PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CURVAS DE FERMAT Y DESCOMPOSICIÓN DE OBJETOS ASOCIADOS

por

Patricio Alejandro Barraza Vargas.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Anita M. Rojas (Universidad de Chile).
Profesor Co-tutor: Rubí Rodríguez (Pontificia Universidad Católica de Chile).

Comisión Informante:
Ángel Carocca (Pontificia Universidad Católica de Chile).

Julio, 2009
Santiago, Chile

A mis padres, Emilia y Carlos.

AGRADECIMIENTOS

No puedo comenzar agradeciendo a otra persona que no sea mi Profesora guía Anita Rojas. Valoro mucho su tiempo y buena disposición que mostró en todo momento. Siempre me dio buenos consejos e ideas. Nunca estuvo demasiado ocupada para atender mis consultas, compartir sus conocimientos y esforzarse en encaminar mis ideas. También es necesario para mí agradecer a la Profesora Rubí Rodríguez por su paciencia al momento de enseñar, por la motivación que generó en mí, incluso antes de ingresar a la Universidad Católica. Por supuesto su comprensión en momentos díficiles, no siempre académicos, fue importante para mí. Al Profesor Ángel Carocca agradezco su tiempo, en consultas, así como también su constante preocupación. A los profesores Luis Arenas y Antonio Behn de la Universidad de Chile, que se integraron en varias discusiones de este trabajo.

Soporte fundamental en este período ha sido mi familia, que ha seguido muy de cerca mis estudios, con fe ciega, confianza absoluta, admiración y ayuda incondicional. Agradezco a mi madre, Emilia, a mi padre Carlos y a mi hermana Marcela, que me han impulsado a seguir estudiando y se han preocupado de mi bienestar. A mi Mami Teresa, sus sabios consejos y sus palabras de cariño están conmigo a cada momento. A mi tía Teresita, Itzumi y Antonia a quienes también quiero mucho y me acompañan siempre.

Mis amigos y al mismo tiempo compañeros de estudio han sido mis grandes aliados todos estos años desde que comencé a estudiar matemáticas. Han hecho divertidas esas largas tardes de discusión y estudio, siempre con el ánimo de aprender los unos de los otros. Se mezclaba lo serio de los teoremas, con tonteras que sólo a nosotros nos parecen divertidas. Daniela, Mariela, Fabián, Alejandro y Nicolás. Gracias por ayudarme, soportarme y sobre todo por su amistad.

En general agradezco a todos mis cercanos quienes han manifestado su interés en mi progreso, esas personas que quizás sin saberlo te dan un buen motivo para seguir adelante cuando ves todo oscuro. También a aquellos que preguntan "¿y para qué sirve eso?". En ocasiones, no poder explicar "para qué sirven las matemáticas" o intentar encontrar una "aplicación", me hace encontrarlas más bellas.

Índice general

Introducción 3

Capítulo 1. Preliminares 5
1. Superficies de Riemann y bases de Homología 5
2. Construcción de representaciones de $\mathrm{Aut}(S)$ 6
3. La Variedad Jacobiana 7
4. Firma y vector generador 17

Capítulo 2. Curvas de Fermat 21
1. Representación de $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ en $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H^{1,0}(\mathcal{C},\mathbb{C}))$ 22
2. Descripción de la acción de $G = (\mu_N \times \mu_N) \rtimes S_3$ en $\mathcal{C}$ 27
3. Fórmula de la traza de Eichler 32

Capítulo 3. Sobre el grupo de automorfismos de las curvas de Fermat 41
1. Representaciones de G 41
2. Descomposición de las representaciones analítica y racional de G 51
3. Descomposición isógena de la Jacobiana de $\mathcal{C}$, para N primo 78

Bibliografía 85

Introducción

Sea S una Superficie de Riemann compacta y G un subgrupo no trivial de automorfismos conformes de S. Existen dos representaciones de G asociadas naturalmente a la acción en S, a saber, la *representación racional* en el primer grupo de homología de S y la *representación analítica* en el espacio de diferenciales analíticas de S.

Naturalmente asociada a S está su variedad Jacobiana JS. Es ésta un toro complejo de dimensión compleja el género de S y tiene una polarización canónica inducida por el producto de intersección de curvas (cerradas) en S (ver III.1 en [**4**] y 11.1.2 en [**1**]). Es decir, JS es una variedad Abeliana principalmente polarizada.

La acción de G en S induce una acción en JS. El año 1995 en [**6**] se describió una primera descomposición de la variedad JS; a saber, $JS \sim J(S/G) \times P$, donde G actúa con la representación trivial en el factor $J(S/G)$. El año 1998 en [**10**] se estudió la descomposición asociada a una Jacobiana con acción del grupo simétrico S_3 , encontrándose una relación entre las representaciones irreductibles de S_3 y dichos factores. Al año siguiente en [**14**] se describió la geometría de la acción del grupo alternante A_5. Posteriormente en [**8**], se relacionaron formalmente los factores G-invariantes en la descomposición de JS con las representaciones irreducibles racionales de G. En [**2**] se describen dichos factores como productos de subvariedades isógenas determinadas como imágenes de idempotentes primitivos en el álgebra $\mathbb{Q}[G]$. Llegando así a la descomposición de JS con acción de G, conocida como Descomposición isógena G-invariante o de Lange-Recillas:

$$JS \sim J(S/G) \times B_2^{n_2} \times ... \times B_r^{n_r}$$

Donde r es el número de representaciones irreducibles racionales de G y los números n_i son no nulos y dependen sólo de G y sus representaciones. Las dimensiones de las subvariedades B_i así como sus polarizaciones, dependen de la geometría de la acción de G. En [**12**] se calcularon las dimensiones de dichos factores. La polarización de cada subvariedad B_i es aún motivo de estudio, así como su descripción geométrica en términos de Jacobianas o Pryms de cubrientes intermedios.

En este trabajo consideramos la familia de superficies de Riemann dadas por las curvas proyectivas $\mathcal{C}{:}x^N + y^N + z^N = 0$, $N \geq 4$. Explicaremos algunos aspectos de su estructura: género, base de diferenciales y exhibiremos el correspondiente grupo de automorfismos completo.

Luego considerando la acción del grupo de automorfismos completo, calcularemos la descomposición de las dos representaciones asociadas en términos de las irreducibles complejas del grupo, las cuales se encontrarán mediante el método de los "little groups". Más aún para $N > 4$ primo, calcularemos la dimensión de las subvariedades en la descomposición isógena G-equivariante de la variedad jacobiana.

Para ello describiremos la acción mediante la firma geométrica de G en $\mathcal{C}$ y aspectos algebraicos de las representaciones irreducibles de G, tales como el índice de Schur y el grupo de Galois del cuerpo de trazas.

En el primer capítulo daremos los básicos involucrados en nuestro estudio. Escribiremos primero detalladamente las dos representaciones y la acción de G en la Jacobiana, inducida por la acción en S, para una superficie de Riemann compacta arbitraria.

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Superficies de Riemann y bases de Homología

Sea S una superficie de Riemann compacta de género g. Denotamos por $H_1(S,\mathbb{Z})$ al primer grupo de homología de la superficie S, que tiene dimensión $2g$ como $\mathbb{Z}$-módulo y denotamos por $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$ al $\mathbb{C}$-espacio vectorial de diferenciales analíticas en S que tiene dimensión g.

PROPOSICIÓN 1. *Si S es una superfice de Riemann de género g y $\{\alpha_1,...,\alpha_g,\beta_1,...,\beta_g\}$ es una base canónica de $H_1(S,\mathbb{Z})$; es decir, con intersección de curvas dada por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix},$$

entonces existe una única base dual $\{v_1,...,v_g\}$ de $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$ tal que

$$\int_{\alpha_i} v_j = \delta_{i,j},$$

para i,j=1,..,g.
Además la matriz

$$\tau = \left(\int_{\beta_i} v_j\right)_{i,j},$$

llamada la matriz de Riemann de S, es simétrica con parte imaginaria positiva definida.

DEMOSTRACIÓN. Ver III.2.8 en [4].

□

2. Construcción de representaciones de $\mathrm{Aut}(S)$

Sea $T \in \mathrm{Aut}(S)$. Entonces definimos el automorfismo de $H_1(S,\mathbb{Z})$

$$T_1 : H_1(S,\mathbb{Z}) \to H_1(S,\mathbb{Z})$$

como $T_1([\gamma]) = [T \circ \gamma]$, para todo $[\gamma] \in H_1(S,\mathbb{Z})$.

Sea $\{\alpha_1, .., \alpha_g, \beta_1, .., \beta_g\}$ una base de $H_1(S,\mathbb{Z})$. Como T_1 es un automorfismo de grupos, podemos ver esta acción en el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $H_1(S,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ de base $\mathcal{B} = \{\alpha_1 \otimes 1, ..., \alpha_g \otimes 1, \beta_1 \otimes 1, ..., \beta_g \otimes 1\}$.

La función $\rho_{\mathbb{Q}} : \mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(H_1(S,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, definida por $\rho_{\mathbb{Q}}(T)([\gamma]) = T_1([\gamma])$ es tal que

$$\rho_{\mathbb{Q}}(T \circ L) = (T \circ L)_1 = T_1 \circ L_1 = \rho_{\mathbb{Q}}(T) \circ \rho_{\mathbb{Q}}(L),$$

luego es una representación del grupo $\mathrm{Aut}(S)$ sobre $\mathbb{Q}$, la cual llamaremos *representación racional.*

Otro espacio en el cual podemos representar $\mathrm{Aut}(S)$ es $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$.

Sean $T \in \mathrm{Aut}(S)$ y $\upsilon \in H^{1,0}(S,\mathbb{C})$, entonces T actúa en υ de modo que:

$$T(\upsilon) = \upsilon \circ T^{-1}.$$

Es decir, si υ en términos de la coordenada local α, centrada en $P \in S$, está dada por $f(\alpha)d\alpha$. Elegir una coordenada local t, centrada en $T(P)$. Suponga que en términos de estas coordenadas locales T^{-1} está dada por $\alpha = h(t)$. Entonces $T(\upsilon)$ en términos de la coordenada local t está dada por $f(h(t))h'(t)dt$.

La función $\rho_a : \mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H^{1,0}(S,\mathbb{C}))$, definida por $\rho_a T(\upsilon) = \upsilon \circ T^{-1}$ es tal que

$$\rho_a(T \circ L)(\upsilon) = \upsilon \circ L^{-1} \circ T^{-1} = (\rho_a(T) \circ \rho_a(L))(\upsilon),$$

luego es una representación compleja del grupo $\mathrm{Aut}(S)$, la cual llamaremos *representación analítica.*

Observación 1. A partir de ρ_a obtenemos una representación de $\mathrm{Aut}(S)$ en $H^{1,0}(S,\mathbb{C})^*$, a saber

$$\rho_a{}' : \mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H^{1,0}(S,\mathbb{C})^*),$$

definida por $\rho_a{}'(T) = \rho_a\left(T^{-1}\right)^t$, donde $(\cdot)^t$ es la traspuesta definida como $L^t(f) = f \circ L$, para cada $L \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H^{1,0}(S,\mathbb{C}))$ y $f \in H^{1,0}(S,\mathbb{C})^*$.

3. La Variedad Jacobiana

Definiremos la Variedad Jacobiana JS asociada a una superficie de Riemann S y probaremos que es una variedad abeliana Principalmente polarizada.

Definición 1. Sean S una superficie de Riemann de género g, una base de curvas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}\}$ de $H_1(S,\mathbb{Z})$ y una base de diferenciales $\{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_g\}$ de $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$. Diremos que la matriz:

$$\prod = \left(\pi_{ij} = \int_{\alpha_j} \omega_i\right), \qquad 1 \leq i \leq g,\ 1 \leq j \leq 2g$$

es la matriz período de S, en relación a las bases dadas.

Observación 2. Notamos que las columnas de cualquier matriz período son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2. Sean V un espacio vectorial de dimensión compleja g, y L un subgrupo discreto de rango $2g$ de V (diremos entonces que L es un reticulado en V), que es isomorfo a $\mathbb{Z}^{2g}$. El cuociente $T = V/L$ se llama toro analítico.

Definición 3. Sea $H^{1,0}(S,\mathbb{C})^*$ el espacio de los funcionales complejos lineales de $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$,y sea L el subgrupo discreto (de rango $2g$) de todos los funcionales del tipo $\int_\alpha(\cdot)$, con $\alpha \in H_1(X,\mathbb{Z})$. El toro analítico

$$JS = H^{1,0}(S,\mathbb{C})^*/L$$

se llama Variedad Jacobiana de S

A continuación, desarrollaremos los resultados necesarios de la teoría de variedades abelianas, en búsqueda de conocer más acerca de las Variedades Jacobianas.

Definición 4. Dado $T = V/L$ un Toro analítico de dimensión g; donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión g, y L un reticulado en V. Diremos que una forma real alternante E en V es una polarización en T, si se cumple:

i) $E(iu, iv) = E(u, v)$, $\forall u, v \in V$
ii) $E(L \times L) \subset \mathbb{Z}$ y $\det(E(L \times L)) \neq 0$.

En este caso, diremos que el par (T, E) es una Variedad abeliana polarizada

OBSERVACIÓN 3. Sea $(T = V/L, E)$ una Variedad Abeliana Polarizada. Dado un reticulado L, siempre existe una base smpléctica para L; es decir, una base de L, con respecto a la cual, la matriz de E se escribe como

$$[E] = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix}$$

y los d_i son números enteros positivos, tales que d_i/d_{i+1}, $\forall i \in \{1, \ldots, g-1\}$. Al número d_g, lo llamamos el *exponente* de la polarización.

DEMOSTRACIÓN. Ver página 15 en [**11**].

□

DEFINICIÓN 5. Sea el par (T, E) una Variedad Abeliana Polarizada. Si E tiene exponente 1, entonces se dice que la polarización es principal, y la variedad abeliana (T, E) se llama Variedad abeliana principalmente polarizada. (v.a.p.p)

DEFINICIÓN 6. Sea $T = V/L$ toro analítico. Decimos que $S = W/M$ es un subtoro de T, si W es un subespacio de V, y M es un reticulado en W tal que $M \subseteq W \cap L$

DEFINICIÓN 7. Sean T_1 y T_2 dos toros analíticos, y $f : T_1 \to T_2$ un homomorfismo de toros; es decir, una función analítica compatible con la estructura de grupo. Decimos que f es una isogenia de toros, si es un homomorfismo que cumple al menos dos de las siguientes afirmaciones. (Basta con esto, pues dos de ellas, siempre implican la tercera)

1. $\dim T_1 = \dim T_2$.
2. f es sobreyectiva.
3. El núcleo de f es finito.

Para una isogenia f, se define el grado de f, $gr(f)$, como la cardinalidad de su núcleo, y la notación $T_1 \sim T_2$ significará que los toros son isógenos.

OBSERVACIÓN 4. Sea $f : T_1 \to T_2$ un homomorfismo de toros analíticos. Entonces se tiene que:

1. $\operatorname{Im} f$ es un subtoro de T_2

2. $\ker f$ es un subgrupo compacto de T_1. Su componente conexa que contiene a 0, denotada por $(\ker f)_0$, es un subtoro de T_1, de índice finito en $\ker f$.

DEFINICIÓN 8. Sea $T = V/L$ toro analítico de dimensión g. Considere $\{v_1, \ldots, v_g\}$ base de V y $\{l_1, \ldots l_{2g}\}$ base de L.

Definimos

$$\prod := (\pi_{i,j}) = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,2g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{g,1} & \cdots & \pi_{g,2g} \end{pmatrix}_{g \times 2g}$$

como la matriz periodo de T, con respecto a dichas bases; donde el j-ésimo vector columna de $\prod$ corresponde a las coordenadas de l_j la base $\{v_1, \ldots, v_g\}$ de V.

PROPOSICIÓN 2. *Sea $T = V/L$ un toro analítico de dimensión g, con bases $\{v_1, \ldots, v_g\}$ de V y $\{l_1, \ldots l_{2g}\}$ de L, $\prod$ la matriz periodo de T con respecto a estas bases y $P = (\prod \overline{\prod}^t)$. Si J es una matriz $2g \times 2g$, con coeficientes enteros y determinante 1, entones las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *J es la matriz de una forma E tal que (T, E) es una v.a.p.p.*
2. *$iPJ^{-1}P^t = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ M^t & 0 \end{pmatrix}$ donde M es Hermitiana positiva definida.*
3. *$\prod J^{-1} \prod^t = 0$ y $-i\prod J^{-1}\overline{\prod}^t$ es Hermitiana positiva definida.*

DEMOSTRACIÓN. Ver 4.2 en [1]

□

COROLARIO 1. *Sea (T, E) una v.a.p.p. de dimensión g y $\prod = (\prod_1 \quad \prod_2)$ su matriz período. Si $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$, entonces*

1. *$\prod_2\prod_1^t - \prod_1\prod_2^t = 0$*
2. *$-i(\prod_2\overline{\prod_1}^t - \prod_1 \overline{\prod_2}^t)$ es positiva definida.*

En particular, $\prod_1$ y $\prod_2$ son no singulares.

DEMOSTRACIÓN. Ver 4.2 en [1].

□

COROLARIO 2. *Sea (T, E) una v.a.p.p. de dimensión g. Entonces, existen bases de V y L con respecto a las cuales $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ y $\prod = (I_g \quad \tau)$ cumplen que*

1. *$\tau^t = \tau$*

2. *La parte imaginaria de $\tau = \Im\mathfrak{m}(\tau)$ es positiva definida.*

DEMOSTRACIÓN. Ver 4.2 en [1].

$\square$

TEOREMA 1. *Si S es una Superficie de Riemann de género g, entonces su Variedad Jacobiana JS es una v.a.p.p. de dimensión g.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots \beta_g\}$ una base canónica de $H_1(S, \mathbb{Z})$, y $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ la base de $H^{1,0}(S, \mathbb{C})$ descrita en la Proposición 1. Luego, la matriz período de S es

$$\prod = \begin{pmatrix} I_g & \tau \end{pmatrix}$$

con τ matriz simétrica, y con parte imaginaria simétrica positiva definida. Sea JS la Jacobiana de S. Si tomamos la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

entonces notamos que se cumple la condición (3) de la Proposición 2, pues

$$\prod J^{-1} \prod{}^t = \begin{pmatrix} I_g & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_g \\ \tau \end{pmatrix} = \tau - \tau = 0$$

y

$$-i \prod J^{-1} \overline{\prod}{}^t = -i \begin{pmatrix} I_g & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_g \\ \overline{\tau} \end{pmatrix} = 2\Im\mathfrak{m}\tau$$

es positiva definida, según la Proposición 1. Luego JS es una *v.a.p.p.*

$\square$

La siguiente proposición nos permite definir $\rho_a{}'$ en $J(S)$.

PROPOSICIÓN 3. *Sea $T : S \to S$ una función holomorfa, γ un camino en S y υ una diferencial analítica, entonces*

$$\int_\gamma \rho_a(T^{-1})(\upsilon) = \int_{\rho_{\mathbb{Q}}(T)(\gamma)} \upsilon$$

DEMOSTRACIÓN. Ver IV.3.9.(f) en [9].

$\square$

Veamos que $\rho_a{}'$ preserva el reticulado:
$\rho_a{}'(T)(\int_\gamma(\cdot)) = \rho_a(T^{-1})^t(\int_\gamma(\cdot)) = \int_\gamma \rho_a(T^{-1})(\cdot) = \int_{\rho_{\mathbb{Q}}(T)(\gamma)}(\cdot)$

PROPOSICIÓN 4. *ρ'_a es isomorfa a la conjugada compleja de ρ_a, además*

$$\rho_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \overline{\rho_a} \oplus \rho_a$$

DEMOSTRACIÓN. Ver I.2.3. en [1]. □

Otro camino para definir la Jacobiana de S es mediante el grupo cociente de los divisores de grado cero con los divisores principales, denotado por $\mathrm{Pic}^0(S)$. Lo explicaremos a continuación.

DEFINICIÓN 9. Un *divisor* en S es un símbolo formal

$$\mathfrak{U} = \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_k P_k,$$

con $P_j \in S$ y $\alpha_j \in \mathbb{Z}$.
Podemos escribir el divisor $\mathfrak{U}$ como

$$\mathfrak{U} = \sum_{P\in S} \alpha(P)P,$$

con $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$, $\alpha(P) \neq 0$ sólo para finitos $P \in S$.

Denotamos por $\mathrm{Div}(S)$ el *grupo de divisores* en S, esto es el grupo abeliano libre en los puntos de S.
Luego si $\mathfrak{U} = \sum_{P\in S} \alpha(P)P$ y $\mathfrak{B} = \sum_{P\in S} \beta(P)P$, entonces

$$\mathfrak{U} + \mathfrak{B} = \sum_{P\in S} (\alpha(P) + \beta(P))P$$

y

$$-\mathfrak{U} = \sum_{P\in S} -\alpha(P)P.$$

El elemento neutro del grupo $\mathrm{Div}(S)$ se denota por 0.

Definimos $\deg(\mathfrak{U}) = \sum_{P\in S} \alpha(P)$. Es claro que deg establece un homomorfismo de grupos aditivos $\deg : \mathrm{Div}(S) \to \mathbb{Z}$.
Sea $\mathcal{K}(S)$ el cuerpo de funciones meromorfas en S. Si $f \in \mathcal{K}(S) \setminus \{0\}$, entonces f determina un divisor $(f) \in \mathrm{Div}(S)$ dado por

$$(f) = \sum_{P\in S} \mathrm{ord}_p f \cdot P.$$

Así hemos establecido un homomorfismo ( ): $\mathcal{K}(S)^* \to \mathrm{Div}(S)$ del grupo multiplicativo del cuerpo $\mathcal{K}(S)$ en el subgrupo de divisores de grado cero, que denotaremos por $\mathrm{Div}_0(S)$. Ver I.1.6 en [4].
Un divisor en la imagen de ( ) es llamado *principal*, a todos ellos los denotaremos por $\mathrm{PDiv}(S)$.

El grupo de divisores de grado cero módulo divisores principales, $\mathrm{Div}_0(S)/\,\mathrm{PDiv}(S)$ es conocido como *grupo divisor de clases* y denotado por $\mathrm{Pic}^0(S)$.

PROPOSICIÓN 5. *$F \in \mathrm{Aut}(S)$ induce un automorfismo de grupo en $\mathrm{Div}(S)$ que llamaremos igualmente F y está definido por*

$$F\left(\sum_{P\in S}\alpha(P)P\right)=\sum_{P\in S}\alpha(P)F(P).$$

Es más, F se puede definir en el grupo divisor de clases y sigue siendo un automorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN. Claramente tenemos que $F\in \mathrm{Aut}(\mathrm{Div}(S))$. Ahora F está bien definido en $\mathrm{Div}_0(S)/\,\mathrm{PDiv}(S)$, pues dados $D, D'\in \mathrm{Div}(S)$ tales que $D-D'=(g)$ para alguna $g\in\mathcal{K}(S)$, entonces definimos $\widetilde{g}=g\circ f^{-1}$ y tenemos que $F(D)-F(D')=(\widetilde{g})$. Para probar la inyectividad suponga que $F[D]=[0]$, es decir

$$\sum_{P\in S}\alpha(P)F(P)=(g)$$

para $g\in\mathcal{K}(S)$; entonces $\alpha(f^{-1}(P))=\mathrm{ord}_P\, g$ para todo $P\in S$ y por tanto $\mathrm{ord}_P(g\circ F)=\mathrm{ord}_{F(P)}\, g=\alpha(P)$ para todo $P\in S$, o sea $D\in \mathrm{PDiv}(S)$.
Para ver que F es sobreyectivo basta observar que

$$\sum_{P\in S}\alpha(P)P=F\left(\sum_{P\in S}\alpha(P)F^{-1}(P)\right).$$

□

Sea $\{\alpha_1,\dots,\alpha_g,\beta_1,\dots,\beta_g\}$ una base canónica de $H_1(S,\mathbb{Z})$ y $\{v_1,\dots,v_g\}$ su respectiva base dual para $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$. Veamos $J(S)$ en un toro complejo y que $\mathrm{Pic}^0(S)\cong JS$.

Definimos $\psi: J(S)\to\mathbb{C}^g/\bigwedge$ dado por

$$\psi(\lambda+L)=(\lambda(v_1),\dots,\lambda(v_g))+\bigwedge,$$

donde $\bigwedge$ el reticulado sobre $\mathbb{Z}$ generado por las $2g$ columnas de la matriz $\left(I,\left(\int_{\beta_j}v_i\right)_{i,j}\right)$.
Claramente ψ es un isomorfismo de grupos.

Sea $\Pi=\left(\int_{\beta_j}v_i\right)_{i,j}$ y denotemos las columnas de (I,Π) por

$$e_1,\dots,e_g,\pi_1,\dots,\pi_g.$$

Un punto de $\bigwedge$ se escribe únicamente como $\sum_{j=1}^{g} m_j e_j + \sum_{j=1}^{g} n_j \pi_j$, con $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$, o $Im + \Pi n$ donde $m = (m_1, .., m_g), n = (n_1, ..., n_g) \in \mathbb{Z}^g$.
Ahora consideremos $\varphi : S \to \mathbb{C}^g / \bigwedge$. Fijamos un punto $P_0 \in S$ y definimos

$$\varphi(P) = \left(\int_{P_0}^{P} v_1, ..., \int_{P_0}^{P} v_g\right) + \bigwedge.$$

PROPOSICIÓN 6. *φ es una función bien definida y holomorfa entre S y $\mathbb{C}^g / \bigwedge$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a = (\alpha_1, ..., \alpha_g)$ y $b = (\beta_1, ..., \beta_g)$. Si c_1 y c_2 son dos caminos que unen P_0 y P, entonces $c_1 c_2{}^{-1}$ es homólogo a $ma + nb$ para algunos $m, n \in \mathbb{Z}^g$. Luego $\left(\int_{c_1} v_1, ..., \int_{c_1} v_g\right) - \left(\int_{c_2} v_1, ..., \int_{c_2} v_g\right) = Im + \Pi n \in \bigwedge$.

Veamos ahora que es holomorfa. Sea z una coordenada local que se anula en Q, denotemos por φ_j las componentes de φ en $\mathbb{C}^g$ y $w_j = h_j(z)dz$ en la coordenada z, luego si $z = z(P)$ como

$$\int_{P_0}^{P} v_j = \int_{P_0}^{Q} v_j + \int_{Q}^{P} v_j,$$

entonces φ_j en la coordenada z es $\int_{P_0}^{P} v_j + \int_0^z h_j(z)dz$. Así cada φ_j es holomorfa y por tanto φ lo es. □

Sea para cada entero $n \geq 1$, M_n el conjunto de divisores enteros de grado n. Extendemos la función φ:

$$\varphi : \mathrm{M}_n \to \mathbb{C}^g / \bigwedge,$$

definiendo $\varphi(D) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(P_j)$ para $D = P_1 + ... + P_n$.
Podemos obtener una función que no dependa del punto base P_0.
Definamos

$$\varphi : \mathrm{Div}(S) \to \mathbb{C}^g / \bigwedge,$$

por $\varphi(D) = \sum_{j=1}^{r} \varphi(P_j) - \sum_{j=1}^{s} \varphi(Q_j)$ para $D = (P_1 + ... + P_r) - (Q_1 + ... + Q_s)$. Tenemos que si $r = s$ es claro que $\varphi(D)$ no depende del punto base, es decir

$$\varphi : \mathrm{Div}_0(S) \to \mathbb{C}^g / \bigwedge$$

es independiente del punto base.

TEOREMA 2. *(Abel) Sea $D \in \mathrm{Div}(S)$. Una condición necesaria y suficiente para que D sea el divisor de una función meromorfa es que $\varphi(D) = 0$ en $\mathbb{C}^g / \bigwedge$ y* $\deg(D) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Ver III 6.3. en [4] □

PROPOSICIÓN 7. *(Inversión de Jacobi) Todo punto en* $\mathbb{C}^g/\bigwedge$ *es la imagen de un divisor entero de grado* g.

DEMOSTRACIÓN. Ver III 6.6. en [4] □

COROLARIO 3. *J(S) es isomorfo al grupo* $\mathrm{Div}_0(S)/\mathrm{PDiv}(S)$.

DEMOSTRACIÓN. El teorema de Abel dice que $\ker(\varphi) = \mathrm{PDiv}$ y la proposición anterior que todo punto de $\mathbb{C}^g/\bigwedge$ es de la forma

$$\varphi(P_1 + ... + P_g),$$

pero como $\varphi(P_1 + ... + P_g) = \varphi(P_1 + .. + P_g - gP_0)$ concluimos que φ definida en $\mathrm{Div}_0(S)/\mathrm{PDiv}(S)$ es sobreyectiva. Así $\mathrm{Div}_0(S)/\mathrm{PDiv}(S)$ es isomorfo a $\mathbb{C}^g/\bigwedge$ y por tanto isomorfo a $J(S)$. □

Recordemos que $\varphi : \mathrm{Div}_0(S)/\mathrm{PDiv}(S) \to \mathbb{C}^g/\bigwedge$ dada por

$$\varphi\left[\sum_{P\in S}\alpha(P)P\right] = \sum_{P\in S}\alpha(P)\left(\int_{P_0}^{P} v_1, ..., \int_{P_0}^{P} v_g\right) + \bigwedge,$$

es un isomorfismo de grupos.

OBSERVACIÓN 5. φ se utiliza para introducir una polarización en $\mathrm{Pic}^0(S)$, dotándola así de una estructura de variedad abeliana principalmente polarizada, al igual que JS.

La siguiente proposición relaciona $F \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Div}_0(S)/\mathrm{PDiv}(S))$ con $\rho_a{}'(F)$.

PROPOSICIÓN 8. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\mathrm{Div}_0(S)}{\mathrm{PDiv}(S)} & \xrightarrow{\varphi} & \dfrac{\mathbb{C}^g}{\wedge} & \xrightarrow{\psi^{-1}} & J(S) \\
{\scriptstyle F}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \rho_a{}'(F)} \\
\dfrac{\mathrm{Div}_0(S)}{\mathrm{PDiv}(S)} & \xrightarrow{\varphi} & \dfrac{\mathbb{C}^g}{\wedge} & \xrightarrow{\psi^{-1}} & J(S)
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que $\rho_a{}'(F) \circ \psi^{-1} \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \varphi \circ F$.

Considere

$$\begin{aligned}
\rho_a{}'(F)\left(\psi^{-1}(\varphi\left[\sum_{P\in S}\alpha(P)P\right])\right) &= \sum_{P\in S}\alpha(P)\rho_a{}'(F)\left(\psi^{-1}\left(\left(\int_{P_0}^{P}\upsilon_1,\ldots,\int_{P_0}^{P}\upsilon_g\right)+\bigwedge\right)\right)\\
&= \sum_{P\in S}\alpha(P)\rho_a{}'(F)\left(\int_{P_0}^{P}(\cdot)+L\right)\\
&= \sum_{P\in S}\alpha(p)\int_{P_0}^{P}\rho(F^{-1})(\cdot)+L\\
&= \sum_{P\in S}\alpha(p)\int_{F(P_0)}^{F(P)}(\cdot)+L
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\sum_{P\in S}\alpha(P)P=\sum_{i=1}^{n}P_i-\sum_{i=1}^{n}Q_i,$$

para algunos $P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n\in S$, pues $\deg(\sum_{P\in S}\alpha(P)P)=0$.

Luego

$$\rho_a{}'(F)\left(\psi^{-1}\left(\varphi\left[\sum_{P\in S}\alpha(P)P\right]\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{F(P_0)}^{F(P_i)}(\cdot)+L-\sum_{i=1}^{n}\int_{F(P_0)}^{F(Q_i)}(\cdot)+L$$

y

$$\begin{aligned}
(\psi^{-1}\circ\varphi\circ F)\left[\sum_{P\in S}\alpha(P)P\right] &= \psi^{-1}\left(\varphi\left[\sum_{i=1}^{n}F(P_i)-\sum_{i=1}^{n}F(Q_i)\right]\right)\\
&= \psi^{-1}(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{F(P_0)}^{F(P_i)}\upsilon_1,\ldots,\int_{F(P_0)}^{F(P_i)}\upsilon_g\right)-\\
&- \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{F(P_0)}^{F(Q_i)}\upsilon_1,\ldots,\int_{F(P_0)}^{F(Q_i)}\upsilon_g\right)+\bigwedge)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{F(P_0)}^{F(P_i)}(\cdot)+L-\sum_{i=1}^{n}\int_{F(P_0)}^{F(Q_i)}(\cdot)+L
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 9. *La función inducida por* $\rho_a{}'(F)$,

$$\phi = \psi \circ \rho_a{}'(F) \circ \psi^{-1}$$

es un automorfismo de la variedad compleja $\dfrac{\mathbb{C}^g}{\bigwedge}$.

Demostración. Sea $z = (z_1, ..., z_g) \in \mathbb{C}^g$ y $\overline{z} = z + \bigwedge$.

$$\begin{aligned}
\phi(\overline{z}) &= \psi(\rho_a{}'(F)(\psi^{-1}(\overline{z}))) \\
&= \psi(\rho_a{}'(F)(\sum_{i=1}^{g} z_i v_i{}^* + L)) \\
&= \psi(\sum_{i=1}^{g} z_i \overline{\rho_a}(F)(v_i{}^*) + L) \\
&= \psi(\sum_{i=1}^{g} z_i(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1})) + L) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \psi(z_i(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1})) + L) \\
&= \sum_{i=1}^{g}(z_i(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1}))(v_1), ..., z_i(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1}))(v_g)) + \bigwedge \\
&= (\sum_{i=1}^{g} z_i(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1}))(v_1), ..., \sum_{i=1}^{g} z_i(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1}))(v_g)) + \bigwedge.
\end{aligned}$$

Siendo los $(v_i{}^* \circ \rho_a(F^{-1}))(v_j)$'s números complejos que no dependen de z, vemos que ϕ es holomorfa. □

3.1. Descomposición de Variedades Abelianas, bajo la acción de un grupo finito. Definiremos la acción de un grupo finito sobre una Variedad Abeliana, lo que producirá sobre ésta una descomposición asociada.

Proposición 10. *Sean* T_1 *un Toro analítico,* (T_2, E) *una v.a.p., y* $f : T_1 \longrightarrow T_2$ *un homomorfismo con* $\ker(f)$ *finito. Entonces existe una polarización en* T_1*, denotada por* $f^*(E)$*, definida por*

$$f^*(E)(v_1, v_2) = E(\rho(f)(v_1), \rho(f)(v_2))$$

donde $\rho(f)$ es la representación analítica del homomorfismo f

DEFINICIÓN 10. Un homomorfismo entre Variedades Abelianas polarizadas (T_1, E_1) y (T_2, E_2) es un homomorfismo $f : T_1 \to T_2$ de toros complejos tal que $E_1 = f^*(E_2)$

DEFINICIÓN 11. Sean (T_1, E_1) y (T_2, E_2) v.a.p.

1. Escribiremos $\mathrm{Hom}((T_1, E_1), (T_2, E_2))$ para denotar al grupo aditivo de homomorfismos entre dichas Variedades Abelianas.
2. Si $f : T_1 \to T_1$ es un homomorfismo de *v.a.p.* , decimos que f es un endomorfismo de *v.a.p.*
3. $\mathrm{End}((T, E))$ denota al grupo aditivo de endomorfismos de (T, E).

DEFINICIÓN 12. Decimos que un grupo finito G actúa sobre una *v.a.p.* (T, E), si existe un monomorfismo de grupos $G \to \mathrm{End}((T, E))$.

TEOREMA 3. *Sea G un grupo finito actuando en una variedad abeliana A. Sean $\mathcal{W}_1, ..., \mathcal{W}_r$ las $\mathbb{Q}$-representaciones irreducibles no isomorfas de G, y $s_j = \dim(U_j)/l_j$, donde U_j es una representación compleja irreducible asociada a $\mathcal{W}_j$ y l_j es el índice de Schur de U_j.*
Entonces existen subvariedades abelianas $B_1, ..., B_r$, tales que cada $B_j^{s_j}$ es G-estable y asociada a la representación $\mathcal{W}_j$, y existe una isogenia G-equivariante

$$A \sim B_1^{s_1} \times ... \times B_r^{s_r}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Teorema 13.6.3 en [1]. □

4. Firma y vector generador

DEFINICIÓN 13. Sean X e Y dos superficies de Riemann compactas. Un *cubrimiento ramificado* entre X e Y es una función holomorfa $f : X \to Y$, no constante (luego sobreyectiva).

DEFINICIÓN 14. Sea $f : X \to Y$ un cubrimiento ramificado. Llamaremos *puntos de ramificación* a los puntos de X, donde f no es localmente inyectiva y *valores de ramificación* a las imágenes de los puntos de ramificación.

Observe que dada la compacidad de X e Y los puntos de ramificación son finitos y por tanto los valores de ramificación también.

Sea S una superficie de Riemann compacta y G un grupo de automorfismos conformes de S. Denotaremos por S/G a la superficie cociente y $\pi : S \to S/G$ al cubrimiento ramificado asociado a G. Ver III.3 [9].

DEFINICIÓN 15. Sea S una superficie de Riemann compacta y G un grupo de automorfismos actuando en S. Sea $\{p_1, ..., p_t\} \subset S$ una colección maximal de puntos de ramificación no equivalentes, esto es, cada p_j está en una diferente G-órbita. Para cada p_j consideremos G_j, su estabilizador en G. La *firma de G en S* para $\pi : S \to S/G$ es la tupla $(\gamma; m_1, ..., m_t)$, donde γ es el género de S/G y $m_j =| G_j |$. Diremos que el punto $\pi(p_j) \in S/G$ está marcado con el número m_j.

DEFINICIÓN 16. Sea G_j un subgrupo cíclico, no trivial de G. Un valor de ramificación $q \in S/G$ es llamado *de tipo G_j*, si G_j es el estabilizador de algún punto en la fibra de q. Recordemos que si existe un punto $p \in S$ con estabilizador no trivial G_p, entonces los estabilizadores de los puntos en su órbita, corresponden a todos los subgrupos en la clase de conjugación de G_p.
Sea $q \in S/G$ de tipo G_j y C_j, la clase de conjugación de G_j, entonces llamamos a $q \in S/G$ de *tipo C_j*.

DEFINICIÓN 17. Sea G un grupo de automorfismos conformes de la superficie de Riemann compacta S. Sea $\{q_1, ..., q_t\} \subset S/G$ una colección maximal de valores de ramificación del cubrimiento $\pi : S \to S/G$. Definimos la *firma geométrica* de G en S, como la tupla

$$(\gamma; [m_1, C_1], ..., [m_t, C_t]),$$

donde γ es el género de S/G, C_j es el tipo del valor de ramificación q_j y m_j es el orden de los subgrupos en C_j.

DEFINICIÓN 18. Llamamos a una $(2\gamma + t)$-tupla

$$(a_1, ..., a_\gamma, b_1, ..., b_\gamma, c_1, ..., c_t)$$

de elementos de G un *vector generador de tipo* $(\gamma; m_1, ..., m_t)$ si se satisfacen las siguientes condiciones :

1. G es generado por los elementos $\{a_1, ..., a_\gamma, b_1, ..., b_\gamma, c_1, ..., c_t\}$.
2. $| c_j |= m_j$.
3. $\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{t} c_j = 1$, donde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

TEOREMA 4. *Dado un grupo finito G, existe una superficie de Riemann compacta S de género g en la cual G actúa con firma geométrica $(\gamma; [m_1, C_1], ..., [m_t, C_t])$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *(Riemann-Hurwitz)*

$$g =| G | (\gamma - 1) + 1 + \frac{| G |}{2} \sum_{j=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

2. *El grupo G tiene un vector generador $(a_1, ..., a_\gamma, b_1, ..., b_\gamma, c_1, ..., c_t)$ de tipo $(\gamma; m_1, ..., m_t)$.*

3. *Los elementos c_j del vector generador son tales que los subgrupos $\langle c_j \rangle$ están en la clase de conjugación C_j.*

DEMOSTRACIÓN. Ver 4.1 en [**12**]. $\square$

CAPíTULO 2

Curvas de Fermat

Estudiaremos algunas consecuencias de las simetrías que poseen la familia de curvas llamadas de Fermat. Primero presentaremos aspectos geométricos de ellas: género, base de formas diferenciales, grupo de automorfismos (esto último basado en [**16**]). Luego estudiaremos detalladamente la geometría que sigue de dicho conocimiento. A saber, descomposición de representaciones asociadas y de la variedad Jacobiana correspondiente.

Definición 19. Sea $N \geq 4$. Definimos C como la curva algebraica proyectiva dada por la ecuación en $\mathbb{CP}^2$

$$x^N + y^N + z^N = 0$$

Es decir, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{CP}^2 / x^N + y^N + z^N = 0\}$

Su expresión afín será

$$x^N + y^N + 1 = 0.$$

Consideraremos C como una Superficie de Riemann.

Proposición 11. *Sea $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$, raíz N-ésima primitiva de la unidad y C como en la Definición 19. Entonces:*

1. *C no posee singularidades.*
2. *El género de C es $g = \dfrac{(N-1)(N-2)}{2}$.*
3. *Una base de $H^{1,0}(C, \mathbb{C})$ está dada por:*

$$v_{r,s} = x^{r-1} y^{s-N} dx$$

con $r, s \geq 1$ y $r + s \leq N - 1$

4. *El grupo completo de automorfismos (analíticos) $\mathrm{Aut}(C)$ de C está generado por:*
   a) $F_1(x, y, z) = (x, \omega y, z)$
   b) $F_2(x, y, z) = (\omega x, y, z)$
   c) $F_3(x, y, z) = (y, x, z)$
   d) $F_4(x, y, z) = (z, x, y)$

5. *Sea* $G := (\mu_N \times \mu_N) \rtimes S_3$, *donde* $\mu_N = \langle \omega \rangle$ *es el grupo de las raíces* N*-ésimas de la unidad y el producto semidirecto se explica por medio de la presentación de* G *dada por*

$$G = \langle u_1 = (\omega, 1), u_2 = (1, \omega), a, b : u_1^N = u_2^N = a^3 = b^2 = 1,$$

$$u_1 u_2 = u_2 u_1, abab = 1, a u_1 a^2 = u_2, b u_1 b = u_2,$$

$$a u_2 a^2 = u_1^{-1} u_2^{-1} \rangle$$

Entonces $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) \cong G$. *De hecho un isomorfismo* $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ *está dado por:*
   a) $(1, \omega) \mapsto F_1$
   b) $(\omega, 1) \mapsto F_2$
   c) $b \mapsto F_3$
   d) $a \mapsto F_4$

DEMOSTRACIÓN. $\mathcal{C}$ no posee singularidades, en efecto las derivadas parciales del polinomio $p(x, y, z) = x^N + y^N + z^N$ son $\frac{\partial p}{\partial x} = N x^{N-1}$, $\frac{\partial p}{\partial y} = N y^{N-1}$ y $\frac{\partial p}{\partial z} = N z^{N-1}$; por lo tanto no se anulan simultáneamente en $\mathbb{CP}^2$. Como $\mathcal{C}$ no posee singularidades y el grado de p es N, entonces $\mathcal{C}$ tiene género $g = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$.
Para 3 ver II.2.1 en [7].
Una demostración de 4 y 5 se pueden ver en la publicación [**16**].

□

OBSERVACIÓN 6. Hemos hecho una distinción entre $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ y G, ahora fijaremos esta acción de G en $\mathcal{C}$, es decir el isomorfismo $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ del punto 5 de la proposición 11. Este será la base para describir los resultados posteriores.
En adelante nos referiremos indistintamente a F_i para considerar elementos concretos (de $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$) o abstractos (de G), siempre considerando la correspondencia fijada por Φ.

1. Representación de Aut($\mathcal{C}$) en Aut$_{\mathbb{C}}$($H^{1,0}(\mathcal{C}, \mathbb{C})$)

Considerando la acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$ determinada en el punto 4 de la Proposición 11, buscamos la representación de $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ en el espacio vectorial $H^{1,0}(\mathcal{C}, \mathbb{C})$ de las diferenciales analíticas, según lo descrito en la sección 2 del capítulo 1, considerando la base del punto 3 de la Proposición 11 .

Recordemos del capítulo anterior que dados $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ y $v \in H^{1,0}(\mathcal{C}, \mathbb{C})$, entonces T actúa en v de modo que:

$$T(v) = v \circ T^{-1}.$$

TEOREMA 5. *Los generadores de* $\mathrm{Aut}(C)$ *actúan en* $H^{1,0}(C,\mathbb{C})$*, del siguiente modo*

1. $F_1(\upsilon_{r,s}) = \omega^{-s}\upsilon_{r,s}$
2. $F_2(\upsilon_{r,s}) = \omega^{-r}\upsilon_{r,s}$
3. $F_3(\upsilon_{r,s}) = -\upsilon_{s,r}$
4. $F_4(\upsilon_{r,s}) = \upsilon_{N-s-r,r}$

Es más, el caracter χ *de la representación de* $\mathrm{Aut}(C)$ *en* $H^{1,0}(C,\mathbb{C})$ *es tal que:*

1. $\chi(F_1) = \dfrac{\omega - 1 + N}{\omega - 1}$
2. $\chi(F_2) = \dfrac{\omega - 1 + N}{\omega - 1}$
3. $\chi(F_3) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2} & N \textit{ impar} \\ -\frac{N-2}{2} & N \textit{ par} \end{cases}$
4. $\chi(F_4) = \begin{cases} 1 & N \equiv 0(3) \\ 0 & N \not\equiv 0(3) \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p(x,y,z) = x^N + y^N + z^N = 0$. Suponga que estamos en una coordenada con $z \neq 0$

1. Sean $\phi : U \to V$ carta definida por $\phi(x,y) = x$, donde y es función de x, digamos $y = g(x)$ y $\varphi : U' \to V'$ carta definida por $\varphi(x,y) = x$, donde y es función de x, digamos $y = k(x)$; tales que $F_1^{-1}(U) \subset U'$. Lo anterior es posible salvo en finitos puntos, donde $\frac{\partial p}{\partial y}$ se anula.
   Sean t la coordenada en V y α la coordenada en V'.
   Luego F_1^{-1} en estas coordenadas es
   $$h(t) = (\varphi \circ F_1^{-1} \circ \phi^{-1})(t) = \varphi(F_1^{-1}(t, g(t))) = \varphi(t, \omega^{-1}g(t)) = t$$
   Por otro lado $\upsilon_{r,s}$ en la coordenada α es
   $$\alpha^{r-1}(k(\alpha))^{s-N}d\alpha$$
   Entonces en la variable t es
   $$F_1(\upsilon_{r,s}) = t^{r-1}(k(t))^{s-N}dt$$
   Pero $\varphi(t, \omega^{-1}g(t)) = t$ implica $k(t) = \omega^{-1}g(t)$. Luego:
   $$F_1(\upsilon_{r,s}) = \omega^{N-s}t^{r-1}(g(t))^{s-N}dt = \omega^{-s}\upsilon_{r,s}$$
   Luego si escogemos la base
   $$\mathcal{B} = \{\upsilon_{1,1}, \ldots, \upsilon_{N-2,1}, \upsilon_{1,2}, \ldots, \upsilon_{N-3,2}, \ldots, \upsilon_{1,N-3}, \upsilon_{2,N-3}, \upsilon_{1,N-2}\}.$$

La matriz de F_1 en la base $\mathcal{B}$ es la matriz diagonal con la siguientes entradas:

$$\underbrace{\omega^{-1},\ldots,\omega^{-1}}_{N-2},\underbrace{\omega^{-2},\ldots,\omega^{-2}}_{N-3},\ldots,\underbrace{\omega^{3-N},\omega^{3-N}}_{2},\omega^{2-N}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\chi(F_1) &= \omega\textstyle\sum_{j=2}^{N-1}(N-j)\omega^{-j}\\
&= N\omega\textstyle\sum_{j=2}^{N-1}\omega^{-j}-\sum_{j=2}^{N-1}j\omega^{-(j-1)}\\
&= N\omega(-1-\omega^{-1})-\left(\frac{1-N\omega^{-(N-1)}+(N-1)\omega^{-N}}{(1-\omega^{-1})^2}-1\right)\\
&= \frac{\omega^2((1-N)\omega^{-2}+(N-2)\omega^{N-1}+1)}{(\omega-1)^2}\\
&= \frac{\omega^2-2\omega+\omega N-N+1}{(\omega-1)^2}\\
&= \frac{\omega-1+N}{\omega-1}
\end{aligned}$$

2. Con las cartas anteriores F_2^{-1} es

$h(t)=(\varphi\circ F_2^{-1}\circ\phi^{-1})(t)=\varphi(F_2^{-1}(t,g(t)))=\varphi(\omega^{-1}t,g(t))=\omega^{-1}t$

En particular $k(\omega^{-1}t)=g(t)$. Pero en la coordenada α $\upsilon_{r,s}$ es

$$\alpha^{r-1}(k(\alpha))^{s-N}d\alpha,$$

luego

$$\begin{aligned}
F_2(\upsilon_{r,s}) &= \omega^{1-r}t^{r-1}(k(\omega^{-1}t))^{s-N}\omega^{-1}dt\\
&= \omega^{-r}t^{r-1}(g(t))^{s-N}dt\\
&= \omega^{-r}\upsilon_{r,s}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si escogemos la base

$$\mathcal{B}=\{\upsilon_{1,1},\ldots,\upsilon_{1,N-2},\upsilon_{2,1},\ldots,\upsilon_{2,N-3},\ldots\ldots,\upsilon_{N-3,1},\upsilon_{N-3,2},\upsilon_{N-2,1}\}.$$

La matriz de F_2 en la base $\mathcal{B}$ es la matriz diagonal con la siguientes entradas:

$$\underbrace{\omega^{-1},\ldots,\omega^{-1}}_{N-2},\underbrace{\omega^{-2},\ldots,\omega^{-2}}_{N-3},\ldots,\underbrace{\omega^{3-N},\omega^{3-N}}_{2},\omega^{2-N}.$$

Por lo tanto

$$\chi(F_2) = \omega \sum_{j=2}^{N-1} (N-j)\omega^{-j} = \frac{\omega - 1 + N}{\omega - 1}$$

3. Con las cartas anteriores F_3^{-1} es

$$h(t) = (\varphi \circ F_3^{-1} \circ \phi^{-1})(t) = \varphi(F_3^{-1}(t, g(t))) = \varphi(g(t), t) = g(t)$$

En particular $k(g(t)) = t$. Pero en la coordenada α $\upsilon_{r,s}$ es

$$\alpha^{r-1}(k(\alpha))^{s-N} d\alpha,$$

luego

$$F_3(\upsilon_{r,s}) = g(t)^{r-1}(k(g(t))^{s-N} g'(t)dt = t^{s-1}(g(t))^{r-N} g'(t)dt.$$

Por otro lado

$$g'(t) = -\frac{t^{N-1}}{g(t)^{N-1}}$$

Así

$$F_3(\upsilon_{r,s}) = -t^{s-1} g(t)^{r-N} dt = -\upsilon_{s,r}.$$

Si N es impar escojamos la base

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \;\; = \;\; & \{\upsilon_{1,1}, \dots, \upsilon_{\frac{N-1}{2},\frac{N-1}{2}}, \upsilon_{1,2}, \upsilon_{2,1}, \upsilon_{1,3}, \\ & \upsilon_{3,1}, \dots, \upsilon_{1,N-2}, \upsilon_{N-2,1}, \upsilon_{2,3}, \upsilon_{3,2}, \dots, \upsilon_{2,N-3}, \\ & \upsilon_{N-3,2}, \dots, \upsilon_{\frac{N-3}{2},\frac{N-1}{2}}, \upsilon_{\frac{N-1}{2},\frac{N-3}{2}}, \\ & \upsilon_{\frac{N-3}{2},\frac{N+1}{2}}, \upsilon_{\frac{N+1}{2},\frac{N-3}{2}}\} \end{aligned}$$

y si N es par escojemos la base

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \;\; = \;\; & \{\upsilon_{1,1}, \dots, \upsilon_{\frac{N-2}{2},\frac{N-2}{2}}, \upsilon_{1,2}, \upsilon_{2,1}, \upsilon_{1,3}, \upsilon_{3,1}, \dots, \upsilon_{1,N-2}, \\ & \upsilon_{N-2,1}, \upsilon_{2,3}, \upsilon_{3,2}, \dots, \upsilon_{2,N-3}, \upsilon_{N-3,2}, \dots, \\ & \upsilon_{\frac{N-2}{2},\frac{N}{2}}, \upsilon_{\frac{N}{2},\frac{N-2}{2}}\} \end{aligned}$$

obteniendo en ambos casos la matriz de F_3 en base $\mathcal{B}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & -1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & 0 & -1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & & -1 & 0 & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & 0 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así

$$\chi(F_3) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2} & N \text{ impar} \\ -\frac{N-2}{2} & N \text{ par} \end{cases}$$

4. Con las cartas anteriores F_4^{-1} es

$$\begin{aligned} h(t) &= (\varphi \circ F_4^{-1} \circ \phi^{-1})(t) \\ &= \varphi(F_4^{-1}(t, g(t), 1)) \\ &= \varphi(g(t), 1, t) \\ &= \varphi\left(\frac{g(t)}{t}, \frac{1}{t}, 1\right) \\ &= \frac{g(t)}{t}. \end{aligned}$$

En particular $k\left(\frac{g(t)}{t}\right) = \frac{1}{t}$. Pero en la coordenada α, $\upsilon_{r,s}$ es

$$\alpha^{r-1}(k(\alpha))^{s-N} d\alpha,$$

luego:

$$
\begin{aligned}
F_4(\upsilon_{r,s}) &= \left(\frac{g(t)}{t}\right)^{r-1}\left(k\left(\frac{g(t)}{t}\right)\right)^{s-N}\left(\frac{g(t)}{t}\right)' dt \\
&= g(t)^{r-1}t^{N-r-s-1}\left(\frac{-t^{N-1}}{g(t)^{N-1}}t - g(t)\right) dt \\
&= -t^{N-r-s-1}g(t)^{r-N}(t^N + g(t)^N)dt \\
&= \upsilon_{N-s-r,r}
\end{aligned}
$$

Para determinar el caracter necesitamos calcular r, s tales que $\upsilon_{r,s} = \upsilon_{N-s-r,r}$, esto es siempre y cuando N sea divisible por 3 y $r = s = \frac{N}{3}$. Entonces:

$$
\chi(F_4) = \begin{cases} 1 & N \equiv 0(3) \\ 0 & N \not\equiv 0(3) \end{cases}
$$

□

2. Descripción de la acción de $G = (\mu_N \times \mu_N) \rtimes S_3$ en $\mathcal{C}$

Consideramos la acción dada por ϕ en la observación 6.
Primero buscaremos subgrupos de G que estabilicen puntos. Esto es, buscamos describir su firma.

PROPOSICIÓN 12. *La firma de G en $\mathcal{C}$ es $(0; 2, 3, 2N)$. Siendo* $\mathrm{Stab}((\sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}}, 1, 1)) = \langle ba \rangle$, $\mathrm{Stab}(((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1)) = \langle (\omega, 1)a \rangle$ *y* $\mathrm{Stab}((0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)) = \langle (\omega, \omega)ba \rangle$ *representantes de los estabilizadores de orden 2, 3 y $2N$ respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Con la notación de la proposición 11 cada $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ es de la forma

$$
f = (\omega^k, \omega^j)\sigma,
$$

para $k, j \in \mathbb{Z}$ y $\sigma \in S_3$.

Los elementos de S_3 en $\mathcal{C}$ actúan del siguiente modo:

1. $1(x, y, z) = (x, y, z)$
2. $ba(x, y, z) = (x, z, y)$
3. $ab(x, y, z) = (z, y, x)$
4. $b(x, y, z) = (y, x, z)$
5. $a(x, y, z) = (z, x, y)$
6. $a^2(x, y, z) = (y, z, x)$

Primero veamos que el conjunto de los puntos de $\mathcal{C}$ que tienen alguna de sus coordenadas cero, están todos en la misma órbita. En efecto:

1. $(0,y,z) \in \mathcal{C}$ si y sólo si $(0,y,z) = (0, e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^k, 1)$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

2. $(x,0,z) \in \mathcal{C}$ si y sólo si $(x,0,z) = (e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^k, 0, 1)$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(x,y,0) \in \mathcal{C}$ si y sólo si $(x,y,0) = (e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^k, 1, 0)$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Observar que
$$(1, \omega^{j-k})(0, e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^k, 1) = (0, e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^j, 1),$$
para todo j,k. Luego los del tipo 1 están en la misma órbita.
Además $b(x,0,z) = (0,x,z)$ y $a(x,y,0) = (0,x,y)$, luego los del tipo 2 y 3 están en la misma órbita que los del tipo 1 y por tanto están todos en la misma órbita, de hecho no hay otros puntos en esta.

Primero buscaremos entonces las funciones que estabilizan a $(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)$ y luego para (x,y,z) con $x,y,z \neq 0$.

Observemos que si $\sigma \in S_3$ es tal que cambia de posición de la primera coordenada, entonces
$$(\omega^j, \omega^k)\sigma(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1) \neq (0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)$$
para todo j,k. Luego los posibles estabilizadores son de la forma
$$(\omega^j, \omega^k) \text{ y } (\omega^j, \omega^k)ba.$$

Para cada $\sigma \in S_3$ buscaremos el respectivo (ω^k, ω^j) de modo que $(\omega^k, \omega^j)\sigma$ sea diferente de la identidad y estabilice algún punto en $\mathcal{C}$.

1. $(\omega^j, \omega^k)(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1) = (0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)$ si y sólo si $k = 0$.
   Así $(\omega^j, 1) \in \operatorname{Stab}(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)$.

2. $(\omega^j, \omega^k)ba(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1) = (0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)$ si y sólo si $\omega^k = e^{i\frac{2\pi}{N}}$, es decir $k = 1$.
   Así $(\omega^j, \omega)ba \in \operatorname{Stab}(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)$. Entonces
   $$|\operatorname{Stab}(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1)| = 2N.$$
   De hecho
   $$\operatorname{Stab}(0, e^{i\frac{\pi}{N}}, 1) = \langle(\omega, \omega)ba\rangle,$$
   pues $((\omega,\omega)ba)^2 = (\omega, 1)$ y por tanto

$$((\omega,\omega)ba)^{2j+1} = (\omega^{j+1},\omega)ba.$$

Ahora para (x,y,z) con $x,y,z \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, ponemos $z = 1$.

1. Buscamos $(\omega^j,\omega^k)(x,y,1) = (x,y,1)$, equivalentemente $\omega^j = \omega^k = 1$. Así en este caso no tenemos estabilizadores no triviales.

2. Buscamos $(\omega^j,\omega^k)ba(x,y,1) = (x,y,1)$, equivalentemente $k = 2j$ y $(x,y,1) = (x,\omega^j,1)$. Basta considerar $j = 0$, pues para los otros valores de j, los puntos corresponden a la misma órbita. Por otro lado x satisface $x^N = -2$, es decir $x = \sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^s$, pero análogamente también basta con $s = 0$. Así hemos encontrado un punto con estabilizador no trivial, de hecho
$$ba \in \mathrm{Stab}(\sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1,1).$$

3. Buscamos $(\omega^j,\omega^k)ab(x,y,1) = (x,y,1)$, equivalentemente $j = 2k$ y $(x,y,1) = (\omega^k,y,1)$. Basta considerar $k = 0$, pues para los otros valores de k, los puntos corresponden a la misma órbita. Por otro lado y satisface $y^N = -2$, es decir $y = \sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^s$, pero análogamente también basta con $s = 0$. Así
$$ab \in \mathrm{Stab}(1,\sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1),$$
pero $b(\sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1,1) = (1,\sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1)$. Luego el correspondiente estabilizador en $\mathrm{Stab}(\sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1,1)$ es:
$$b^{-1}abb = ba.$$
Entonces es el mismo elemento encontrado en el ítem anterior.

4. Buscamos $(\omega^j,\omega^k)b(x,y,1) = (x,y,1)$, equivalentemente $k = -j$ y $(x,y,1) = (x,\omega^k x,1)$. Basta considerar $k = 0$, pues para los otros valores de k, los puntos corresponden a la misma órbita. Por otro lado x satisface $x^N = -\frac{1}{2}$, es decir $x = \sqrt[N]{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{N}}\omega^s$, pero análogamente también basta con $s = 0$. Así
$$b \in \mathrm{Stab}\left(\sqrt[N]{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{N}},\ \sqrt[N]{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{N}},1\right),$$

pero

$$\left(\sqrt[N]{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{N}},\ \sqrt[N]{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{N}},1\right)=(e^{i\frac{2\pi}{N}},e^{i\frac{2\pi}{N}},\ \sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}})$$

y

$$(\omega,\omega)a^2(\ \sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1,1)=(e^{i\frac{2\pi}{N}},e^{i\frac{2\pi}{N}},\ \sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}}).$$

Luego el correspondiente estabilizador en $\mathrm{Stab}(\ \sqrt[N]{2}e^{i\frac{\pi}{N}},1,1)$ es

$$((\omega,\omega)a^2)^{-1}b((\omega,\omega)a^2)=ba.$$

Entonces es el mismo elemento encontrado en el ítem anterior.

5. Buscamos $(\omega^j,\omega^k)a(x,y,1)=(x,y,1)$, equivalentemente $y^3=\omega^{j+k}$ y $x=\omega^{-k}y^2$.
Consideremos $k=0$ y $j=1$, entonces $y^3=\omega$ y $(x,y,1)=(y^2,y,1)$, luego

$$y=e^{i\frac{2\pi}{3N}}e^{i\frac{2\pi s}{3}}.$$

Por tanto debemos ver si satisface $y^{2N}+y^N+1=0$.
Sea $s=0$. Entonces nos queda

$$(e^{i\frac{2\pi}{3N}})^{2N}+(e^{i\frac{2\pi}{3N}})^N+1=e^{i\frac{4\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}+1=0.$$

Así $(\omega,1)a\in\mathrm{Stab}((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2,e^{i\frac{2\pi}{3N}},1)$. Veremos que de hecho

$$\mathrm{Stab}((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2,e^{i\frac{2\pi}{3N}},1)=\langle(\omega,1)a\rangle,$$

así habremos conseguido un punto marcado con 3 y usando Riemann-Hurwitz concluimos que este es el último punto marcado.
En efecto, si hubiesen r-puntos más, con multiplicidades $t_1,..,t_r>1$, siendo γ el género del cuociente, tenemos:

$$\begin{aligned}\tfrac{(N-1)(N-2)}{2} &= (\gamma-1)6N^2+1+\tfrac{6N^2}{2}(3-\tfrac{1}{2N}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+r-\\ &- \textstyle\sum_{j=1}^r\tfrac{1}{t_j}),\end{aligned}$$

equivalentemente

$$3N^2\left(r-\sum_{j=1}^r\frac{1}{t_j}\right)=\frac{-\gamma 12N^2}{2},$$

pero $3N^2\left(r-\sum_{j=1}^r\frac{1}{t_j}\right)>0$ y $\dfrac{-\gamma 12N^2}{2}\leq 0$. Lo cual es una contradicción.

Ahora de Riemman-Hurwitz tenemos:

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = (\gamma - 1)6N^2 + 1 + \frac{6N^2}{2}\left(3 - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

y por tanto $\gamma = 0$.

Veamos ahora que efectivamente

$$\mathrm{Stab}((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1)) = \langle(\omega, 1)a\rangle.$$

Si $(\omega^j, \omega^k)a((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1)) = ((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1))$, entonces $\omega^j = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ y $\omega^k = 1$, es decir $(\omega^j, \omega^k) = (\omega, 1)$. Así obtenemos

$$(\omega, 1)a \in \mathrm{Stab}((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1)).$$

Si $(\omega^j, \omega^k)a^2 = ((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1))$, entonces $\omega^j = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ y $\omega^k = e^{i\frac{2\pi}{N}}$, es decir $(\omega^j, \omega^k) = (\omega, \omega)$. Luego en este caso obtenemos

$$(\omega, \omega)a^2 = ((\omega, 1)a^2)^2 \in \mathrm{Stab}((e^{i\frac{2\pi}{3N}})^2, e^{i\frac{2\pi}{3N}}, 1)).$$

□

Ahora que sabemos que la firma es $(0, 2, 3, 2N)$ buscaremos un vector generador correspondiente a esta acción.

PROPOSICIÓN 13. *Sean* $g_1 = ab$, $g_2 = (\omega^{-1}, 1)a^2$ *y* $g_3 = ba(\omega^{-1}, \omega^{-1})$, *elementos de* G. *Entonces* (g_1, g_2, g_3) *es un vector generador de tipo* $(0; 2, 3, 2N)$.

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente corresponden a estabilizadores de largo 2,3 y $2N$, pues son conjugados de los generadores de los estabilizadores encontrados en la proposición 12. De hecho $g_1 = b(ba)b^{-1}$, $g_2 = a((\omega, 1)a)^{-1}a^{-1}$ y $g_3 = ((\omega, \omega)ba)^{-1}$

Ahora veamos que $\langle g_1, g_2, g_3\rangle = G$. Observar que

$$(\omega, 1) = g_3^{-1}g_1, g_2 \in \langle g_1, g_2, g_3\rangle,$$

por lo tanto

$$a^2 = (\omega, 1)g_2 \in \langle g_1, g_2, g_3\rangle.$$

Así

$$b = a^2 g_1 \in \langle g_1, g_2, g_3\rangle.$$

Esto demuestra que $\langle g_1, g_2, g_3\rangle = G$.

Ahora calculemos

$$
\begin{aligned}
g_1g_2g_3 &= ab(\omega^{-1},1)a^2ba(\omega^{-1},\omega^{-1}) \\
&= ab(\omega^{-1},1)ab(\omega^{-1},\omega^{-1}) \\
&= a(1,\omega^{-1})a^2(\omega^{-1},\omega^{-1}) \\
&= (\omega,\omega)(\omega^{-1},\omega^{-1}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Así hemos probado que forman un vector generador.

□

3. Fórmula de la traza de Eichler

Existe una fórmula que nos permite saber el caracter de la representación analítica, la cual depende del comportamiento de los automomorfismos de la superficie cerca de sus puntos fijos.

DEFINICIÓN 20. Sean $T \in \mathrm{Aut}(S)$ de orden $n > 1$, P un punto fijo de T y ξ una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Entonces cerca de P, el automorfismo T^{-1} es de la forma

$$T^{-1} : z \longrightarrow \xi^{\eta} z,$$

para algún $\eta \in \{1,...,n-1\}$.
El número ξ^{η} obtenido es llamado *constante de rotación* de T en P.

OBSERVACIÓN 7. El número entero η debe ser primo relativo con n

TEOREMA 6. *Sea $T \in \mathrm{Aut}(S)$ de orden $n > 1$. Representemos T por una matriz mediante su acción en $H^{1,0}(S,\mathbb{C})$. Sean $P_1,...,P_t$ los puntos fijos de T en S y ξ^{η_k} la constante de rotación de T en P_k, para cada $k \in \{1,..t\}$. Entonces*

$$\mathrm{tr}\, T = 1 + \sum_{k=1}^{t} \frac{\xi^{\eta_k}}{1-\xi^{\eta_k}},$$

donde la suma es considerada cero, cuando $t = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Ver V.2.9 en [4].

□

Calculemos con este método la traza de las matrices que representan a algunos elementos de G y comparemos con lo obtenido en el Teorema 5. Consideremos los generadores encontrados en la proposición 13.

1. Para $g_1 = ab$, calculemos los puntos fijos:

   $ab(x,y,z) = (x,y,z)$ si y sólo si $(z,y,x) = (x,y,z)$.

   Luego $z = \lambda x$, $y = \lambda y$ y $x = \lambda z$, para algún $\lambda \neq 0$.

   Primero suponga que $y \neq 0$, luego $\lambda = 1$ y por tanto $x = z \neq 0$. Luego $(x,y,z) = (1, \frac{y}{x}, 1)$. Entonces

   $$(\frac{y}{x})^N = -2$$

   y por tanto los puntos fijos obtenidos son $P_k = (1, \sqrt[N]{2}e^{\frac{\pi i}{N}}\omega^k, 1)$, con $k = 0, 1, ..., N-1$.
   Ahora si $y = 0$, entonces $z = \lambda^2 z$ y por tanto $\lambda \in \{\pm 1\}$.

   Si $\lambda = 1$, entonces $(x,y,z) = (1,0,1) \notin \mathcal{C}$.

   Si $\lambda = -1$, entonces $(x,y,z) = (-1,0,1) \in \mathcal{C}$ si N es impar.

   Entonces para N par los puntos fijos son $P_k = (1, \sqrt[N]{2}e^{\frac{\pi i}{N}}\omega^k, 1)$, con $k = 0, 1, ..., N-1$ y para N impar los puntos fijos son $P_k = (1, \sqrt[N]{2}e^{\frac{\pi i}{N}}\omega^k, 1)$, con $k = 0, 1, ..., N-1$ y $Q = (-1, 0, 1)$.

   Para N impar, cerca de Q podemos considerar los puntos de la forma $(x, y, 1)$ y la proyección en la segunda coordenada, pues $\frac{\partial p}{\partial x}(Q) \neq 0$. Luego

   $$h(y) = \varphi(ab(g(y), y, 1)) = \varphi\left(\frac{1}{g(y)}, \frac{y}{g(y)}, 1\right) = \frac{y}{g(y)},$$

   donde $x = g(y)$. Siendo $g(0) = -1$, nos queda

   $$h'(0) = -1.$$

   Ahora para N cualquiera, cerca de P_k podemos considerar la proyección en la primera coordenada y los puntos de la forma $(x, y, 1)$, pues $\frac{\partial p}{\partial y}(P_k) \neq 0$.

Luego

$$h(x) = \varphi(ab(x+1, g(x+1), 1)) = \varphi(1, g(x+1), x+1) = \frac{1}{x+1} - 1,$$

donde $y = g(x)$. Entonces nos queda

$$h'(0) = -1.$$

Así para N impar la traza de g_1 es

$$1 + \frac{-1}{1+1} + N\frac{-1}{1+1} = -\frac{N-1}{2}.$$

Para N par la traza de g_1 es

$$1 + N\frac{-1}{1+1} = -\frac{N-2}{2}.$$

Por otro lado, por el Teorema 3, tenemos que

$$g_1(v_{r,s}) = -v_{N-s-r,s}.$$

Según esto, la traza de g_1 corresponde a

$$\sum_{(r,s)\in I} -1,$$

donde $I = \{(r,s) : r, s \geq 1, r+s \leq N-1, N-s-r = r\}$.
Pero $N-s-r = s$ si y sólo si $s = N-2r \geq 1$, es decir $r \leq \frac{N-1}{2}$.
Entonces para N impar la traza es $-\frac{N-1}{2}$ y para N par la traza es $-\frac{N-2}{2}$.
Tal como se obtuvo anteriormente.

2. Para $g_2 = (\omega^{-1}, 1)a^2$, calculemos los puntos fijos:

   $(\omega^{-1}, 1)a^2(x,y,z) = (x,y,z)$ si y sólo si $(\omega^{-1}y, x, z)) = (x,y,z)$. Luego $\omega^{-1}y = \lambda x$, $z = \lambda y$ y $x = \lambda z$, para algún $\lambda \neq 0$.

   Entonces $x, y, z \neq 0$ y $\omega^{-1}y = \lambda^2 z = \lambda^3 y$, por lo tanto

   $$\lambda^3 = \omega^{-1},$$

   es decir $\lambda \in \{e^{-\frac{2\pi i}{3N}} e^{\frac{2k\pi i}{3}} : k = 0, 1, 2\}$. Así $(x,y,z) = (\lambda^2, 1, \lambda)$.
   Sea $\lambda_k = e^{-\frac{2\pi i}{3N}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}$ y $P_k = (\lambda_k^2, 1, \lambda_k)$.

   $P_k \in C$ si y sólo si $1 + \lambda_k^N + (\lambda_k^N)^2 = 0$, es decir λ^N raíz cúbica de la unidad, no trivial.

$\lambda_k^N = e^{\frac{2\pi i(kN-1)}{3}} \neq 1$ si y sólo si $Nk - 1 \not\equiv 0(3)$.

Sea $k = 0$, entonces $kN - 1 \equiv -1 \not\equiv 0(3)$. Luego $P_0 \in \mathcal{C}$, para todo N.

Sea $k = 1$, entonces $kN - 1 = N - 1$. Luego $P_1 \in \mathcal{C}$, para todo N, tal que $N \not\equiv 1(3)$.

Sea $k = 2$. Si $N = 3t$, para algún $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$kN - 1 = 6t - 1 \not\equiv 0(3).$$

Si $N = 3t + 1$, para algún $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$kN - 1 = 6t + 1 \not\equiv 0(3).$$

Si $N = 3t + 2$, para algún $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$kN - 1 = 6t + 3 \equiv 0(3).$$

Luego $P_2 \in \mathcal{C}$, para todo N, tal que $N \not\equiv 2(3)$.

En resumen:

Si $N \equiv 0(3)$,entonces los puntos fijos de g_2 son P_0, P_1 y P_2.

Si $N \equiv 1(3)$,entonces los puntos fijos de g_2 son P_0 y P_2.

Si $N \equiv 2(3)$,entonces los puntos fijos de g_2 son P_0 y P_1.

Primero veamos para N cualquiera, cerca de P_0 podemos considerar los puntos de la forma $(x, 1, z)$ y la proyección en la tercera coordenada, pues $\dfrac{\partial p}{\partial x}(P_0) \neq 0$. Luego

$$\begin{aligned} h(z) &= \varphi(a(\omega,1)(g(z+\lambda_0),1,z+\lambda_0)) \\ &= \varphi\left(\frac{z+\lambda_0}{\omega g(z+\lambda_0)},1,\frac{1}{\omega g(z+\lambda_0)}\right) \\ &= \frac{1}{\omega g(z+\lambda_0)}-\lambda_0, \end{aligned}$$

donde $x = g(z)$. Siendo $g(\lambda_0) = \lambda_0^2$, nos queda

$$h'(0) = -\omega^{-1}g(\lambda_0)^{-2}\frac{-\lambda_0^{N-1}}{(\lambda_0^2)^{N-1}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Para $N \not\equiv 1(3)$, de manera completamente análoga obtenemos

$$h'(0) = -\omega^{-1}g(\lambda_1)^{-2}\frac{-\lambda_1^{N-1}}{(\lambda_1^2)^{N-1}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}(N+2)},$$

pues $g(\lambda_1) = \lambda_1^2$.

Para $N \not\equiv 2(3)$, de manera completamente análoga obtenemos

$$h'(0) = -\omega^{-1}g(\lambda_2)^{-2}\frac{-\lambda_2^{N-1}}{(\lambda_2^2)^{N-1}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}(2N+5)},$$

pues $g(\lambda_2) = \lambda_2^2$.

Así cuando $N \equiv 0(3)$ la traza de g_2 es

$$1+\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1-\frac{2\pi i}{3}}+\frac{e^{\frac{-4\pi i}{3}}}{1-\frac{-4\pi i}{3}}+\frac{e^{\frac{-10\pi i}{3}}}{1-\frac{-10\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Si $N \equiv 1(3)$, la traza es

$$1+\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1-\frac{2\pi i}{3}}+\frac{e^{\frac{-14\pi i}{3}}}{1-\frac{-14\pi i}{3}} = 0.$$

Si $N \equiv 2(3)$, la traza es

$$1+\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1-\frac{2\pi i}{3}}+\frac{e^{\frac{-8\pi i}{3}}}{1-\frac{-8\pi i}{3}} = 0.$$

Por otro lado, por el Teorema 3, tenemos que

$$g_2(v_{r,s}) = \omega^r v_{s,N-s-r}.$$

Según esto, la traza de g_2 corresponde a

$$\sum_{(r,s)\in I)} \omega^r,$$

donde $I = \{(r,s) : r,s \geq 1, r+s \leq N-1, N-s-r = r = s\}$
Pero $N - s - r = s = r$ si y sólo si $r = s = \frac{N}{3}$.

Entonces para $N \equiv 0(3)$ la traza es $\omega^{\frac{N}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y para $N \not\equiv 0(3)$ la traza es 0. Tal como se obtuvo anteriormente.

3. Para $g_3 = ba(\omega^{-1}, \omega^{-1})$, de orden $2N$, debemos saber como es g_3^{-1} cerca de sus puntos fijos, que son los mismos que de $g_1^{-1} = (\omega, \omega)ba$.

   Calculemos los puntos fijos:

   $(\omega,\omega)ba(x,y,z) = (x,y,z)$ si y sólo si $(\omega x, \omega z, y) = (x,y,z)$.

   Es decir existe $\lambda \neq 0$ tal que $\omega x = \lambda x$, $\omega z = \lambda y$ e $y = \lambda z$. Claramente se tiene $y, z \neq 0$, pues de lo contrario $y = z = 0$ y $(x, 0, 0) \notin \mathcal{C}$.
   Entonces se tiene

   $$\lambda^2 = \omega,$$

   es decir $\lambda \in \{\pm e^{\frac{\pi i}{N}}\}$.
   Observe que $x \neq 0$, de lo contrario $\omega = \lambda$ y por tanto $\omega = 1$, lo cual es una contradicción.
   Entonces $(x,y,z) = (0, \lambda z, z) = (0, \lambda, 1)$. Por lo tanto

   $$\lambda^N = -1.$$

   Veamos cual de los dos posibles valores de λ verifica lo anterior:

   $(e^{\frac{\pi i}{N}})^N = -1$, para todo N.
   $(-e^{\frac{\pi i}{N}})^N = (-1)^{N+1} = 1$ si y sólo si N es par.

   Entonces los puntos fijos de g_3 son $P_0 = (0, e^{\frac{\pi i}{N}}, 1)$ y $P_1 = (0, -e^{\frac{\pi i}{N}}, 1)$, cuando N es par.
   Cuando N es impar el único punto fijo es $P_0 = (0, e^{\frac{\pi i}{N}}, 1)$.

   Consideraremos una carta φ que se anule en P_j, luego debemos calcular $h'(0)$, donde $h(t) = (\varphi^{-1} \circ g_3^{-1} \circ \varphi)(t)$.

Cerca de P_0 podemos considerar los puntos de la forma $(x, y, 1)$ y proyectar en la primera coordenada, pues $\frac{\partial p}{\partial y}(P_0) \neq 0$. Luego

$$h(x) = \varphi((\omega, \omega)(ba(x, g(x), 1))) = \varphi\left(\frac{\omega x}{g(x)}, \frac{\omega}{g(x)}, 1\right) = \frac{\omega x}{g(x)},$$

donde $y = g(x)$. Luego como $g'(x) = -\frac{x^{N-1}}{g(x)^{N-1}}$, entonces

$$h'(x) = \omega \frac{g(x) - g'(x)x}{g(x)^2}$$

y como $g(0) = e^{\frac{\pi i}{N}}$, nos queda

$$h'(0) = e^{\frac{\pi i}{N}}.$$

Así para N impar la traza de g_3 es $1 + \frac{e^{\frac{\pi i}{N}}}{1-e^{\frac{\pi i}{N}}} = \frac{1}{1-e^{\frac{\pi i}{N}}}$.

Análogamente para N impar, cerca de P_1 consideramos los puntos de la forma $(x, y, 1)$ y proyectamos en la primera coordenada, pues $\frac{\partial p}{\partial y}(P_1) \neq 0$. Luego

$$h(x) = \varphi((\omega, \omega)(ba(x, g(x), 1))) = \varphi\left(\frac{\omega x}{g(x)}, \frac{\omega}{g(x)}, 1\right) = \frac{\omega x}{g(x)},$$

donde $y = g(x)$. Siendo $g(0) = -e^{\frac{\pi i}{N}}$, nos queda

$$h'(0) = -e^{\frac{\pi i}{N}}.$$

Así para N impar la traza de g_1 es $1 + \frac{e^{\frac{\pi i}{N}}}{1-e^{\frac{\pi i}{N}}} + \frac{-e^{\frac{\pi i}{N}}}{1+e^{\frac{\pi i}{N}}} = \frac{1+\omega}{1-\omega}$.

Por otro lado, por el Teorema 3, tenemos que

$$g_3(\upsilon_{r,s}) = -\omega^{r+s}\upsilon_{r,N-s-r}.$$

Según esto, la traza de g_3 corresponde a

$$\sum_{(r,s)\in I} -\omega^{r+s},$$

donde $I = \{(r, s) : r, s \geq 1, r + s \leq N - 1, N - s - r = s\}$.
Pero $N - s - r = s$ si y sólo si $r = N - 2s \geq 1$, es decir $s \leq \frac{N-1}{2}$.

Luego $r + s = N - s$ y por tanto $\omega^{r+s} = \omega^{-s}$.
Entonces para N impar la traza es

$$-\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \omega^{-s} = -\left(\frac{\omega^{-\frac{N+1}{2}} - 1}{\omega^{-1} - 1} - 1\right) = \frac{1}{1 - e^{\frac{\pi i}{N}}}$$

y para N par la traza es

$$-\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \omega^{-s} = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}.$$

Tal como se obtuvo anteriormente.

CAPíTULO 3

Sobre el grupo de automorfismos de las curvas de Fermat

1. Representaciones de G

Considerando que uno de nuestros objetivos es descomponer las representaciones asociadas a la acción de G en las curvas de Fermat, necesitamos conocer las representaciones irreducibles (complejas) de este. Dado que G es un producto semidirecto con uno de los factores un grupo abeliano, podemos ocupar el método de los "little groups" de Wigner-Mackey descrito en 8.2 en [**15**] para encontrarlas.

LEMA 1. *G actúa en $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N)$, de modo que:*

1. *Si N es divisible por 3 entonces posee:*
   a) 3 órbitas de largo 1
   b) $N-3$ órbitas de largo 3
   c) $\frac{N^2-3N+6}{6}$ órbitas de largo 6
2. *Si N no es divisible por 3 entonces posee:*
   a) 1 órbita de largo 1
   b) $N-1$ órbitas de largo 3
   c) $\frac{(N-2)(N-1)}{6}$ órbitas de largo 6

DEMOSTRACIÓN. Debemos calcular las órbitas de la acción de G en $\mathrm{Irr}(\mu_N \times \mu_N)$. Cada representación irreducible de $\mu_N \times \mu_N$ es de la forma
$\rho = \rho_{\alpha,\beta}$, para algún $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ dada por

$$\rho_{\alpha,\beta}(\omega^t, \omega^u) = \omega^{\alpha t + \beta u}$$

y su respectiva órbita:

$$\overline{\rho} = \{\rho^g : g \in G\} = \{\rho^g : g \in S_3\}$$

Primero veamos como conjugan los elementos de S_3:

1. $[(1)(\omega^t, \omega^u)(1)^{-1}](x, y, z) = (\omega^t, \omega^u)(x, y, z)$

2. $[a(\omega^t,\omega^u)a^{-1}](x,y,z) = a(\omega^t y,\omega^u z,x) = (x,\omega^t y,\omega^u z) = (\omega^{-u},\omega^{t-u})(x,y,z)$
3. $[a^2(\omega^t,\omega^u)a](x,y,z) = a^2(\omega^t z,\omega^u x,y) = (\omega^u x,y,\omega^t z)$
$= (\omega^{u-t},\omega^{-t})(x,y,z)$
4. $[b(\omega^t,\omega^u)b^{-1}](x,y,z) = a(\omega^t y,\omega^u x,z) = (\omega^u x,\omega^t y,z) = (\omega^u,\omega^t)(x,y,z)$
5. $[ab(\omega^t,\omega^u)ab](x,y,z) = ab(\omega^t z,\omega^u y,x) = (x,\omega^u y,\omega^t z)$
$= (\omega^{-t},\omega^{u-t})(x,y,z)$
6. $[ba(\omega^t,\omega^u)ba](x,y,z) = ba(\omega^t x,\omega^u z,y) = (\omega^t x,y,\omega^u z) = (\omega^{t-u},\omega^{-u})(x,y,z)$

Entonces

1. $\rho_{\alpha,\beta}(\omega^t,\omega^u) = \rho_{\alpha,\beta}(\omega^t,\omega^u)$
2. ${\rho_{\alpha,\beta}}^a(\omega^t,\omega^u) = \rho_{\alpha,\beta}(\omega^{-u},\omega^{t-u}) = \omega^{-\alpha u+\beta(t-u)} = \rho_{\beta,-\alpha-\beta}(\omega^t,\omega^u)$
3. ${\rho_{\alpha,\beta}}^{a^2}(\omega^t,\omega^u) = \rho_{\alpha,\beta}(\omega^{u-t},\omega^{-t}) = \omega^{\alpha(u-t)-\beta t} = \rho_{-\alpha-\beta,\alpha}(\omega^t,\omega^u)$
4. ${\rho_{\alpha,\beta}}^b(\omega^t,\omega^u) = \rho_{\alpha,\beta}(\omega^u,\omega^t) = \omega^{\alpha u+\beta t} = \rho_{\beta,\alpha}(\omega^t,\omega^u)$
5. ${\rho_{\alpha,\beta}}^{ab}(\omega^t,\omega^u) = \rho_{\alpha,\beta}(\omega^{-t},\omega^{u-t}) = \omega^{-\alpha t+\beta(u-t)} = \rho_{-\alpha-\beta,\beta}(\omega^t,\omega^u)$
6. ${\rho_{\alpha,\beta}}^{ba}(\omega^t,\omega^u) = \rho_{\alpha,\beta}(\omega^{t-u},\omega^{-u}) = \omega^{\alpha(t-u)-\beta u} = \rho_{\alpha,-\alpha-\beta}(\omega^t,\omega^u)$

Sea $K_{\alpha,\beta} = \mathrm{Stab}(\rho_{\alpha,\beta})$, sabemos que $\mu_N \times \mu_N \subset K_{\alpha,\beta}$. Falta ver cuándo los elementos de S_3 están en $K_{\alpha,\beta}$.

1. $(1) \in K_{\alpha,\beta}$ para todo $K_{\alpha,\beta}$

2. $a \in K_{\alpha,\beta}$ si y sólo si $\alpha = \beta$ y $\beta \equiv -\alpha - \beta(N)$. Es decir $a \in K_{\alpha,\beta}$ si y sólo si N es divisible por 3 y $\alpha = \beta \in \{0, \frac{N}{3}, \frac{2N}{3}\}$.

3. $a^2 \in K_{\alpha,\beta}$ si y sólo si $a \in K_{\alpha,\beta}$.

4. $b \in K_{\alpha,\beta}$ si y sólo si $\alpha = \beta$.

5. $ab \in K_{\alpha,\beta}$ si y sólo si $\alpha \equiv -\alpha - \beta(N)$. Equivalentemente $\beta \equiv -2\alpha(N)$.

6. $ba \in K_{\alpha,\beta}$ si y sólo si $\beta \equiv -\alpha - \beta(N)$. Equivalentemente $\alpha \equiv -2\beta(N)$.

Así tenemos las órbitas:

1. $\overline{\rho_{0,0}} = \{\rho_{0,0}\}$
2. $\overline{\rho_{\alpha,\alpha}} = \{\rho_{\alpha,\alpha}, \rho_{-2\alpha,\alpha}, \rho_{\alpha,-2\alpha}\}$

Luego si $-2\alpha \equiv \alpha(N)$, entonces el largo de la órbita $\overline{\rho_{\alpha,\alpha}}$ es 1.

Luego para N divisible por 3:

$$|\overline{\rho_{\alpha,\alpha}}| = \begin{cases} 1 & \alpha \in \{\frac{N}{3}, \frac{2N}{3}\} \\ 3 & \alpha \notin \{\frac{N}{3}, \frac{2N}{3}\} \end{cases}$$

Y por tanto tenemos $3((N-1)-2) = 3N-9$ elementos de $\mathrm{Irr}(\mu_N \times \mu_N)$ en órbitas de largo 3 y 3 en órbitas de largo 1, a saber $\rho_{0,0}, \rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}}$ y $\rho_{\frac{2N}{3},\frac{2N}{3}}$.

Para N no divisible por 3:

$|\overline{\rho_{\alpha,\alpha}}| = 3$ para todo $\alpha \neq 0$.

Y por tanto tenemos $3(N-1)$ elementos de $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N)$ en órbitas de largo 3 y uno en órbita de largo 1, a saber $\rho_{0,0}$.

En ambos casos todos las otras órbitas $\rho_{\alpha,\beta}$, con $\alpha \neq \beta$ y $\beta + 2\alpha, \alpha + 2\beta$ no divisibles por N, son de largo 6. Entonces tenemos :

Para N divisible por 3:

$$\frac{N^2 - ((3N-9)+3)}{6} = \frac{N^2 - 3N + 6}{6} \text{ órbitas de largo 6 .}$$

Para N no divisible por 3:

$$\frac{N^2 - (3(N-1)+1)}{6} = \frac{(N-2)(N-1)}{6} \text{ órbitas de largo 6 .}$$

□

PROPOSICIÓN 14. 1. *Si N es divisible por 3, las representaciones irreducibles de G son 6 de grado 1, 3 de grado 2, $2(N-3)$ de grado 3 y $\frac{N^2-3N+6}{6}$ de grado 6.*

2. *Si N no es divisible por 3, las representaciones irreducibles de G son 2 de grado 1, 1 de grado 2, $2(N-1)$ de grado 3 y $\frac{(N-2)(N-1)}{6}$ de grado 6.*

Más aun, estas se describen concretamente.

DEMOSTRACIÓN. Seguimos con el método de los "little groups" y con la notación de [**15**].

1. $K_{0,0} = G$ por tanto $H_{0,0} = S_3$. Luego $\mathrm{Irr}(H_{0,0}) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, donde θ_1 y θ_2 son las representaciones de grado uno trivial y signo, respectivamente y θ_3 es la representación de grado 2 dada por:

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así $\rho_1 := \rho_{0,0} \otimes \theta_1$ de grado 1, $\rho_2 := \rho_{0,0} \otimes \theta_2$ de grado 1 y $\rho_3 := \rho_{0,0} \otimes \theta_3$ de grado 2, son representaciones irreducibles de G.

2. Si N es divisible por 3, tenemos $K_{\alpha,\alpha} = (\mu_N \times \mu_N)\langle b\rangle$ para cada $\alpha \neq \frac{N}{3}, \frac{2N}{3}$ y por tanto $H_{\alpha,\alpha} = \langle b\rangle$. Luego $\mathrm{Irr}(H_{\alpha,\alpha}) = \{1, -1\}$, donde 1 y -1 son las representaciones de grado 1 trivial y signo, respectivamente. Así las representaciones irreducibles de G, son los levantamientos de $\rho_{\alpha,\alpha} \otimes 1$ y $\rho_{\alpha,\alpha} \otimes -1$; denotadas por ρ_α^+ y ρ_α^-, respectivamente, ambas de grado 3.
Para $K_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} = K_{\frac{2N}{3},\frac{2N}{3}} = (\mu_N \times \mu_N)\langle b\rangle\langle ab\rangle\langle a^2b\rangle\langle a\rangle = G$,
tenemos que

$$\rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} \otimes \theta_1, \rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} \otimes \theta_2, \rho_{\frac{2N}{3},\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1 \text{ y } \rho_{\frac{2N}{3},\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2$$

son representaciones de G de grado 1 y $\rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} \otimes \theta_3$ y $\rho_{\frac{2N}{3},\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3$ son representaciones de G de grado 2.
Si N no es divisible por 3, tenemos $K_{\alpha,\alpha} = (\mu_N \times \mu_N)\langle b\rangle$ para cada $\alpha \neq 0$. Así las representaciones irreducibles de G, son los levantamientos de $\rho_{\alpha,\alpha} \otimes 1$ y $\rho_{\alpha,\alpha} \otimes -1$: ρ_α^+ y ρ_α^-, respectivamente, que son ambas de grado 3.

3. $K_{\alpha,\beta} = \mu_N \times \mu_N$ para cada $\alpha \neq \beta$ y $\beta + 2\alpha, \alpha + 2\beta$ no divisibles por N, por tanto $H_{\alpha,\beta} = 1$. Así las representaciones de G, son los levantamientos de $\rho_{\alpha,\beta}$, que son de grado 6.

Veamos ahora como son cada una de estas:

1. *i*) ρ_1 :

$$a \to 1$$

$$b \to 1$$

$$(\omega, 1) \to 1$$

$$(1, \omega) \to 1$$

ii) ρ_2 :

$$a \to 1$$
$$b \to -1$$
$$(\omega, 1) \to 1$$
$$(1, \omega) \to 1$$

iii) ρ_3 :

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$b \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(\omega, 1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(1, \omega) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Debemos levantar la representación de $K_{\alpha,\alpha} = (\mu_N \times \mu_N)\langle b\rangle$, $\rho_{\alpha,\alpha} \otimes 1$, para $\alpha \neq \frac{N}{3}, \frac{2N}{3}$. Este levantamiento es en el espacio 3 dimensional $\langle v \otimes 1, v \otimes a, v \otimes a^2\rangle$. Veamos como actúa cada generador de G.

$$\begin{aligned}
&(v \otimes 1)(\omega, 1) = v(\omega, 1) \otimes 1 = \omega^{\alpha} v \otimes 1 \\
&(v \otimes a)(\omega, 1) = v(1, \omega) \otimes a = \omega^{\alpha} v \otimes a \\
&(v \otimes a^2)(\omega, 1) = v(\omega^{-1}, \omega^{-1}) \otimes a^2 = \omega^{-2\alpha} v \otimes a^2 \\
&(v \otimes 1)(1, \omega) = v(1, \omega) \otimes 1 = \omega^{\alpha} v \otimes 1 \\
&(v \otimes a)(1, \omega) = v(\omega^{-1}, \omega^{-1}) \otimes a = \omega^{-2\alpha} v \otimes a \\
&(v \otimes a^2)(1, \omega) = v(\omega, 1) \otimes a^2 = \omega^{\alpha} v \otimes a^2 \\
&(v \otimes 1)a = v \otimes a \\
&(v \otimes a)a = v \otimes a^2 \\
&(v \otimes a^2)a = v \otimes 1 \\
&(v \otimes 1)b = v \otimes b = vb \otimes 1 = v \otimes 1 \\
&(v \otimes a)b = v \otimes ab = v \otimes ba^2 = vb \otimes a^2 = v \otimes a^2 \\
&(v \otimes a^2)b = v \otimes a^2 b = v \otimes ba = vb \otimes a = v \otimes a
\end{aligned}$$

Luego en términos de matrices están dadas por:

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\omega, 1) \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$(1, \omega) \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\alpha} \end{pmatrix}$$

Ahora levantemos la representación de $K_{\alpha,\alpha}$, $\rho_{\alpha,\alpha} \otimes -1$, para $\alpha \neq \frac{N}{3}, \frac{2N}{3}$. Este levantamiento es en el espacio 3 dimensional $\langle v \otimes 1, v \otimes a, v \otimes a^2 \rangle$. Veamos como actúa cada generador de G.

$(v \otimes 1)(\omega, 1) = v(1,0) \otimes 1 = \omega^{\alpha} v \otimes 1$
$(v \otimes a)(\omega, 1) = v(0,1) \otimes a = \omega^{\alpha} v \otimes a$
$(v \otimes a^2)(\omega, 1) = v(\omega^{-1}, \omega^{-1}) \otimes a^2 = \omega^{-2\alpha} v \otimes a^2$
$(v \otimes 1)(1, \omega) = v(1, \omega) \otimes 1 = \omega^{\alpha} v \otimes 1$
$(v \otimes a)(1, \omega) = v(\omega^{-1}, \omega^{-1}) \otimes a = \omega^{-2\alpha} v \otimes a$
$(v \otimes a^2)(1, \omega) = v(\omega, 1) \otimes a^2 = \omega^{\alpha} v \otimes a^2$
$(v \otimes 1)a = v \otimes a$
$(v \otimes a)a = v \otimes a^2$
$(v \otimes a^2)a = v \otimes 1$
$(v \otimes 1)b = v \otimes b = vb \otimes 1 = -v \otimes 1$
$(v \otimes a)b = v \otimes ab = v \otimes ba^2 = vb \otimes a^2 = -v \otimes a^2$
$(v \otimes a^2)b = v \otimes a^2 b = v \otimes ba = vb \otimes a = -v \otimes a$

Luego en términos de matrices están dadas por:

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\omega, 1) \to \begin{pmatrix} \omega^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$(1, \omega) \to \begin{pmatrix} \omega^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\alpha} \end{pmatrix}$$

Veamos ahora para $K_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} = K_{\frac{2N}{3},\frac{2N}{3}} = G$.

$\rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} \otimes \theta_1$:

$$a \to 1$$
$$b \to 1$$
$$(\omega, 1) \to \omega^{\frac{N}{3}}$$
$$(1, \omega) \to \omega^{\frac{N}{3}}$$

$\rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} \otimes \theta_2$:

$$a \to 1$$
$$b \to -1$$
$$(\omega, 1) \to \omega^{\frac{N}{3}}$$
$$(1, \omega) \to \omega^{\frac{N}{3}}$$

$\rho_{\frac{N}{3},\frac{N}{3}} \otimes \theta_3$:

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\omega, 1) \to \begin{pmatrix} \omega^{\frac{N}{3}} & 0 \\ 0 & \omega^{\frac{N}{3}} \end{pmatrix}$$

$$(1, \omega) \to \begin{pmatrix} \omega^{\frac{N}{3}} & 0 \\ 0 & \omega^{\frac{N}{3}} \end{pmatrix}$$

$\rho_{\frac{2N}{3}, \frac{2N}{3}} \otimes \theta_1$:

$$a \to 1$$
$$b \to 1$$
$$(\omega, 1) \to \omega^{\frac{2N}{3}}$$
$$(1, \omega) \to \omega^{\frac{2N}{3}}$$

$\rho_{\frac{2N}{3}, \frac{2N}{3}} \otimes \theta_2$:

$$a \to 1$$
$$b \to -1$$
$$(\omega, 1) \to \omega^{\frac{2N}{3}}$$
$$(1, \omega) \to \omega^{\frac{2N}{3}}$$

$\rho_{\frac{2N}{3}, \frac{2N}{3}} \otimes \theta_3$:

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\omega, 1) \to \begin{pmatrix} \omega^{\frac{2N}{3}} & 0 \\ 0 & \omega^{\frac{2N}{3}} \end{pmatrix}$$

$$(1,\omega) \to \begin{pmatrix} \omega^{\frac{2N}{3}} & 0 \\ 0 & \omega^{\frac{2N}{3}} \end{pmatrix}$$

3. Debemos levantar la representación de $K_{\alpha,\beta} = \mu_N \times \mu_N$, $\rho_{\alpha,\beta}$, para $\alpha \neq \beta$ y $\beta + 2\alpha, \alpha + 2\beta$ no divisibles por N. Este levantamiento es en el espacio 6 dimensional
$\langle v\otimes 1, v\otimes a, v\otimes a^2, v\otimes b, v\otimes ab, v\otimes a^2 b\rangle$. Veamos como actúan los generadores de G.

$(v\otimes 1)(\omega,1) = v(\omega,1)\otimes 1 = \omega^{\alpha} v\otimes 1$
$(v\otimes a)(\omega,1) = v(1,\omega)\otimes a = \omega^{\beta} v\otimes a$
$(v\otimes a^2)(\omega,1) = v(\omega^{-1},\omega^{-1})\otimes a^2 = \omega^{-\alpha-\beta} v\otimes a^2$
$(v\otimes b)(\omega,1) = v(1,\omega)\otimes b = \omega^{\beta} v\otimes b$
$(v\otimes ab)(\omega,1) = v(\omega^{-1},\omega^{-1})\otimes ab = \omega^{-\alpha-\beta} v\otimes ab$
$(v\otimes a^2b)(\omega,1) = v(\omega,1)\otimes a^2b = \omega^{\alpha} v\otimes a^2b$

$(v\otimes 1)(1,\omega) = v(1,\omega)\otimes 1 = \omega^{\beta} v\otimes 1$
$(v\otimes a)(1,\omega) = v(\omega^{-1},\omega^{-1})\otimes a = \omega^{-\alpha-\beta} v\otimes a$
$(v\otimes a^2)(1,\omega) = v(\omega,1)\otimes a^2 = \omega^{\alpha} v\otimes a^2$
$(v\otimes b)(1,\omega) = v(\omega,1)\otimes b = \omega^{\alpha} v\otimes yb$
$(v\otimes ab)(1,\omega) = v(1,\omega)\otimes ab = \omega^{\beta} v\otimes ab$
$(v\otimes a^2b)(1,\omega) = v(\omega^{-1},\omega^{-1})\otimes a^2b = \omega^{-\beta-\alpha} v\otimes a^2b$

$(v\otimes 1)a = v\otimes a$
$(v\otimes a)a = v\otimes a^2$
$(v\otimes a^2)a = v\otimes 1$
$(v\otimes b)a = v\otimes a^2b$
$(v\otimes ab)a = v\otimes b$
$(v\otimes a^2b)a = v\otimes ab$

$(v\otimes 1)b = v\otimes b$
$(v\otimes a)b = v\otimes ab$
$(v\otimes a^2)b = v\otimes a^2b$
$(v\otimes b)b = v\otimes 1$
$(v\otimes ab)b = v\otimes a$
$(v\otimes a^2b)b = v\otimes a^2$

Luego

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\omega, 1) \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega^{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$(1, \omega) \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega^{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

□

OBSERVACIÓN 8. Llamaremos Λ a un conjunto de pares $(\alpha, \beta) \in \{1, ..., N-1\} \times \{1, ..., N-1\}$ que indexen completamente las representaciones irreducibles de grado 6 de G.

2. Descomposición de las representaciones analítica y racional de G

Encontraremos las multiplicidades de las representaciones complejas irreducibles de G, en la descomposición isotípica de la representación analítica y racional correspondientes a la acción de G en C. Ver secciones 1 y 1.

2.1. Representación analítica. Para encontrar la descomposición de esta representación, utilizaremos la fórmula de Chevalley-Weil. Primero definiremos los conceptos que nos permitirán enunciar este Teorema. Luego lo aplicaremos a nuestro contexto.

Sea S una superficie de Riemann compacta y G un grupo de automorfismos conformes actuando en S. Suponga que el cubrimiento $\pi : S \to S/G$ tiene valores de ramificación $\{Q_1, ..., Q_r\}$. Sea n el orden de G y fijemos una raíz n-ésima primitiva de la unidad ζ_n. Si d divide a n, definimos $\zeta_d := (\zeta_n)^{n/d}$.

Para cada valor de ramificación Q_i elegir un punto $P_i \in S$ con $\pi(P_i) = Q_i$. Sea d_i el orden del estabilizador G_{P_i}. Para cada $i \in \{1, ..., r\}$, sea $\eta_i : G_{P_i} \to \mathbb{C}^*$ la representación definida por la constante de rotación de g_i en P_i, donde g_i es un generador de G_{P_i}. Sea $\gamma_i \in G_{P_i}$ el único elemento tal que $\eta_i(\gamma_i) = \zeta_{d_i}$. Es claro que γ_i es un generador de G_{P_i}, llamamos a este elemento la *monodromía local* alrededor de Q_i.

El elemento γ_i obtenido, depende de la elección del punto P_i sobre Q_i. Cualquier otro punto sobre Q_i es de la forma $P_i' = \sigma(P_i)$ para algún $\sigma \in G$, entonces $G_{P_i'} = \sigma G_{P_i} \sigma^{-1}$ y el caracter fundamental $\eta_i' : G_{P_i'} \to \mathbb{C}^*$ en el punto P_i' está relacionado a η_i por $\eta_i'(\sigma g \sigma^{-1}) = \eta_i(g)$. Por lo tanto si elegimos P_i', como el punto sobre Q_i, la monodromía local alrededor de Q_i que obtenemos es $\gamma_i' = \sigma \gamma_i \sigma^{-1}$. En particular vemos que la clase de conjugación de γ_i es independiente de elecciones.

Considere una representación $\rho : G \to GL(V)$ de grado s. Para $i \in \{1, ...r\}$ sean $\lambda_1, ..., \lambda_s$ los valores propios de $\rho(\gamma_i)$, contando multiplicidades. Como γ_i tiene orden d_i, estos valores propios son raíces d_i-ésimas de la unidad. Luego podemos escribir $\lambda_j = \zeta_{d_i}^{k_j}$ para algún $k_j \in \{0, 1, ..., d_i - 1\}$. Para cada $k \in \{0, 1, ..., d_i - 1\}$, sea $N_{i,k}$ el número de valores propios λ_j iguales a $\zeta_{d_i}^k$. Como la clase de conjugación de γ_i es independiente de elecciones, los valores propios λ_j y los números $N_{i,k}$ tampoco dependen de la elección de $P_i \in \pi^{-1}(Q_i)$.

Finalmente, definamos la parte racional $\langle c \rangle$ de $c \in \mathbb{Q}$ como $\langle c \rangle := c - [c]$, donde $[c]$ denota la parte entera.

TEOREMA 7. *(Chevalley-Weil) Sea S una superficie de Riemann compacta y G un grupo de automorfismos conformes actuando en S. Con las notaciones anteriores tenemos que la multiplicidad $n(\rho)$, de una representación compleja irreducible ρ de G, en la representación analítica está dada por*

$$n(\rho) = \deg(\rho)(g(S/G) - 1) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{d_i-1} N_{i,k} \left\langle -\frac{k}{d_i} \right\rangle + \sigma,$$

donde $g(S/G)$ es el género de la superficie cociente, $\sigma = 1$ si ρ es la representación trivial y $\sigma = 0$ en otro caso.

DEMOSTRACIÓN. Ver [3]. □

OBSERVACIÓN 9. Si ρ es la representación trivial obtenemos $n(\rho) = \mathrm{g}(S/G)$.

Vamos ahora a nuestra situación. Obtendremos la monodromía local alrededor de cada punto de ramificación de la superficie cociente C/G.

1. Para cada valor de ramificación elegimos un punto de ramificación sobre él.

   Sea $P_1 = (0, e^{\frac{i\pi}{N}}, 1)$ sobre el valor de ramificación marcado con $2N$. Ver Proposición 10.

   Sea $P_2 = (1, \sqrt[N]{2}e^{\frac{i\pi}{N}}, 1)$ sobre el valor de ramificación marcado con 2. Ver Proposición 10.

   Sea $P_3 = (e^{-\frac{4\pi i}{3N}}, 1, e^{\frac{-2\pi i}{3N}})$ sobre el valor de ramificación marcado con 3. Ver Proposición 10 y observe que $a(\omega, 1)(P_3) = P_3$

2. Buscamos los caracteres fundamentales asociados.
   Observe que $G_{P_1} = \langle ba(\omega^{-1}, \omega^{-1})\rangle$, $G_{P_2} = \langle ab\rangle$ y $G_{P_3} = \langle(\omega^{-1}, 1)a^2\rangle$.

   Luego, según los cálculos que siguen luego de la fórmula de la Traza de Eichler, los caracteres fundamentales están definidos en los generadores como sigue:
   a) $\eta_1(ba(\omega^{-1}, \omega^{-1})) = e^{\frac{\pi i}{N}}$
   b) $\eta_2(ab) = -1$
   c) $\eta_3((\omega^{-1}, 1)a^2) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$
3. Buscar la monodromía local alrededor de los valores de ramificación.

Por otro lado $\zeta_{2N} = e^{\frac{\pi i}{N}}$, $\zeta_2 = -1$ y $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$
Es claro de lo anterior que los γ_i buscados son precisamente los generadores exhibidos de los G_{P_i}, $i = 1, 2, 3$. Luego podemos usar estos elementos para la fórmula de Chevalley-Weil.

Consideramos la acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ dada por la Observación 1 y su representación analítica, obtendremos la descomposición isotípica de ella usando la fórmula de Weil-Chevalley.

TEOREMA 8. 1. *Si N es par y no es divisible por 3 la representación analítica se descompone como suma de $\frac{N-2}{2}$ representaciones irreducibles de grado 3 y $\frac{(N-2)(N-4)}{12}$ representaciones irreducibles de grado 6, a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{\frac{N+2}{2},\ldots,N-1\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta>N} \rho_{\alpha,\beta}$$

2. *Si N es impar y no es divisible por 3 la representación analítica se descompone como suma de $\frac{N-1}{2}$ representaciones irreducibles de grado 3 y $\frac{(N-1)(N-5)}{12}$ representaciones irreducibles de grado 6, a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{\frac{N+1}{2},\ldots,N-1\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta>N} \rho_{\alpha,\beta}$$

3. *Si N es par y divisible por 3 la representación analítica se descompone como suma de $\frac{N-2}{2}-1$ representaciones irreducibles de grado 3, $\frac{N^2-6N+12}{12}$ representaciones irreducibles de grado 6 y una de grado 1 a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{\frac{N+2}{2},\ldots,N-1\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta>N} \rho_{\alpha,\beta} \oplus \left(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2\right)$$

4. *Si N es impar y divisible por 3 la representación analítica se descompone como suma de $\frac{N-1}{2}-1$ representaciones irreducibles de grado 3, $\frac{N^2-6N+9}{12}$ representaciones irreducibles de grado 6 y una de grado 1 a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{\frac{N+1}{2},\ldots,N-1\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta>N} \rho_{\alpha,\beta} \oplus \left(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2\right)$$

DEMOSTRACIÓN. Según el Teorema anterior y las observaciones posteriores, tenemos que la multiplicidad $n(\rho)$ de cada $\rho \in \mathrm{Irr}(G)\backslash\{I\}$ en la representación analítica está dada por

$$n(\rho) = -\deg(\rho) + \sum_{k=1}^{2N-1} N_{1,k}\left\langle\frac{-k}{2N}\right\rangle + N_{2,1}\left\langle\frac{-1}{2}\right\rangle + \sum_{k=1}^{3-1} N_{3,k}\left\langle\frac{-k}{3}\right\rangle,$$

donde $N_{1,k}$ es el número de valores propios en $\rho(\gamma_1)$ iguales a $(e^{\frac{2\pi i}{2N}})^k = e^{\frac{k\pi i}{N}}$, $N_{2,1}$ es el número de valores propios en $\rho(\gamma_2)$ iguales a $(e^{\frac{2\pi i}{2}})^1 = -1$ y $N_{3,k}$ es el número de valores propios en $\rho(\gamma_3)$ iguales a $(e^{\frac{2\pi i}{3}})^k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}$.
Con $\gamma_1 = ba(\omega^{-1}, \omega^{-1})$, $\gamma_2 = (13)$ y $\gamma_3 = (\omega^{-1}, 1)a^2$.

Recuerde la notación de la proposición 14 para las representaciones complejas irreducibles de G.

1. Calcularemos en $\rho(\gamma_1)$ el número de valores propios iguales a $e^{\frac{k\pi i}{N}}$,para $k = 1, ..., 2N-1$, donde $\rho \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{I\}$.

   a) *i*) $\rho_2(\gamma_1) = -1 = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $\frac{k}{N} = 1$. Luego
   $$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq N \\ 1 & k = N \end{cases}$$
   ii) $\rho_3(\gamma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, luego sus valores propios son 1 y -1. Pero $e^{\frac{k\pi i}{N}} \neq 1$ para todo $k = 1, ..., 2N-1$ y $e^{\frac{k\pi i}{N}} = -1$ si y sólo si $k = N$, entonces
   $$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq N \\ 1 & k = N \end{cases}$$

   b) *i*) $\rho_\alpha^+(\gamma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^\alpha \\ 0 & \omega^\alpha & 0 \\ \omega^{-2\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Pues corresponde a
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{2\alpha} \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} \omega^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-\alpha} \end{pmatrix}$
   Su polinomio característico es
   $$(x - \omega^{-\alpha})(x^2 - \omega^\alpha)$$

y por tanto los valores propios son $e^{\frac{-2\alpha\pi i}{N}}$,$e^{\frac{\alpha\pi i}{N}}$ y $-e^{\frac{\alpha\pi i}{N}} = e^{\pi i}e^{\frac{\alpha\pi i}{N}}$.
$e^{\frac{-2\alpha\pi i}{N}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $k + 2\alpha = 2tN$, para algún $t \in \mathbb{Z}$. Pero como $\alpha = 1, ..., N-1$ y $k = 1, ..., 2N-1$, entonces tenemos:

$$3 = 1 + 2 \leq 2tN \leq 2N - 1 + 2(N-1) = 4N - 3$$

y por tanto

$$t > 0 \text{ y } 3 \leq 2N(2-t),$$

equivalentemente

$$t > 0 \text{ y } 0 \leq t < 2,$$

luego

$$k = 2N - 2\alpha$$

De forma análoga, $e^{\frac{k\pi i}{N}} = e^{\frac{\alpha\pi i}{N}}$ si y sólo si

$$1 + 1 - N \leq k - \alpha = 2tN \leq 2N - 1 - 1,$$

es decir

$$2 \leq N(2t+1) \text{ y } 2 \leq 2N(1-t)$$

y por tanto

$$k = \alpha.$$

$e^{\frac{k\pi i}{N}} = e^{\frac{(N+\alpha\pi i)}{N}}$ si y sólo si $N + \alpha - k = 2tN$, equivalentemente

$$1 + 1 - 2N \leq \alpha - k = N(2t-1) \leq N - 1 - 1,$$

luego

$$2 \leq N(2t+1) \text{ y } 2 \leq 2N(1-t),$$

es decir

$$k = \alpha + N.$$

Así obtenemos

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq 2N - 2\alpha, \alpha, \alpha + N \\ 1 & k = 2N - 2\alpha, \alpha, \alpha + N \end{cases}$$

ii) $\rho_\alpha^-(\gamma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega^{-\alpha} \\ 0 & -\omega^{-\alpha} & 0 \\ -\omega^{-2\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pues corresponde a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{2\alpha} \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} \omega^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$(x+\omega^{\alpha})(x^2-\omega^{-\alpha}),$$

y por tanto los valores propios son $-e^{\frac{2\alpha\pi i}{N}} = e^{\pi i}e^{\frac{2\alpha\pi i}{N}}$, $e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}}$ y $-e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}} = e^{\pi i}e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}}$.
$e^{\pi i}e^{\frac{2\alpha\pi i}{N}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $N+2\alpha-k=2tN$, para algún $t\in\mathbb{Z}$. Pero como $1\leq\alpha\leq N-1$ y $1\leq k\leq 2N-1$, entonces tenemos:

$$3-2N=2+1-2N\leq 2\alpha-k=N(2t-1)\leq 2(N-1)-1=2N-3$$

y por tanto

$$2t+1>0 \text{ y } 3-2t>0.$$

Luego $t\in\{0,1\}$.
Si $t=0$, entonces $k=2\alpha+N$ y por tanto $\alpha\leq\frac{N-1}{2}$.
Si $t=1$, entonces $k=2\alpha-N$ y por tanto $\alpha\geq\frac{N+1}{2}$.

$e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $k+\alpha=2tN$, para algún $t\in\mathbb{Z}$. Pero como $1\leq\alpha\leq N-1$ y $1\leq k\leq 2N-1$, entonces tenemos:

$$2=1+1\leq k+\alpha=2tN\leq 2N-1+N-1=3N-2$$

y por tanto

$$t>0 \text{ y } 3-2t>0.$$

Luego $t=1$, es decir $K=2N-\alpha$.

$e^{\pi i}e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $k+\alpha-N=2tN$, para algún $t\in\mathbb{Z}$. Pero como $1\leq\alpha\leq N-1$ y $1\leq k\leq 2N-1$, entonces tenemos:

$$2=1+1\leq k+\alpha=N(2t+1)\leq 2N-1+N-1=3N-2$$

y por tanto

$$2t+1>0 \text{ y } 2-2t>0.$$

Luego $t=0$, es decir $k=N-\alpha$.

Entonces para ρ_{α}^{-}, con $\alpha\leq\frac{N-1}{2}$ se tiene

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq 2\alpha + N, 2N - \alpha, N - \alpha \\ 1 & k \neq 2\alpha + N, 2N - \alpha, N - \alpha \end{cases}$$

Y para ρ_{α}^{-}, con $\alpha \geq \frac{N+1}{2}$ se tiene

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq 2\alpha - N, 2N - \alpha, N - \alpha \\ 1 & k = 2\alpha - N, 2N - \alpha, N - \alpha \end{cases}$$

Para $\rho_{\frac{N}{2}}^{-}$ se tiene

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq 2N - \alpha, N - \alpha \\ 1 & k = 2N - \alpha, N - \alpha \end{cases}$$

c) $\rho_{\alpha,\beta}(\gamma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \omega^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

su polinomio característico es

$$(x^2 - \omega^{-\beta})(x^2 - \omega^{\alpha\beta})(x^2 - \omega^{-\alpha})$$

y por tanto los valores propios son

$$e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}}, -e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}}, e^{\frac{-\beta\pi i}{N}}, -e^{\frac{-\beta\pi i}{N}}, e^{\frac{(\alpha+\beta)\pi i}{N}} \text{ y } -e^{\frac{(\alpha+\beta)\pi i}{N}}.$$

Observar que no hay multiplicidades, puesto que $\alpha + 2\beta$ no es divisible por N.

Ya hemos visto que:

1) $e^{\frac{k\pi i}{N}} = e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}}$ si y sólo si $k = 2N - \alpha$.

2) $e^{\frac{k\pi i}{N}} = -e^{\frac{-\alpha\pi i}{N}}$ si y sólo si $k = N - \alpha$.

3) $e^{\frac{k\pi i}{N}} = e^{\frac{-\beta\pi i}{N}}$ si y sólo si $k = 2N - \beta$.

4) $e^{\frac{k\pi i}{N}} = -e^{\frac{-\beta\pi i}{N}}$ si y sólo si $k = N - \beta$.

Por otro lado $e^{\frac{(\alpha+\beta)\pi i}{N}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si

$$3 - 2N = 1 - 2(N-1) \leq k - (\alpha + \beta) = 2tN \leq 2N - 1 - 2 = 2N - 3,$$

es decir $2t + 2 > 0$ y $2 - 2t < 0$.
Luego $t = 0$, es decir

$$k = \alpha + \beta.$$

$e^{\frac{k\pi i}{N}} = -e^{-\frac{(\alpha+\beta)\pi i}{N}}$ si y sólo si

$$1 + 2 \leq k + (\alpha + \beta) = N(1 - 2t) \leq 2N - 1 + 2N - 3,$$

es decir $\frac{1}{2} > t$ y $t > -\frac{3}{2}$. Luego

$$k = N - (\alpha + \beta) \text{ para } \alpha + \beta < N$$

o

$$k = 3N - (\alpha + \beta) \text{ para } (\alpha + \beta) > N.$$

$e^{\pi i} e^{\frac{(\alpha+\beta)\pi i}{N}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si

$$4 - 3N = 1 - N - (2N - 3) \leq k - N - (\alpha + \beta) = 2tN \leq 2N - 1 - N - 3 = N - 4,$$

es decir $2t + 3 \geq 1$ y $1 - 2t \geq 1$.
Luego $t \in \{0, -1\}$.

Si $t = 0$, entonces $k = N + \alpha + \beta$ y por tanto $\alpha + \beta < N$

Si $t = -1$, entonces $k = \alpha + \beta - N$ y por tanto $\alpha + \beta > N$

Así tenemos que:
1) Si $\alpha + \beta < N$, entonces

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq 2N - \alpha, 2N - \beta, N - \alpha, N - \beta, \alpha + \beta, N + \alpha + \beta \\ 1 & k = 2N - \alpha, 2N - \beta, N - \alpha, N - \beta, \alpha + \beta, N + \alpha + \beta \end{cases}$$

2) Si $\alpha + \beta > N$, entonces

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq 2N - \alpha, 2N - \beta, N - \alpha, N - \beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta - N \\ 1 & k = 2N - \alpha, 2N - \beta, N - \alpha, N - \beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta - N \end{cases}$$

3) Si $\alpha+\beta=N$, entonces

$$N_{1,k}=\begin{cases}0 & k\neq 2N-\alpha, 2N-\beta, N-\alpha, N-\beta, \alpha+\beta\\ 1 & k=\alpha,\beta,\alpha+N,\beta+N,2N-\alpha+\beta\end{cases}$$

$$\rho_{\frac{N}{3}}\otimes\theta_1(\gamma_1)=\omega^{\frac{-2N}{3}}=e^{\frac{-4\pi i}{3}}=e^{\frac{k\pi i}{N}} \text{ si y sólo si}$$

$$3\leq 3k=2N(3t-2)\leq 3(2N-1)=6N-3,$$

es decir $k=\frac{2N}{3}$. Luego

$$N_{1,k}=\begin{cases}0 & k\neq\frac{2N}{3}\\ 1 & k=\frac{2N}{3}\end{cases}$$

$$\rho_{\frac{N}{3}}\otimes\theta_2(\gamma_1)=-\omega^{-\frac{2N}{3}}=e^{\frac{-7\pi i}{3}}=e^{\frac{k\pi i}{N}} \text{ si y sólo si}$$

$$3\leq 3k=2N(6t+5)\leq 3(2N-1)=6N-3,$$

es decir $k=\frac{5N}{3}$. Luego

$$N_{1,k}=\begin{cases}0 & k\neq\frac{5N}{3}\\ 1 & k=\frac{5N}{3}\end{cases}$$

$\rho_{\frac{N}{3}}\otimes\theta_3(\gamma_1)=\begin{pmatrix}\omega^{\frac{-2N}{3}} & 0\\ \omega^{\frac{-2N}{3}} & -\omega^{\frac{-2N}{3}}\end{pmatrix}$, luego sus valores propios son $\omega^{\frac{-2N}{3}}=e^{\frac{8\pi i}{3}}$ y $-\omega^{\frac{-2N}{3}}=e^{\frac{11\pi i}{3}}$.

$e^{\frac{8\pi i}{3}}=e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $3\leq 3k=2N(4-3t)\leq 3(2N-1)$, es decir $k=\frac{2N}{3}$.
$e^{\frac{11\pi i}{3}}=e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $3\leq 3k=N(11-6t)\leq 3(2N-1)$, es decir $k=\frac{5N}{3}$.

$$N_{1,k}=\begin{cases}0 & k\neq\frac{2N}{3},\frac{5N}{3}\\ 1 & k=\frac{2N}{3},\frac{5N}{3}\end{cases}$$

$$\rho_{\frac{2N}{3}}\otimes\theta_1(\gamma_1)=\omega^{\frac{-4N}{3}}=e^{\frac{4\pi i}{3}}=e^{\frac{k\pi i}{N}} \text{ si y sólo si}$$

$$3\leq 3k=2N(2-3t)\leq 3(2N-1),$$

es decir $k = \frac{4N}{3}$. Luego

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq \frac{4N}{3} \\ 1 & k = \frac{4N}{3} \end{cases}$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2(\gamma_1) = -\omega^{\frac{-4N}{3}} = e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si

$$3 \leq 3k = N(6t+1) \leq 3(2N-1),$$

es decir $k = \frac{N}{3}$. Luego

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq \frac{N}{3} \\ 1 & k = \frac{N}{3} \end{cases}$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3(\gamma_1) = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{-4N}{3}} & 0 \\ \omega^{\frac{-4N}{3}} & -\omega^{\frac{-4N}{3}} \end{pmatrix}$, luego sus valores propios son $\omega^{\frac{4N}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ y $-\omega^{\frac{4N}{3}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

$e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $3 \leq 3k = 2N(2-3t) \leq 3(2N-1)$, es decir $k = \frac{4N}{3}$.

$e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{\frac{k\pi i}{N}}$ si y sólo si $3 \leq 3k = N(6t+1) \leq 3(2N-1)$, es decir $k = \frac{N}{3}$.

Por tanto

$$N_{1,k} = \begin{cases} 0 & k \neq \frac{4N}{3}, \frac{N}{3} \\ 1 & k = \frac{4N}{3}, \frac{N}{3} \end{cases}$$

Ahora calcularemos en $\rho(\gamma_2)$ el número de valores propios iguales a 1, donde $\rho \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{I\}$.

a) i) $\rho_2(\gamma_2) = -1$, luego

$$N_{2,1} = 1.$$

ii) $\rho_3(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^2 - 1,$$

por tanto sus valores propios $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, luego

$$N_{2,1} = 1.$$

b) $\rho_\alpha^+(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$(x+1)(x-1)^2,$$

por tanto sus valores propios 1 y -1, luego

$$N_{2,1} = 1.$$

$$\rho_\alpha^-(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

su polinomio característico es

$$(x-1)(x+1)^2,$$

por tanto sus valores propios 1 y -1, luego

$$N_{2,1} = 2.$$

c) $\rho_{\alpha,\beta}(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$(x-1)^3(x+1)^3,$$

por tanto sus valores propios 1 y -1, luego

$$N_{2,1} = 3.$$

$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1(\gamma_2) = 1$, luego

$$N_{2,1} = 0.$$

$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2(\gamma_2) = -1$, luego

$$N_{2,1} = 1.$$

$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^2 - 1$$

y por tanto los valores propios 1 y -1. Luego

$$N_{2,1} = 1.$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1(\gamma_2) = 1$, luego

$$N_{2,1} = 0.$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2(\gamma_2) = -1$, luego

$$N_{2,1} = 1.$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3(\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^2 - 1$$

y por tanto los valores propios 1 y -1. Luego

$$N_{2,1} = 1.$$

Ahora calcularemos en $\rho(\gamma_3)$ el número de valores propios iguales a $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, donde $\rho \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{I\}$.

1) *i*) $\rho_1(\gamma_3) = 1$, luego

$$N_{3,1} = N_{3,2} = 0.$$

ii) $\rho_2(\gamma_3) = 1$, luego

$$N_{3,1} = N_{3,2} = 0.$$

iii) $\rho_3(\gamma_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^2 + x + 1,$$

por tanto sus valores propios $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, luego

$$N_{3,1} = N_{3,2} = 1.$$

2) $\rho_\alpha^+(\gamma_3) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-\alpha} \\ \omega^{2\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^3 - 1,$$

por tanto sus valores propios $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ y 1, luego

$$N_{3,1} = N_{3,2} = 1.$$

$$\rho_\alpha^-(\gamma_3) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-\alpha} \\ \omega^{2\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$N_{3,1} = N_{3,2} = 1.$$

3) $\rho_{\alpha,\beta}(\gamma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{\alpha} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \omega^{\alpha+\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha+\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$(x^3 - 1)^2,$$

luego

$$N_{3,1} = N_{3,2} = 2.$$

$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1(\gamma_3) = \omega^{\frac{-N}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, luego

$$N_{3,1} = 0 \text{ y } N_{3,2} = 1.$$

$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2(\gamma_3) = \omega^{\frac{-N}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, luego

$$N_{3,1} = 0 \text{ y } N_{3,2} = 1.$$

$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3(\gamma_3) = \begin{pmatrix} -\omega^{\frac{-N}{3}} & \omega^{\frac{-N}{3}} \\ -\omega^{\frac{-N}{3}} & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^2 + e^{\frac{-2\pi i}{3}} x + e^{\frac{-4\pi i}{3}}$$

y por tanto los valores propios $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y 1. Luego

$$N_{3,1} = 1 \text{ y } N_{3,2} = 0.$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1(\gamma_3) = \omega^{\frac{-2N}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, luego

$$N_{3,1} = 1 \text{ y } N_{3,2} = 0.$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2(\gamma_3) = \omega^{\frac{-2N}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, luego

$$N_{3,1} = 1 \text{ y } N_{3,2} = 0.$$

$\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3(\gamma_3) = \begin{pmatrix} -\omega^{\frac{-2N}{3}} & \omega^{\frac{-2N}{3}} \\ -\omega^{\frac{-2N}{3}} & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$x^2 + e^{\frac{-4\pi i}{3}} x + e^{\frac{-8\pi i}{3}}$$

y por tanto los valores propios $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ y 1. Luego

$$N_{3,1} = 0 \text{ y } N_{3,2} = 1.$$

Ya podemos calcular la multiplicidad $n(\rho)$ de cada $\rho \in \mathrm{Irr}(G)$ en la representación analítica.

$n(\rho_1) = g(\mathcal{C}/G) = 0.$

$n(\rho_2) = -1 + \left\langle -\dfrac{N}{2N} \right\rangle + \langle -\frac{1}{2} \rangle = 0.$

$n(\rho_3) = -2 + \left\langle -\dfrac{N}{2N} \right\rangle + \left\langle -\dfrac{1}{3} \right\rangle + \left\langle -\dfrac{2}{3} \right\rangle + \left\langle -\dfrac{1}{2} \right\rangle = 0.$

$$\begin{aligned} n(\rho_\alpha^+) &= -3 + \left\langle -\frac{2N-2\alpha}{2N} \right\rangle + \left\langle -\frac{\alpha}{2N} \right\rangle + \left\langle -\frac{\alpha+N}{2N} \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle -\frac{1}{3} \right\rangle + \left\langle -\frac{2}{3} \right\rangle + \left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= -3 - \frac{2N-2\alpha}{2N} + 1 - \frac{\alpha}{2N} + 1 - \frac{\alpha+N}{2N} + 1 + \frac{3}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \{1, ..., \frac{N-1}{2}\}$, entonces

$$n(\rho_\alpha^-) = -3+\left\langle -\frac{2\alpha+N}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{2N-\alpha}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{N-\alpha}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{1}{3} \right\rangle+\left\langle -\frac{2}{3} \right\rangle+2\left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

Si $\alpha \in \{\frac{N+1}{2}, ..., N-1\}$, entonces

$$n(\rho_\alpha^-) = -3+\left\langle -\frac{2\alpha-N}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{2N-\alpha}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{N-\alpha}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{1}{3} \right\rangle+\left\langle -\frac{2}{3} \right\rangle+2\left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle = 1$$

$$n(\rho_{\frac{N}{2}}^-) = -3+\left\langle -\frac{2N-\alpha}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{N-\alpha}{2N} \right\rangle+\left\langle -\frac{1}{3} \right\rangle+\left\langle -\frac{2}{3} \right\rangle+2\left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

Si $\alpha + \beta = N$, entonces

$$\begin{aligned} n(\rho_{\alpha,\beta}) &= -6+\left\langle -\frac{2N-\alpha}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{N-\alpha}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{2N-\beta}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{N-\beta}{2N}\right\rangle+ \\ &\quad +\left\langle -\frac{\alpha+\beta}{2N}\right\rangle+2\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle+2\left\langle -\frac{2}{3}\right\rangle+3\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $\alpha+\beta<N$, entonces

$$\begin{aligned} n(\rho_{\alpha,\beta}) &= -6+\left\langle -\frac{2N-\alpha}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{N-\alpha}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{2N-\beta}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{N-\beta}{2N}\right\rangle+ \\ &\quad +\left\langle -\frac{N+\alpha+\beta}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{\alpha+\beta}{2N}\right\rangle+2\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle+2\left\langle -\frac{2}{3}\right\rangle+3\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $\alpha+\beta>N$, entonces

$$\begin{aligned} n(\rho_{\alpha,\beta}) &= -6+\left\langle -\frac{N-\beta}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{N-\alpha}{2N}\right\rangle+ \\ &\quad +\left\langle -\frac{2N-\beta}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{2N-\alpha}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{\alpha+\beta}{2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{\alpha+\beta-N}{2N}\right\rangle+ \\ &\quad +2\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle+2\left\langle -\frac{2}{3}\right\rangle+3\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$n(\rho_{\frac{N}{3}}\otimes\theta_1)=-1+\left\langle -\frac{2N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{2}{3}\right\rangle=0$$

$$n(\rho_{\frac{N}{3}}\otimes\theta_2)=-1+\left\langle -\frac{5N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle+\left\langle -\frac{2}{3}\right\rangle=0$$

$$n(\rho_{\frac{N}{3}}\otimes\theta_3)=-2+\left\langle -\frac{2N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{2N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle+\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle=0$$

$$n(\rho_{\frac{2N}{3}}\otimes\theta_1)=-1+\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle+\left\langle -\frac{4N}{3\cdot 2N}\right\rangle=0$$

$$n(\rho_{\frac{2N}{3}}\otimes\theta_2)=-1+\left\langle -\frac{N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle+\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle=1$$

$$n(\rho_{\frac{2N}{3}}\otimes\theta_3)=-2+\left\langle -\frac{4N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{N}{3\cdot 2N}\right\rangle+\left\langle -\frac{2}{3}\right\rangle+\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle=0$$

Así para $N \equiv 0(3)$, cuando N es par el número m de representaciones de grado 6 que aparecen es tal que:

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 6m + 3\left(\frac{N-2}{2} - 1\right) + 1, \text{ es decir}$$

$$m = \frac{N^2 - 6N + 12}{12}$$

y cuando N es impar el número a de representaciones de grado 6 que aparecen es tal que:

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 6m + 3\left(\frac{N-1}{2} - 1\right) + 1, \text{ es decir}$$

$$m = \frac{N^2 - 6N + 9}{12}$$

Si $N \not\equiv 0(3)$, cuando N es par el número r de representaciones de grado 6 que aparecen es tal que:

$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 6r + 3\frac{(N-2)}{2}$, es decir

$$r = \frac{(N-2)(N-4)}{12}$$

y cuando N es impar el número r de representaciones de grado 6 que aparecen es tal que

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 6r + 3\frac{(N-1)}{2}$$

es decir

$$r = \frac{(N-1)(N-5)}{12}$$

$\square$

Ejemplificaremos para $N = 8$ los valores del caracter según el teorema 5 y 8. No es díficil ver que las dos representaciones de grado 6 que aparece en la descomposición obtenida son $\rho_{3,6}$ y $\rho_{4,5}$. De hecho $\rho_{3,6}$ y $\rho_{4,5}$ están en diferentes órbitas y $3+6 = 4+5 > 8$.

Luego según el teorema 8 el caracter en $(\omega, 1) \in G$ corresponde a:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=5}^{7} \mathrm{tr}\rho_{\alpha}^{-}(a) + \mathrm{tr}\rho_{3,6}(a) + \mathrm{tr}\rho_{4,5}(a) &= 2\omega^5 + \omega^{-10} + 2\omega^6 + \omega^{-12} + 2\omega^7 + \omega^{14} \\ &\quad + 2(\omega^3 + \omega^6 + \omega^{-9} + \omega^4 + \omega^5 + \omega^{-9}) \\ &= \omega^2 + 2\omega^3 + 3\omega^4 + 4\omega^5 + 5\omega^6 + 6\omega^7\end{aligned}$$

Que es precisamente lo obtenido en el teorema 5. Ver demostración.

Como los caracteres de $\rho_{\alpha,\beta}$ y ρ_{α}^{-} tienen los mismos valores en $(1, \omega)$ que en $(\omega, 1)$, es también claro que coinciden los valores del caracter en $(1, \omega)$.

En $a \in G$ el caracter corresponde a 0, pues $\rho_{\alpha,\beta}(a) = \rho_{\alpha}^{-}(a) = 0$ y según Teorema 5 también. Ver demostración.

En $b \in G$ el caracter corresponde a -3, pues $\rho_{\alpha,\beta}(b) = 0$ y $\rho_{\alpha}^{-}(a) = -1$. Según Teorema 5 también. Ver demostración.

2.2. Representación racional. El siguiente teorema nos permite descomponer en irreducibles la representación racional.

TEOREMA 9. *Sea G grupo finito actuando en una superficie de Riemann S, con firma geométrica $(\gamma; [m_1, C_1], ..., [m_t, C_t])$. para cada representación compleja irreducible no trivial $\theta : G \longrightarrow GL(U)$, la multiplicidad $n(\theta)$ en la descomposición de $\rho_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ está dada por:*

$$n(\rho) = 2\dim(U)(\gamma - 1) + \sum_{k=1}^{t} (\dim(U) - \dim(\mathrm{Fix}_{G_k}(U)))$$

donde G_k es un representante de la clase de conjugación C_k.

DEMOSTRACIÓN. Ver [12]. □

TEOREMA 10. 1. *Si N es par y no es divisible por 3 la representación racional se descompone como suma de $N-2$ representaciones irreducibles de grado 3 y $\frac{(N-2)(N-4)}{6}$ representaciones irreducibles de grado 6, a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{1,\ldots,N-1\}\setminus\{\frac{N}{2}\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta\not\equiv 0(N)} \rho_{\alpha,\beta}$$

2. *Si N es impar y no es divisible por 3 la representación racional se descompone como suma de $N-1$ representaciones irreducibles de grado 3 y $\frac{(N-1)(N-5)}{6}$ representaciones irreducibles de grado 6, a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{1,\ldots,N-1\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta\not\equiv 0(N)} \rho_{\alpha,\beta}$$

3. *Si N es par y divisible por 3 la representación racional se descompone como suma de $N-4$ representaciones irreducibles de grado 3, $\frac{N^2-6N+12}{6}$ representaciones irreducibles de grado 6 y 2 de grado 1 a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{1,\ldots,N-1\}\setminus\{\frac{N}{3},\frac{N}{2},\frac{2N}{3}\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta\not\equiv 0(N)} \rho_{\alpha,\beta} \oplus \left(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2\right) \oplus \left(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2\right)$$

4. *Si N es impar y divisible por 3 la representación racional se descompone como suma de $N-3$ representaciones irreducibles de grado 3, $\frac{(N-3)^2}{6}$ representaciones irreducibles de grado 6 y 2 de grado 1 a saber:*

$$\bigoplus_{\alpha\in\{1,\ldots,N-1\}\setminus\{\frac{N}{3},\frac{2N}{3}\}} \rho_\alpha^- \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Lambda,\alpha+\beta\not\equiv 0(N)} \rho_{\alpha,\beta} \oplus \left(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2\right) \oplus \left(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2\right)$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la multiplicidad de la representación trivial es 0, pues el cociente total por acción es la esfera.
Observe que para θ representación irreducible de G, se tiene que
$\mathrm{Fix}_{G_k} U = \ker(\theta(g) - I)$, donde $\langle g\rangle = G_k$. Ocuparemos el vector generador de la Proposición 13.

Para calcular $n(\rho_2)$, debemos calcular la dimensión de los Kernel de las homotecias definidas por los siguientes escalares:

1. $\rho_2(g_1) - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$
   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $\rho_2(g_2) - 1 = 1 - 1 = 0$
   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 1$.

3. $\rho_2(g_3) = -1 - 1 = -2$
   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 0$.

Entonces $n(\rho_2) = 0$.

Ahora para $n(\rho_3)$, debemos calcular la dimensión de los Kernel de las siguientes matrices:

1. $\rho_3(g_1) - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 1$.

2. $\rho_3(g_2) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 0$.

3. $\rho_3(g_3) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 1$.

Entonces $n(\rho_2) = 0$.

Para $n(\rho_\alpha^+)$, debemos calcular la dimensión de los Kernel de las siguientes matrices:

1. $$\begin{aligned} \rho_\alpha^+(g_1) - I &= \begin{pmatrix} -0 & 0 & \omega^{2\alpha} \\ 0 & \omega^{-\alpha} & 0 \\ \omega^{-\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^{2\alpha} \\ 0 & \omega^{-\alpha} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^\alpha - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

$$2.\ \rho_\alpha^+(g_2) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^{-2\alpha} \\ \omega^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \omega^\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^{-2\alpha} \\ 0 & 1 & -\omega^{-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 1$.

$$3.\ \rho_\alpha^+(g_3) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 2$.

Entonces $n(\rho_\alpha^+) = 0$.

Para calcular $n(\rho_\alpha^-)$, debemos calcular la dimensión de los Kernel de las siguientes matrices:

$$1.\ \rho_\alpha^-(g_1) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega^{2\alpha} \\ 0 & -\omega^{-\alpha} & 0 \\ -\omega^{-\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\omega^{2\alpha} \\ 0 & -\omega^{-\alpha} - 1 & 0 \\ -\omega^{-\alpha} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así $\dim \mathrm{Fix}_{g_1}(U) = \begin{cases} 1 & \alpha = \frac{N}{2} \\ 0 & \alpha \neq \frac{N}{2} \end{cases}$

$$2.\ \rho_\alpha^-(g_2) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^{-2\alpha} \\ \omega^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \omega^\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega^{-2\alpha} \\ 0 & 1 & -\omega^{-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $\dim \mathrm{Fix}_{g_2}(U) = 1$.

$$3.\ \rho_\alpha^-(g_3) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $\dim \mathrm{Fix}_{g_3}(U) = 1$.

Entonces $n(\rho_\alpha^-) = \begin{cases} 0 & \alpha = \frac{N}{2} \\ 1 & \alpha \neq \frac{N}{2} \end{cases}$

Ahora calculemos $n(\rho_{\alpha,\beta})$. Veamos la dimensión de los correspondientes Kernel:

$$1.\ \rho_{\alpha,\beta}(g_1) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\alpha+\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \omega^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha} \\ 0 & 0 & -1 & \omega^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\beta} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} - 1 \end{pmatrix}$$

Así $\dim \operatorname{Fix}_{g_1} U = \begin{cases} 1 & \alpha+\beta \equiv 0(N) \\ 0 & \alpha+\beta \not\equiv 0(N) \end{cases}$.

$$2.\ \rho_{\alpha,\beta}(g_2) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \omega^{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega^{-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \omega^{-\alpha-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\omega^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $\dim \operatorname{Fix}_{g_2} U = 2$.

$$3.\ \rho_{\alpha,\beta}(g_2) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 3$.

Entonces $n(\rho_{\alpha,\beta}(g_3)) = \begin{cases} 1 & \alpha+\beta \not\equiv 0(N) \\ 0 & \alpha+\beta \equiv 0(N) \end{cases}$

Para $n(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1)$, hay que calcular la dimensión de los Kernel de las homotecias definidas por los siguientes escalares:

1. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1(g_1) - 1 = \omega^{\frac{2N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1(g_2) - 1 = \omega^{\frac{N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 0$.

3. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1(g_3) - 1 = 1 - 1 = 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 1$.

   Entonces $n(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_1) = 0$.

Para $n(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2)$, hay que calcular la dimensión de los Kernel de las homotecias definidas por los siguientes escalares:

1. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2(g_1) - 1 = -\omega^{\frac{2N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2(g_2) - 1 = \omega^{\frac{N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 0$.

3. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2(g_3) - 1 = -1 - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 0$.

   Entonces $n(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_2) = 1$.

Para $n(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3)$, hay que calcular la dimensión de los Kernel de las siguientes matrices:

1. $\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3(g_1) - I = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{2N}{3}} & 0 \\ \omega^{\frac{2N}{3}} & -\omega^{\frac{2N}{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{2N}{3}} - 1 & 0 \\ \omega^{\frac{2N}{3}} & -\omega^{\frac{2N}{3}} - 1 \end{pmatrix}$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $$\begin{aligned} \rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3(g_2) - I &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{\frac{N}{3}} \\ \omega^{\frac{N}{3}} & -\omega^{\frac{N}{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\omega^{\frac{N}{3}} \\ \omega^{\frac{N}{3}} & -\omega^{\frac{N}{3}} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & \omega^{\frac{N}{3}} \\ 0 & -\omega^{\frac{2N}{3}} - \omega^{\frac{N}{3}} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \omega^{\frac{N}{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 1$.

$$\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3(g_3) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 1$.

Entonces $n(\rho_{\frac{N}{3}} \otimes \theta_3) = 0$.

Para $n(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1)$, hay que calcular la dimensión de los Kernel de las homotecias dadas por los siguientes escalares:

1. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1(g_1) - 1 = \omega^{\frac{4N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1(g_2) - 1 = \omega^{\frac{2N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

3. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1(g_3) - 1 = 1 - 1 = 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 1$.

Entonces $n(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_1) = 0$.

Para $n(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2)$, hay que calcular la dimensión de los Kernel de las homotecias dadas por los siguientes escalares:

1. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2(g_1) - 1 = -\omega^{\frac{4N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2(g_2) - 1 = \omega^{\frac{2N}{3}} - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

3. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2(g_3) - 1 = -1 - 1 \neq 0$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

   Entonces $n(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_2) = 1$

Para $n(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3)$, hay que calcular la dimensión de los Kernel de las siguientes matrices:

1. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3(g_1) - I = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{4N}{3}} & 0 \\ \omega^{\frac{4N}{3}} & -\omega^{\frac{4N}{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{4N}{3}} - 1 & 0 \\ \omega^{\frac{4N}{3}} & -\omega^{\frac{4N}{3}} - 1 \end{pmatrix}$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_1} U = 0$.

2. $$\begin{aligned} \rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3(g_2) - I &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{\frac{2N}{3}} \\ \omega^{\frac{2N}{3}} & -\omega^{\frac{2N}{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\omega^{\frac{2N}{3}} \\ \omega^{\frac{2N}{3}} & -1 - \omega^{\frac{2N}{3}} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & \omega^{\frac{2N}{3}} \\ 0 & 1 + \omega^{\frac{2N}{3}} + \omega^{\frac{4N}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \omega^{\frac{2N}{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_2} U = 1$.

3. $\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3(g_3) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Luego $\dim \mathrm{Fix}_{g_3} U = 1$.

Entonces $n(\rho_{\frac{2N}{3}} \otimes \theta_3) = 0$.

Entonces, para N no divisible por 3 tenemos:

1. Si N es par se deduce que el número a de representaciones de grado 6 que aparecen en la representación racional es tal que:

$$(N-1)(N-2) = 6a + 3(N-2) \text{ , es decir}$$
$$a = \frac{(N-2)(N-4)}{6}.$$

2. Si N es impar el número a de representaciones de grado 6 que aparecen en la representacón racional es tal que:

$$(N-1)(N-2) = 6a + 3(N-1) \text{ , es decir}$$
$$a = \frac{(N-1)(N-5)}{6}.$$

Y para N divisible por 3 tenemos:

1. Si N es par se deduce que el número a de representaciones de grado 6 que aparecen en la representación racional es tal que:

$$(N-1)(N-2) = 6a + 3(N-4) + 1 + 1 \text{ , es decir}$$
$$a = \frac{N^2 - 6N + 12}{6}.$$

2. Si N es impar el número a de representaciones de grado 6 que aparecen en la representacón racional es tal que:

$$(N-1)(N-2) = 6a + 3(N-3) + 1 + 1 \text{ , es decir}$$
$$a = \frac{(N-3)^2}{6}.$$

□

3. Descomposición isógena de la Jacobiana de $\mathcal{C}$, para N primo

Usaremos un teorema de [12] para obtener la dimensión de los factores en la descomposición de $J\mathcal{C}$. La restricción de N aparecerá recién al momento de calcular el grado de la extensión del cuerpo de trazas para las representaciones de grado 6.

TEOREMA 11. *Sea G un grupo finito actuando en una superficie de Riemann S con firma geométrica $(\gamma; [m_1, C_1], ..., [m_1, C_t])$. Entonces la dimensión de cualquier subvariedad B_i, asociada a una representación irreducible racional no trivial $\mathcal{W}_i$, en la descomposición isógena de la correspondiente variedad Jacobiana JS está dada por:*

$$\dim B_i = k_i \left(\dim U_i(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} (\dim U_i - \dim \mathrm{Fix}_{G_k} U_i) \right),$$

donde G_k es un representante de la clase de conjugación C_k, $\dim U_i$ es la dimensión de una representación compleja irreducible U_i asociada a $\mathcal{W}_i$,

$$K_i = \mathbb{Q}(\chi_{U_i}(g) : g \in G),$$

con l_i el índice de Schur de U_i y $k_i = l_i \cdot \mid \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K_i \mid$.

DEMOSTRACIÓN. Ver[12].

□

Primero necesitamos calcular el índice de Schur y el orden del grupo $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ de las representaciones irreducibles complejas de G que aparecen en la representación racional.

PROPOSICIÓN 15. *Sea $H \leq G$ y suponga que H posee un complemento en G. Sea ϕ representación irreducible de H y suponga que $\phi^G = \chi$ es irreducible de G. Entonces el índice de Schur de χ divide al grado de ϕ*

DEMOSTRACIÓN. Ver X.8 en[5]

□

COROLARIO 4. *El índice de Schur de las representaciones ρ_α^- y $\rho_{\alpha,\beta}$ es 1.*

DEMOSTRACIÓN. Estas representaciones son inducidas por representaciones irreducibles de grado 1 de $\mu_N \times \mu_N \langle b \rangle$ y $\mu_N \times \mu_N$, respectivamente; que ciertamente posee complemento. Luego el resultado sigue de la proposición anterior.

□

LEMA 2. *Sean* $\alpha \in \{1, \ldots, N-1\} \setminus \{\frac{N}{2}, \frac{N}{3}, \frac{2N}{3}\}$ *y* χ *el caracter de la representación* ρ_{α}^{-}. *Entonces*

$$[\mathbb{Q}(\chi(g) : g \in G) : \mathbb{Q}] = \varphi\left(\frac{N}{\text{mcd}(N,\alpha)}\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Veremos que $\mathbb{Q}(\chi(g) : g \in G) = \mathbb{Q}(2\omega^{\alpha} + \omega^{-2\alpha}) = \mathbb{Q}(\omega^{\alpha})$ siendo ω^{α} raíz $\frac{N}{\text{mcd}(N,\alpha)}$-ésima primitiva de la unidad, de esto la proposición se sigue fácilmente.

Sea $\tau := \omega^{\alpha}$. Tenemos las siguientes extensiones cuerpo:

$$\mathbb{Q}(\tau) \supset \mathbb{Q}(\chi(g) : g \in G) \supset \mathbb{Q}(2\tau + \tau^{-2})$$

luego basta verificar que

$$\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(2\tau + \tau^{-2}),$$

pero como $\mathbb{Q}(\tau) \supset \mathbb{Q}$ es de Galois, es suficiente ver que

$$\text{Gal}_{\mathbb{Q}(2\tau+\tau^{-2})}(\mathbb{Q}(\tau)) = \{Id\}.$$

Suponga que existe $\sigma \in \text{Gal}_{\mathbb{Q}(2\tau+\tau^{-2})}(\mathbb{Q}(\tau)) \setminus \{Id\}$, luego $\sigma(\tau) = \tau^{r}$, para algún $r \neq 1$. Entonces $\sigma(2\tau + \tau^{-2}) = 2\tau^{r} + \tau^{-2r} = 2\tau + \tau^{-2}$. Luego

$$2(\tau^{r} - \tau) = \frac{1}{\tau^{2}} - \frac{1}{\tau^{2r}} = \frac{\tau^{2r} - \tau^{2}}{\tau^{2}\tau^{2r}} = \frac{(\tau^{r} - \tau)(\tau^{r} + \tau)}{\tau^{2}\tau^{2r}}$$

y por tanto

$$2 = \frac{\tau^{r} + \tau}{\tau^{2}\tau^{2r}}.$$

De aquí se concluye que $\mid \tau^{r} + \tau \mid = 2 = \mid \tau^{r} \mid + \mid \tau \mid$ y entonces $\tau^{r} = \lambda\tau$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\mid \lambda \mid = 1$. Observe que si $\lambda = -1$, entonces $\tau^{r} + \tau = 0$, lo cual contradice lo anterior. En conclusión $\lambda = 1$, es decir $\tau^{r} = \tau$, lo cual no es posible. Así

$$\text{Gal}_{\mathbb{Q}(2\tau+\tau^{-2})}(\mathbb{Q}(\tau)) = \{Id\}.$$

□

Recordemos que Λ es un conjunto de pares $(\alpha, \beta) \in \{1, ..., N-1\} \times \{1, ..., N-1\}$ que indexan completamente las representaciones irreducibles de grado g de G. Para calcular el grado de esta extensión, necesitamos restringir los valores de N.

LEMA 3. *Sea $N > 6$ primo y considere las representaciones y notaciones anteriores. Sean $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ tal que $\alpha + \beta \not\equiv 0(N)$. Denote por χ al caracter de $\rho_{\alpha,\beta}$ y $K = \mathbb{Q}(\chi(g) : g \in G)$. Entonces:*

$$[K : \mathbb{Q}] = \begin{cases} \frac{N-1}{3} & \alpha = r\beta \text{ para algún } r \text{ con } r^3 \equiv 1(N) \\ N-1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Separaremos dos casos.

Primero suponga que $N \equiv 1(3)$. Como N es primo, por el teorema de Cauchy, existe $r \not\equiv 1(N)$ tal que $r^3 \equiv 1(N)$.
Sea $\alpha \equiv r\beta(N)$. Veremos que

$$| \operatorname{Gal}_K \mathbb{Q}(\omega) |= 3.$$

Sea $\sigma \in \operatorname{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega)$ definido por $\sigma(\omega) = \omega^r$, entonces $| \sigma |= 3$.
En efecto $\sigma^3(\omega) = \omega^{r^3} = \omega$.

Ahora demostraremos que $\langle\sigma\rangle = \operatorname{Gal}_K \mathbb{Q}(\omega)$.

Considere $\sigma' \in \operatorname{Gal}_K \mathbb{Q}(\omega)$, luego $\sigma'(\omega) = \omega^s$, para algún $s \in \mathbb{Z}$. Debemos demostrar que $\sigma' \in \langle\sigma\rangle$, es decir $s \equiv 1(N)$ o $s \equiv r(N)$ o $s \equiv r^2(N)$.
Observe que como N es primo y $r \not\equiv 1(N)$, tenemos que

$$r^3 - 1 \equiv (r-1)(r^2 + r + 1) \equiv 0(N) \text{ implica } r^2 + r + 1 \equiv 0(N)$$

Sea $\gamma = -\alpha - \beta$, multiplicando por β se obtiene

$$\beta + \beta r + \beta r^2 \equiv \beta + \beta r + \alpha r(N),$$

sumando α concluimos

$$\alpha \equiv \alpha + \beta + \beta r + \alpha r \equiv (\alpha + \beta)(1 + r) \equiv -\gamma(1 + r)(N).$$

Equivalentemente $r\beta \equiv -\gamma - \gamma r(N)$ y por tanto

$$\gamma \equiv -\gamma r - r\beta \equiv \alpha r(N).$$

Entonces

$$r\gamma \equiv \beta(N).$$

Por otro lado, $\chi(\omega, 1) = 2\omega^\alpha + 2\omega^\beta + 2\omega^{-\alpha-\beta} \in K$, entonces:

$$\omega^\alpha + \omega^\beta + \omega^\gamma = \omega^{s\alpha} + \omega^{s\beta} + \omega^{s\gamma},$$

pero como consideramos $N > 6$, en el conjunto

$$\{\omega^\alpha, \omega^\beta, \omega^\gamma, \omega^{s\alpha}, \omega^{s\beta}, \omega^{s\gamma}\},$$

deben haber elementos iguales, pues de lo contrario son parte de una base para $\mathbb{Q}(\omega)$ y al mismo tiempo serían linealmente dependientes. Del hecho que α, β y γ son diferentes entre sí, se concluye que podemos tener 3 casos:

1. $\alpha \in \{s\alpha, s\beta, s\gamma\}$. Si $\alpha = s\alpha$, entonces $s = 1$. Si $\alpha = s\beta$, entonces $r\beta = s\beta$ y por tanto $r = s$. Si $\alpha = s\gamma$, entonces $\gamma = r\alpha = rs\gamma$ y por tanto $rs = 1$, es decir $s = r^2$.

2. $\beta \in \{s\alpha, s\beta, s\gamma\}$. Si $\beta = s\alpha$, entonces $\beta = sr\beta$ y por tanto $rs = 1$, es decir $\sigma' = \sigma^2$. Si $\beta = s\beta$, entonces $s = 1$. Si $\beta = s\gamma$, entonces $r\beta = rs\gamma = s\beta$ y por tanto $r = s$.

3. $\gamma \in \{s\alpha, s\beta, s\gamma\}$. Si $\gamma = s\alpha$, entonces $r\alpha = s\alpha$ y por tanto $r = s$. Si $\gamma = s\beta$, entonces $r\gamma = rs\beta$ y por tanto $rs = 1$, es decir $s = r^2$. Si $\gamma = s\gamma$, entonces $s = 1$.

Ahora si $\alpha \not\equiv r\beta(N)$ para todo r tal que $r^3 \equiv 1(N)$, entonces hay que ver que $\mathrm{Gal}_K \mathbb{Q}(\omega) = \{Id\}$. Suponga que existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_K \mathbb{Q}(\omega) \setminus \{Id\}$, es decir $\sigma(\omega) = \omega^s$, con $s \not\equiv 1(N)$. Por el análisis anterior, tenemos los siguientes casos:

1. $\alpha = s\beta$
   Si $\beta = s\gamma$ luego $\gamma = s\alpha$. Entonces $\gamma = s\alpha = s^2\beta = s^3\gamma$, es decir $s^3 \equiv 1(N)$, lo cual es una contradicción.
   Si $\beta = s\alpha$ luego $\gamma = s\gamma$. Entonces $s = 1$, lo cual es una contradicción.

2. $\alpha = s\gamma$
   Entonces $\beta = s\alpha$ y $\gamma = s\beta$. Entonces $\beta = s^2\gamma = s^3\beta$, es decir $s^3 \equiv 1$, lo cual es una contradicción.

3. $\gamma = s\alpha$
   Entonces $\beta = s\gamma$ y $\alpha = s\beta$. Entonces $\gamma = s^3\gamma$, es decir $s^3 \equiv 1$, lo cual es una contradicción.

Lo anterior aplica al caso que $N \not\equiv 1(3)$.

□

OBSERVACIÓN 10. Si $N \not\equiv 1(3)$ de inmediato sabemos que el grado de la extensión buscada es $N - 1$.

OBSERVACIÓN 11. Para $N = 5$ no existen α, β de modo que $\alpha + \beta \not\equiv 0(N)$. De hecho las dos representaciones de grado 6 que posee en este caso son $\rho_{4,1}$ y $\rho_{3,2}$ y ambas no aparecen en la representación racional, pues los correspondientes subíndices suman 5.

TEOREMA 12. *Sea N primo:*

1. *Si $N \not\equiv 1(3)$, entonces la descomposición isotípica de JC está dada por*

$$JC \sim B_0^3 \times B_1^6 \times ... \times B_{\frac{N-5}{6}}^6,$$

B_0 es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ y corresponde a la representación irreducible de G sobre $\mathbb{Q}$, asociada a ρ_α^-, para cualquier α.

Para $i > 0$, B_i es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ y corresponden a la representación irreducible de G sobre $\mathbb{Q}$, asociada a alguna $\rho_{\alpha,\beta}$ que aparece en la representación racional. Para $i > 0$

2. *Si $N \equiv 1(3)$, entonces la desomposición isotipica de JC está dada por*

$$JC \sim B^6 \times B_0^3 \times B_1^6 ... \times B_{\frac{N-7}{6}}^6,$$

B es de dimensión $\frac{N-1}{6}$ y corresponde a la representación irreducible de G sobre $\mathbb{Q}$, asociada a las representaciones de grado 6 que aparecen en la representación racional y tienen grupo de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ de orden $\frac{N-1}{3}$.

B_0 es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ y corresponde a la representación irreducible de G sobre $\mathbb{Q}$, asociada a ρ_α^-, para cualquier α.

Para $i > 0$, B_i es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ y corresponde a la representación irreducible de G sobre $\mathbb{Q}$, asociada a las representaciones de grado 6 que aparecen en la representación racional y tienen grupo de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ de orden $N-1$.

DEMOSTRACIÓN. Como para cada ρ_α^- el correspondiente grupo de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ es de orden $N-1$ y las otras posibles representaciones de orden 3 no aparecen en la representación racional, tenemos que las representaciones ρ_α^- dejan una sola órbita de largo $N-1$ y la correspondiente subvariedad B_0 es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ con multiplicidad 3.

Si $N \not\equiv 1(3)$, existen s subvariedades asociadas a las s órbitas de la acción de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ de orden $N-1$ en las representaciones irreducibles de grado 6 que aparecen en la representación racional, cada una de estas subvariedades es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ y aparece con multiplicidad 6. Luego

$$JC \sim B_0^3 \times B_1^6 \times ... \times B_s^6.$$

Considerando la dimensión nos queda que

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 3\frac{N-1}{2} + s\left(6\frac{N-1}{2}\right),$$

equivalentemente

$$s = \frac{N-5}{6}.$$

Si $N \equiv 1(3)$, entonces existe un elemento de orden 3 en el grupo $\mathbb{Z}_N{}^*$, es decir existe $r_0 \neq 1$ tal que $r_0^3 \equiv 1(N)$ y por tanto también existe $r_1 \neq 1, r_0$ talque $r_1^3 \equiv 1(N)$. Entonces los pares $(r_0\beta, \beta)$ y $(r_1\beta, \beta)$, que son $2(N-1)$, son tales que la correspondiente representación aparece en la representación racional y tienen grupo de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}K}$ de orden $\frac{N-1}{3}$. Entonces tenemos $\frac{N-1}{3}$ representaciones de grado 6, que se deben agrupar en órbitas de precisamente largo $\frac{N-1}{3}$, es decir tenemos una sola órbita y por tanto una sola subvariedad B asociada, de dimensión $\frac{N-1}{6}$, con multiplicidad 6. También existen s subvariedades asociadas a las s órbitas correspondientes a las representaciones de grado 6 con grupo de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ de orden $N-1$, cada una de estas subvariedades es de dimensión $\frac{N-1}{2}$ y aparece con multiplicidad 6. Luego

$$J\mathcal{C} \sim B_0^3 \times B^6 \times B_1^6 \ldots \times B_s^6.$$

Considerando la dimensión nos queda que

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 3\frac{N-1}{2} + 6\frac{N-1}{6} + s\left(6\frac{N-1}{2}\right)$$

equivalentemente

$$s = \frac{N-7}{6}.$$

□

OBSERVACIÓN 12. Como comentario final podemos agregar que además de la pregunta evidente de qué sucede con las dimensiones de las subvariedades en la descomposición de la variedad Jacobiana correspondiente a cada curva de Fermat $\mathcal{C}(N)$ para el caso N no primo, quedan otras preguntas pendientes y podrían ser motivo de estudios futuros. Entre ellas podemos destacar:

1. Descripción geométrica de los factores de la descomposición de $J\mathcal{C}(N)$, como Jacobianas o Pryms de cubrimientos intermedios.
2. Comparación de la acción de G en $\mathcal{C}(N)$ con las distintas listas de acciones que existen; por ejemplo, las que aparecen en el trabajo de Tesis de Magister [13].
3. Polarizaciones de las subvariedades de la descomposición de $J\mathcal{C}(N)$.

4. Descripción del núcleo de la isogenia correspondiente a la descomposición de $J\mathcal{C}(N)$.

Bibliografía

[1] Birkenhake, Ch., Lange, H., *Complex Abelian varieties* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 302. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xii+635 pp. ISBN: 3-540-20488-1

[2] Carocca, A., Rodríguez, R. E., *Jacobians with group actions and rational idempotents* Journal of Algebra, Volume 306, Issue 2, 15 December 2006, Pages 322-343.

[3] Chevalley, C., Weil, A., *Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 10 (1934), pp. 358-361.

[4] Farkas, H. M., Kra, I., *Riemann Surfaces* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, 1992. xvi+363 pp. ISBN: 0-387-97703-1

[5] Isaacs, I. M., *Character theory of finite groups.* Corrected reprint of the 1976 original [Academic Press, New York; MR0460423]. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006. xii+310 pp. ISBN: 978-0-8218-4229-4; 0-8218-4229-3.

[6] Labbe, G., *"La Geometría de la Acción de los Automorfismos sobre Variedades Abelianas".* Tesis Doctorado Pontificia Universidad Católica de Chile. 1995

[7] Lang, S., *Introduction to Algebraic and Abelian Functions* Second edition. Berlin: Springer. Number 89 in Graduate Text in Mathematics.

[8] Lange, H., Recillas, S., *Abelian varieties with group action* J. Reine Angew. Math. 575 (2004), 135–155.

[9] Miranda, R., *Algebraic curves and Riemann surfaces* Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. xxii+390 pp. ISBN: 0-8218-0268-2

[10] Recillas, S., Rodríguez, R.E., *Jacobians and representations of* S_3 Workshop on Abelian Varieties and Theta Functions (Spanish) (Morelia, 1996), 117–140, Aportaciones Mat. Investig., 13, Soc. Mat. Mexicana, México, 1998.

[11] Rodríguez R. E., *Introducción a las Variedades Abelianas* Apuntes. Pontificia Universidad Católica de Chile, 2002.

[12] Rojas, A.M., *Group Action on Jacobian varieties* Rev. Mat. Iberoam. 23 (2007), no. 2, 397–420.

[13] Romero, M., *Realización de acciones de grupo en Superficies de Riemann* Tesis de Magister de la Pontificia Universidad Católica de Chile, 2008.

[14] Sánchez-Argáez, A., *Actions of the group* A_5 *in Jacobian varieties* (Spanish. Spanish summary) XXXI National Congress of the Mexican Mathematical Society (Spanish) (Hermosillo, 1998), 99–108, Aportaciones Mat. Comun., 25, Soc. Mat. Mexicana, México, 1999.

[15] Serre, J-P., *Linear Representations of Finite Groups* Translated from the second French edition by Leonard L. Scott. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. ISBN: 0-387-90190-6

[16] Tzermias, P., *The group of Automorphisms of the Fermat Curve* Journal of Number Theory, Vol.53, (1995), 173-178.