$$

La siguiente proposición vendrá a enumerar algunas propiedades de la función definida sobre $\mathcal{C}(X)$ a través del uso de la Presión $P_T : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$.

Proposición 3.4.8. (**ver [27, Teorema 9,7]**)

I. La función $P_T : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ es monotona creciente. (i.e. Si $f \leq g$ entonces $P_T(f) \leq P_T(g)$).

II. La función $P_T : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ es convexa.
(i.e. para $0 \leq \alpha \leq 1$ tenemos que, $P_T(\alpha f + (1-\alpha)g) \leq \alpha P_T(f) + (1-\alpha)P_T(g)$).

III. La función $P_T : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ Es Lipschitz continua. (i.e.$|P(f) - P_T(g)| \leq ||f - g||_\infty$)

En lo que sigue cuando y mientras no amerite confusión denotaremos para $T : X \to X$, P en lugar de P_T

3.5. Entropía y Presión, algunos ejemplos.

Definición 3.5.1. Sea $T : X \to X$, una transformación que preserva medida, entonces diremos que la partición $\mathcal{C}$ de $(X, \mu, \mathfrak{B})$ define una **partición fuertemente generadora de** $\mathfrak{B}$, si salvo un conjunto de medida cero, tenemos:

$$\bigvee_{j=-\infty}^{\infty} T^{-j}(\mathcal{C}) = \mathfrak{B}.$$

Si ademas T es invertible, entonces la partición $\mathcal{C}$ de $(X, \mu, \mathfrak{B})$, se dirá **generadora de** $\mathfrak{B}$, si salvo un conjunto de medida cero, tenemos:

$$\bigvee_{j=0}^{\infty} T^{-j}(\mathcal{C}) = \mathfrak{B}.$$

Teorema 3.5.2. (**Kolmogorov-Sinai (ver [27, Teorema 4.17, 4.18])**) Sea $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ espacio medible y $T : X \to X$ una transformación preserva medida. Entonces si $\mathcal{C}$ define una partición fuertemente generadora de $\mathfrak{B}$ o T es invertible y $\mathcal{C}$ define un partición generadora de $\mathfrak{B}$, tendremos:

$$h_\mu(T) = h(T, \mathcal{C}, \mu).$$

3.5.1. Entropía Métrica en el Shift de Markov

Dada la matriz de orden n, A, sea, P una **matriz estocástica** compatible con A y $\vec{p}$ **vector de probabilidad estacionario** respecto a P. Entonces consideremos el **Shift de Markov (Definición (2.3.6))**, $(\Sigma_A^+,\ \mathcal{B}, \mu_{P,\vec{p}}, \sigma)$. Luego notemos que para la partición de Σ_A^+:

$$\mathcal{C} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\},$$

formada por los cilindros centrados en el cero, de largo 1, tenemos:

$$H(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{n-1} -\mu_p([i]) \log(\mu_p([i])) = \sum_{i=0}^{n-1} -p_i \log p_i < \infty.$$

Entonces $\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{C})$ corresponderá al total de cilindros permitidos de largo k de Σ_A^+ centrados en el cero. Es decir:

$$\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{C}) = \left\{[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}] : A_{a_j,a_{j+1}} = 1, 0 \leq j \leq k-2\right\}.$$

De este modo $\mathcal{C}$, será fuertemente generadora y por el **Teorema de Kolmogorov-Sinai** tendremos la igualdad:

$$h_{\mu_{P,\vec{p}}}(\sigma) = h_{\mu_{P,\vec{p}}}(\sigma, \mathcal{C})$$

Ahora:

$$H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{C})\right) = \sum_{[a_0 a_1 a_2 \cdots a_{k-1}]} -\mu_{P,\vec{p}}([a_0 a_1 a_2 \cdots a_{k-1}]) \log(\mu_{P,\vec{p}}([a_1 a_2 \cdots a_{k-1}]))$$

$$= \sum_{[a_0 a_1 a_2 \cdots a_{k-1}]} -(p_{a_0} P_{a_0,a_1} P_{a_1,a_2} \ldots P_{a_{k-2}a_{k-1}}) \log(p_{a_0} P_{a_0,a_1} P_{a_1,a_2} \cdots P_{a_{k-2}a_{k-1}})$$

$$= \sum_{a_0=0}^{n-1} \sum_{a_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{a_{k-1}=0}^{n-1} -(p_{a_0} P_{a_0,a_1} P_{a_1,a_2} \cdots P_{a_{k-2}a_{k-1}}) \log(p_{a_0} P_{a_0,a_1} P_{a_1,a_2} \cdots P_{a_{k-2}a_{k-1}})$$

Luego como:

$$\vec{p}P = \vec{p},$$

obtenemos:

$$= \sum_{a_0=0}^{n-1} p_{a_0} \log p_{a_0} \left(\sum_{a_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{a_{k-1}=0}^{n-1} P_{a_0,a_1} P_{a_1,a_2} \cdots p_{a_{k-2},a_{k-1}}\right)$$

$$- \sum_{a_0=0}^{n-1} \sum_{a_1=0}^{n-1} p_{a_0} P_{a_0,a_1} \log P_{a_0,a_1} \left(\sum_{a_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{a_{k-1}=0}^{n-1} P_{a_1,a_2} P_{a_2,a_3} \cdots P_{a_{k-2},a_{k-1}}\right)$$

$$- \sum_{a_1=0}^{n-1} \sum_{a_2=0}^{n-1} p_{a_1} P_{a_1,a_2} \log P_{a_1,a_2} \left(\sum_{a_3=0}^{n-1} \cdots \sum_{a_{k-1}=0}^{n-1} P_{a_2,a_3} \cdots P_{a_{k-2},a_{k-1}}\right) - \cdots$$

$$\cdots - \sum_{a_{k-1}=0}^{n-1} \sum_{a_{k-2}=0}^{n-1} p_{a_{k-1}} P_{a_{k-1},a_{k-2}} \log P_{a_{k-1},a_{k-2}}.$$

y como para $j \in \{0, \ldots n-1\}$ tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{i,j} = 1,$$

la anterior suma será igual a:

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - (k-1) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} p_i P_{i,j} \log P_{i,j}.$$

Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{C})\right) = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - \frac{k-1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} p_i P_{i,j} \log P_{i,j}$$

y concluimos finalmente la igualdad:

$$h_{\mu_{\vec{p}}}(\sigma) = -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} p_i P_{i,j} \log P_{i,j}.$$

3.5.2. Presión para el Sub-Shift de Tipo Finito

Proposición 3.5.3. Sea $(X,\ d)$ espacio métrico, $T : X \to X$ transformación expansiva y $\phi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Entonces si $\mathcal{A}$ define una cubrimiento abierto fuertemente generador o T es invertible y $\mathcal{A}$ define un cubrimiento abierto generador, tendremos:

$$P_T(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\left(p_k(T, \phi, \mathcal{A})\right)$$

Sea nuevamente, A, matriz de orden n y (Σ_A^+, σ), Sub-Shift de tipo finito de matriz de transición A. Entonces el cubrimiento abierto:

$$\mathcal{A} = \{[i] : A_{i,j} = 1 \text{ para algún } j \in 0, \ldots, n-1\},$$

será fuertemente generador y por la **Proposición(3.5.3)** tendremos:

$$P_\sigma(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\left(p_k(\sigma, \phi, \mathcal{A})\right).$$

Ahora, $\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{A})$, corresponde al total de cilindros permitidos de largo k de Σ_A^+, es decir:

$$\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{A}) = \left\{[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}] : A_{a_j, a_{j+1}} = 1, 0 \le j \le k-2\right\}.$$

Además, notando que $\bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{A})$ es un conjunto finito constituido por elementos disjunto dos a dos, tendremos:

$$p_k(\sigma, \phi, \mathcal{A}) = \sum_{[a_0 a_1 \ldots a_{k-1}] \in \bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{A})} \sup_{x \in [a_0 a_1 \ldots a_{k-1}]} \exp(S_k\phi(x)),$$

lo que nos permite concluir la igualdad:

$$P_\sigma(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\left(\sum_{[a_0 a_1 \ldots a_{k-1}] \in \bigvee_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\mathcal{A})} \sup_{x \in [a_0 a_1 \ldots a_{k-1}]} \exp(S_k\phi(x))\right). \tag{3.3}$$

3.5.3. Entropía y Presión para Flujos de Suspensión

Sea (X, τ) un espacio topológico. **L.M.Abramov (ver [2])** probó el año 1959 que dado el flujo, $\Psi = \{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, en X, es posible relacionar la entropía de los diferentes tiempos discretos ψ_t en la forma:

$$h_\nu(\psi_t) = |t|\, h_\nu(\psi_1),$$

dicha relación nos lleva a definir la **Entropía del Flujo respecto a la medida ν,** por:

$$h_\nu(\Psi) = h_\nu(\psi_1).$$

Y la **Entropía Topológica del Flujo** por:

$$h_{top}(\Psi) = h_{top}(\psi_1) = \sup_\nu h_\nu(\psi_1) = \sup_\nu h_\nu(\Psi).$$

La definición de entropía topológica para el flujo $\Psi = \{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, nos permite, dada una función $F \in \mathcal{C}(X)$ definir la **Presión de F con respecto al flujo Ψ** por:

$$P_\Psi(F) = \sup_{\nu\in\mathcal{M}_\Psi} \left\{ h_\nu(\psi_1) + \int F d\nu \right\}. \tag{3.4}$$

A continuacón sea A una matriz de transición y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$. Entonces para la entropía del flujo de suspensión σ_f, tendremos además, gracias a un trabajo nuevamente de **L.M.Abramov (ver [1])** (aparecido tambien en 1959), la posibilidad de relacionarla con la entropía de σ, en la forma siguiente. Dada una medida σ_f-invariante, μ, sea $W^{-1}(\mu)$ la correspondiente medida $\sigma-$invariante relacionada a μ por la **Proposición (2.3.9)**. Entonces:

$$h_\mu(\sigma_f) = \frac{h_{W^{-1}(\mu)}(\sigma)}{\int f dW^{-1}(\mu)}. \tag{3.5}$$

Capítulo 4

Operador de transferencia

4.1. Definiciones

En lo que sigue, sea (X, τ) un espacio topológico compacto, $T : X \to X$ función continua y sobreyectiva, tal que para todo $x \in X$ el conjunto $T^{-1}(x)$ es finito.

Definición 4.1.1. Dada $f \in \mathcal{C}(X)$, definimos el **Operador de Transferencia** $\mathscr{L}_f : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ por:

$$\mathscr{L}_f g(x) = \sum_{y \in T^{-1}\{x\}} \exp(f(y))g(y). \tag{4.1}$$

Ejemplo 4.1.2. I. Dada la matriz de transición A, sin fila ni columna idénticamente cero, sea $(\Sigma_A^+,\ \sigma)$, el respectivo Sub-Shift de tipo finito. Entonces por la finitud para todo $x \in \Sigma_A^+$ de $\sigma^{-1}\{x\}$, tenemos la posibilidad de definir para $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ el operador de transferencia:

$$\mathscr{L}_f g(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}\{x\}} \exp(f(y))g(y).$$

II. El siguiente ejemplo, si bien se escapa a las aspiraciones de esta Tesis, es importante por su relación con la función **Zeta de Riemman**. Definimos en el intervalo [0,1] la **Transformación de Gauss** $G : [0, 1] \to [0, 1]$ por:

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right].$$

Entonces:

$$G^{-1}(x) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{x+m}\right\}.$$

Si para $s \in \mathbb{C}$ con $|s| > 1$, definimos $f_s : [0,1] \to [0,1]$, por $f_s(x) = s \log x$, sea $\mathscr{L}_{f_s}$, el respectivo operador de transferencia. Entonces para $g \in \mathcal{C}([0,1])$, tenemos:

$$\mathscr{L}_{f_s} g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+m} \right)^s g\left(\frac{1}{x+m} \right).$$

Notemos finalmente que a pesar que la **Transformación de Gauss** tiene fibras infinitas, para $s \in \mathbb{C}$ con $|s| > 1$, será facil ver que el operador $\mathscr{L}_{f_s}$, actua en $\mathcal{C}([0,1])$ donde es acotado.

Proposición 4.1.3. Dada $f \in \mathcal{C}(X)$ sea $\mathscr{L}_f$ el correspondiente operador de transferencia. Entonces:

I. Si existe una constante $M_T \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $x \in X$:

$$\sum_{y \in T^{-1}\{x\}} 1 < M_T,$$

entonces $\mathscr{L}_f$ definirá un operador lineal acotado y por tanto continuo de $\mathcal{C}(X)$ en si mismo.

II. Recordemos para todo $x \in X$ y todo entero $m \geq 0$ la definición:

$$S_m f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} f(T^i(x)),$$

se tendrá que la composición m-esima de $\mathscr{L}_f$ consigo mismo, está dada por:

$$\mathscr{L}_f^m g(x) = \sum_{y \in T^{-m}\{x\}} \exp(S_m f(x)) g(y). \tag{4.2}$$

Demostración. I Sea $g \in \mathcal{C}(X)$ y $x \in X$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\mathscr{L}_f g(x)| &\leq \sum_{y \in T^{-1}\{x\}} |\exp(f(y)) g(y)| \\ &\leq || \, g \, ||_\infty \sum_{y \in T^{-1}\{x\}} \exp(|| \, f \, ||_\infty) \\ &\leq M_T \, || \, g \, ||_\infty \exp(|| \, f \, ||_\infty). \end{aligned}$$

Lo que demuestra la desigualdad:

$$||\mathscr{L}_f||_{\mathcal{C}(X)} \leq M_T \exp(|| \, f \, ||_\infty)$$

y $\mathscr{L}_f$ será un operador lineal acotado.

II Sea $g \in \mathcal{C}(X)$ y $x \in X$. Procederemos por inducción. Por definición, la **ecuación (4.2)** es cierta para $m = 1$. Suponiéndola cierta para el entero positivo m, probémosla para $m + 1$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_f^{m+1} g(x) &= \mathscr{L}_f^{m}(\mathscr{L}_f g(x)) \\
&= \sum_{y \in T^{-m}\{x\}} \exp(S_m f(y))(\mathscr{L}_f g(y)) \\
&= \sum_{y \in T^{-m}\{x\}} \sum_{z \in T^{-1}\{y\}} \exp(S_m f(y) + f(z)) g(z) \\
&= \sum_{y \in T^{-m}\{x\}} \sum_{z \in T^{-1}\{y\}} \exp(S_m f(T(z)) + f(z)) g(z) \\
&= \sum_{z \in T^{-(m+1)}\{x\}} \exp(S_{m+1} f(z)) g(z)
\end{aligned}
$$

y la **ecuación (4.2)** será cierta para todo entero positivo m.

$\square$

4.2. Propiedades Espectrales del Operador de Transferencia

En lo que queda de capítulo nos avocaremos a estudiar las propiedades espectrales del operador de transferencia $\mathscr{L}_f$ al actuar respectivamente sobre los espacios $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ y $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, así como la relación que existe entre este operador y la Presión Topológica definida en el capítulo anterior.

Antes, deberemos dar algunas definiciones que nos permitirán una mejor caracterización de las **funciones Hölder continuas** para el caso de los espacios métricos $(\Sigma_A,\ d_\theta)$ y $(\Sigma_A^+,\ d_\theta)$.

4.2.1. Funciones Hölder Continuas en Σ_A y Σ_A^+.

Definición 4.2.1. Dada la matriz de transición A y $\theta \in (0, 1)$ sean (Σ_A, σ) y $(\Sigma_A^+,\ \sigma)$ los correspondientes Sub-Shift de tipo finito. Entonces para toda $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$ (resp. $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$) y todo entero $k \geq 0$ definimos:

$$
\mathrm{var}_k f \ \ (\textit{resp.}\ \mathrm{var}_k^+ f) = \sup\{\mid f(x) - f(y) \mid : x_i = y_i,\ \ \mid i \mid \leq k\}.
$$

A continuación definimos $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A)$ y $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A) &= \{f \in \mathcal{C}(\Sigma_A) :\ \mathrm{var}_k f \leq C\theta^k,\ k = 0, 1, \ldots,\ \text{para algún } C > 0\}, \\
\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &= \{f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+) :\ \mathrm{var}_k^+ f \leq C\theta^k,\ k = 0, 1, \ldots,\ \text{para algún } C > 0\}.
\end{aligned}
$$

Por último para cada $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A)$ (resp. $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$) definimos:

$$| f |_\theta = \sup \left\{ \frac{\mathrm{var}_k f}{\theta^k} : \ k \geq 0 \right\}.$$

La siguiente **proposición** es una consecuencia inmediata de las definiciones.

Proposición 4.2.2. Dada la matriz de transición A y $\theta \in (0,1)$, sean $(\Sigma_A, \ \rho_\theta)$ y $(\Sigma_A^+, \ \rho_\theta^+)$ los correspondientes Sub-Shift de tipo finito con sus métricas respectivas. Luego para toda $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$ (resp. $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$) tenemos:

I. Sea $c > 0$. Entonces $\mathrm{var}_n g \leq c\theta^n$ con $n = 0, 1, \ldots$ si y solo si para todo $x, \ y \ \in \ \Sigma_A$ (resp. Σ_A^+), tenemos $| g(x) - g(y) | \leq c\rho_\theta(x,y)$ (**resp** $\rho_\theta^+(x,y)$).

II. $| g |_\theta$ es la menor constante que hace de g una función **Lipschitz continua**.

Corolario 4.2.3. I. La función $|| \cdot ||_\theta : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A)$ (resp. $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$) $\rightarrow \mathbb{R}$ que a cada f en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A)$ (resp. $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$) le asigna el valor $|| f ||_\theta = || f ||_\infty + | f |_\theta$ define una norma en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A)$ $(resp. \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$.

II. Los espacios normados $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A), || \cdot ||)$, $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+), || \cdot ||_\theta)$ son de Banach.

En lo que resta de sección, sea $\theta \in (0,1)$ y A, matriz de transición de orden $n \geq 2$.

4.2.2. Radio Espectral, Radio Esencial

La siguiente observación será de gran utilidad para los calculos que vienen.

Observación 4.2.4. Sean $a, \ b \in \mathbb{C}$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} |\exp(a) - \exp(b)| &= |\exp(b)| \, |\exp(a-b) - 1| \\ &\leq \exp(|b|) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a-b|^m}{m!} \\ &\leq \exp(|b|) \, |a-b| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(| \ a-b \ |)^{m-1}}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Luego tendremos:

$$|\exp(a) - \exp(b)| \leq |a-b| \exp(|a-b| + |b|).$$

Proposición 4.2.5. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)} \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Entonces existe $C > 0$ tal que para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y todo entero $m \geq 0$ tenemos:

$$| \mathscr{L}_f^m g |_\theta \leq C \ || \ g \ ||_\infty + \theta^m \ | \ g \ |_\theta \ . \tag{4.3}$$

Demostración. Procederemos por inducción en m, para lo cual probaremos primero la existencia de constante $C_1 > 0$ de modo que para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$:

$$|\mathscr{L}_f g|_\theta \leq C_1 ||g||_\infty + \theta |g|_\theta.$$

Sean $x,\ y \in \Sigma_A^+$ con $x_i = y_i,\ 0 \leq i \leq k-1$, entonces tenemos:

$$|(\mathscr{L}_f)g(x) - (\mathscr{L}_f)g(y)| \leq \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}:A_{j,x_0}=1} |\exp(f(jx))g(jx) - \exp(f(jy))g(jy)|$$

$$\leq \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}:A_{j,x_0}=1} |\exp(f(jx)) - \exp(f(jy))| \cdot |g(jx)|$$

$$+ \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}:A_{j,x_0}=1} |\exp(f(iy))| \cdot |g(jx) - g(jy)|$$

$$\leq ||g||_\infty \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}:A_{j,x_0}=1} \exp(\mathrm{Real}(f)(jy))\, |\exp((f(jx) - f(jy))) - 1|$$

$$+ |g|_\theta \theta^{k+1} \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}:A_{j,x_0}=1} \exp(\mathrm{Real}(f)(jy)).$$

Definiendo $C_1 := \theta \mid f \mid_\theta \exp(||f||_\theta)$, del uso de la **Observación(4.2.4)**, tendremos:

$$|(\mathscr{L}_f)g(x) - (\mathscr{L}_f)g(y)| \leq C_1\theta^k \mid\mid g \mid\mid_\infty + \mid g \mid_\theta \theta^{k+1}.$$

Lo que nos lleva a:

$$|\mathscr{L}_f g|_\theta \leq C_1 ||g||_\infty + |g|_\theta \theta.$$

Suponiendo ahora para el entero $m \geq 2$, la existencia de constante $C_m > 0$ de modo que para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$:

$$\left|\mathscr{L}_f^m g\right|_\theta \leq C_m ||g||_\infty + \theta^m |g|_\theta,$$

tendremos:

$$\begin{aligned}
\left|\mathscr{L}_f^{m+1} g\right|_\theta &= \left|\mathscr{L}_f^m(\mathscr{L}_f g)\right|_\theta \\
&\leq C_m \,||(\mathscr{L}_f g)||_\infty + \theta^m \,|(\mathscr{L}_f g)|_\theta \\
&\leq C_m \mid\mid g \mid\mid_\infty + \theta^m (C_1 \mid\mid g \mid\mid_\infty + \theta \mid g \mid_\theta) \\
&= (C_m + \theta^m C_1) \mid\mid g \mid\mid_\infty + \theta^{m+1} |g|_\theta,
\end{aligned}$$

Luego, si definimos $C_{m+1} = C_m + \theta^m C_1$, para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tendremos:

$$\left|\mathscr{L}_f^{m+1} g\right|_\theta \leq C_{m+1} ||g||_\infty + \theta^{m+1} |g|_\theta,$$

Finalmente como:

$$C_{m+1} = (C_m + \theta^m C_1) = C_1 \sum_{j=0}^{m} \theta^j = \frac{\theta^{m+1} - 1}{\theta - 1} C_1 \leq \frac{C_1}{\theta - 1},$$

la proposición quedará probada tomando $C = \frac{C_1}{\theta - 1}$. $\square$

Definición 4.2.6. Sea η una palabra admisible en Σ_A^+. Entonces denotaremos por $|\eta|$, al largo de η y por $[\eta]$ al cilindro:

$$[\eta] = \{x \in \Sigma_A^+ : x\big|_{|\eta|} = \eta\}.$$

Proposición 4.2.7. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y $\mathscr{L}_f$ el correspondiente operador de transferencia. Entonces el límite:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left(\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^m_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \right). \tag{4.4}$$

existe. Luego si definimos:

$$R(f) := \exp \left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left(\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^m_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \right) \right).$$

y escribimos:

$$C := \frac{|f|_\theta}{1-\theta} \exp((1/(1-\theta))|f|_\theta),$$

entonces para $R > R(f)$, existira constante $C_1 > 0$, de modo que para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y todo entero $m \geq 0$, tengamos:

$$|\mathscr{L}^m_f g|_\theta \leq R^m C_1 (C||g||_\infty + \theta^m |g|_\theta). \tag{4.5}$$

Demostración. Para comenzar notemos que:

$$\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^{j+k}_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \leq \sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^{j}_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^{k}_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})),$$

luego:

$$\log \left(\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^{j+k}_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \right) \leq \log \left(\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^{j}_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \right) + \log \left(\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^{k}_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \right)$$

y del uso del **Lema (3.1.5)**, concluimos la existencia del límite:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left(\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^m_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \right).$$

De este modo dado $\epsilon > 0$ con $\exp(\epsilon)R(f) < R$, existirá constante $C_1 > 0$ de modo que para todo $m \geq 0$ tengamos:

$$\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}^m_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1})) \leq (R(f)\exp(\epsilon))^m.$$

Sea entonces $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, $x,\ y \in \Sigma_A^+$ con $x_i = y_i,\ 0 \leq i \leq k$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{L}_f^m g(x) - \mathscr{L}_f^m g(y)| \leq & \sum_{\eta:|\eta|=m} |\exp(S_m f(\eta \vee x)) g(\eta \vee x) \\
& \qquad - \exp(S_m f(\eta \vee y)) g(\eta \vee x)| \\
+ & \sum_{\eta:|\eta|=m} |\exp(S_m f(\eta \vee y)) g(\eta \vee x) - \exp(S_m f(\eta \vee y)) g(\eta \vee y)| \\
\leq || \, g \, ||_\infty & \sum_{\eta:|\eta|=m} |\exp(S_m f(\eta \vee x)) - \exp(S_m f(\eta \vee y))| \\
& \qquad + |g|_\theta \theta^{m+k} \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m \mathrm{Real}(f)(\eta \vee y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq ||g||_\infty & \sum_{\eta:|\eta|=m} |\exp(S_m f(\eta \vee x)) - \exp(S_m f(\eta \vee y))| + \\
& \qquad + |g|_\theta \theta^{m+k} \sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m (\mathbb{1})) \\
\leq ||g||_\infty & \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m \mathrm{Real}(f)(\eta \vee y)) \, |\exp(S_m(f)(\eta \vee x) - S_m(f)(\eta \vee y)) - 1| \\
& \qquad + |g|_\theta \theta^{m+k} (R \exp(\epsilon))^m.
\end{aligned}
$$

Luego del uso de la **Observación(4.2.4)** obtenemos:

$$
|\exp(S_m f(\eta \vee x) - S_m f(\eta \vee y)) - 1| \leq \theta^k \left(\frac{|f|_\theta}{1-\theta} \exp((1/(1-\theta))|f|_\theta) \right),
$$

lo que nos lleva a:

$$
| \ \mathscr{L}_f^m g(x) - \mathscr{L}_f^m g(y) \ |
$$

$$
\begin{aligned}
& \leq || \, g \, ||_\infty \, C_1 R^m \theta^k \left(\frac{|f|_\theta}{1-\theta} \exp((1/(1-\theta))|f|_\theta) \right) + |g|_\theta \theta^{m+k} C_1 R^m \\
& \leq R^m \theta^k C_1 \left(||g||_\infty \frac{|f|_\theta}{1-\theta} \exp((1/(1-\theta))|f|_\theta) + | \ g \ |_\theta \ \theta^m \right).
\end{aligned}
$$

Denotando finalmente, $C = \frac{|f|_\theta}{1-\theta} \exp((1/(1-\theta))|f|_\theta)$, obtenemos:

$$
|\mathscr{L}_f^m g|_\theta \leq R^m C_1 (C ||g||_\infty + |g|_\theta \theta^m).
$$

$\square$

Proposición 4.2.8. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, entonces el Radio Espectral del operador de transferencia, $\mathscr{L}_f$, actuando respectivamente sobre los espacios de Banach $(\mathcal{C}(\Sigma_A^+),\ || \cdot ||_\infty)$ y $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+),\ \ || \cdot ||_\theta)$ es a lo más $R(f)$. Si asumimos f a valores reales tendremos la igualdad.

Demostración. Sea $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{L}_f^m g(x)| &\leq \sum_{y \in \sigma^{-m}\{x\}} |\exp(S_m f(y)) g(y)| \\
&\leq ||g||_\infty \sum_{y \in \sigma^{-m}\{x\}} \exp(S_m(\mathrm{Real}(f))(y)) \\
&\leq ||g||_\infty \sup_{\Sigma_A^+} \left(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m \mathbb{1} \right).
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
||\mathscr{L}_f^m||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+))} \leq \sup_{\Sigma_A^+} \left(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m \mathbb{1} \right).
$$

Finalmente de la **Fórmula del Radio Espectral (1.3.7)**, obtenemos que el radio espectral de $\mathscr{L}_f$ actuando en $(\mathcal{C}(\Sigma_A^+), ||\cdot||_\infty)$ es a lo más:

$$
\lim_{m \to \infty} ||\mathscr{L}_f^m||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+))}^{\frac{1}{m}} \leq \lim_{m \to \infty} \left(\sup_{\Sigma_A^+} \left(\mathscr{L}_f^m \mathbb{1} \right) \right)^{\frac{1}{m}}
$$

$$
= \exp\left(\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log \sup_{\Sigma_A^+} \left(\mathscr{L}_f^m \mathbb{1} \right) \right) = R(f).
$$

Por otro lado la **ecuación (4.5)** junto a lo recién hecho, nos permite para $R > R(f)$ encontrar constantes $C,\ C_1 > 0$ de modo que para todo $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y todo entero $m \geq 0$, tengamos:

$$
\begin{aligned}
|\ \mathscr{L}_f^m g\ |_\theta &\leq R^m C_1 (C ||g||_\infty + \theta^m |g|_\theta) \\
&\leq R^m ||g||_\theta C_1 (C + \theta^m)
\end{aligned}
$$

y

$$
||\mathscr{L}_f^m g||_\infty \leq ||g||_\theta (\sup_{\Sigma_A^+} (\mathscr{L}_f^m \mathbb{1})) \leq ||g||_\theta R^m.
$$

De las cuales obtenemos:

$$
||\mathscr{L}_f^m||_{(L)(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \leq R^m (C_1 (C + \theta^m) + 1).
$$

Y nuevamente por la **Fórmula del Radio Espectral (1.3.7)**, concluimos que el radio espectral de $\mathscr{L}_f$ actuando en $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+), ||\cdot||_\theta)$ es a lo más:

$$
\lim_{m \to \infty} ||\ \mathscr{L}_f^m\ ||_{\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)}^{\frac{1}{m}} \leq R.
$$

Haciendo finalmente tender R a $R(f)$, obtenemos lo querido.

Sea ahora $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales. Entonces:

$$\begin{aligned}
R(f) &= \exp\left(\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\sup_{\Sigma_A^+}(\mathscr{L}^m_{\mathrm{Real}(f)}(\mathbb{1}))\right)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\sup_{\Sigma_A^+}(\mathscr{L}^m_f(\mathbb{1}))\right)\right)\\
&\le \lim_{m\to\infty}||\mathscr{L}_f^m\mathbb{1}||_\theta^{\frac{1}{m}}\\
&\le \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{g\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+),||g||_\theta=1}\left(||\mathscr{L}_f^m g||_\theta\right)\right)^{\frac{1}{m}}\\
&\le \lim_{m\to\infty}||\mathscr{L}_f^m||^{\frac{1}{m}}_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))}.
\end{aligned}$$

Y el radio espectral de $\mathscr{L}_f$ actuando sobre $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ será mayor o igual a $R(f)$. Finalmente de lo hecho más arriba concluimos la igualdad. □

Proposición 4.2.9. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, $\mathscr{L}_f$ el correspondiente operador de transferencia actuando sobre $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+),\ ||\cdot||_\theta)$. Entonces el radio esencial $R_{ess}(\mathscr{L}_f)$ es a lo más $\theta R(f)$.

El siguiente **lema** nos facilitará la demostración de la **proposición** anterior.

Lema 4.2.10. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Asociamos a cada palabra admisible η, en Σ_A^+, el elemento $x_\eta \in [\eta]$. Luego definamos para cada $m \ge 1$, los operadores,

$$\begin{aligned}
E_m : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)\\
w &\mapsto \sum_{\eta:|\eta|=m} w(x_\eta)\mathbb{1}_{[\eta]},\\
K_{m,f} : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)\\
w &\mapsto \mathscr{L}_f^m \circ E_m(w).
\end{aligned}$$

Entonces para cada $R > \theta R(f)$, existirá una constante $K > 0$, de modo que:

$$||\mathscr{L}_f^m - K_{m,f}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \le KR^m.$$

Dado además $\delta > 0$, tendremos para cada $g \in B(f,\delta)$ la desigualdad:

$$||\mathscr{L}_g - K_{m,g}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \le K(\exp(\delta)R)^m.$$

Demostración. De la definición de E_m obtenemos para $w \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ las desigualdades:

$$\begin{aligned}
||E_m w - w||_\infty &\le \sup_\eta\left\{\sup_{x\in[\eta]}|w(x) - w(x_\eta)|\right\}\\
&\le |w|_\theta\theta^m.
\end{aligned}$$

Luego para $k \leq m$ y todo par $x,\ y \in \Sigma_A^+$ con $x_i = y_i,\ 0 \leq i \leq k-1$ tenemos:

$$\begin{aligned}|(E_m w - w)(x) - (w - E_m w)(y)| &\leq |(w - E_m w)(x)| + |(w - E_m w)(y)| \\ &\leq 2||E_m w - w||_\infty \leq 2|w|_\theta \theta^m\end{aligned}$$

y:

$$\frac{\mathrm{var}_k(E_m w - w)}{\theta^k} \leq \frac{2|w|_\theta \theta^m}{\theta^k} \leq 2|w|_\theta.$$

Si en cambio $k > m$, tenemos:

$$\begin{aligned}|(E_m w - w)(x) - (E_m w - w)(y)| &\leq |w(x) - w(y)| + |E_m w(x) - E_m w(y)| \\ &= |w(x) - w(y)|,\end{aligned}$$

luego:

$$\frac{\mathrm{var}_k(w - E_m w)}{\theta^k} \leq | \ w \ |_\theta \ .$$

Entonces:

$$|E_m w - w|_\theta \leq 2|w|_\theta.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}||\mathscr{L}_f^m w - K_{m,f} w||_\infty &= ||\mathscr{L}_f^m (w - E_m w)||_\infty \\ &\leq ||w - E_m w||_\infty ||\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m \mathbb{1}||_\infty\end{aligned}$$

y de la existencia del límite:

$$\lim_{m \to \infty} ||\mathscr{L}_f^m \mathbb{1}||_\infty^{\frac{1}{m}} = R(f)$$

podremos dado $R > \theta R(f)$, escoger constante $C_1 > 0$ de modo que para $m \geq 0$ tengamos:

$$||\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m \mathbb{1}||_\infty \leq C_1 (\theta^{-1} R)^m.$$

Luego:

$$\begin{aligned}||\mathscr{L}_f^m w - K_{m,f} w||_\infty \leq& ||(w - E_m(w))||_\infty (\theta^{-1} R)^m \\ \leq& C_1 R^m |w|_\theta.\end{aligned}$$

Si además escribimos $C_2(f) = \frac{|f|_\theta}{1-\theta} \exp((1/(1-\theta))|f|_\theta)$ de la **Proposición (4.2.7)** tendremos:

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}_f^m w - K_{m,f} w|_\theta &= |\mathscr{L}_f^m (w - E_m w)|_\theta \\ &\leq (\theta^{-1} R)^m (C_2 ||(w - E_m(w))||_\infty + \theta^m |(w - E_m(w))|_\theta) \\ &\leq (C_2 + 2) R^m |w|_\theta.\end{aligned}$$

y

$$||\mathscr{L}_f^m w - K_{m,f} w||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \leq (C_1 + C_2 + 2) R^m$$

Finalmente de notar, dado $\delta > 0$, que para todo $g \in B(f, \delta)$ tenemos:

$$||\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(g)}^m \mathbb{1}||_\infty \leq \exp(m\delta) \exp ||\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m \mathbb{1}||_\infty,$$

y que $C_2(f)$ es acotado en $g \in B(f, \delta)$, obtenemos la segunda desigualdad. $\square$

Procedamos a demostrar la **Proposición (4.2.9)**.

Demostración. (**Proposición (4.2.9)**) Al ser para cada $m \geq 0$, E_m, de rango finito, este será compacto. Luego $K_{m,f}$ al ser definido como la composición de un operador compacto, E_m, con un operador acotado, $\mathscr{L}_f$, será compacto. Entonces del uso de la **formula del Espectro Escncial (1.3.8)** obtenemos por el **Lema (4.2.10)** para cada $R > \theta R(f)$:

$$\begin{aligned} R_{ess}(\mathscr{L}_f) &\leq \lim_{m\to\infty} \left(|| \mathscr{L}_f^m - K_{m,f} ||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \lim_{m\to\infty} K^{\frac{1}{m}} R = R. \end{aligned}$$

Haciendo finalmente tender R a $\theta R(f)$ obtenemos lo querido. $\square$

4.2.3. Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius

Está sección tendra por objetivo demostrar el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius**, para lo cuál deberemos primero introducir los siguientes resultados.

Teorema 4.2.11. (**Schauder-Tychonoff (ver [9, pág. 456])**) Sea U un subespacio no vacio, compacto y convexo, del espacio vectorial topológico, localmente convexo V. Entonces para toda función continua $G : U \to U$, existirá $x \in U$ tal que,

$$G(x) = x.$$

Teorema 4.2.12. (**Arzela-Ascoli (ver [21, pág. 167-168])**) Sea $\mathfrak{F}$ una familia equicontinua de funciones, de un espacio topológico separable X, a un espacio métrico Y. Sea $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathfrak{F}$ tal que para todo $x \in X$, la clausura del conjunto $\{f_m(x) : m = 0, 1, \ldots\}$ es compacta. Entonces existe subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente en forma puntual a una función f y cuya convergencia a f es uniforme en compactos de X.

Teorema 4.2.13. (**Ruelle-Perron-Frobenius**) Supongamos, A, aperiódica, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales y $\mathscr{L}_f$ el respectivo operador de tranferencia actuando en $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+), || \cdot ||_\theta)$. Entonces:

I. El número $\lambda = R(\mathscr{L}_f)$ es un valor propio simple de $\mathscr{L}_f$ con correspondiente autovector $h \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ estrictamente positivo.

II. El resto del espectro de $\mathscr{L}_f$ se encuentra contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que λ.

III. Existe única medida de probabilidad ν de modo que $\mathscr{L}_f^*(\nu) = \lambda\nu$, $\nu(h) = 1$ y para toda $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ tengamos:

$$\lim_{m\to\infty} \left|\left|\lambda^{-m}\mathscr{L}_f^m g - \nu(g)h\right|\right|_\infty = 0. \tag{4.6}$$

Comenzaremos con demostrar la existencia del valor propio λ y el correspondiente autovector, ν, del dual, $\mathscr{L}_f^*$, del operador de transferencia $\mathscr{L}_f$. Seguiremos luego con la existencia del autovector h para continuar con la **ecuación (4.6)** y así finalizar con la prueba de la maximalidad de λ y lo concerniente al resto del espectro.

Demostración. **Existencia de λ, h y ν.**

Al ser $\mathscr{L}_f$ un operador positivo, tenemos $\mathscr{L}_f \mathbb{1} > 0$ y podemos definir la función:

$$\begin{aligned} G : \mathcal{M}(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{M}(\Sigma_A^+) \\ \mu &\mapsto \frac{\mathscr{L}_f^*(\mu)}{(\mathscr{L}_f^*(\mu))(\mathbb{1})}. \end{aligned}$$

Luego como para $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$, toda sucesión, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $\mu_n \to \mu$, cumple con:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \mathscr{L}_f^*(\mu_n)(g) &= \lim_{m\to\infty} \int g d(\mathscr{L}_f^*(\mu_n)) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int \mathscr{L}_f g d\mu_n \\ &= \int \mathscr{L}_f g d\mu \;=\; \int g d(\mathscr{L}_f^*(\mu)) \end{aligned}$$

y:

$$G(\mu)(\mathbb{1}) = 1,$$

G definirá una función continua. Entonces como del **Teorema (1.4.7)**, $\mathcal{M}(\Sigma_A^+)$ es un espacio compacto, convexo, tendremos por el teorema de **Schauder-Tychonoff (4.2.11)**, la existencia de un elemento $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma_A^+)$ tal que:

$$G(\nu) = \nu.$$

Es decir, si escribimos $\lambda = \mathscr{L}_f^*(\nu)(\mathbb{1})$, tendremos:

$$\mathscr{L}_f^*(\nu) = \lambda\nu.$$

Para demostrar la existecia del autovector h, definimos para cada entero $m \geq 0$ el número:

$$B_m = \exp\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} 2 \mid f \mid_\theta \theta^i\right)$$

y el conjunto:

$$\begin{aligned} \Lambda = \{g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+) : g > 0,\ \nu(g) = 1 \text{ y para todo par } x,\ x' \in \Sigma_A^+ \\ \text{con } x_i = x_i',\ 0 \leq i \leq m \text{ tenemos } g(x) \leq B_m g(x')\}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos para todo $g \in \Lambda$ la desigualdad:

$$\lambda^{-1}\mathscr{L}_f g > 0$$

y

$$\begin{aligned}\nu(\lambda^{-1}\mathscr{L}_f g) &= \lambda^{-1}\nu(\mathscr{L}_f g)\\ &= \lambda^{-1}\mathscr{L}_f^*(\nu)(g)\\ &= \lambda^{-1}\lambda\nu(g) = 1.\end{aligned}$$

Sean además $m \geq 0$ y $x,\ x' \in \Sigma_A^+$ con $x_i = x_i',\ 0 \leq i \leq m$ entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$ tal que $A_{j,x_0} = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\exp(f(jx))g(jx) &\leq \exp(f(jx))B_{m+1}g(jx')\\ &\leq B_{m+1}\exp(\mid f \mid_\theta \theta^{m+1})\exp(f(jx'))g(jx')\\ &\leq B_{m+1}\exp(2 \mid f \mid_\theta \theta^{m+1})\exp(f(jx'))g(jx')\\ &= B_m \exp(f(jx'))g(jx').\end{aligned}$$

Luego obtenemos:

$$\lambda^{-1}\mathscr{L}_f g(x) \ \leq \ B_m\lambda^{-1}\mathscr{L}_f g(x')$$

y

$$\lambda^{-1}\mathscr{L}_f(\Lambda) \subseteq \Lambda.$$

Finalmente como:

$$\mathbb{1} \in \Lambda$$

y para todo par $g_1,\ g_2 \in \Lambda$ y todo $\beta > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}&\beta g_1 + (1-\beta)g_2 > 0,\\ &\nu(\beta g_1 + (1-\beta)g_2) = \beta + (1-\beta) = 1,\\ &\beta g_1 + (1-\beta)g_2 \leq \beta B_m g_1 + (1-\beta)B_m g_2 = B_m(\beta g_1 + (1-\beta)g_2),\end{aligned}$$

el conjunto Λ será distinto de vacio y convexo, luego si además demostramos que es compacto, por el teorema de **Schauder-Tychonoff** existirá $h \in \Lambda$ tal que:

$$\mathscr{L}_f h = \lambda h.$$

De la aperiodicidad de la matriz A existe un entero positivo $M > 0$, tal que $A^M > 0$. Así, para todo par $x,\ y \in \Sigma_A^+$ tenemos $A^M_{y_0,\ x_0} \neq 0$ y podremos encontrar $z \in \sigma^{-M}(x)$ tal que $z_0 = y_0$. Entonces para $g \in \Lambda$ tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda^{-M}\mathscr{L}_f^M g(x) &\geq \lambda^{-M}\exp(S_M f(z))g(z)\\ &\geq \lambda^{-M}\exp(-M \mid\mid f \mid\mid_\infty)g(z)\\ &\geq \lambda^{-M}\exp(-M \mid\mid f \mid\mid_\infty)B_0^{-1}g(y).\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$1 = \nu(\lambda^{-M}\mathscr{L}_f^M g) \ \geq \ \lambda^{-M}\exp(-M \mid\mid f \mid\mid_\infty)B_0^{-1}g(y).$$

Luego si escribimos $K = \lambda^M \exp(M \mid\mid f \mid\mid_\infty)B_0$ tendremos:

$$g(y) \leq K$$

y la arbitrariedad en la elección de y nos permite concluir que:

$$||g||_\infty \leq K.$$

Además como para todo $x,\ x' \in \Sigma_A^+$ con $x_i = x_i',\ 0 \leq i \leq m$, tenemos:

$$\mid g(x) - g(x') \mid \ \leq \ (B_m - 1)K$$

y $\lim_{m\to\infty}(B_m - 1)K = 0$, pues $\lim_{m\to\infty} B_m = 1$. El conjunto, Λ, definirá una familia equicontinua de funciones, entonces, por el teorema de **Arzela-Ascoli (4.2.12)** el conjunto Λ será compacto y tal como dijimos antes, por el teorema de **Schauder-Tychonoff** existirá $h \in \Lambda$ tal que:

$$\mathscr{L}_f h = \lambda h.$$

Finalmente, como $\nu(h) = 1$, existirá $y \in \Sigma_A^+$ tal que $h(y) \geq 1$ y para todo $x \in \Sigma_A^+$ tendremos:

$$h(x) = \lambda^{-M}\mathscr{L}_f^M h(x) \geq K^{-1}h(y) \geq K^{-1}.$$

Luego:

$$\inf_{x\in\Sigma_A^+} h(x) > 0.$$

Para concluir con el estudio del autovector, h, notemos que para, $g \in \Lambda$ y todo par $x,\ x'$ con $x_i = x_i',\ 0 \leq i \leq m-1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mid g(x) - g(x') \mid &\leq (B_m - 1) \mid\mid g \mid\mid_\infty \\ &= \left(\exp\left(\frac{2 \mid f \mid_\theta \theta^{m+1}}{1-\theta}\right) - 1\right) \mid\mid g \mid\mid_\infty \\ &\leq \exp\left(\frac{2 \mid f \mid_\theta \theta^m}{1-\theta}\right)\frac{2 \mid f \mid_\theta \theta^m}{1-\theta} \mid\mid g \mid\mid_\infty \\ &\leq \left(\frac{\exp\left(\frac{2|f|_\theta}{1-\theta}\right) 2 \mid f \mid_\theta}{1-\theta} \mid\mid g \mid\mid_\infty\right)\theta^m. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Lambda \subseteq \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+).$$

Convergencia uniforme (ecuación (4.6))

Comenzaremos con la demostración de la **ecuación (4.6)**, para el caso particular de $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, con $\mathscr{L}_f \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Del uso de la **Proposición (4.2.5)**, existirá constante $C > 0$ de modo que para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y todo par $x, y \in \Sigma_A^+$ con $d_\theta(x,y) \leq \theta^k$, tengamos la desigualdad:

$$\left|\mathscr{L}_f^m(g)(x) - \mathscr{L}_f^m(g)(y)\right| \leq \left|\mathscr{L}_f g\right|_\theta \theta^k \leq C\theta^k ||g||_\infty + |g|_\theta \theta^{k+m}.$$

Así, la sucesión $\left\{\mathscr{L}_f^m g\right\}_{m=1}^{\infty}$ definirá una famila equicontinua de funciones en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Para demostrar que $\left\{\mathscr{L}_f^m g\right\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $\left(\int \Sigma_A^+ g d\nu\right)\mathbb{1}$, es suficiente demostrar que toda subsucesión convergente $\left\{\mathscr{L}_f^{m_k} g\right\}_{k=1}^{\infty}$, converga uniformemente a $\left(\int \Sigma_A^+ g d\nu\right)\mathbb{1}$. Sea $\left\{\mathscr{L}_f^{m_k} g\right\}_{m=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\left\{\mathscr{L}_f^m g\right\}_{m=1}^{\infty}$ y $\bar{g} \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ de modo que la convergencia:

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{L}_f^{m_k g} = \bar{g},$$

sea uniforme. Ahora:

$$\sup_{x\in\Sigma_A^+} g \geq \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f g \geq \ldots \geq \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m g \geq \ldots$$

Luego para todo $m \geq 0$ tendremos la desigualdad:

$$\sup_{x\in\Sigma_A^+} \bar{g} \leq \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m g.$$

Además como, $\left\{\sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m g\right\}_{m=1}^{\infty}$, define una sucesión decreciente y:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^{m_k} g = \sup_{x\in\Sigma_A^+} \bar{g},$$

tendremos:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m g = \sup_{x\in\Sigma_A^+} \bar{g}$$

Por otro lado de la continuidad de, $\mathscr{L}_f$, obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^{m+m_k} g = \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m \bar{g},$$

luego:

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^j g = \sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m \bar{g}.$$

Y de la unicidad del límite anterior, tenemos para todo $m \geq 0$, la igualdad:

$$\sup_{x\in\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m \bar{g} = \sup_{x\in\Sigma_A^+} \bar{g}.$$

A continuación, la compacidad de Σ_A^+ y la continuidad de $\mathscr{L}_f$, nos permite para cada $m \geq 0$ concluir la existencia de $x_m \in \Sigma_A^+$ de modo de tener:

$$\bar{g}(x_0) = \sup_{x \in \Sigma_A^+} \bar{g} = \sup_{x \in \Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m \bar{g} = \mathscr{L}_f^m \bar{g}(x_m).$$

Entonces de la igualdad $\mathscr{L}_f \mathbb{1} = \mathbb{1}$ obtenemos:

$$\mathscr{L}_f^m \bar{g}(x_m) - \bar{g}(x_0) = \sum_{y \in \sigma^{-m}\{x_m\}} \exp(S_m f(y))(\bar{g}(y) - g(x_0)) = 0.$$

Luego para todo $y \in \bigcup_{m=0}^{\infty} \sigma^{-m}\{x_m\}$ tendremos:

$$\bar{g}(y) = \bar{g}(x_0),$$

igualdad que extendemos a todo $y \in \Sigma_A^+$ a partir de la densidad de $\{\bigcup_{m=0}^{\infty} \sigma^{-m}\{x_m\}\}$ en Σ_A^+ (**Proposición (2.2.20)**). Además:

$$\bar{g}(x_0) = \int_{\Sigma_A^+} \bar{g} d\nu = \int_{\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m \bar{g} d\nu = \int_{\Sigma_A^+} g d\nu.$$

Luego g es constante igual a $\left(\int_{\Sigma_A^+} g d\nu\right)$ y $\{\mathscr{L}_f^{m_k} g\}_{k=1}^{\infty}$, convergerá de manera uniforme a $\left(\int_{\Sigma_A^+} g d\nu\right) \mathbb{1}$. Entonces dada $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ la sucesión, $\left\{\mathscr{L}_f^m g\right\}_{m=1}^{\infty}$, convergerá de manera uniforme a:

$$\left(\int_{\Sigma_A^+} g d\nu\right) \mathbb{1}.$$

Para obtener la convergencia de $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ a $\left(\int_{\Sigma_A^+} g d\nu\right) \mathbb{1}$, observemos por el teorema de **Stone-Weirstrass** que $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ es denso en, $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$, y para toda $\tilde{g} \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tenemos:

$$\begin{aligned} ||\mathscr{L}_f^m g - \mathscr{L}_f^m \tilde{g}||_\infty &\leq ||\mathscr{L}_f^m \mathbb{1}||_\infty ||g - \tilde{g}||_\infty \\ &\leq ||g - \tilde{g}||_\infty. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso de $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\mathscr{L}_f \mathbb{1} \neq \mathbb{1}$, sea λ el valor propio y h el vector propio de $\mathscr{L}_f$ encontrados en el punto **(I)**. Definimos:

$$\tilde{f} = f + \log h - \log h \circ \sigma - \log \lambda. \tag{4.7}$$

Tenemos:

$$\mathscr{L}_{\tilde{f}} \mathbb{1} = \mathscr{L}_f(h/\lambda h \circ \sigma) = \frac{1}{\lambda h} \mathscr{L}_f h = \mathbb{1}.$$

Si además definimos $\nu_{\tilde{f}} = h\nu$ tendremos:

$$\int_{\Sigma_A^+} \mathbb{1} d\nu_{\tilde{f}} = \int_{\Sigma_A^+} h d\nu = 1$$

y
$$\mathscr{L}^*_{\tilde{f}}(\nu_{\tilde{f}}) = \nu_{\tilde{f}}.$$
Así, dada $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ la convergencia:
$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{L}^m_{\tilde{f}} g = \int g d\nu_{\tilde{f}},$$
será uniforme y:
$$\lambda^{-m}\mathscr{L}^m_f g = \lambda^{-m}\mathscr{L}^m_{\tilde{f}-\log h+\log h\circ\sigma+\log\lambda}(g) = h\mathscr{L}^m_{\tilde{f}}(g/h).$$
Finalmente tendremos:
$$\begin{aligned}\left|\lambda^{-m}\mathscr{L}^m_f g - \nu_f(g)h\right| &= \left|h\left(\mathscr{L}^m_{\tilde{f}}(g/h) - \nu_{\tilde{f}}(g/h)\right)\right| \\ &\leq ||h||_\infty \left|\left|\mathscr{L}^m_{\tilde{f}}(g/h) - \nu_{\tilde{f}}(g/h)\right|\right|_\infty.\end{aligned}$$
Lo que concluye con la demostración de la **ecuación (4.6)**.

Simplicidad y Maximalidad de λ.

Recordando que un valor propio η se dice simple si su multiplicidad algebraica es 1, es decir si la dimensión del espacio de vectores propios generalizados, $\bigcup_{j=1}^\infty \mathrm{Nucleo}(\mathscr{L}_f - \eta I)^j$, es 1. Nuestra prueba de la simplicidad de λ estará primero en demostrar que $\dim(\mathrm{Nucleo}(\mathscr{L}_f - \lambda I)) = 1$, para luego probar de que no existe autovector generalizado de orden 2.

Sea $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ un autovector de valor propio λ de $\mathscr{L}_f$. Entonces por la compacidad de Σ_A^+ existirá $y \in \Sigma_A^+$ de modo que:
$$\inf_{x\in\Sigma_A^+}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \frac{g(y)}{h(y)}.$$
Entonces la función:
$$\hat{g} = g - \frac{g(y)}{h(y)}h.$$
será continua, no negativa y tal que para todo $m \geq 0$ tengamos:
$$0 = \lambda^m\hat{g}(y) = \mathscr{L}^m_f\hat{g}(y).$$
Así, por la no negatividad de $\hat{g}$ y la positividad de $\exp(f)$ tendremos para todo $m \geq 0$ y $z \in \sigma^{-m}\{y\}$ que:
$$\hat{g}(z) = 0.$$
Igualdad que extendemos a todo $x \in \Sigma_A^+$ a partir de la densidad de $\{\bigcup_{m\geq 0}\sigma^{-m}(y)\}$ en Σ_A^+ (**Proposición (2.2.20)**). Entonces:
$$\hat{g} \equiv 0.$$

Luego todo autovector de valor propio λ será múltiplo de h y por ende la dimensión del conjunto Nucleo$(\mathscr{L}_f - \lambda I)$ será igual a 1.
Supongamos ahora para λ la existencia de autovector generalizado, $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ de $\mathscr{L}_f$, de orden 2; es decir $(\mathscr{L}_f - \lambda)^2(g) = 0$. Entonces:

$$\mathscr{L}_f^2(g) = 2\lambda\mathscr{L}_f(g) - \lambda^2 g$$

y para todo $m \geq 0$ tendremos:

$$\mathscr{L}_f^m(g) = m\lambda^{m-1}\mathscr{L}_f(g) - (m-1)\lambda^m(g).$$

Lo que nos lleva a:

$$\lambda^{-m}\mathscr{L}_f^m(g) = \frac{m}{\lambda}\mathscr{L}_f(g) - (m-1)(g) = m\left(\frac{1}{\lambda}\mathscr{L}_f - I\right)(g) + g.$$

Finalmente como

$$\lim_{m\to\infty} \|\ \lambda^{-m}\mathscr{L}_f^{-m} g - \nu(g)h\ \|_\infty = 0,$$

concluimos:

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|m\frac{1}{\lambda}(\mathscr{L}_f^{-m} - I)(g)\right\|_\infty < \infty,$$

luego $\mathscr{L}_f g = \lambda g$. Es decir λ será valor propio simple de $\mathscr{L}_f$.

Demostraremos ahora que $\lambda = R(\mathscr{L}_f)$ y que el conjunto Esp$(\mathscr{L}_f) \setminus \{\lambda\}$, se encuentra contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que λ.
Si nuevamente escribimos $\tilde{f} \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ como en la **ecuación (4.7)**, tendremos para todo $w \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\|w\|_\theta \leq 1$:

$$\lambda^{-m}\|\mathscr{L}_f^m w\|_\theta \leq \|h\|_\theta \cdot \left\|\mathscr{L}_{\tilde{f}}^m\left(\frac{w}{h}\right)\right\|_\theta \leq \frac{\|h\|_\theta}{\inf_{\Sigma_A^+}|h|}\|\mathscr{L}_{\tilde{f}}^m \mathbb{1}\|_\theta \leq \frac{\|h\|_\theta}{\inf_{\Sigma_A^+}|h|}.$$

Luego por la **Formula del Radio Espectral (1.3.7)**, haciendo $m \to \infty$, tendremos, $\lambda \geq R(\mathscr{L}_f)$. Pero como λ es un valor propio de $\mathscr{L}_f$ concluimos:

$$\lambda = R(\mathscr{L}_f).$$

Entonces de las **Proposiciones (4.2.8), (4.2.9)** obtendremos:

$$\begin{aligned}\lambda &= \exp\left(\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\sup_{\Sigma_A^+}(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m(\mathbb{1}))\right)\right)\\ &> \theta\exp\left(\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\sup_{\Sigma_A^+}(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}^m(\mathbb{1}))\right)\right)\\ &\geq R_{ess}(\mathscr{L}_f).\end{aligned}$$

Por lo tanto para completar la demostración solo nos falta demostrar que:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)\bigcap\{z\in\mathbb{C}:|z|=R(\mathscr{L}_f)\}=\{\lambda\}.$$

Para hacer esto, supongamos por contradicción la existencia $\beta\in\mathbb{C}$ con $|\beta|=\lambda$ y $\beta\neq\lambda$. Sea además $g\in\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ tal que:

$$\mathscr{L}_f g=\beta g.$$

Luego la sucesión:

$$\{(\beta/\lambda)^m\}_{m=1}^{\infty},$$

será divergente. Entonces:

$$|\ \lambda^{-m}\mathscr{L}_f^m g(x)-\nu(g)h(x)\ |=|(\beta/\lambda)^m\, g(x)-\nu(g)h(x)|\,.$$

Así, el límite:

$$\lim_{m\to\infty} h(x)^{-1}\left|(\beta/\lambda)^m\,\frac{g(x)}{h(x)}-\nu(g)\right|,$$

no existirá para ningún $x\in\Sigma_A^+$, contradiciendo la **ecuación (4.6)**. □

4.2.4. Consecuencias del Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius

En lo que sigue nos avocaremos a estudiar algunas consecuencias del **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**, comenzando con un estudio de las propiedades dinámicas de la medida obtenida al normalizar la automedida, para continuar con formas equivalentes de expresar la presión topológica, a partir de las cuales podremos ver de manera explicita la intima relación que existe entre el operador de transferencia y la presión.
Durante toda está sección sea A una matriz de transición aperiódica.

Definición 4.2.14. Sea $f\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, ν la única medida de probabilidad para f que cumple con las conclusiones del **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)** y h el correspondiente autovector. Entonces definimos la medida μ_f por:

$$\mu_f=h\nu$$

Tenemos los siguientes resultados:

Proposición 4.2.15. Sea $f\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, entonces:

I. La medida μ_f es de probabilidad.

II. La medida μ_f es σ-invariante.

Demostración. I. Por el punto **(III)** del **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**, tenemos:

$$\mu_f(\mathbb{1})=\nu(h)=1.$$

II. Sea $g \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_f(g) &= \nu(hg) = \nu(\lambda^{-1} op_f h \cdot g) \\
&= \lambda^{-1}\nu(\mathscr{L}_f(h \cdot (g \circ \sigma))) \\
&= \lambda^{-1}(\mathscr{L}_f^* \nu)(h \cdot (g \circ \sigma)) \\
&= \nu(h \cdot (g \circ \sigma)) \\
&= \mu_f(g \circ \sigma).
\end{aligned}$$

□

Definición 4.2.16. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales. Entonces la medida $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A^+)$ se dirá de **Gibbs respecto a** f, si existen constantes $\lambda,\ C_1,\ C_2 > 0$ de modo que para todo $x \in \Sigma_A^+,\ m \geq 0$ tengamos:

$$C_1 \leq \frac{\mu\{y \in \Sigma_A^+ : y_i = x_i,\ 0 \leq i \leq m\}}{\exp(-m \log \lambda + S_m f(x))} \leq C_2. \tag{4.8}$$

Teorema 4.2.17. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, λ el valor propio simple maximal de $\mathscr{L}_f$ nombrado en el **teorema** de **Ruelle-Perron-Frobenius** y h y ν como en la **Definición (4.2.14)**. Entonces μ_f es medida de Gibbs respecto a f.

Demostración. Sea $x \in \Sigma_A^+$ y $m \geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_f([x_0 \dots x_{m-1}]) &= \int_{[x_0 \dots x_{m-1}]} h d\nu \\
&= \int_{\Sigma_A^+} h \cdot \mathbb{1}_{[x_0 \dots x_{m-1}]} d\nu \\
&= \lambda^{-m} \int_{\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^m (h \cdot \mathbb{1}_{[x_0 \dots x_{m-1}]}) d\nu.
\end{aligned}$$

Ahora como para $y \in \Sigma_A^+$ tenemos:

$$\mathscr{L}_f^m (h \cdot \mathbb{1}_{[x_0 \dots x_{m-1}]})(y) = \begin{cases} \exp(S_m f(x_0 \dots x_{m-1} y)) h(x_0 \dots x_{m-1} y) & \text{si } A_{x_{m-1}, y_0} = 0 \\ 0 & \text{si } A_{x_{m-1}, y_0} = 0 \end{cases}$$

Obtendremos la desigualdad:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f^m (h \cdot \mathbb{1}_{[x_0 \dots x_{m-1}]})(y) &\leq \exp(S_m f(x) + \sum_{i=0}^{m-1} \mid f \mid_\theta \theta^i) \mid\mid h \mid\mid_\infty \\
&\leq \exp(S_m(x)) \exp\left(\frac{\mid f \mid_\theta}{1-\theta}\right) \mid\mid h \mid\mid_\infty .
\end{aligned}$$

Luego:

$$\mu_f([x_0 \dots x_{m-1}]) \leq \lambda^{-m} \exp(S_m(x)) \exp\left(\frac{\mid f \mid_\theta}{1-\theta}\right) \mid\mid h \mid\mid_\infty .$$

Escribiendo entonces $C_2 = \exp\left(\frac{|f|_\theta}{1-\theta}\right) \| h \|_\infty$ tendremos:

$$\frac{\mu_f([x_0 \dots x_{m-1}])}{\exp(-m\log\lambda + S_m f(x))} \le C_2.$$

Por otra parte la aperiodicidad de la matriz A, nos permite encontrar entero positivo M tal que $A^M > 0$. Así para todo y en Σ_A^+ existirá al menos un elemento z en $[x_0 \dots x_m]$ tal que $\sigma^{m+M}(z) = y$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_f([x_0 \dots x_{m-1}]) &= \lambda^{-(m+M)} \int_{\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f^{m+M}\left(h \cdot \mathbb{1}_{[x_0 \dots x_{m-1}]}\right)(y)d\nu \\
&\ge \lambda^{-(m+M)} \exp(S_{m+M}f(z)) \inf_{\Sigma_A^+} h \\
&\ge \lambda^{-(m+M)} \exp(S_m f(z) - M \| f \|_\infty) \inf_{\Sigma_A^+} h \\
&\ge \left(\lambda^{-M} \exp\left(\frac{-|f|_\theta}{1-\theta} - M\|f\|_\infty\right) \inf_{\Sigma_A^+} h\right) \exp(S_m f(x))\lambda^{-m}.
\end{aligned}$$

Escribiendo $C_1 = \left(\lambda^{-M}\exp\left(\frac{-|f|_\theta}{1-\theta} - M\|f\||_\infty\right)\inf_{\Sigma_A^+} h\right)$, concluimos finalmente:

$$C_1 \le \frac{\mu_f([x_0 \dots x_{m-1}])}{\exp(-m\log\lambda + S_m f(x))} \le C_2.$$

□

Corolario 4.2.18. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, λ el valor propio maximal de $\mathscr{L}_f$ nombrado en el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**. Entonces:

$$\begin{aligned}
P(f) &= \log\lambda = \log R(\mathscr{L}_f) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\left(\sup_{\Sigma_A^+}(\mathscr{L}_f^m(\mathbb{1}))\right).
\end{aligned}$$

Demostración. Para cada palabra finita admisible η de largo $m \ge 0$ de Σ_A^+, sea $x_\eta \in [\eta]$ tal que:

$$\sup_{y\in[\eta]} \exp(S_m f(y)) = \exp(S_m f(x_\eta)).$$

Entonces por el **Teorema (4.2.4)** tenemos:

$$C_1 \exp(S_m f(x_\eta)) \le \exp(-m\log\lambda)\mu_f([\eta]) \le C_2 \exp(S_m f(x_\eta)).$$

Lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned}
C_1 \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m f(x_\eta)) &\le \exp(m\log\lambda) \\
&\le C_2 \sum_{x\in[\eta]} \exp(S_m f(x_\eta)).
\end{aligned}$$

Tomando logaritmo y dividiendo por m:

$$\frac{\log C_1}{m} + \frac{1}{m}\log\left(\sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m f(x_\eta))\right) \leq \log\lambda$$
$$\leq \frac{\log C_2}{m} + \frac{1}{m}\log\left(\sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m f(x_\eta))\right).$$

Haciendo luego tender m a infinito, por la **ecuación (3.3)**:

$$P(f) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\log\left(\sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m f(x_\eta))\right) = \log\lambda.$$

Finalmente por el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)** y la **Proposición (4.2.8)** concluimos:

$$\begin{aligned} P(f) &= \log\lambda = \log R(\mathscr{L}_f) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\log\left(\sup_{\Sigma_A^+}(\mathscr{L}_f^m(\mathbb{1}))\right). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.19. **(ver [7, Teorema 1.22])** Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, entonces μ_f es la única medida $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ para la cual tenemos:

$$P(f) = h_\mu(\sigma) + \int_{\Sigma_A^+} f d\mu.$$

Observación 4.2.20. Por último, los resultados recién mencionados nos permiten reformular las **Proposiciones (4.2.8)** y **(4.2.9)** en la forma siguiente:

Proposición 4.2.21. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Entonces el radio espectral del operador de transferencia $\mathscr{L}_f$ actuando respectivamente sobre los espacios de Banach $(\mathcal{C}(\Sigma_A^+),\ ||\cdot||_\infty)$ y $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+),\ ||\cdot||_\theta)$ es a lo más:

$$\exp(P(\mathrm{Real}(f))).$$

Si asumimos f a valores reales, entonces tendremos la igualdad.

Proposición 4.2.22.

Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y $\mathscr{L}_f$ el respectivo operador de transferencia actuando sobre $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+),\ ||\cdot||_\theta)$. Entonces el radio esencial $R_{ess}(\mathscr{L}_f)$ es a lo más:

$$\theta\exp(P(\mathrm{Real}(f))).$$

4.2.5. Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius Complejo

Durante la sección anterior probamos para funciones en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$, el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**. En la presente sección extenderemos ciertos puntos de dicho resultado, más específicamente los concernientes a la maximalidad y simplicidad del valor propio, para el caso más general de funciones en un cierto subconjunto de $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$.

Supongamos en lo que sigue, A, aperiódica.
Comenzaremos con el caso particular de $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, con $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Luego, de la **Proposición (4.2.8)**, el Radio Espectral, $R(\mathscr{L}_f)$, será a lo más 1 y para toda $\phi \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f(\phi) &= \sum_{y\in\sigma^{-1}\{x\}} \exp(f(y))\phi(y) \\
&= \sum_{y\in\sigma^{-1}\{x\}} \exp(\mathrm{Real}(f)(y))\exp(i\mathrm{Im}(f))\phi(y) \\
&= \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}\left(\exp(i\mathrm{Im}(f))\phi\right).
\end{aligned}$$

Si además para $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = 1$, existe $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, tal que:

$$\exp(i\mathrm{Im}(f))g = \lambda(g \circ \sigma),$$

obtendremos la igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f(g) &= \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}(\exp(i\mathrm{Im}(f))g) \\
&= \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}(\lambda g \circ \sigma) \\
&= \lambda g(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}\mathbb{1}) \\
&= \lambda g.
\end{aligned}$$

Y el radio espectral, $R(\mathscr{L}_f)$, sera 1.
Si por otra parte escogemos, $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, de modo que exista, $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\mid \lambda \mid = 1$ y:

$$\mathscr{L}_f g = \lambda g,$$

tendremos por un lado:

$$|g| = |\mathscr{L}_f g| \leq \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}|g|$$

y por otro

$$\int \mid g \mid d\mu_{\mathrm{Real}(f)} = \int \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)} \mid g \mid d\mu_{\mathrm{Real}(f)}.$$

Luego, como para todo cilindro, $C \subset \Sigma_A^+$, tenemos $\mu_{\mathrm{Real}(f)}(C) > 0$ (**Proposición (4.2.4)**), obtendremos la igualdad:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)} \mid g \mid \equiv |g|.$$

Entonces de la simplicidad de 1 como valor propio de $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}$, la función $\mid g \mid$ será constante. Observemos que para cada $x \in \Sigma_A^+$ tenemos:

$$\sum_{y \in \sigma^{-1}\{x\}} \exp(\mathrm{Real}(f)(y)) = 1$$

y

$$\sum_{y \in \sigma^{-1}\{x\}} \exp(\mathrm{Real}(f)(y)) \exp(i\mathrm{Im}(f)(y)) g(y) = \lambda g(x).$$

La igualdad para cada $y \in \sigma^{-1}\{x\}$:

$$|g(x)| = |g(y)|,$$

nos permitirá para cada $y \in \sigma^{-1}\{x\}$ concluir:

$$\exp(i\mathrm{Im}(f)(y))g(y) = \lambda g \circ \sigma(y).$$

Lo recién hecho nos motiva a definir el operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_f : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) \\ g &\mapsto g \circ \sigma \exp(-i\mathrm{Im}(f)). \end{aligned}$$

La importancia del operador $\mathcal{V}_f$ reside en la posibilidad, a partir de él, de extrapolar ciertas propiedades espectrales de $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}$ a $\mathscr{L}_f$.

Proposición 4.2.23. Supongamos A aperiódica y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Luego definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_f : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) \\ g &\mapsto g \circ \sigma \exp(-i\mathrm{Im}(f)). \end{aligned}$$

Entonces para $\lambda \in \mathbb{C}$ de modulo 1, tenemos:

I. λ es un autovalor de $\mathscr{L}_f$ si y solo si λ^{-1} es un autovalor de $\mathcal{V}_f$.

II. Si λ es un autovalor de $\mathscr{L}_f$, entonces λ es simple como autovalor de $\mathscr{L}_f$ si y solo si 1 es simple como autovalor de $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}$, además el conjunto $\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \setminus \{\lambda\}$ está contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que 1 si y solo si el conjunto $\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}) \setminus \{1\}$ está contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que 1.

Demostración. La parte **(I)** sigue de lo hecho más arriba. Para demostrar **(II)** sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ de modo que:

$$\mathscr{L}_f g = \lambda g$$

Entonces por lo visto más arriba, $|g|$ es constante y:

$$\exp(i\mathrm{Im}(f)) = \frac{\lambda(g \circ \sigma)}{g}.$$

Luego para toda, $\phi \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, tendremos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f(\phi) &= \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}(\exp(i\mathrm{Im}(f))\phi) \\
&= \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}\left(\frac{\lambda(g\circ\sigma)}{g}\phi\right) \\
&= \lambda g \cdot \mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}\left(\frac{\phi}{g}\right).
\end{aligned}$$

y

$$(\mathscr{L}_f - \lambda I)^2(\phi) = \lambda^2 g \cdot (\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)} - I)^2\left(\frac{\phi}{g}\right).$$

Junto con lo hecho más arriba, esto demuestra la primera parte de **(II)**. Finalmente como:

$$R(\mathscr{L}_f) = R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}),$$

de la **Proposición (4.2.21)** obtenemos la desigualdad:

$$R(\mathscr{L}_f) = R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}) > \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$$

y por la **Proposición (4.2.22)** concluimos la demostración. □

La anterior **proposición** motiva el siguiente resultado.

Teorema 4.2.24. (**Ruelle-Perron-Frobenius Complejo**) Supongamos, A, aperiódica y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tal que $R(\mathscr{L}_f) = R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)})$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = R(\mathscr{L}_f)$, tal que λ es un autovalor de $\mathscr{L}_f$. Este autovalor será además simple y el resto del espectro se encontrará contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que, $R(\mathscr{L}_f)$.

Demostración. Por el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**, $\lambda = R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)})$, es un autovalor simple maximal de $\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}$ y el resto de, $\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)})$, está contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que $R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)})$.
Sea $h \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tal que:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}(h) = \lambda h.$$

Podremos escribir:

$$u = \mathrm{Real}(f) - \log h\circ\sigma + \log h - \log\lambda.$$

Además:

$$\mathscr{L}_u \mathbb{1} = \frac{1}{\lambda}\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}(h) = \mathbb{1}.$$

Y nuevamente por el **Teorema Ruelle-Perron-Frobenius**, 1 será valor propio, simple, maximal de $\mathscr{L}_u$, con el resto de $\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_u)$ contenido en un disco de radio estrictamente menor que 1. Así, denotando por $\tilde{f}$ a la función:

$$\tilde{f} = u + i\mathrm{Im}(f),$$

tendremos para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ la igualdad:

$$\mathscr{L}_f(g) = \lambda h \mathscr{L}_{\tilde{f}}\left(\frac{g}{h}\right).$$

Entonces el **teorema** se obtendrá de la parte **(II)** de la **Proposición (4.2.23)** con f igual a $\tilde{f}$. □

Finalizaremos la sección con el siguiente resultado.

Proposición 4.2.25. Supongamos A aperiódica, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$ y (Σ_A^f, σ_f) el respectivo flujo de suspensión. Entonces para cada $a \in \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones serán equivalentes:

I. Existe $W \in \mathcal{C}\left(\Sigma_A^f\right)$ de modo que para todo $t > 0$ tengamos:

$$W \circ \sigma_{f,t} = \exp(iat)W.$$

II. Existe $w \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ de modo que:

$$w \circ \sigma = \exp(iaf)w.$$

III. Para cada $u \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, existe $w \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ de modo que:

$$\mathscr{L}_{u+iaf} w = R(\mathscr{L}_u)w.$$

Demostración. I. Supongamos **(I)**. Definamos para $x \in \Sigma_A^+$:

$$w(x) = W(x, 0).$$

Luego para $x \in \Sigma_A^+$ tendremos:

$$w(\sigma(x)) = W(\sigma(x), 0) = W(x, f(x)) = \exp(iaf(x))W(x, 0) = \exp(iaf(x))w(x).$$

y w definirá una función continua tal que:

$$w \circ \sigma = \exp(iaf)w.$$

Quedándonos tan solo demostrar la pertenencia de w en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Para hacer esto, denotemos por $h \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, al vector propio, de valor propio $R(\mathscr{L}_f)$ de $\mathscr{L}_f$ (**Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**) y escribamos:

$$f_1 = f + \log h - \log h \circ \sigma - \log R(\mathscr{L}_f),$$

así:

$$\bar{f} = f_1 + iaf.$$

Entonces:

$$\mathscr{L}_{\bar{f}}\mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

y de la desigualdad dada por la **ecuación 4.3** la sucesión:

$$\{\mathscr{L}_{\bar{f}}^{m}\mathbb{1}\}_{m=1}^{\infty},$$

definirá una familia equicontinua de funciones. Así por **Arzela-Ascoli (4.2.12)** existirá subsucesión $\{\mathscr{L}_{\bar{f}}^{m_k}\mathbb{1}\}_{m_k=1}^{\infty}$ de modo que el límite:

$$\lim_{k\to\infty}\mathscr{L}_{\bar{f}}^{m_k}\mathbb{1},$$

exista y este contenido en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Entonces denotando:

$$\lim_{k\to\infty}\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(\bar{f})}^{m_k}\mathbb{1}=\phi$$

y notando la igualdad:

$$\mathscr{L}_{\bar{f}}^{m}\mathbb{1}=w\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(\bar{f})}^{m}(\mathbb{1}/w),$$

por el **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, punto (III), ecuación (4.2)** tendremos:

$$\phi=\lim_{k\to\infty}\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(\bar{f})}^{m_k}\mathbb{1}=w\lim_{k\to\infty}\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(\bar{f})}^{m_k}(\mathbb{1}/w)=\left(\int_{\Sigma_A^+}(1/w)d\mu_f\right)w.$$

De donde concluimos la pertenencia de w en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$.

II. Supongamos **(II)**. Definiendo:

$$W(x,t)=\exp(iat)w(x),$$

tendremos:

$$W(x,f(x))=\exp(iaf(x))w(x)=w(\sigma(x))=W(\sigma(x),0)$$

y $W(x,t)$ será bien definida y continua.
Ademas:

$$W\circ\sigma_{f,s}(x,t)=\exp(ia(t+s))w(x)=\exp(ias)(\exp(iat)w(x))=\exp(ias)W(x,t).$$

III. Finalmente para $u\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\mathscr{L}_u\mathbb{1}=\mathbb{1}$, los puntos **(II)** y **(III)** serán equivalentes por la **Proposición (4.2.23)**. Para el caso de $u\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\mathscr{L}_u\mathbb{1}\neq\mathbb{1}$, sea $h\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, el vector propio, de valor propio $R(\mathscr{L}_u)$ de $\mathscr{L}_u$ (**Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**) entonces:

$$\tilde{u}=u+\log h-\log h\circ\sigma-\log R(\mathscr{L}_u).$$

y:

$$\mathscr{L}_{\tilde{u}}\mathbb{1}=\mathbb{1}.$$

Además para toda toda $\phi \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tendremos:

$$\mathscr{L}_u\phi = R(\mathscr{L}_u)h \cdot \mathscr{L}_{\tilde{u}}(\phi/h).$$

Luego la equivalencia entre los puntos **(II)** y **(III)** se obtiene nuevamente por la **Proposición (4.2.23)**.

□

Definición 4.2.26. Dada la matriz de transición aperiódica A, sea (Σ_A^+, σ) el Sub-Shift de tipo finito respectivo y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$. Entonces el flujo de suspensión σ_f se dirá **débilmente mezclante** , si $a = 0$ es el único real para el cual existe $W \in \mathcal{C}(\Sigma_A^f)$ de modo que para todo $t > 0$ tengamos:

$$W \circ \sigma_{f,t} = \exp(iat)W.$$

4.3. Estimación del Radio Espectral mediante el uso de Puntos Periódicos

La presente sección tiene por propósito probar el siguiente resultado, mediante el cual podremos durante el capítulo seis dar con el conjunto donde la llamada, **Función Zeta Dinámica para el Sub-Shift de tipo finito**, está bien definida. Más aún las herramientas a ocupar en la demostración, más específicamente los **Lemas (4.3.2)** y **(4.3.3)**, serán las que posteriormente utilizaremos para probar propiedades de regularidad y encontrar extensiones meromorfas de la función Zeta.

En lo que resta de sección, sea $\theta \in (0, 1)$ y A, matriz de transición de orden $n \geq 2$.

Proposición 4.3.1. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Para cada entero $m \geq 1$ definimos:

$$\mathrm{Fix}(\sigma^m) = \left\{x \in \Sigma_A^+ : \sigma^m(x) = x\right\}.$$

Si entonces denotamos:

$$\overline{R}(\mathscr{L}_f) = \text{máx}\left\{\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))), R(\mathscr{L}_f)\right\},$$

tendremos:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\left(\left|\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right|\right) \leq \log \overline{R}(\mathscr{L}_f).$$

Antes de comenzar con la demostración de la anterior **proposición** daremos algunas definiciones que nos facilitaran la notación y la realización de nuestro objetivo.
Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Entonces de la **Proposición (4.2.22)** tendremos:

$$R_{ess}(\mathscr{L}_f) \leq \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))).$$

Entonces podremos elegir $R > \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$ de modo que:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} \bigcap \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) = \emptyset.$$

Luego el conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},$$

contendrá tan solo un número finito, $N_{f,R}$, de valores propios de multiplicidad algebraica finita. Finalmente si denotamos por $\kappa_{(f,i)}$, la multiplicidad algebraica del valor propio $\lambda_{(f,i)}$ y por $Q_{f,R}$ la proyección espectral sobre el conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} :| z |< R\}.$$

Definimos:

$$\zeta_m(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(f(x))), \tag{4.9}$$

$$\zeta^{(0)}_{R,m}(f) = \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \kappa(f,i)\lambda^m_{(f,i)}, \tag{4.10}$$

$$\zeta^{(1)}_{R,m}(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} (I - Q_{f,R})\mathscr{L}^m_f(\mathbb{1}_{[x|m]})(x) - \zeta^{(0)}_{R,m}(f), \tag{4.11}$$

$$\zeta^{(2)}_{R,m}(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} Q_{f,R}\mathscr{L}^m_f(\mathbb{1}_{[x|m]})(x). \tag{4.12}$$

Entonces tenemos:

$$\zeta_m(f) = \zeta^{(0)}_{R,m}(f) + \zeta^{(1)}_{R,m}(f) + \zeta^{(2)}_{R,m}(f). \tag{4.13}$$

Una vez hecho esto los ingrediente restantes para demostrar la **Proposición (4.3.1)** serán los dos lemas siguientes.

Lema 4.3.2. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma^+_A)$ y $R > \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$ tal que:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} = \emptyset.$$

Entonces dado $\delta > 0$ suficientemente pequeño, existirá una constante C_1 de modo que para toda $g \in B(f,\delta)$, el número $\left|\zeta^{(1)}_{R,m}(g)\right|$, este bien definido y tengamos:

$$\left|\zeta^{(1)}_{R,m}(g)\right| \leq C_1 R^m. \tag{4.14}$$

Lema 4.3.3. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma^+_A)$ y $R > \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$ tal que:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} = \emptyset.$$

Entonces dado $\delta > 0$ suficientemente pequeño, existirá una constante C_2, de modo que para toda $g \in B(f,\delta)$, el número $\left|\zeta^{(2)}_{R,m}(g)\right|$ este bien definido y tengamos:

$$\left|\zeta^{(2)}_{R,m}(g)\right| \leq C_2 R^m. \tag{4.15}$$

Antes de comenzar con la demostración de los lemas definamos:

Definición 4.3.4. Sea η una palabra admisible en Σ_A^+.

1. Definimos $\sigma(\eta)$, como la palabra que se obtiene al quitarle a η la primera coordenada y $\sigma^{-1}\{\eta\}$, como el conjunto de palabras permitidas de largo $|\eta|+1$, que coinciden con η, al quitarles la primera coordenada.
2. Para cada palabra η_0 de largo 1, escogemos $x(\eta_0) \in \Sigma_A^+$ que comienza con η_0. Entonces definimos $x(\eta)$ como el elemento de Σ_A^+, que comienza con η y cumple con
$$\sigma^{|\eta|-1}(x(\eta)) = x(\sigma^{|\eta|-1}(\eta)).$$
3. Si $\eta \vee \eta$ es admisible, definimos $\overline{\eta} = \eta \vee \eta \vee \ldots$.
4. Finalmente, definimos:
$$\tilde{\eta} = \begin{cases} \overline{\eta} & \text{si } \eta \vee \eta \text{ es admisible;} \\ x(\eta) & \text{si no.} \end{cases}$$

Notemos de la definición que:

$$\sigma(x(\eta)) = x(\sigma(\eta))$$

y:

$$\mathscr{L}_f^m \mathbb{1}_{[\eta]}(x) = \begin{cases} \exp(S_m f(\eta \vee x)) & \text{si } \eta \vee x \text{ es permitido;} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego nos será posible escribir:

$$\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(f(x))) = \sum_{\eta : |\eta| = m} \mathscr{L}_f^m \mathbb{1}_{[\eta]}(\tilde{\eta}) \tag{4.16}$$

y tendremos las igualdades:

$$\zeta_{R,m}^{(1)}(f) = \sum_{\eta : |\eta| = m} (I - Q_{f,R}) \mathscr{L}_f^m (\mathbb{1}_{[\eta]})(\tilde{\eta}) - \zeta_{R,m}^{(0)}(f),$$

$$\zeta_{R,m}^{(2)}(f) = \sum_{\eta : |\eta| = m} Q_{f,R}(\mathscr{L}_f^m \mathbb{1}_{[\eta]})(\tilde{\eta}).$$

Demostración. (**Lema(4.3.2)**) Escojamos para cada $i \in \{1, \ldots, N_{f,R}\}$, una base de de vectores propios generalizados de $\mathscr{L}_f$ con autovalor $\lambda_{(f,i)}$:

$$\{v_{(1,\lambda_{(f,i)})}, \ldots, v_{(\kappa(f,i),\lambda_{(f,i)})}\},$$

tal que para cada $j \in \{1, \ldots, \kappa(f,i)\}$, tengamos $||v_{(j,\lambda_{(f,i)})}||_\theta = 1$. Hecho esto, del uso de la **delta de Kronecker**:

$$\delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j; \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

podemos para cada $v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}$, $1 \leq \alpha \leq \kappa(f,i)$ definir sobre la base del espacio de vectores propios generalizados de $\lambda_{(f,i)}$, el funcional lineal $\bar{\mu}_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}$, por medio de:

$$\bar{\mu}_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}(v_{(\beta,\lambda_{(f,i)})}) = \delta_{\alpha,\beta}.$$

Entonces definimos sobre $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ el funcional lineal, $\mu_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}$, a través de la composición de $\bar{\mu}_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}$ con la **proyección espectral sobre el espacio de vectores propios generalizados con autovalor $\lambda_{(f,i)}$ (Ecuación 1.1)**:

$$P_{\lambda_{(f,i)}}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mathscr{L}_f - zI)^{-1} dz,$$

donde Γ es una curva cerrada simple en $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)$ que encierra solo a $z = \lambda_{(f,i)}$. Luego:

$$\mu_{(\beta,\lambda_{(f,i)})}(v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}) = \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\beta},$$

y tendremos para cada $w \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ la igualdad:

$$w - Q_{f,R}(w) = \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(w) v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_f^m(w - Q_{f,R}(w)) &= (I - Q_{f,R})(\mathscr{L}_f^m w) \\ &= \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(\mathscr{L}_f^m w) v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}. \end{aligned}$$

Notando además:

$$\begin{aligned} \zeta_{R,m}^{(0)}(f) &= \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \kappa(f,i)\lambda_{(f,i)}^m \\ &= \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(\mathscr{L}_f^m v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}), \end{aligned}$$

podremos entonces escribir:

$$\begin{aligned} \zeta_{R,m}^{(1)}(f) = &\sum_{\eta:|\eta|=m} \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(\mathscr{L}_f^m \mathbb{1}_{[\eta]}) v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(\tilde{\eta}) \\ &- \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(\mathscr{L}_f^m v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}) \\ = &\sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}\left(\mathscr{L}_f^m\left(\sum_{\eta:|\eta|=m} v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}(\tilde{\eta})\mathbb{1}_{[\eta]} - v_{(\alpha,\lambda_{(f,j)})}\right)\right) \end{aligned}$$

Si acontinuación definimos $E_m : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ por:

$$E_m(w) = \sum_{\eta:|\eta|=m} w(\tilde{\eta})\mathbb{1}_{[\eta]}$$

y $K_{m,f} : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ por:

$$K_{m,f} = \mathscr{L}_f^m \circ E_m,$$

tendremos:

$$\begin{aligned}
\left|\zeta_{R,m}^{(1)}(f)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \mu_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})} \left(\mathscr{L}_f^m \left(\sum_{\eta:|\eta|=m} v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}(\tilde{\eta})\mathbb{1}_{[\eta]} - v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}\right)\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \left|\mu_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})} \left(\mathscr{L}_f^m \left(E_m(v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}) - v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} \left|\mu_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})} \left(K_{m,f} v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})} - \mathscr{L}_f^m v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} ||\mu_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}||_{\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)^*} \cdot ||\mathscr{L}_f^m - K_{m,f}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \cdot ||v_{(\alpha,\lambda_{(f,i)})}||_\theta \\
&= \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \sum_{\alpha=1}^{\kappa(f,i)} ||\mathscr{L}_f^m - K_{m,f}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))}.
\end{aligned}$$

Luego como del uso de la **Proposición (1.3.9),** podemos escoger $\delta > 0$ con:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)) + \delta) < R,$$

de modo que para toda $g \in B(f,\delta)$ tengamos:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} \bigcap \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_g) = \emptyset$$

y del **Corolario (4.2.18)** tenemos $R(f) = \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$, podremos aplicar para R igual a:

$$R\exp(-\delta) > \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) = \theta R(f),$$

el **Lema (4.2.10)** y obtener K_1 tal que para todo $m \geq 0$ tengamos:

$$||\mathscr{L}_g^m - K_{m,g}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \leq K_1 R\exp(-\delta)$$

Entonces para $g \in B(f,\delta)$ concluimos:

$$\left|\zeta_{R,m}^{(1)}(g)\right| \leq K_1 R^m \sum_{i=1}^{N_{g,R}} \kappa(g,i).$$

Finalmente podemos, reduciendo δ si es necesario, suponer, por el **Teorema (1.3.10)**, para toda $g \in B(f,\delta)$ la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{N_{g,R}} \kappa(g,i) = \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \kappa(f,i).$$

Y la desigualdad deseada se obtendrá al tomar:

$$C_1 = K_1 \sum_{i=1}^{N_f} \kappa(f,i).$$

□

El siguiente **lema** nos facilitará la demostración del **Lema (4.3.3)**.

Lema 4.3.5. Dado el entero $k \geq 1$, sea η una palabra de largo k en Σ_A^+. Entonces definimos para $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$:

$$X_{f,\eta} = \exp\left(-S_k f\left(x(\eta)\right)\right) \cdot \mathscr{L}_f^k \mathbb{1}_{[\eta]}. \tag{4.17}$$

Para η, la palabra vacía, $\emptyset$, definimos:

$$X_{f,\emptyset} \equiv 0,$$

Definimos además:

$$Y_{f,\eta} = X_{f,\eta} - X_{f,\sigma(\eta)}.$$

Entonces dado $\delta > 0$ existen constantes $P_1,\ P_2$ de modo que para toda $g \in B(f,\delta)$, tengamos:

$$\begin{aligned} ||X_{g,\eta}||_\theta &\leq P_1, \\ ||Y_{g,\eta}||_\theta &\leq P_2\theta^k. \end{aligned}$$

Demostración. Para todo $x \in \Sigma_A^+$ con $\eta \vee x \in \Sigma_A^+$, tenemos:

$$\begin{aligned} |X_{f,\eta}(x)| &= \left|\exp\left(S_k f\left(\eta \vee x\right) - S_k f\left(x(\eta)\right)\right)\right| \\ &\leq \exp\Big(S_k(\mathrm{Real}(f))(\eta \vee x) - S_k(\mathrm{Real}(f))\left(x(\eta)\right)\Big) \\ &\leq \exp(|\mathrm{Real}(f)|_\theta\left(\theta^k + \theta^{k-1} + \ldots + \theta\right)) \\ &\qquad\qquad\qquad \leq \exp\left(\frac{|\mathrm{Real}(f)|_\theta}{1-\theta}\right). \end{aligned}$$

Al mismo tiempo, para todo par $x,\ y \in \Sigma_A^+$ con $x_i = y_i,\ 0 \leq i \leq j$ y $\eta \vee x \in \Sigma_A^+$ tenemos:

$$\begin{aligned} &|X_{f,\eta}(x) - X_{f,\eta}(y)| \\ &\quad \leq \left|\exp\left(S_k f(\eta \vee y) - S_k f\left(x(\eta)\right)\right)\right| \\ &\qquad\qquad\qquad \cdot \left|\exp\left(S_k f(\eta \vee x) - S_k f(\eta \vee y)\right) - 1\right| \\ &\quad = \exp\left(S_k(\mathrm{Real}(f))(\eta \vee y) - S_k(\mathrm{Real}(f))\left(x(\eta)\right)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad \cdot \left|\exp\left(S_k f(\eta \vee x) - S_k f(\eta \vee y)\right) - 1\right|. \end{aligned}$$

Así de la **observación (4.2.4)** obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&| \, X_{f,\eta}(x) - X_{\eta}(y) \, | \\
&\leq \exp\left(\frac{|\mathrm{Real}(f)|_\theta + |f|_\theta}{1-\theta}\right) |S_k f(\eta \vee x) - S_k f(\eta \vee y)| \\
&\leq \theta^j \exp\left(\frac{|\mathrm{Real}(f)|_\theta + |f|_\theta}{1-\theta}\right) \frac{|f|_\theta}{1-\theta}.
\end{aligned}
$$

Lo que nos lleva a:

$$|X_{f,\eta}|_\theta \leq \exp\left(\frac{| \, \mathrm{Real}(f) \, |_\theta + |f|_\theta}{1-\theta}\right) \frac{|f|_\theta}{1-\theta}.$$

Luego si definimos:

$$P_1(f) = \exp\left(\frac{|\mathrm{Real}(f)|_\theta}{1-\theta}\right) \left(1 + \exp\left(\frac{|f|_\theta}{1-\theta}\right) \frac{|f|_\theta}{1-\theta}\right)$$

obtendremos:

$$||X_{f,\eta}||_\theta \leq P_1(f).$$

Notemos ahora que, si $\eta \vee x$ es permitido, tendremos las igualdades:

$$
\begin{aligned}
\exp\left(-S_k f\left(x(\eta)\right)\right) &= \exp\left(-f\left(x(\eta)\right) - S_{k-1} f\left(x(\sigma(\eta))\right)\right), \\
\exp\left(S_k f(\eta \vee x)\right) &= \exp\left(f(\eta \vee x) + S_{k-1} f(\sigma(\eta)(x))\right), \\
\mathscr{L}_f^k \mathbb{1}_{[\eta]}(x) &= \exp(f(\eta \vee x)) \cdot \mathscr{L}_f^{k-1} \mathbb{1}_{[\sigma(\eta)]}(x).
\end{aligned}
$$

Luego para $x \in \Sigma_A^+$ con $\eta \vee x \in \Sigma_A^+$, nos será posible escribir, $Y_\eta(x)$, en la forma:

$$Y_{f,\eta}(x) = \left(\exp\left(f(\eta \vee x)\right) - f\left(x(\eta)\right)\right) - 1) \, X_{f,\sigma(\eta)}(x)$$

De donde deducimos:

$$| \, Y_{f,\eta}(x) \, | \leq || \, X_{f,\sigma(\eta)} \, ||_\theta \exp\left(|f|_\theta\right) | \, f \, |_\theta \, \theta^k.$$

Además, para todo $x, \; y \in \Sigma_A^+$ con $x_i = y_i, \; 0 \leq i \leq j$ y $\eta \vee x \in \Sigma_A^+$ tendremos:

$$
\begin{aligned}
&|Y_{f,\eta}(x) - Y_{f,\eta}(y)| \\
&\leq ||X_{f,\sigma(\eta)}||_\theta \exp(|\mathrm{Real}(f)|_\theta) \, |\exp(f(\eta \vee x) - f(\eta \vee y)) - 1| \\
&\qquad + \theta^j |X_{f,\sigma(\eta)}|_\theta \, |\exp\left(f(\eta \vee y) - f\left(x(\eta)\right)\right) - 1| \\
&\leq 2\theta^{k+j} ||X_{f,\sigma(\eta)}||_\theta \exp\left(|\mathrm{Real}(f)|_\theta + |f|_\theta\right) | \, f \, |_\theta \, .
\end{aligned}
$$

Si finalmente definimos:

$$P_2(f) = P_1(f) \, | \, f \, |_\theta \, \exp\left(|f|_\theta\right) \left(1 + 2\exp\left(|\mathrm{Real}(f)|_\theta\right)\right)$$

entonces concluimos:

$$|| \, Y_{f,\eta} \, ||_{\theta} \leq \theta^k P_2(f).$$

Las desigualdades deseadas se obtendran de notar la continuidad de las funciones:

$$g \mapsto P_1(g),$$
$$g \mapsto P_2(g).$$

$\square$

Procedamos a demostrar el **Lema (4.3.3)**.

Demostración. (**Lema (4.3.3)**) Sea $R_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < R_0 < R$$

y:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : R_0 \leq |z| \leq R\} = \emptyset.$$

Del uso de la **Proposición (1.3.9)** y del **Lema (4.3.5),** escogemos $\delta > 0$ con:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)) + \delta) < R_0$$

de modo que para toda $g \in B(f, \delta)$, el operador Q_{g,R_0} este bien definido, el conjunto:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_g) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : R_0 \leq |z| \leq R\} = \emptyset.$$

sea vacio y tengamos las desigualdades:

$$||X_{g,\eta}||_{\theta} \leq P_1,$$
$$||Y_{g,\eta}||_{\theta} \leq P_2 \theta^k.$$

Notemos además que de la desigualdad:

$$\mathscr{L}^j_{\mathrm{Real}(g)} \mathbb{1} \leq \exp(\delta)^j \mathscr{L}^j_{\mathrm{Real}(f)} \mathbb{1}$$

y la existencia del límite:

$$\lim_{j \to \infty} \left|\left| \mathscr{L}^j_{\mathrm{Real}(f)} \mathbb{1} \right|\right|_{\infty}^{\frac{1}{j}} = \exp(P(\mathrm{Real}(f))),$$

existirá para $(\exp(\delta)\theta)^{-1} R_0$ una constante $K_2 > 0$ tal que para toda $g \in B(f, \delta)$ y todo $j \geq 1$ tengamos:

$$\sum_{\eta : |\eta| = j} \exp(S_j \mathrm{Real}(g)(x(\eta))) \leq K_2 R_0^j.$$

Sea $g \in B(f,\delta)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\zeta^{(2)}_{R_0,m}(g) &= \sum_{\eta:|\eta|=m} (Q_{g,R_0}\mathscr{L}_g^m \mathbb{1}_{[\eta]})(\tilde{\eta}) \\ &= \sum_{\eta:|\eta|=m} \left(Q_{g,R_0}\left(\exp\left(S_m g(x(\eta))\right) X_{g,\eta}\right)\right)(\tilde{\eta}) \\ &= \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp\left(S_m g(x(\eta))\right) \cdot (Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(\tilde{\eta}).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\zeta^{(2)}_{R_0,m}(g) = \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp\left(S_m g(x(\eta))\right) \cdot (Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(x(\eta)) +$$

$$\sum_{\eta:|\eta|=m} \exp\left(S_m g(x(\eta))\right) \left((Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(\tilde{\eta}) - (Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(x(\eta))\right) = S_{1,g} + S_{2,g}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}|S_{2,g}| &= \left|\sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m g(x(\eta)))\Big((Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(\tilde{\eta}) - (Q_{g,R_0} X_{g,\eta_m})(x(\eta))\Big)\right| \\ &\leq \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m \mathrm{Real}(g)(x(\eta)))\Big|(Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(\tilde{\eta}) - (Q_{g,R_0} X_{g,\eta})(x(\eta))\Big| \\ &\leq \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m \mathrm{Real}(g)(x(\eta))) \,||\, Q_{g,R_0} X_{g,\eta} \,||_\theta\, \theta^m \\ &\leq \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp(S_m \mathrm{Real}(g)(x(\eta))) \,||\, Q_{g,R_0} \,||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \cdot ||\, X_{g,\eta} \,||_\theta\, \theta^m.\end{aligned}$$

Entonces:

$$|S_{2,g}| \leq P_1 K_2 R_0^m.$$

A continuación, de la propiedad telescópica de la suma, tendremos la igualdad:

$$\begin{aligned}X_{g,\eta}(x(\eta)) &= \left(\sum_{k=1}^{m} X_{g,\sigma^{m-k}(\eta)} - X_{g,\sigma^{m+1-k}(\eta)}\right)(x(\eta)) \\ &= \sum_{k=1}^{m} Y_{g,\sigma^{m-k}(\eta)}(x(\eta)).\end{aligned}$$

Luego podremos escribir:

$$
\begin{aligned}
S_{1,g} &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta:|\eta|=m} \exp\left(S_m g\left(x(\eta)\right)\right)\left(Q_{g,R_0} Y_{g,\sigma^{m-k}(\eta)}\right)\left(x(\eta)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta':|\eta'|=k} \left(\sum_{\eta''\in\sigma^{-(m-k)}\{\eta'\}} \exp\left(S_m g\left(x(\eta'')\right)\right) \cdot \left(Q_{g,R_0} Y_{g,\eta'}\right)\left(x(\eta'')\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta':|\eta'|=k} \exp\left(S_k g\left(x(\eta')\right)\right) \\
&\qquad\qquad \cdot \left(\sum_{\eta''\in\sigma^{-(m-k)}\{\eta'\}} \exp\left(S_{m-k} g\left(x(\eta'')\right)\right) \cdot \left(Q_{g,R_0} Y_{g,\eta'}\right)\left(x(\eta'')\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta':|\eta'|=k} \exp\left(S_k g\left(x(\eta')\right)\right) \mathscr{L}_g^{m-k}\left(Q_{g,R_0} Y_{g,\eta'}\right)\left(x(\eta')\right).
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos:

$$
\begin{aligned}
|S_{1,g}| &\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta':|\eta'|=k} |\exp(S_k g(x(\eta')))| \cdot \left|\left|\mathscr{L}_g^{m-k} Q_{g,R_0} Y_{g,\eta'}\right|\right|_\theta \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta':|\eta'|=k} \exp(S_k \mathrm{Real}(g)(x(\eta'))) ||\mathscr{L}_g^{m-k} Q_{g,R_0}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \cdot ||Y_{g,\eta'}||_\theta. \\
&\leq P_2 K_2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{\eta':|\eta'|=k} R_0^k ||\mathscr{L}_g^{m-k} Q_{g,R_0}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))}
\end{aligned}
$$

Notando ahora para z en el resolvente de $\mathscr{L}_g$ y $j \geq 0$, la igualdad:

$$(\mathscr{L}_g - zI)^{-1} \circ \mathscr{L}_g^j = (\mathscr{L}_g^{j-1} + z\mathscr{L}_g^{j-2} + \cdots + z^{j-2}\mathscr{L}_g + z^{j-1}) + z^j(\mathscr{L}_g - zI)^{-1},$$

obtenemos del uso de la ecuación integral:

$$Q_{g,R_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_0} (\mathscr{L}_g - zI)^{-1} dz,$$

la igualdad:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_g^j Q_{g,R_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R_0} (\mathscr{L}_g - zI)^{-1} \circ \mathscr{L}_g^j dz \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R_0} z^i \mathscr{L}_g^{j-1-i} dz + \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R_0} z^j (\mathscr{L}_g - zI)^{-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R_0} z^j (\mathscr{L}_g - zI)^{-1} dz.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\left|\left|\mathscr{L}_g^j Q_{g,R_0}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \leq \frac{1}{2\pi} R_0^j \left|\left|(\mathscr{L}_g - zI)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))}.$$

Ahora como:

$$(z,T) \mapsto (zI - T)^{-1},$$

define una función continua en $\{z \in \mathbb{C} : R_0 \leq |z| \leq R\}$ y continua en $T = \mathscr{L}_f$ (**Proposición (6.3.9)**), podremos, reduciendo δ si es necesario, escoger constante $K_3 > 0$ tal que que para toda $g \in B(f,\delta)$ y $z \in \mathbb{C}$ con $R_0 \leq |z| \leq R$, tengamos:

$$\frac{1}{2\pi} \left|\left|(\mathscr{L}_g - zI)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))} \leq K_3.$$

Entonces:

$$|S_{1,g}| \leq mP_2K_2K_3R_0^m.$$

Luego existirá K_4 de modo que para todo $m \geq 0$:

$$mR_0^m \leq K_4R^m.$$

Notando finalmente que $\mathscr{L}_f Q_{g,R} \equiv \mathscr{L}_f Q_{g,R_0}$, obtendremos de escribir $C_2 = P_2K_2K_3K_4 + P_1K_2$, la desigualdad deseada. □

En estos momentos nos encontramos en condiciones de completar la demostración de la **Proposición (4.3.1)**.

Demostración. (**Proposición (4.3.1)**) Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, entonces:

$$\left|\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right| \leq \mid \zeta_{,m}^{(0)}(f) \mid + \mid \zeta_{,m}^{(1)}(f) \mid + \mid \zeta_m^{(2)}(f) \mid$$

y de los **Lemas (4.3.2), (4.3.3)** tendremos:

$$\left|\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{N_f} \kappa(f,i) R(\mathscr{L}_f)^m + C_1R^m + C_2R^m.$$

Luego si denotamos $\overline{R} = \text{máx}\{R(\mathscr{L}_f), R\}$, obtendremos:

$$\left|\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right| \leq$$

$$\overline{R}^m \left(\sum_{n=1}^{N_f} \kappa(f,i) \frac{R(\mathscr{L}_f)^m}{\overline{R}^m} + C_1 \frac{R^m}{\overline{R}^m} + mC_2 \frac{R^m}{\overline{R}^m}\right).$$

Entonces al tomar logaritmo, dividir por m y hacer tender m a infinito y luego R a $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$, concluimos:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left(\left| \sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)) \right| \right) \leq \log \overline{R}(\mathscr{L}_f).$$

$\square$

Capítulo 5

Presión Compleja

Durante el presente capítulo, estudiaremos algunas propiedades de regularidad de la función:

$$f \mapsto \mathscr{L}_f.$$

Extenderemos además para cierto tipo de funciones en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, el concepto de **Presión Topologicá**, definido en el capítulo tres para funciones en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales.

5.1. Continuidad y Analiticidad del Operador de Transferencia

Proposición 5.1.1. Dado X un espacio métrico compacto, sea $T : X \to X$ continua, tal que existe constante $M_T > 0$ de modo que para todo $x \in X$ tengamos:

$$\sum_{y \in T^{-1}\{x\}} 1 < M_T.$$

Entonces la función $\mathscr{L} : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{L}(\mathcal{C}(X))$ definida por:

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}_f,$$

es continua.

Demostración. Por la **Observación (4.2.4)**:

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}(f)(w(x)) - \mathscr{L}(g)(w(x))| &= |\mathscr{L}_f w(x) - \mathscr{L}_g w(x)| \\
&\leq ||w||_\infty \sum_{y \in T^{-1}(x)} |\exp(f(x)) - \exp(g(x))| \\
&\leq ||w||_\infty \exp(||f-g||_\infty + ||f||_\infty)\, ||f-g||_\infty \sum_{y \in T^{-1}(x)} 1 \\
&\leq ||w||_\infty \exp(||f-g||_\infty + ||f||_\infty)\, ||f-g||_\infty\, M_T.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$||\mathscr{L}(f) - \mathscr{L}(g)||_{\mathcal{C}(X)} \leq \exp(||f-g||_\infty + ||f||_\infty)\, ||f-g||_\infty\, M_T$$

y $\mathscr{L}$ será continua. $\square$

Es oportuno en estos momentos recordar que la función:

$$H : (B_1,\ \ ||\cdot||_{B_1}) \to (B_2,\ \ ||\cdot||_{B_2}),$$

se definirá holomorfa si es localmente acotada y dado $v \in B_1$ tenemos para todo $v_1 \in B_1$, la existencia del límite:

$$\lim_{s\to 0} \frac{H(v+sv_1) - H(v)}{s}.$$

Proposición 5.1.2. Dada una matriz de transición, A y $\theta \in (0,1)$, sea (Σ_A^+, σ) el correspondiente Sub-Shift de tipo finito. Entonces para cada $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ el operador $\mathscr{L}_f$ define un operador acotado actuando en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y la función:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\mapsto \mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)) \\ f &\mapsto \mathscr{L}_f, \end{aligned}$$

será holomorfa.
Además para cada $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, $x \in \Sigma_A^+$ y $m \geq 0$, la función:

$$\begin{aligned} E_x : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \exp(S_m f(x)), \end{aligned}$$

será holomorfa.

Demostración. Sea $n \geq 2$ el orden de A. Definamos las funciones:

$$\begin{aligned} E : \mathcal{C}(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{C}(\Sigma_A^+) \\ f &\mapsto \exp(f), \end{aligned}$$

$$M : \mathcal{C}(\Sigma_A^+) \to \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+)),$$

donde para cada $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$, el operador $M(f)$, representa multiplicar por f.
Sea para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$F_i : \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+)) \to \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+)),$$

donde para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+))$, el operador $F_i(T)$, actua sobre $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$, de la manera siguiente. Sea $w \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ y $x \in \Sigma_A^+$ entonces:

$$(F_i(T))(w)(x) = \begin{cases} T(w)(ix) & \text{si } A_{i,x_0} = 1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Es evidente de las definiciones, que para $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ el operador $M(f)$ actua en $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$ y para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Sigma_A^+))$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$, el operador $F_i(T)$ actua en $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$. Además de la **Observación (4.2.4)**, para $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ la función $E(f)$ estará en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$. Luego podremos escribir:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\mapsto \mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)) \\ f &\mapsto \mathscr{L}_f, \end{aligned}$$

a través de la formula:

$$\mathscr{L}_f = \sum_{i=1}^{n} F_i(M(E(f))).$$

Y $f \mapsto \mathscr{L}_f$ será holomorfa, si las funciones antes mencionadas son holomorfas. De la linealidad de las funciones M y F_i, es facil notar que para toda $f, g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, tenemos:

$$\lim_{s \to 0} \frac{M(f+sg) - M(f)}{s} = M(g)$$

y para toda $T, G \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$ tenemos:

$$\lim_{s \to 0} \frac{F_i(T+sG) - F_i(T)}{s} = F_i(G).$$

Ahora para $x \in \Sigma_A$ y $s \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{E(f+sg)(x) - E(f)(x)}{s} - g(x)E(f)(x) \right| &= \left| \exp(f(x)) \left(\frac{\exp(sg(x)) - 1 - sg(x)}{s} \right) \right| \\ \leq |\exp(f(x))s| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2} |g(x)|^m}{m!} &\leq |s| \exp(||f||_\infty) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2} ||g||_\infty^m}{m!}. \end{aligned}$$

Además, si s satisface $|s| < ||g||_\infty^{-1}$ para cada $m \geq 1$ tenemos:

$$\lim_{m \to \infty} \left| \frac{\left(\frac{|s|^{m-1} ||g||_\infty^{m+1}}{(m+1)!} \right)}{\left(\frac{|s|^{m-2} ||g||_\infty^{m}}{m!} \right)} \right| = \lim_{m \to \infty} \left| s \frac{||g||_\infty}{m+1} \right| < 1$$

y el criterio del cuociente nos permite concluir que:

$$\lim_{s \to 0} \left|\left| \frac{E(f+sg) - E(f)}{s} - gE(f) \right|\right|_\infty = 0,$$

Por otro lado para cada $k \geq 0$ y cada par $x,\ y \in \Sigma_A^+$ con $x_i = y_i,\ 0 \leq i \leq k$, tenemos:

$$\left| \left(\frac{E(f+sg)(x) - E(f)(x)}{s} - g(x)E(f)(x) \right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{E(f+sg)(y) - E(f)(y)}{s} - g(y)E(f)(y) \right) \right|$$

$$= \left| \frac{\exp(f(x)+sg(x)) - \exp(f(x)) - sg(x)\exp(f(x))}{s} - \right.$$

$$\left. \frac{\exp(f(y)+sg(y)) - \exp(f(y)) - sg(y)\exp(f(y))}{s} \right|$$

$$\leq |s| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2}}{m!} |\exp(f(x))g(x)^m - \exp(f(y))g(y)^m|$$

$$\leq |s| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2}}{m!} \left(|\exp(f(x))| \, |g(x)^m - g(y)^m| + |\, g(y) \,|^m \, |\exp(f(x)) - \exp(f(y))| \right).$$

Así, de la desigualdad (**Observación(4.2.4)**):

$$|\exp(f(x)) - \exp(f(y))| \leq \exp(||f||_\theta)|f(x) - f(y)|,$$

obtenemos:

$$\leq |s| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2}}{m!} \Bigg(|\exp(f(x))| \, |g|_\theta \, \theta^k \left(|g(x)^{m-1}| + |g(x)^{m-2}g(y)| + \ldots + |g(y)^{m-1}| \right)$$

$$+ \exp(||f||_\theta)\theta^k \mid f \mid_\theta ||g||_\infty^m \Bigg)$$

$$\leq |s| \, \theta^k \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2}}{m!} \Big(\exp(||\, f \,||_\infty) \, |g|_\theta \, m \, ||g||_\infty^{m-1} + \exp(||f||_\theta) \, ||g||_\infty^m \mid f \mid_\theta \Big).$$

Lo que demuestra la desigualdad:

$$\left| \frac{E(f+sg) - E(f)}{s} - gE(f) \right|_\theta \leq |s| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|s|^{m-2}}{m!} \Big(\exp(||\, f \,||_\infty) \, |g|_\theta \, m \, ||g||_\infty^{m-1}$$

$$+ \exp(||f||_\theta) \, ||g||_\infty^m \mid f \mid_\theta \Big).$$

Entonces obtenemos:

$$\lim_{s \to 0} \left| \frac{E(f+sg) - E(f)}{s} - gE(f) \right|_\theta = 0.$$

Así, dada $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tendremos para toda $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ que el límite:

$$\lim_{s \to 0} \frac{E(f+sg) - E(f)}{s} = 0$$

existe en $(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+), ||\ ||_\theta)$.
Lo que termina con la primera parte de la **proposición**.
Para demostrar la segunda parte de la **proposición**, bastará con notar que para todo $x \in \Sigma_A^+$ la función:

$$g \mapsto g(x),$$

es lineal en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, luego será holomorfa. Entonces la función:

$$g \mapsto \exp(g(x)),$$

será holomorfa. Por lo tanto para cada $m \geq 0$, la función:

$$\begin{aligned} E_x : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \exp(S_m f(x)) = \prod_{k=0}^{m-1} \exp(f(\sigma^k(x))), \end{aligned}$$

será holomorfa, por ser el producto de m funciones holomorfas. □

5.2. Presión Compleja

A lo largo de toda está sección sea A una matriz de transición y $\theta \in (0,1)$.

Durante el capítulo tres definimos el concepto de Presión para funciones en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales **(3.4.4)**. La meta de esta sección será la de extender dicho concepto a funciones en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, con cierta característica adicional. El **Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)** nos permite, para toda f en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ a valores reales, concluir la existencia de un único valor propio maximal, λ, de $\mathscr{L}_f$, que es simple. Además del **Corolario (4.2.18)** obtenemos:

$$\lambda = \exp P(f).$$

Ahora del **Teorema (4.2.24)** para toda función, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, con:

$$R(\mathscr{L}_f) = R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}),$$

el respectivo operador de transferencia, $\mathscr{L}_f$, poseerá un único valor propio simple maximal, de modulo $R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)})$, lo que nos permitirá tambien en este caso extender la función presión P, a f, definiendo $P(f)$, como el logaritmo del único valor propio de $\mathscr{L}_f$ de norma $R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)})$ modulo $(2\pi i)$. Lo que nos motiva a definir.

Definición 5.2.1. Definimos, $\mathrm{Dom}(P)$, como el conjunto formado por todas aquellas funciones $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, para las cuales el respectivo operador de transferencia $\mathscr{L}_f$, posee un único valor propio maximal, λ, que es simple y tal que el resto del espectro de $\mathscr{L}_f$, se encuentra contenido en un disco centrado en el origen de radio estrictamente menor que $|\lambda|$.
Dado $f \in \mathrm{Dom}(P)$ denotaremos por λ_f, al único autovalor maximal de $\mathscr{L}_f$ y

$$P(f) = \log \lambda_f \mod(2\pi i).$$

Falta ahora ver si acaso nuestra extensión de la Presión posee ciertas propiedades de regularidad. La respuesta a esta pregunta nos la dara el siguiente resultado que surgue como consecuencia del **Teorema de Perturbación (1.3.11)** y la **Proposición (5.1.2)**.

Proposición 5.2.2. El conjunto $\mathrm{Dom}(P)$ es abierto en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y la función $P : \mathrm{Dom}(P) \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ es holomorfa.
En particular para $f \in \mathrm{Dom}(P)$ y $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, la función $s \mapsto P(f + sg)$ es holomorfa en una vecindad del cero.

Demostración. Si definimos por $\mathcal{M}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$ al subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$, conformado por aquellos operadores que poseen único valor propio maximal, que es aislado y simple tendremos mediante el **Teorema de Perturbación (1.3.11)** que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$ es abierto y que la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{M}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)) &\to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \\ T &\mapsto \log(\lambda(T)), \end{aligned}$$

es holomorfa. Luego como la función:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : \mathrm{Dom}(P) &\to \mathcal{M}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)) \\ f &\mapsto \mathscr{L}_f, \end{aligned}$$

es holomorfa (**Proposición (5.1.2)**). Tendremos que:

$$\mathrm{Dom}(P) = \mathscr{L}^{-1}\left(\mathcal{M}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))\right),$$

es abierto. Finalmente P definirá una función holomorfa en $\mathrm{Dom}(P)$, al ser definida como la composición de funciones holomorfas:

$$\begin{aligned} P : \mathrm{Dom}(P) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \mathcal{P} \circ \mathscr{L}(f). \end{aligned}$$

□

La última parte de la proposición se obtiene de notar Dadas que la función afin $\mathcal{G} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ definida por:

$$\mathcal{G}(s) = f + sg,$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Proposición 5.2.3. Supongamos A aperiódica y $f \in \mathrm{Dom}(P)$. Entonces $P(\mathrm{Real}(f)) \geq \mathrm{Real}(P(f))$.

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Dom}(P)$. Entonces $\mathrm{Real}(P(f)) = \log(R(\mathscr{L}_f))$ y de la **Proposición (4.2.21)** tendremos:

$$\exp(P(\mathrm{Real}(f))) \geq R(\mathscr{L}_f).$$

Luego:

$$P(\mathrm{Real}(f)) \geq \mathrm{Real}(P(f)).$$

□

Proposición 5.2.4. Supongamos A aperiódica. Sean $f,\ g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con f a valores reales y μ_f medida de equilibrio de f. Entonces la derivada de la función:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \\ s &\mapsto P(f+sg). \end{aligned}$$

en $s=0$ es igual a $\int g d\mu_f$. En particular, si $g>0$, entonces la función:

$$s \mapsto P(f+sg),$$

es estrictamente creciente a ∞ en $\mathbb{R}$.

Demostración. De la **Proposición (5.2.2)** podremos escoger $\epsilon > 0$, de modo que para todo $s \in B(0,\epsilon)$, tengamos $f+sg \in \mathrm{Dom}(P)$. Entonces si w_0, representa un vector propio de valor propio $\exp(P(f))$, de $\mathscr{L}_f$, podremos por el **Teorema de Perturbación (1.3.11)** y la **Proposición (5.1.2)** encontrar una función holomorfa, $w : B(0,\epsilon) \to \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tal que, $w(0) = w_0$, para todo $s \in B(0,\epsilon)$, la función $w(s)$, sea una autovalor de valor propio $\exp(P(f+sg))$, de $\mathscr{L}_{f+sg}$ y tal que las funciones:

$$\begin{aligned} &s \mapsto \mathscr{L}_{f+sg} w(s), \\ &s \mapsto \exp P(f+sg) w(s), \end{aligned}$$

son holomorfas en $B(0,\epsilon)$. Derivando ambos lados de:

$$\mathscr{L}_{f+sg} w(s) = \exp(P(f+sg)) w(s), \tag{5.1}$$

obtenemos por un lado:

$$\frac{d(\exp(P(f+sg))w(s))}{ds}_{|s=0} = \exp(P(f))w(0)\frac{dP(f+sg)}{ds}_{|s=0} + \exp(P(f))\frac{dw(s)}{ds}_{|s=0}$$

y por otro:

$$\frac{d(\mathscr{L}_{f+sg} w(s))}{ds}_{|s=0} = \mathscr{L}_f(w(0)g) + \mathscr{L}_f\left(\frac{dw(s)}{ds}_{|s=0}\right).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \exp(P(f))w(0)\frac{dP(f+sg)}{ds}_{|s=0} &+ \exp(P(f))\frac{dw(s)}{ds}_{|s=0} \\ &= \mathscr{L}_f(w(0)g) + \mathscr{L}_f\left(\frac{dw(s)}{ds}_{|s=0}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si luego integramos ambos lados de **(5.2)** respecto a la médida $\nu_f := \nu$, nombrada en el **punto (iii)** del **Teorema de Ruelle Perron Frobenius (4.2.24)** y recordamos las relaciones:

$$\int_{\Sigma_A^+} w(0) d\nu_f = 1$$

y

$$\mu_f = w(0)\nu_f,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dP(f+sg)}{ds}_{|s=0} \int_{\Sigma_A^+} \exp(P(f))w(0)d\nu_f + \exp(P(f)) \int_{\Sigma_A^+} \frac{dw(s)}{ds}_{|s=0} d\nu_f \\ = \int_{\Sigma_A^+} \mathscr{L}_f(gw(0)) + \mathscr{L}_f\left(\frac{dw(s)}{ds}_{|s=0}\right) d\nu_f \\ = \exp(P(f)) \int_{\Sigma_A^+} gw(0) + \frac{dw(s)}{ds}_{|s=0} d\nu_f.\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\frac{dP(f+sg)}{ds}_{|s=0} = \int_{\Sigma_A^+} gw(0)d\nu_f = \int_{\Sigma_A^+} gd\mu_f.$$

□

Proposición 5.2.5. Supongamos A aperiódica y $f \in \mathrm{Dom}(P)$ tal que:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < R(\mathscr{L}_f).$$

Entonces:

$$\mathrm{Real}(P(f)) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\left(\left|\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right|\right).$$

En particular, para $f \equiv 0$ tendremos la igualdad:

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\left(\mathrm{Cardinalidad}(\mathrm{Fix}(\sigma^m))\right).$$

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Dom}(P)$. Entonces $|\exp(P(f))| = R(\mathscr{L}_f)$ y de la **Proposición (4.3.1)** obtendremos la desigualdad:

$$\mathrm{Real}(P(f)) \geq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\left(\left|\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right|\right).$$

Por otra parte al ser, $\exp(P(f))$, el único valor propio contenido en el circulo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R(\mathscr{L}_f)\}$, podremos elegir, $R \in (\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))), R(\mathscr{L}_f))$ de modo que:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : R \leq |z| \leq R(\mathscr{L}_f)\} = \{\exp(P(\mathrm{Real}(f)))\}.$$

Así para todo entero $m \geq 0$, tendremos gracias a la **ecuación (4.13)**, la posibilidad de escribir:

$$\zeta_m(f) = \exp(mP(f)) + \zeta_{R,m}^{(1)}(f) + \zeta_{R,m}^{(2)}(f).$$

Luego:

$$|\zeta_m(f)| \geq \left| |\exp(mP(f))| - \left|\zeta^{(1)}_{R,m}(f) + \zeta^{(2)}_{R,m}(f)\right| \right|.$$

Y de los **Lemas (4.3.2), (4.3.3)** obtendremos:

$$\begin{aligned} |\zeta_m(f)| &\geq \left| |\exp(mP(f))| - |C_1 R^m + C_2 R^m| \right| \\ &= R(\mathscr{L}_f)^m \left| 1 - \left(\frac{R}{R(\mathscr{L}_f)}\right)^m (C_1 + C_2) \right|. \end{aligned}$$

Con lo cuál podremos finalmente concluir:

$$\begin{aligned} &\log R(\mathscr{L}_f) + \frac{1}{m}\log\left(\left|1 - \left(\frac{R}{R(\mathscr{L}_f)}\right)^m (C_1 + C_2)\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{m}\log\left(\left|\sum_{\mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))\right|\right). \end{aligned}$$

Y el resultado se obtendrá de hacer tender m a infinito. □

5.3. Presión topológica en el Flujo de Suspensión

Dada la matriz de transición A, sea (Σ_A^+,σ) el Sub-Shift de tipo finito respectivo, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) > 0$ con $f > 0$, $\Pi_f : \Sigma_A^+ \times \mathbb{R} \to \Sigma_A^f$, la aplicación cuociente y:

$$\begin{aligned} W : \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A^+) &\to \mathcal{M}_{\sigma_f}(\Sigma_A^f) \\ \mu &\mapsto (\Pi_f)_* \left(\mu \times m_L|_{\widehat{\Sigma_A^f}}\right), \end{aligned}$$

Proposición 5.3.1. Supongamos A aperiódica, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$ y $G \in \mathcal{C}(\Sigma_A^f)$ a valores reales, sea $g : \Sigma_A^+ \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \int_0^{f(x)} G(x,t)dt.$$

Si $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, entonces $s = P_{\sigma_f}(G)$ es el único número real $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$P_\sigma(g - tf) = 0.$$

Finalmente si m_L es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y si μ_{g-sf} representa al único estado de equilibrio de $g - sf$, entonces la medida de probabilidad $\mu_{\sigma_f,G}$ en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A)$, proporcional a la medida $W(\mu)$, inducida por la medida $\mu_{g-sf} \times m_L$, en $\Sigma_A^+ \times \mathbb{R}$ es el único estado de equilibrio de σ_f para el potencial G.

Demostración. De la **Proposición (5.2.4)**, la función:

$$t \mapsto P_\sigma(g - tf),$$

será analítica estrictamente decreciente:

$$\lim_{t\to\infty} P(g - tf) = -\infty$$

y

$$\lim_{t\to-\infty} P(g - tf) = \infty.$$

Luego existirá único real $s \in \mathbb{R}$ tal que $P_\sigma(g - sf) = 0$. Entonces para toda medida $\sigma-$invariante μ, tendremos:

$$0 \geq h_\mu(\sigma) + \int_{\Sigma_A^+} (g - sf)d\mu,$$

con igualdad solo para el único estado de equilibrio $\mu = \mu_{g-sf}$ de $g - sf$. Así tenemos:

$$s \geq \frac{h_\mu(\sigma)}{\int f d\mu} + \frac{\int_{\Sigma_A^+} g d\mu}{\int f d\mu}.$$

con igualdad si y solo si $\mu = \mu_{g-sf}$. Notando además gracias a la **Propoción (2.3.9)** que:

$$\frac{\int_{\Sigma_A^+} g d\mu}{\int f d\mu} = \frac{\int_{\Sigma_A^+} \left(\int_0^{f(x)} G(x,t)dt\right) d\mu}{\int f d\mu} = \int_{\Sigma_A^f} G dW(\mu)$$

y recordando la **Formula de Abramov (3.5)** para la entropía de σ_f:

$$h_{W(\mu)}(\sigma_f) = \frac{h_\mu(\sigma)}{\int f d\mu},$$

tendremos:

$$s \geq h_{W(\mu)}(\sigma_f) + \int_{\Sigma_A^f} G d(W(\mu)).$$

con igualdad si y solo si $\mu = \mu_{g-sf}$. Por lo tanto de la **ecuación (3.4)** y la **Proposición (2.3.9)**:

$$s = P_{\sigma_f}(G)$$

y $\mu_{\sigma_f,G}$ es el único estado de equilibrio de G. □

Observación 5.3.2. Si tenemos $G \equiv 0$, entonces:

$$P_{\sigma_f}(0) = h_{top}(\sigma_f)$$

y de la anterior proposición $t = h_{top}(\sigma_f)$ será el único real, para el cuál tengamos:

$$P_{\sigma_f}(-tf) = 0.$$

Finalmente por la **Formula de Abramov (3.5)**, tendremos:

$$h_{top}(\sigma_{h_{top}(\sigma_f)f}) = 1.$$

Capítulo 6

Función Zeta

6.1. Definiciones

Definición 6.1.1. Dado el Sistema Dinámico de tiempo discreto $(X,\ T)$, definimos para cada entero $m > 0$ el conjunto:

$$\mathrm{Fix}(T^m) = \{x \in X : T^m x = x\} < \infty.$$

Si para todo m, $\mathrm{Fix}(T^m)$ es finito, entonces definimos la serie formal:

$$\zeta(z) = \exp\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \mathrm{Cardinalidad}(\mathrm{Fix}(T^m)).$$

De forma más general, dado el potencial $f : X \to \mathbb{C}$ definimos la serie formal:

$$\zeta(z, f) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(T^m)} \exp(S_m f(x)).$$

6.1.1. Formula del Producto para la Función Zeta Dinámica.

Dado el Sistema Dinámico (X, T), supongamos que para todo entero, $m > 0$, el conjunto $\mathrm{Fix}(T^m)$ es finito. Definimos el conjunto $\mathrm{Per}(T)$ como aquel constituido por el total de las órbitas periódicas de (X, T). Además, dada la órbita periódica $\tau \in \mathrm{Per}(T)$ denotamos por $\lambda(\tau)$ su periodo mínimo. De este modo definimos:

$$\mathrm{Per}_n(T) = \{\tau \in \mathrm{Per} : \lambda(\tau) = n\}.$$

Dadas las anteriores definiciones podemos escribir:

$$\zeta(z)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m}\text{Cardinalidad}(\text{Fix}(T^m))\right)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\tau\in\text{Per}_m(T)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{mz^{km}}{k}\right)$$
$$=\exp\left(\sum_{\tau\in\text{Per}(T)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k\lambda(\tau)}}{k}\right)=\exp\left(\sum_{\tau\in\text{Per}(T)}-\log\left(1-z^{\lambda(\tau)}\right)\right).$$

De donde obtenemos finalmente:

$$\zeta(z)=\prod_{\tau\in\text{Per}(T)}\left(1-z^{\lambda(\tau)}\right)^{-1}. \tag{6.1}$$

De la misma manera, si para $f:X\to\mathbb{C}$ y $\tau\in\text{Per}(T)$, denotamos $N_f(\tau)=\prod_{x\in\tau}\exp(f(x))$, la expresión $\zeta(z,f)$ será posible de ser escrita en la forma:

$$\begin{aligned}\zeta(z,f)&=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m}\sum_{x\in\text{Fix}(T^m)}\exp(S_m(f(x)))\right)\\&=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\tau\in\text{Per}_m(T)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(z^{\lambda(\tau)}N_f(\tau))^k}{k}\right)\\&=\exp\left(\sum_{\tau\in\text{Per}(T)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(z^{\lambda(\tau)}N_f(\tau)\right)^k}{k}\right)\\&=\exp\left(\sum_{\tau\in\text{Per}(T)}-\log\left(1-z^{\lambda(\tau)}N_f(\tau)\right)\right).\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\zeta(z,f)=\prod_{\tau\in\text{Per}(T)}(1-z^{\lambda(\tau)}N_f(\tau))^{-1}. \tag{6.2}$$

En particular para $z=1$ tenemos:

$$\zeta(1,f)=\exp\left(\sum_{\tau\in\text{Per}(T)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{N_f(\tau)^j}{j}\right) \tag{6.3}$$

y

$$\zeta(1,f)=\prod_{\tau\in\text{Per}(T)}(1-N_f(\tau))^{-1}. \tag{6.4}$$

6.2. Función Zeta para el Sub-Shift de Tipo Finito

En lo que resta de sección, sea $\theta\in(0,1)$ y A una matriz de transición de orden $n\geq 2$. Sea, $(\Sigma_A^+,\ \sigma)$, el Sub-Shift de tipo finito correspondiente. Entonces para cada $z \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \text{Cardinalidad}(\text{Fix}(\sigma^m)).$$

De la misma manera, dado el potencial $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$, para cada $z \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\zeta(z, f) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \text{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)).$$

6.2.1. Radio de Convergencia

Una vez definidas $\zeta(z)$ y $\zeta(z, f)$ para $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ surge de forma inmediata la pregunta por los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales nuestras funciones estarán bien definidas. Pregunta que tiene respuesta al estudiar los respectivos radios de convergencia, es decir encontrar el valor de los límites:

$$\lim_{m \to \infty} (\text{Cardinalidad}(\text{Fix}(\sigma^m)))^{\frac{1}{m}} = \exp\left(\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log\left(\text{Cardinalidad}(\text{Fix}(\sigma^m))\right)\right)$$

y:

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{x \in \text{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)) \right)^{\frac{1}{m}} = \exp\left(\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log\left(\sum_{x \in \text{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)) \right)\right).$$

Límites que no nos son del todo desconocidos, de hecho la **Proposición (4.3.1)** nos da para el Sistema Dinámico, $(\Sigma_A^+,\ \sigma)$ y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ la desigualdad:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log\left(\left| \sum_{x \in \text{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)) \right| \right) \leq \log\left(\text{máx}\left\{ R(\mathscr{L}_f), \theta \exp(P(\text{Real}(f))) \right\}\right).$$

Si además suponemos A aperiódica, la **Proposición (5.2.5)** nos entrega la igualdad:

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log\left(\text{Cardinalidad}(\text{Fix}(\sigma^m))\right)$$

y para $f \in \text{Dom}(P)$:

$$\text{Real}(P(f)) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log\left(\left| \sum_{x \in \text{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)) \right| \right),$$

Luego si definimos:

Definición 6.2.1. Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y $\mathscr{L}_f$ el respectivo operador de transferencia. Entonces definimos:

$$\overline{R}(\mathscr{L}_f) = \text{máx}\left\{ R(\mathscr{L}_f), \theta \exp(P(\text{Real}(f))) \right\}. \tag{6.5}$$

Obtenemos los siguientes resultados:

Proposición 6.2.2. Dado el Sub-Shift de tipo finito (Σ_A^+, σ), sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y $\mathscr{L}_f$ el respectivo operador de transferencia. Entonces el radio de convergencia de $\zeta(z, f)$ será a lo menos $\overline{R}(\mathscr{L}_f)^{-1}$. Luego, $\zeta(z, f)$, será holomorfa en el abierto:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \overline{R}(\mathscr{L}_f)^{-1}\right\}.$$

En caso de, A, aperiódica y $f \in \mathrm{Dom}(P)$, el radio de convergencia de $\zeta(z, f)$ estará dado por $\exp(-\mathrm{Real}(P(f)))$. Luego, $\zeta(z, f)$, será holomorfa en el abierto:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < \exp(-\mathrm{Real}(P(f)))\}.$$

Finalmente si, A, es aperiódica y $f \equiv 0$, el radio de convergencia de $\zeta(z)$ estará dado por $\exp(-h_{top}(\sigma))$. Luego, $\zeta(z)$, será holomorfa en el abierto:

$$\{z \in \mathbb{C} :| z |< \exp(-h_{top}(\sigma))\}.$$

6.2.2. Extensión Meromorfa

Supongamos A, aperiódica. Entonces dada $f \in \mathrm{Dom}(P)$ dependiente solo de las dos primeras variables, definimos para $i, j \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq i, j \leq n$ y $A_{i,j} = 1$ el número $f(i, j)$, como el valor que toma f en el cilindro $[i, j]$. Luego construimos la matriz A_f:

$$(A_f)_{i,j} = \exp(f(i, j))A_{i,j}.$$

Si además $x_0x_1 \ldots x_{m-1}x_0$ define una sucesión de enteros entre 1 y n satisfaciendo $A_{x_i,x_{i+1}} = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_mf(x)) &= \sum_{x_0x_1\ldots x_{m-1}x_0} \exp(f(x_0, x_1)) \exp(f(x_1, x_2)) \cdots \exp(f(x_{m-1}, x_0)) \\ &= \mathrm{Traza}(A_f^m).\end{aligned}$$

Entonces si:

$$\{\exp(P(f)), \lambda_1 \ldots, \lambda_{n-1}\},$$

define al conjunto de valores propios de A_f, contados según multiplicidad algebraica, tendremos:

$$\sum_{x\in\mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_mf(x)) = \exp(mP(f)) + \lambda_1^m + \ldots + \lambda_{n-1}^m.$$

A partir de lo anterior nos será posible expresar, $\zeta(z, f)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $| z |< \exp(-\mathrm{Real}P((f)))$, en la forma:

$$\zeta(z, f) = \exp \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z^j}{j}(\exp(jP(f)) + \lambda_1^j + \ldots + \lambda_{n-1}^j)\right).$$

Que a su vez, al denotar $\lambda_0 = \exp(P(f))$, puede ser reescrito, por:

$$\begin{aligned}
\zeta(z,f) &= \prod_{k=0}^{n-1} \exp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k z)^j}{j} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \exp(-\log(1 - z\lambda_k)) \\
&= \frac{1}{(1 - z\exp(P(f)))(1 - z\lambda_1)\dots(1 - z\lambda_{n-1})}
\end{aligned}$$

y podremos para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \exp(-\mathrm{Real}(P(f)))$ escribir:

$$\zeta(z,f) = \frac{1}{\det(I - zA_f)}.$$

En caso de f constante igual a cero tenemos, $A_f = A$ y podemos para para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \exp(-h_{top}(\sigma))$ escribir:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\det(I - zA)}.$$

Resultados a partir de los cuales concluimos:

Teorema 6.2.3. Supongamos, A, aperiódica, entonces dado el Sub-Shift de tipo finito, (Σ_A^+, σ), sea $f \in \mathrm{Dom}(P)$ un potencial dependiente solo de las dos primeras variables. Luego tenemos:

I. La función $\zeta(z)$ es posible de ser extendida a todo el plano complejo, a una función racional, de polos los inversos de los valores propios de la matriz de transición A.

II. La función $\zeta(z,f)$ es posible de ser extendida a todo el plano complejo, a una función racional, de polos los inversos de los valores propios de la matriz A_f.

Resultados similares son posibles de encontrar para funciones, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, a partir del estudio hecho en el capítulo anterior del espectro esencial, $R_{ess}(\mathscr{L}_f)$, del operador de transferencia, $\mathscr{L}_f$. Sea f en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ entonces por la **Proposición (4.2.22)** el espectro esencial, $R_{ess}(\mathscr{L}_f)$, del operador de tranferencia $\mathscr{L}_f$ es a lo más:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))).$$

Luego tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2.4. Dado el Sub-Shift de tipo finito, (Σ_A^+, σ), sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tal que:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < R(\mathscr{L}_f).$$

Entonces, $\zeta(z,f)$, admite extensión meromorfa al disco:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < (\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))))^{-1} \right\}.$$

de polos los inversos de los valores propios del operador de transferencia $\mathscr{L}_f$, de norma mayor que $R_{ess}(\mathscr{L}_f)$.

Antes de comenzar con la demostración del **Teorema (6.2.4)** recordemos lo hecho durante el capítulo 4, relativo a la descomposición espectral del operador de transferencia.
De lo dicho más arriba acerca de $R_{ess}(\mathscr{L}_f)$, nos es posible elejir, $R \in \mathbb{R}$ con $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < R < R(\mathscr{L}_f)$ de tal manera que $\mathscr{L}_f$ no tenga valores propios de modulo, R. Luego solo un número finito, $N_{f,R}$, de ellos se encontrará en:

$$\{z \in \mathbb{C} : R < |z| \leq R(\mathscr{L}_f)\}.$$

Denotemos dichos valores propios por:

$$\{\lambda_{(f,1)}, \lambda_{(f,2)}, \ldots, \lambda_{(f,N_{f,R})}\},$$

y escribamos para cada $i \in \{1 \ldots N_f\}$ la multiplicidad algebraica, $\kappa(f,i)$, del valor propio $\lambda_{(f,i)}$.
Denotemos además por, $Q_{f,R}$, la proyección espectral sobre el conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},$$

Entonces si al igual que en las **ecuaciones (4.9), (4.10), (4.11), (4.12)**, escribimos:

$$\zeta_m(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(f(x))),$$

$$\zeta_{R,m}^{(0)}(f) = \sum_{i=1}^{N_{f,R}} \kappa(f,i)\lambda_{(f,i)}^m,$$

$$\zeta_{R,m}^{(1)}(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \mathscr{L}_f^m(\mathbb{1}_{[x|m]} - Q_{f,R}(\mathbb{1}_{[x|m]}))(x) - \zeta_{R,m}^{(0)}(f),$$

$$\zeta_{R,m}^{(2)}(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} Q_{f,R}\mathscr{L}_f^m(\mathbb{1}_{[x|m]})(x).$$

Tendremos:

$$\zeta_m(f) = \zeta_{R,m}^{(0)}(f) + \zeta_{R,m}^{(1)}(f) + \zeta_{R,m}^{(2)}(f).$$

Además, de lo dicho en los **Lemas (4.3.2), (4.3.3)**, existirá para cada $\epsilon > 0$ constante C_1 tal que para todo $m \geq 1$ tengamos:

$$\left|\zeta_{R,m}^{(1)}(f)\right| \leq C_1 R^m,$$

así también, para cada $\epsilon > 0$ existe constante C_2 de modo que:

$$\left|\zeta_{R,m}^{(2)}(f)\right| \leq C_2 R^m.$$

De donde concluimos:

$$\lim_{m\to\infty} \left|\zeta^{(1)}_{R,m}(f)\right|^{\frac{1}{m}} \leq R, \tag{6.6}$$

$$\lim_{m\to\infty} \left|\zeta^{(2)}_{R,m}(f)\right|^{\frac{1}{m}} \leq R. \tag{6.7}$$

Hecho esto procedamos entonces a demostrar el **Teorema (6.2.4)**.

Demostración. (**Teorema (6.2.4)**) De la **Proposición (6.2.2)**, tenemos para z con, $|z| < R(\mathscr{L}_f)^{-1}$, la posibilidad de escribir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\zeta_m(f) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\zeta^{(0)}_{R,m}(f) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\left(\zeta_m(f) - \zeta^{(0)}_{R,m}(f)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\left(\zeta^{(1)}_{R,m}(f) + \zeta^{(2)}_{R,m}(f)\right).
\end{aligned}$$

Ahora como la serie:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\left(\left|\zeta^{(1)}_{R,m}(f)\right| + \left|\zeta^{(2)}_{R,m}(f)\right|\right),$$

converge de forma absoluta en:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < R^{-1}\right\},$$

la expresión:

$$\begin{aligned}
\psi_f(z) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\left(\zeta^{(1)}_{R,m}(f) + \zeta^{(2)}_{R,m}(f)\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\left(\zeta_m(f) - \zeta^{(0)}_{R,m}(f)\right)\right),
\end{aligned}$$

definirá una función holomorfa en el conjunto recién mencionado.
Por otro lado, como:

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\zeta^{(0)}_{R,m}(f)\right),$$

definé una función holomorfa en, $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < R(\mathscr{L}_f)^{-1}\right\}$, que coincide además con la restricción a este conjunto de la función racional:

$$\prod_{1}^{N_f} \left(1 - \lambda_{(f,i)}z\right)^{\kappa(f,i)},$$

$\zeta(z,f)$, coincidirá en:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < R(\mathscr{L}_f)^{-1}\right\},$$

con:

$$\frac{\psi_f(z)}{\prod_{i=1}^{N_f}\left(1-\lambda_{(f,i)}z\right)^{\kappa(f,i)}}.$$

Y como esta última función es meromorfa en:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < R^{-1}\right\},$$

tendremos en ella, una extensión meromorfa de $\zeta(z,f)$ a dicho conjunto.
Haciendo finalmente tender R a $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$ concluimos la posibilidad de extender, $\zeta(z,f)$, a:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))^{-1}\right\},$$

por medio de una función meromorfa de polos los inversos de los valores propios del operador transferencia $\mathscr{L}_f$ de modulo mayor que $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f)))$. $\square$

6.3. Función Zeta para el Flujo de Suspensión

Definición 6.3.1. Dado un flujo (X,ϕ), sea $\mathrm{Per}(\phi)$ el conjunto de órbitas periódicas de ϕ. Entonces dada una órbita $\tau \in \mathrm{Per}(\phi)$, denotaremos por, $\lambda(\tau)$, su periodo mínimo. Dicho esto, para $s \in \mathbb{C}$, definimos la función zeta de ϕ, $\zeta_\phi(s)$, como el producto formal:

$$\zeta_\phi(s) = \prod_{\tau \in \mathrm{Per}(\Phi)} \left(1 - \exp(-s\lambda(\tau))\right)^{-1}.$$

En lo que resta de sección, sea $\theta \in (0,1)$ y A, matriz de transición de orden $n \geq 2$.
Sea ahora $f \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$ y (Σ_A^f, σ_f), el respectivo flujo de suspensión. Entonces de la correspondencia biunívoca entre el conjunto de órbitas periódicas del shift y el conjunto de órbitas periódicas del flujo de suspensión (**Proposición (2.2.22)**), tenemos a nivel formal:

$$\begin{aligned}
\zeta_{\sigma_f}(s) &= \prod_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \left(1-\exp(-s\lambda(\tau))\right)^{-1} \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\{x \in \Sigma_A^+ : \mathcal{O}(x) \in \mathrm{Per}_m(\sigma)\}} \log\left(1-\exp(-sS_m f(x))\right)^{-1}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\{x \in \Sigma_A^+ : \mathcal{O}(x) \in \mathrm{Per}_m(\sigma)\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(k(-sS_m f(x)))}{k}\right)
\end{aligned}$$

$$= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)}\exp(-sS_mf(x))\right)$$
$$= \zeta(1,-sf).$$

Para el caso del flujo de suspensión, σ_f, escribiremos en lo que sigue:

$$\zeta_{-f}(s) = \zeta_{\sigma_f}(s).$$

6.3.1. Generalización de la Función Zeta al Espacio de las Funciones Hölder Continuas

De la anterior igualdad el estudio del dominio de definición y propiedades de regularidad de la función zeta para el flujo de suspensión, estará en el analisis de las respectivas propiedades de la función:

$$s \mapsto \zeta(1,-sf).$$

O de forma más general en el análisis de la función definida para $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ por:

$$\zeta(g) := \zeta(1,g) = \exp\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)}\exp(S_mg(x)).$$

Si ahora introducimos la serie formal:

$$Z(g) := \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^m)}\exp(S_mg(x)),$$

entonces por la **Proposición (4.3.1)**, la serie $Z(g)$ será absolutamente convergente para cada $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1$.

Teorema 6.3.2. La expresión ζ, define una función holomorfa, sin ceros en el abierto:

$$\left\{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1\right\}.$$

Demostración. De la continuidad de la función (**Proposición (5.1.2)**), definida en $\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ por:

$$g \mapsto \mathscr{L}_g$$

y la continuidad superior de la función (**Proposición (1.3.9)**), definida en $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+))$ por:

$$T \mapsto \mathrm{Esp}(T),$$

tendremos que la composición:

$$g \mapsto \mathscr{L}_g \mapsto \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_g),$$

será superiormente continua y por ende para cada $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\overline{R}(\mathscr{L}_f) < 1$ nos será posible elegir $\epsilon > 0$ de modo que, para todo g en:

$$B(f,\epsilon) = \{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \| g - f \|_\theta \leq \epsilon\},$$

tengamos, $\overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1$.
Así el conjunto:
$$\left\{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1\right\},$$
será abierto y la composición:
$$\zeta = \exp \circ Z,$$
estará bien definida en él.
Ahora de la **Proposición (5.1.2)**, para todo $x \in \Sigma_A^+$, la función $E_x : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathbb{C}$ definida por:
$$E_x(g) := \exp(S_m g(x)),$$
será holomorfa. Así también lo será la suma de funciones holomorfas:
$$\zeta_m(g) := \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} E_x(g) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x))$$
Luego, para todo $m \geq 1$ la función, $Z_m : \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathbb{C}$, definida por:
$$Z_m(g) := \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^j)} \exp(S_j f(x)),$$
será holomorfa.
De esta manera, $\{Z_m\}_{m=1}^{\infty}$, definirá una sucesión de funciones holomorfas convergiendo de manera puntual en $\left\{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1\right\}$ a Z. Luego, por el **Teorema de Weirstrass Generalizado (1.2.7)**, para demostrar que Z define una función holomorfa en $\left\{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1\right\}$, bastará con probar para cada $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $R(\mathscr{L}_f) < 1$ la uniformidad de la convergencia en una vecindad de f.
Sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ y escojamos $R \in \mathbb{R}$ de modo que:
$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < R < 1,$$
y
$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : R < |z|\},$$
corresponda a un número finito de valores propios aislados de norma $R(\mathscr{L}_f)$.
Denotaremos por, κ_f, a la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de $\mathscr{L}_f$ contenidos en este conjunto. Elijamos ahora $\epsilon_1 > 0$ de modo que:
$$R(\mathscr{L}_f) + \epsilon_1 < 1.$$
Entonces de la **Proposición (1.3.9)** y del **Teorema (1.3.10)**, existirá $\delta > 0$ de modo que para todo $g \in B(f, \delta)$, tengamos:
$$R(\mathscr{L}_g) \leq R(\mathscr{L}_f) + \epsilon_1,$$
$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_g) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} = \emptyset$$

y el número de valores propios de $\mathscr{L}_g$ en:

$$\{z \in \mathbb{C} : R <| z |\leq R(\mathscr{L}_g)\},$$

contados con multiplicidad sea igual a κ_f.
Podemos además, reduciendo δ si es necesario, suponer por los **Lemas (4.3.2)** y **(4.3.3),** que para todo $m \geq 1$ tenemos:

$$\left|\zeta^{(1)}_{R,m}(g)\right| \leq C_1 R^m,$$
$$\left|\zeta^{(2)}_{R,m}(g)\right| \leq C_2 R^m.$$

Luego obtenemos para toda $g \in B(f,\delta)$, la desigualdad:

$$\begin{aligned}
|Z(g) - Z_m(g)| &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left| \sum_{x\in \mathrm{Fix}(\sigma^j)} \exp(S_j g(x)) \right| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\left|\zeta^{(0)}_{R,j}(g)\right| + \left|\zeta^{(1)}_{R,j}(g)\right| + \left|\zeta^{(2)}_{R,j}(g)\right| \right) \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j} \kappa_f (R(\mathscr{L}_f) + \epsilon_1)^j \\
&+ \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j} \Bigg(C_1 R^m + C_2 R^m \Bigg).
\end{aligned}$$

Finalmente como, $R(\mathscr{L}_f) + \epsilon_1,\ R < 1$, podemos para cada $\epsilon > 0$ concluir la existencia de entero positivo, $M > 0$, de modo que para todo $g \in B(f,\ \delta)$ y $m \geq M$, tengamos:

$$|Z(g) - Z_m(g)| \leq \epsilon.$$

Así, la sucesión $\{Z_m\}_{m=1}^{\infty}$ será uniformemente convergente en $B(f,\delta)$ y Z será holomorfa en $\left\{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \overline{R}(\mathscr{L}_f) < 1\right\}$.
Por último, como la composición:

$$\zeta = \exp \circ Z,$$

es holomorfa en $\left\{g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \overline{R}(\mathscr{L}_g) < 1\right\}$, obtenemos lo querido. □

6.3.2. Extensión Meromorfa de la Función Zeta para las Funciones Hölder Continuas.

El proposito de está sección es demostrar el siguiente **teorema**.

Teorema 6.3.3. La función ζ es posible de ser extendida en una función holomorfa sin ceros en el conjunto abierto:

$$\left\{f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+) : \theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < \text{mín}\{1, R(\mathscr{L}_f)\},\ 1 \notin \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)\right\}.$$

Además, si $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, es tal que $f > 0$, entonces la función:

$$s \mapsto \zeta(-sf),$$

es holomorfa y sin ceros en:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f)\}.$$

Por otro lado existe un único $\epsilon > 0$ tal que:

$$P(-(h_{top}(\sigma_f) - \epsilon)f) = |\log \theta|$$

y la función:

$$s \mapsto \zeta(-sf)$$

admite extensión meromorfa sin ceros en

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f) - \epsilon\}$$

cuyos polos corresponden a los s para los cuales $1 \in \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_{-sf})$.

La siguiente **proposición** nos facilitará la demostración del anterior **teorema**.

Proposición 6.3.4. Sea, $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, tal que $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < \mathrm{mín}\{1, R(\mathscr{L}_f)\}$, y $R \in \mathbb{R}$ de modo que:

I. $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < R < \mathrm{mín}\{1, R(\mathscr{L}_f)\}$

II. $\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} = \emptyset$.

Entonces la serie:

$$g \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(g)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(g) \right),$$

es localmente uniformenente convergente y holomorfa en $g = f$.

Demostración. Del **Teorema (1.3.10)** y la **Proposición (5.1.2)**, obtenemos para todo, $m \geq 1$, que las funciones:

$$f \mapsto \zeta_{R,m}^{(0)}(f),$$
$$f \mapsto \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)),$$

son holomorfas. Luego para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ la función:

$$f \mapsto \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m f(x)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(f) \right).$$

será holomorfa.
Además de los **Lemas (4.3.2)** y **(4.3.3)** podemos escoger $\delta > 0$, de modo de poder encontar constantes $C_1,\ C_2$ tales que para todo $g \in B(f, \delta)$ y todo entero $m \geq 1$, tengamos:

$$\begin{aligned}\left|\zeta_{R,m}^{(1)}(g)\right| &\leq C_1 R^m,\\ \left|\zeta_{R,m}^{(2)}(g)\right| &\leq C_2 R^m.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}&\Bigg| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m g(x)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(g) \right) \\ &\qquad\qquad - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m g(x)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(g) \right) \Bigg| \\ &\leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m g(x)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(g) \right| \\ &= \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| \zeta_{R,m}^{(1)}(g) + \zeta_{R,m}^{(2)}(g) \right| \\ &\leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(C_1 R^m + C_2 R^m \right).\end{aligned}$$

Luego la sucesión:

$$\left\{ \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m g(x)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(g) \right) \right\}_{k=1}^{\infty},$$

será uniformemente convergente en $B(f, \delta)$. Finalmente por el **Teorema de Weirstrass Generalizado (1.2.7)** la función:

$$g \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m g(x)) - \zeta_{R,m}^{(0)}(g) \right),$$

será holomorfa en $B(f, \delta)$. □

Sea ahora $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $\theta \exp(P(\mathrm{Real}(f))) < \text{mín}\{1, R(\mathscr{L}_f)\}$ y

$$r(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f),\ |\lambda| < 1\}.$$

Entonces:

$$R_f := \frac{1 + r(f)}{2},$$

satisfacerá las hipótesis de la **Proposición (6.3.4)**.
Luego, si N_{f,R_f}, representa la cardinalidad del conjunto:

$$\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)\bigcap\{z\in\mathbb{C}:R_f<|z|<R(\mathscr{L}_f)\}$$

y denotamos por:

$$\{\lambda_{(f,1)},\lambda_{(f,2)},\ldots,\lambda_{(f,N_{f,R_f})}\},$$

al conjunto de valores propios de $\mathscr{L}_f$ contenidos ahí y por $\kappa_{(f,i)}$ la multiplicidad algebraica de $\lambda_{(f,i)}$, podremos para el caso en que 1 no pertenezca a $\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)$ definir el cuociente:

$$\bar{\zeta}(f):=\frac{\exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\sum_{x\in\mathrm{Fix}\ (\sigma^m)}\exp(S_mf(x))-\zeta^{(0)}_{R_f,m}(f)\right)}{\prod_{i=1}^{N_{f,R_f}}(1-\lambda_{(f,i)})^{\kappa_{(f,i)}}}.$$

Además si $R(\mathscr{L}_f)<1$, tendremos $R_f>R(\mathscr{L}_f)$ y por tanto:

$$\bar{\zeta}(f)=\zeta(f).$$

Luego, $\bar{\zeta}$ definirá una extensión de ζ al conjunto:

$$\left\{f\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+):\theta\exp(P(\mathrm{Real}(f)))<\text{mín}\{R(\mathscr{L}_f),1\},\ 1\notin\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)\right\}.$$

El último punto necesario para la Demostración del **Teorema (6.3.3)** será el siguiente resultado:

Teorema 6.3.5. (**Principio de continuidad analítica**) Dado D un abierto conexo en $\mathbb{C}$, sean $f:D\to\mathbb{C}$ y $g:D\to\mathbb{C}$ holomorfas. Entonces si f y g concuerdan en una sucesión de puntos distintos en en D con punto límite en D, tendremos $f\equiv g$ en D.

En estos momentos nos encontramos en condiciones de probar el **Teorema (6.3.3)**.

Demostración. **(Teorema 6.3.3)** De la continuidad de las funciones (**Proposición (5.1.2)**, **Proposición (3.4.8)**):

$$g\mapsto\mathscr{L}_g$$

$$g\mapsto\theta\exp(P(\mathrm{Real}(g)))$$

y la continuidad superior de la función (**Proposición (1.3.9)**):

$$g\mapsto\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_g),$$

el conjunto:

$$\left\{f\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+):\theta\exp(P(\mathrm{Real}(f)))<\text{mín}\{R(\mathscr{L}_f),1\},\ 1\notin\mathrm{Esp}(\mathscr{L}_f)\right\}.$$

será abierto.
Sea $f\in\mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con:

$$\theta\exp(P(\mathrm{Real}(f)))<\text{mín}\{R(\mathscr{L}_f),1\}.$$

Entonces por el **Teorema (1.3.10)**, para $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ cercano a f, tendremos:

$$\zeta^{(0)}_{R_g,m}(g) = \zeta^{(0)}_{R_f,m}(g)$$

y podremos escribir:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(g)) - \zeta^{(0)}_{R_g,m}(g) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(g)) - \zeta^{(0)}_{R_f,m}(g) \right).$$

Entonces de la **Proposición (6.3.4)**, la función:

$$g \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(g)) - \zeta^{(0)}_{R_g,m}(g) \right),$$

será holomorfa en una vecindad de $g = f$, además por el **Teorema (1.3.10)**, aplicado a la Transformación $(I - \mathscr{L}_g)$, la función:

$$g \mapsto \prod_{i=1}^{N_{g,R_g}} (1 - \lambda_{(g,i)})^{\kappa(g,i)},$$

será holomorfa en una vecindad de $g = f$. Lo que concluye la primera parte del **teorema**.

Si ahora $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ es tal que $f > 0$, entonces de las **Proposición (5.2.4)**, la función:

$$t \mapsto P(-tf),$$

será estrictamente decreciente a $-\infty$ en $\mathbb{R}$. Además, de la **Observación (5.3.2)**, $t = h_{top}(\sigma_f)$ será el único real para el cuál tengamos:

$$P(h_{top}(\sigma_f)f) = 0.$$

Luego para todo $t > h_{top}(\sigma_f)$, tendremos la desigualdad:

$$P(-tf) < 0$$

y existirá un único $\epsilon > 0$ de modo que

$$P(-(h_{top}(\sigma_f) - \epsilon)f) = |\log \theta|.$$

Así por la **Proposición (4.2.21)**, tendremos para $s \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f)$, la desigualdad:

$$R(\mathscr{L}_{-sf}) \leq \exp(P(\mathrm{Real}(-sf))) < 1$$

y por la **Proposición (4.2.22)** tendremos para $s \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f) - \epsilon$, la desigualdad:

$$\theta \exp(P(\mathrm{Real}(-sf))) < 1.$$

Entonces del **Teorema (6.3.2)**, la función:

$$s \mapsto \zeta(-sf),$$

será holomorfa y sin ceros en $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f)\}$. Además de la primera parte del **teorema**, la función:

$$s \mapsto \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m(-sf)) - \zeta^{(0)}_{R_{-sf},m}(-sf) \right),$$

será holomorfa y sin ceros en $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f) - \epsilon\}$. Finalmente como:

$$s \mapsto \prod_{i=1}^{N_{-sf,R_{-sf}}} (1 - \lambda_{(-sf,i)})^{\kappa(-sf,i)},$$

es holomorfa y no idénticamente cero en el conexo:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f) - \epsilon\},$$

concluimos del **Principio de continuidad analítica (6.3.5)** que $s \mapsto \overline{\zeta}(-sf)$ es una extensión meromorfa de $s \mapsto \zeta(-sf)$ al conjunto,

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f) - \epsilon\},$$

cuyos polos corresponden a los s para los cuales $1 \in \mathrm{Esp}(\mathscr{L}_{-sf})$. $\square$

Observación 6.3.6. Supongamos A aperiódica y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tal que $R(\mathscr{L}_f) = 1$ y $P(\mathrm{Real}(f)) = 0$. Entonces por la **Proposición (4.2.21)**:

$$R(\mathscr{L}_{\mathrm{Real}(f)}) = \exp(P(\mathrm{Real}(f))) = 1 = R(\mathscr{L}_f),$$

luego del **Teorema (4.2.24)**, $f \in \mathrm{Dom}(P)$ y $z = \exp(P(f))$, corresponderá al único valor propio de norma $R(\mathscr{L}_f)$ de $\mathscr{L}_f$, el cúal es simple. Por lo tanto para todo $g \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ suficientemente cerca a f, tendremos $g \in \mathrm{Dom}(P)$. Si además, $\exp(P(g)) \neq 1$, tendremos:

$$\overline{\zeta}(g) = \frac{\exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \exp(S_m g(x)) - \exp(mP(g)) \right)}{1 - \exp(P(g))}.$$

Antes de continuar con el siguiente resultado recordemos que por la **Definición (4.2.26),** el flujo de suspensión σ_f es débilmente mezclante, si únicamente para $a = 0$ existe $W \in \mathcal{C}(\Sigma_A^f)$ de modo que para todo $t \geq 0$ tengamos la igualdad:

$$W \circ \sigma_{f,t} = \exp(iat)W.$$

Proposición 6.3.7. Supongamos, A, aperiódica y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$, con $f > 0$. Entonces, ζ_{-f}, admite extensión meromorfa a una vecindad del semiplano:

$$\{s \in \mathbb{C} : \text{Real}(s) \geq h_{top}(\sigma_f)\},$$

cuyos polos son todos aquellos s, para los cuales $1 \in \text{Esp}(\mathscr{L}_{-sf})$. En particular $s = h_{top}(\sigma_f)$ será un polo simple. Si suponemos además σ_f débilmente mezclante, entonces $s = h_{top}(\sigma_f)$ será el único polo de parte real igual a $h_{top}(\sigma_f)$ de dicha extensión de ζ_{-f}.

Demostración. De la segunda parte del **Teorema (6.3.3),** tenemos que:

$$s \mapsto \bar{\zeta}(-sf),$$

es la requerida extensión meromorfa de $s \mapsto \zeta(-sf)$. Sea $s_0 = h_{top}(\sigma_f)$, entonces por la **Observación (5.3.2)**, $P(-s_0 f) = 0$, luego de la **Proposición (4.2.21)** obtenemos:

$$\exp(P(-s_0 f)) = 1 = R(\mathscr{L}_{-s_0 f})$$

y por **Ruelle-Perron-Frobenius (4.2.13)**, $1 \in \text{Esp}(\mathscr{L}_{-s_0 f})$. Entonces por la **Proposición (5.2.2)** la función:

$$s \mapsto \exp(P(-sf)),$$

será holomorfa en una vencindad de s_0 y si denotamos por μ_f, el estado de equilibrio de f, tendremos por la **Proposición (5.2.4),** la igualdad:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0} \frac{\exp(P(-sf)) - \exp(P(-s_0 f))}{s - s_0} &= \lim_{u\to 0} \frac{\exp(P(-(u+s_0)f)) - \exp(P(-s_0 f))}{u} \\ &= \exp\left(\int -s_0 f d\mu_f\right) > 0,\end{aligned}$$

Entonces el límite:

$$\lim_{s\to s_0} (s - s_0)\bar{\zeta}(-sf) = \lim_{s\to s_0} \left(\frac{s - s_0}{1 - \exp(P(-sf))}\right) ((1 - \exp(P(-sf)))\bar{\zeta}(-sf)),$$

será finito y s_0 será un polo simple de $s \mapsto \bar{\zeta}_{-sf}$.

Para concluir, supongamos σ_f débilmente mezclante (**Definición (4.2.26)**). Entonces por la **Proposición (4.2.25)**, únicamente para $a = 0$, existirá $w \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ de modo que tengamos la igualdad:

$$w \circ \sigma = \exp(iaf)w.$$

Luego, $s_0 = h_{top}(\sigma_f)$, será el único punto de:

$$\{s \in \mathbb{C} : \text{Real}(s) \geq h_{top}(\sigma_f)\},$$

para el cúal, $1 \in \text{Esp}(\mathscr{L}_{-sf})$. $\square$

Corolario 6.3.8. Supongamos, A, aperiódica y $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ tal que $f > 0$. Entonces si el respectivo flujo de suspensión, σ_f, es débilmente mezclante, existirá función holomorfa, α, en una vecindad de:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) \geq h_{top}(\sigma_f)\},$$

de modo que:

$$\frac{(\zeta_{-f})'(s)}{\zeta_{-f}(s)} = \frac{-1}{s - h_{top}(\sigma_f)} + \alpha(s).$$

Demostración. A partir de lo dicho en la **Proposición (6.3.7)**, existe una extensión meromorfa $\bar{\zeta}_f$ de ζ_f a una vecindad de :

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) \geq h_{top}(\sigma_f)\}$$

y la función:

$$s \mapsto (s - h_{top}(\sigma_f))\zeta_f,$$

será holomorfa y sin ceros cero en:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f)\}.$$

Derivándola:

$$d/ds((s - h_{top}(\sigma_f))\zeta_{-f}(s)) = (s - h_{top}(\sigma_f))(\zeta_{-f})'(s) + \zeta_{-f}(s)$$

y despues dividiendo por ella, obtenemos una función holomorfa, α, en una vecindad de

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) \geq h_{top}(\sigma_f)\},$$

de modo que:

$$\frac{(\zeta_{-f})'(s)}{\zeta_{-f}(s)} = \frac{-1}{s - h_{top}(\sigma_f)} + \alpha(s).$$

□

Observación 6.3.9. Dada la matriz de transición aperiódica A, sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$ y (Σ_A^f, σ_f) el respectivo flujo de suspensión que supondremos débilmente mezclante. Entonces de la **Observación (5.3.2)**:

$$P(-h_{top}(\sigma_f)f) = 0.$$

Luego:

$$h_{top}(\sigma_{h_{top}(\sigma_f)f}) = 1.$$

Si además σ_f es débilmente mezclante, por el **Corolario (6.3.8)**, existirá función holomorfa, α, en una vecindad de:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) \geq 1\}$$

de modo que:

$$\frac{(\zeta_{-h_{top}(\sigma_f)f})'(s)}{\zeta_{-h_{top}(\sigma_f)f}(s)} = \frac{-1}{s - 1} + \alpha(s).$$

Para concluir, dada, A, matriz de transición aperiódica, sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ con $f > 0$, entonces del **Teorema (6.3.3)**, las identidades formales **(6.3)** y **(6.4)**, será validas en:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Real}(s) > h_{top}(\sigma_f)\},$$

y tendremos:

$$\begin{aligned}\zeta_{-f}(s) := \zeta(1, -sf) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^m)} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-sS_m f(x))\right) \\ = \exp\left(\sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_f(\tau)^{-sk}}{k}\right) \quad (6.8)\end{aligned}$$

y:

$$\zeta_{-f}(s) := \zeta(1, -sf) = \prod_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \left(1 - N_f(\tau)^{-s}\right)^{-1}. \quad (6.9)$$

Capítulo 7

Teoría de Números en Sistemas Dinámicos

7.1. Puntos Periódicos y el Teorema de los Números Primos

A lo largo de este capítulo nos interesará estudiar el comportamiento de las órbitas periódicas tanto para la aplicación de desplazamiento como para el flujo de suspensión. Más específicamente, nos dedicaremos a encontrar, mediante un método similar al usado por **Wiener** e **Ikehara** al momento de demostrar el **Teorema de los Números Primos**, formulas asintóticas para el número de órbitas periódicas tanto de la aplicación de desplazamiento como del flujo de suspensión.
La meta de este capítulo será la de demostrar los siguientes resultados.

Denotando las órbitas periódicas de un Sistema Dinámico de tiempo continuo o discreto por τ y su periodo mínimo por $\lambda(\tau)$, tenemos:

Teorema 7.1.1. Dada la matriz de transición aperiódica, A, sea (Σ_A, σ) el respectivo Sub-Shift de tipo finito.
Entonces para $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$ tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} \text{Cardinalidad}\, \{\tau \in \text{Per}(\sigma) : \exp(h_{top}(\sigma)\lambda(\tau)) \le t\} = 1.$$

Es decir:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{sh_{top}(\sigma)}{\exp(sh_{top}(\sigma))} \text{Cardinalidad}\, \{\tau \in \text{Per}(\sigma) : \lambda(\tau) \le s\} = 1.$$

El anterior resultado lo obtendremos como un caso particular del siguiente Teorema.

Teorema 7.1.2. Dada la matriz de transición aperiódica, A, sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ positiva y $(\Sigma_A^f,\ \sigma_f)$ el respectivo flujo de suspensión, el cual supondremos además débilmente mezclante.
Entonces para $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$ tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} \text{Cardinalidad} \{\tau \in \text{Per}(\sigma_f) : \ \exp(h_{top}(\sigma_f)\lambda(\tau)) \leq t\} = 1.$$

Es decir:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{sh_{top}(\sigma_f)}{\exp(sh_{top}(\sigma_f))} \text{Cardinalidad} \{\tau \in \text{Per}(\sigma_f) : \lambda(\tau) \leq s\} = 1.$$

Observación 7.1.3. Es oportuno en estos momentos recordar para, $f \equiv \mathbb{1}$, que el respectivo flujo de suspensión (Σ_A^f, σ_f) cumple con:

$$h_{top}(\sigma) = h_{top}(\sigma_f).$$

Así, de la correspondencia biunívoca que preserva periodo, entre las órbitas periódicas del operador de transferencia y el flujo de suspensión, **Proposición (2.2.22)**, tenemos para cada $t > 0$:

$$\text{Cardinalidad} \{\tau \in \text{Per}(\sigma) : \exp(h_{top}(\sigma)\lambda(\tau)) \leq t\}$$

$$= \text{Cardinalidad} \{\tau \in \text{Per}(\sigma_{\mathbb{1}}) : \exp(h_{top}(\sigma_{\mathbb{1}})\lambda(\tau)) \leq t\}.$$

Y el **Teorema (7.1.1)** será una consecuencia inmediata del **Teorema (7.1.2)** para el caso particular $f \equiv \mathbb{1}$.

El resto de la sección estará dedicada a demostrar el **Teorema (7.1.1)**, para lo cuál daremos algunas definiciones que nos facilitarán la notación y objetivo.

Definición 7.1.4. Dada una órbita $\tau \in \text{Per}(\sigma_f)$, y un entero $m \geq 1$, el par (τ, m) será denotado por τ^m y escribimos:

$$\lambda(\tau^m) = m\lambda(\tau).$$

Definición 7.1.5. Dada la matriz de transición, A, sea $f \in \mathcal{C}_\theta(\Sigma_A^+)$ positiva y (Σ_A^f, σ_f) el respectivo flujo de suspensión. Denotando las órbitas periódicas de (Σ_A^f, σ_f) por τ y su periodo mínimo por $\lambda(\tau)$, para $m \geq 1$ escribimos:

1. $N(\tau) = \exp(h_{top}(\sigma_f)\lambda(\tau))$.
2. $N(\tau^m) = \exp(h_{top}(\sigma_f)\lambda(\tau^m))$.
3. $\Lambda(\tau^m) = \log(N(\tau))$.

Entonces para $t \in \mathbb{R},\ t > 1$ definimos las funciones:

I.
$$\pi(t) = \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): N(\tau)\leq t\}} 1.$$

II.
$$\psi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): N(\tau^m)\leq t\}} \Lambda(\tau^m).$$

La demostración de los teoremas estará en econtrar formas de relacionar las anteriores funciones.
El siguiente resultado se enmarca en dicha línea:

Proposición 7.1.6. Para $t \in \mathbb{R},\ t > 1$, tenemos:

I.
$$\psi(t) \leq \log(t)\pi(t).$$

II. Para cada $\delta > 1$, tenemos:
$$\pi(t) \leq \pi(t^{1/\delta}) + \frac{\delta}{\log t}\psi(t).$$

Demostración. I. Notando para $t \in \mathbb{R},\ t > 1$ que $\left[\frac{\log t}{N(\tau)}\right]$ corresponde al número de potencias de $N(\tau)$ menores que t, tenemos:

$$\begin{aligned}\psi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): N(\tau^m)\leq t\}} \Lambda(\tau^m) &= \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): N(\tau)\leq t\}} \log N(\tau) \left[\frac{\log t}{\log N(\tau)}\right] \\ &\leq \log t \cdot \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): N(\tau)\leq t\}} 1 = \log(t)\pi(t).\end{aligned}$$

II. Sea $s = t^{\frac{1}{\delta}} > 1$ entonces:
$$\pi(t) = \pi(s) + \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): s< N(\tau)\leq t\}} 1.$$

Además, para $N(\tau) > s$ tenemos $\frac{\log N(\tau)}{\log s} > 1$, lo que nos permite concluir:
$$\pi(t) \leq \pi(s) + \sum_{\{\tau\in \mathrm{Per}(\sigma_f): N(\tau)\leq t\}} \frac{\log N(\tau)}{\log s} \leq \pi(s) + \frac{\psi(t)}{\log s} = \pi(s) + \delta\frac{\psi(t)}{\log t}.$$

□

Una vez hecho esto, nos encontramos en condiciones de comenzar con la demostración del **Teorema (7.1.2)**.

Demostración. (**Teorema (7.1.2)**) Si denotamos $h = h_{top}(\sigma_f)$, de la **Observación (6.3.9)**, ζ_{-hf} definirá una función holomorfa sin ceros en:

$$\{s \in \mathbb{C} : Real(s) > 1\},$$

existirá además función holomorfa α, definida en una vecindad de:

$$\{s \in \mathbb{C} : Real(s) \geq 1\},$$

de modo que para s con $Real(s) > 1$ tenemos:

$$\frac{(\zeta_{-hf})'(s)}{\zeta_{-hf}(s)} = \frac{-1}{s-1} + \alpha(s).$$

Recordando ahora que por la **ecuación (6.8)**, nos es posible escribir en Real$(s) >$ 1:

$$\zeta_{-hf}(s) \;=\; \exp\left(\sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N(\tau)^{-sj}}{j}\right),$$

podremos gracias a las igualdades:

$$\begin{aligned}
(\log \circ \zeta_{-hf})'(s) &= \frac{(\zeta_{-hf})'(s)}{\zeta_{-hf}(s)}, \\
&= \left(\sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N(\tau)^{-sj}}{j}\right)' \\
&= -\sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \sum_{j=1}^{\infty} \log(N(\tau)) N(\tau)^{-sj},
\end{aligned}$$

escribir:

$$\sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \sum_{j=1}^{\infty} \log(N(\tau)) N(\tau)^{-sj} = \frac{1}{s-1} - \alpha(s).$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \log(N(\tau)) N(\tau)^{-sj} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathrm{Per}(\sigma_f)} \frac{\Lambda(\tau^j)}{N(\tau^j)^s} \\
&= \int_1^{\infty} t^{-s} d\psi(t),
\end{aligned}$$

por lo que el **Teorema Tauberiano de Ikehara-Wiener**, nos entrega la relación:

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\psi(t)}{t} = 1.$$

Y por ende de la **Proposición (7.1.6, I)**, concluimos:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log(t)\pi(t)}{t} \;\geq\; 1.$$

Por otra parte la **Proposición (7.1.6, II)** nos permite, para cada $\delta > 1$, escribir:

$$\frac{\pi(t)\log t}{t} \leq \frac{\pi(t^{\frac{1}{\delta}})}{t}\log(t) + \delta\frac{\psi(t)}{t}.$$

Así, para $\delta > \gamma > 1$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{\pi(t)\log t}{t} &\leq \limsup_{t\to\infty}\left(\frac{\pi(t^{\frac{1}{\delta}})}{t}\right)(\log(t)) + \limsup_{t\to\infty}\delta\frac{\psi(t)}{t} \\ &= \limsup_{t\to\infty}\left(\frac{\pi(t^{\frac{1}{\delta}})}{t^{\frac{\gamma}{\delta}}}\right)\left(\frac{\log(t)}{t^{(\frac{1-\gamma}{\delta})}}\right) \ + \ \delta.\end{aligned}$$

Por último, si notamos:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\log(t)}{t^{(\frac{1-\gamma}{\delta})}}\right) \ = \ 0,$$

nos quedará solo demostrar para $\delta \ > \ \gamma \ > \ 1$ que:

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{\pi(t^{\frac{1}{\delta}})}{t^{\frac{\gamma}{\delta}}}\right) < \infty.$$

Ahora, de la **ecuación (6.9)** podemos escribir en $\mathrm{Real}(s) > 1$:

$$\zeta_{-hf} = \prod_{\tau\in\mathrm{Per}(\sigma)}(1 - N(\tau)^{-s})^{-1}.$$

Entonces para $\delta > \gamma > 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\zeta_{-hf}(\gamma) &= \prod_{\tau\in\mathrm{Per}(\sigma_f)}(1 - N(\tau)^{-\gamma})^{-1} = \prod_{\tau\in\mathrm{Per}(\sigma_f)}\left(\frac{N(\tau)^{\gamma}}{N(\tau)^{\gamma}-1}\right) \\ &= \prod_{\tau\in\mathrm{Per}(\sigma_f)}\left(1 + \frac{1}{N(\tau)^{\gamma}-1}\right) \geq \prod_{\tau\in\mathrm{Per}(\sigma_f)}\left(1 + N(\tau)^{-\gamma}\right) \\ &\geq \prod_{\tau\in\mathrm{Per}(\sigma_f):N(\tau)\leq t^{\frac{1}{\delta}}}\left(1 + t^{-\frac{\gamma}{\delta}}\right) = \left(1 + t^{(-\gamma/\delta)}\right)^{\pi(t^{(\frac{1}{\delta})})} \\ &\geq \left(\frac{\pi(t^{(\frac{1}{\delta})})}{t^{\frac{\delta}{\gamma}}}\right).\end{aligned}$$

Y $\frac{\pi(t^{1/\delta})}{t^{(-\gamma/\delta)}}$ será acotado por $\zeta_{-hf}(\gamma)$. Con lo cual finalmente concluimos:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log t\pi(t)}{t} \leq \delta.$$

Y el resultado se obtendrá de hacer tender δ a 1 y notar que:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log t\pi(t)}{t} \leq 1 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\log t\pi(t)}{t}$$

□

Bibliografía

[1] L. M. Abramov. The entropy of a derived automorphism. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 128:647–650, 1959.

[2] L. M. Abramov. On the entropy of a flow. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 128:873–875, 1959.

[3] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[4] Warren Ambrose. Representation of ergodic flows. *Ann. of Math. (2)*, 42:723–739, 1941.

[5] M. Artin and B. Mazur. On periodic points. *Ann. of Math. (2)*, 81:82–99, 1965.

[6] Viviane Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.

[7] Rufus Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, revised edition, 2008. With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes.

[8] Felix E. Browder. On the spectral theory of elliptic differential operators. I. *Math. Ann.*, 142:22–130, 1960/1961.

[9] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[10] P. Erdös. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 35:374–384, 1949.

[11] Nicolai T. A. Haydn. Meromorphic extension of the zeta function for Axiom A flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(2):347–360, 1990.

[12] Einar Hille and Ralph S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups.* American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974. Third printing of the revised edition of 1957, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI.

[13] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.

[14] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[15] Jacob Korevaar. *Tauberian theory*, volume 329 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 2004. A century of developments.

[16] G. A. Margulis. Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(4):89–90, 1969.

[17] Roger D. Nussbaum. The radius of the essential spectrum. *Duke Math. J.*, 37:473–478, 1970.

[18] William Parry and Mark Pollicott. An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows. *Ann. of Math. (2)*, 118(3):573–591, 1983.

[19] William Parry and Mark Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188):268, 1990.

[20] B. Riemann. On the number of prime numbers below a given quantity. *Sci. Rep. Kagoshima Univ.*, (24j):1–8, 1975. Translated from the German with commentary by Yôichi Koshiba.

[21] H. L. Royden. *Real analysis.* Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988.

[22] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[23] David Ruelle. *Dynamical zeta functions for piecewise monotone maps of the interval*, volume 4 of *CRM Monograph Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[24] Atle Selberg. An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions. *Canadian J. Math.*, 2:66–78, 1950.

[25] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, volume 46 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Translated from the second French edition (1995) by C. B. Thomas.

[26] Peter Walters. A variational principle for the pressure of continuous transformations. *Amer. J. Math.*, 97(4):937–971, 1975.

[27] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[28] Norbert Wiener. *The Fourier integral and certain of its applications*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1933 edition, With a foreword by Jean-Pierre Kahane.