

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

La métrica de Hilbert en dominios convexos

por

Paulina Barriga Fehrman

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Martin Chuaqui Farrú

Comisión Informante: Martin Chuaqui
Gonzalo Riera
Dennis Stowe

Diciembre, 2006

Santiago, Chile

Índice

1. Introducción	1
2. La métrica de Hilbert	5
3. Forma infinitesimal	11
4. Comparación de la métrica de Hilbert y la métrica de Poincaré	20
5. Distorsión	25

1. Introducción

Un ejemplo de geometría no euclidea lo constituye el disco unitario \mathbb{D} en el plano complejo \mathbb{C} con la métrica hiperbólica o de Poincaré. Esta métrica ha sido estudiada ampliamente y sus características principales han permitido que sea utilizada en el desarrollo del análisis complejo. Gracias al Teorema de mapeo de Riemann, este modelo geométrico se puede dar en cualquier dominio simplemente conexo distinto de todo el plano. La métrica de Poincaré en \mathbb{D} admite una descripción sencilla en términos de la razón cruzada de cuatro puntos z_0, z_1, z_2, z_3 que, recordemos, se define por

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_0} \cdot \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3}.$$

Usaremos la convención usual de que $\frac{x - \infty}{y - \infty} = 1$ para todo $x, y \in \mathbb{C}$.

Para $r \in (-1, 1)$, la distancia de Poincaré de r al origen está dada por

$$d_h(0, r) = \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right|,$$

entonces para $r_1, r_2 \in (-1, 1)$ se tendrá que

$$\begin{aligned} d_h(r_1, r_2) &= \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{1+r_2}{1-r_2} \right) - \log \left(\frac{1+r_1}{1-r_1} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{r_1 - 1}{r_1 - (-1)} \cdot \frac{r_2 - (-1)}{r_2 - 1} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \log(-1, r_1, r_2, 1) \right|. \end{aligned}$$

La invariancia de la razón cruzada bajo transformaciones de Möbius nos permite extender la definición de d_h a todo el disco unitario. Para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, tomemos T , un automorfismo del disco unitario tal que $T(z_1) = 0$ y $T(z_2) \in (0, 1)$. Entonces

$$d_h(T(z_1), T(z_2)) = \frac{1}{2} \left| \log(-1, T(z_1), T(z_2), 1) \right|,$$

y $(-1, T(z_1), T(z_2), 1) = (T(a), T(z_1), T(z_2), T(b)) = (a, z_1, z_2, b)$, donde $a, b \in \partial\mathbb{D}$ son los extremos del arco de círculo perpendicular a $\partial\mathbb{D}$ que contiene a z_1 y z_2 . Con esto se define

la distancia de Poincaré entre z_1 y z_2 por

$$d_h(z_1, z_2) := \frac{1}{2} |\log(a, z_1, z_2, b)|.$$

Notemos que con esta definición es claro que la métrica hiperbólica es invariante bajo transformaciones de Möbius y, por lo tanto, podemos escribirla también como

$$\begin{aligned} d_h(z_1, z_2) &= d_h(T(z_1), T(z_2)) \\ &= \frac{1}{2} |\log(-1, T(z_1), T(z_2), 1)| \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} \right). \end{aligned}$$

Las geodésicas de esta métrica resultan ser los arcos de círculos perpendiculares a la frontera del disco unitario.

En esta tesis estudiaremos una segunda métrica en dominios convexos en \mathbb{C} , cuya definición es, de alguna manera, análoga a la definición de d_h . Sea Ω un dominio convexo acotado en \mathbb{C} y $\partial\Omega$ su frontera. Sean $x, y \in \Omega$ y $a, b \in \partial\Omega$ tales que el segmento lineal entre a y b contiene a x e y . Entonces, se define la métrica de Hilbert por

$$\begin{aligned} d_H(x, y) &= \frac{1}{2} \log((a, x, y, b)) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{x - b}{x - a} \cdot \frac{y - a}{y - b} \right). \end{aligned}$$

Las geodésicas de esta métrica en un dominio estrictamente convexo, que están descritas en el capítulo 2, resultan ser las líneas rectas. Entonces, tomando $\Omega = \mathbb{D}$, observamos que tanto la métrica de Hilbert como la de Poincaré tienen la misma forma: logaritmo de la razón cruzada de cuatro puntos de una geodésica. Notemos, además, que coinciden en cualquier diámetro del disco. Este último hecho, por sencillo que sea, nos será de mucha utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos.

El propósito de esta tesis es hacer un estudio comparativo de las métricas de Poincaré y de Hilbert, primero en el disco \mathbb{D} y luego, en dominios convexos más generales. Más precisamente, buscamos versiones análogas del Lema de Schwarz, determinamos si existe

invariancia bajo automorfismos del disco y hacemos una comparación cuantitativa entre ambas. Para llevar a cabo esta tarea, nos resultó fundamental estudiar y comparar sus respectivas *formas infinitesimales*. En el capítulo 3 vemos la definición formal de forma infinitesimal, la definición de largo de curva a través de la forma infinitesimal y por qué podemos conocer y estudiar más una métrica a través de ello. Es por esto que estudiaremos también algunos ejemplos de formas infinitesimales de otras métricas. Por ahora, sólo diremos que la forma infinitesimal de una función distancia en un punto y en una dirección dados, corresponde a la derivada direccional de la distancia en ese punto y en esa dirección.

Una diferencia significativa entre las métricas de Poincaré y de Hilbert, es que la forma infinitesimal de la primera sólo depende del punto y no de la dirección, mientras que la forma infinitesimal de la métrica de Hilbert cerca de la frontera de su dominio exhibe un comportamiento distinto en orden de magnitud para direcciones normales y tangentes a la frontera.

Otro hecho significativo que se establece en el capítulo 3 es que, tal como la métrica de Poincaré, d_H es una métrica interna, es decir, es igual a la integral de su forma infinitesimal.

Es importante que enunciemos dos teoremas, que necesitaremos en el desarrollo de los siguientes capítulos.

Teorema 1.1 (Lema de Schwarz) *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ función analítica y sean $z, w \in \mathbb{D}$.*

Entonces

(i)

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|$$

(ii)

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Se tiene igualdad en (i) para $z \neq w$ o se tiene igualdad en (ii) para algún z si y sólo si f es transformación de Möbius.

Para la demostración de este teorema ver [6].

El Lema de Schwarz tiene una versión normalizada, muy útil en el desarrollo de algunos resultados:

Corolario 1.2 *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ función analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$\begin{cases} |f(z)| \leq |z| \\ |f'(0)| \leq 1 \end{cases}$$

donde las igualdades ocurren si y sólo si $f(z) = cz$ con $|c| = 1$.

Por último, es necesario decir que durante el desarrollo de esta tesis consideraremos sólo dominios convexos del plano complejo, pero la métrica de Hilbert se puede definir en convexos de \mathbb{R}^n y muchos de nuestros resultados se generalizan fácilmente a estos dominios.

2. La métrica de Hilbert

A lo largo de este capítulo, Ω es un dominio estrictamente convexo acotado en \mathbb{C} y $\partial\Omega$ su frontera.

Sean $x, y \in \Omega$ y $a, b \in \partial\Omega$ tales que el segmento lineal entre a y b contiene a x e y . Denotaremos este segmento lineal por $[a, x, y, b]$, donde los puntos están en ese mismo orden. Entonces, se define la métrica de Hilbert por

$$d_H(x, y) = \frac{1}{2} \log((a, x, y, b)),$$

donde (a, x, y, b) es la razón cruzada de estos puntos, es decir, $(a, x, y, b) = \frac{x-b}{x-a} \cdot \frac{y-a}{y-b}$.

Nótese que en la definición de d_H , se usa una razón cruzada en donde se considera el orden relativo de los puntos.

Para poder estudiar con más detalle esta métrica, es necesario tener presente algunas propiedades de la razón cruzada.

Sean $a, b \in \partial\Omega$ y $x, y, c, d \in \Omega$ tales que se encuentran en una misma cuerda $[a, c, x, y, d, b]$. Entonces podemos escribir cada uno de esos puntos de la forma

$$x = (1 - t_x)a + t_x b$$

$$y = (1 - t_y)a + t_y b$$

$$c = (1 - t_c)a + t_c b$$

$$d = (1 - t_d)a + t_d b$$

con $0 < t_c < t_x < t_y < t_d < 1$. Entonces se cumple:

$$(a, x, y, d) = \frac{t_d - t_x t_y}{t_d - t_y t_x} > \frac{1 - t_x t_y}{1 - t_y t_x} = (a, x, y, b) \quad (1)$$

$$(c, x, y, b) = \frac{1 - t_x t_y - t_c}{1 - t_y t_x - t_c} > \frac{1 - t_x t_y}{1 - t_y t_x} = (a, x, y, b) \quad (2)$$

$$(c, x, y, d) > (a, x, y, b) \quad (3)$$

$$(a, x, y, b) \cdot (a, y, d, b) = (a, x, d, b) \quad (4)$$

Teorema 2.1 Sea Ω un dominio estrictamente convexo acotado en \mathbb{C} . Entonces d_H es una métrica en Ω .

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que $d_H(x, y) \geq 0$ lo hacemos a través de las siguientes equivalencias. Sea $[a, x, y, b] \in \Omega$.

$$\begin{aligned} d_H(x, y) \geq 0 &\iff (a, x, y, b) \geq 1 \\ &\iff (x - b)(y - a) \geq (x - a)(y - b) \end{aligned}$$

Pero $x = (1 - t_x)a + t_x b$ y $y = (1 - t_y)a + t_y b$ con $t_y \geq t_x$ y $t_y, t_x \in (0, 1)$.

Luego,

$$\begin{aligned} &(a, x, y, b) \geq 1 \\ \iff &((1 - t_x)a + t_x b - a)((1 - t_y)a + t_y b - a) \geq ((1 - t_x)a + t_x b - a)((1 - t_y)a - (1 - t_y)b) \\ \iff &(1 - t_x)(t_y) \geq (1 - t_y)(t_x) \\ \iff &t_y \geq t_x \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $d_H(x, y) = 0$, esto es $(a, x, y, b) = 1$ lo que equivale a que $x = y$ ($t_x = t_y$).

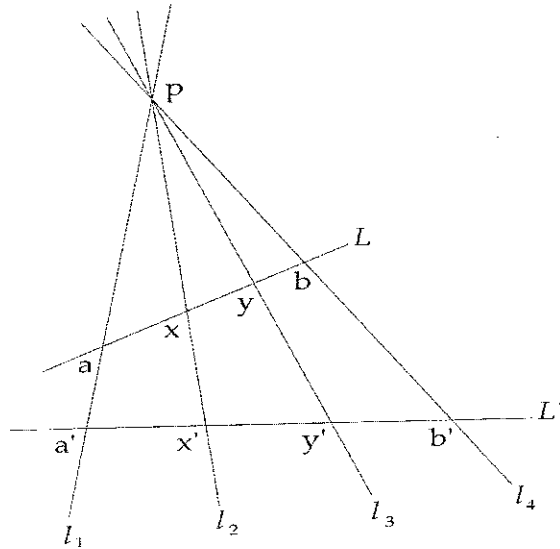
Por la forma de la definición de d_H , tenemos que $d_H(y, x) = \frac{1}{2} \log((b, y, x, a))$ y es claro que $(a, x, y, b) = (b, y, x, a)$. Por lo tanto, $d_H(x, y) = d_H(y, x)$.

Para demostrar la desigualdad triangular, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2 Sean l_1, l_2, l_3, l_4 rectas concurrentes en un punto p (si las rectas son paralelas este punto es el infinito) y sean L y L' rectas que las intersectan respectivamente en cuatro puntos distintos a, x, y, b y a', x', y', b' . Entonces $(a, x, y, b) = (a', x', y', b')$.

DEMOSTRACIÓN

Esta demostración la encontramos en [8], pero para el desarrollo de este capítulo es importante que la repasemos. Recordemos que el área de un triángulo se puede calcular como la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos. Sea h_L la distancia euclideana entre el punto p y la recta L .



Así, dadas las hipótesis del lema tenemos que

$$Area\Delta pxb = \frac{|x-b|h_L}{2} = \frac{|p-x||p-b|\text{sen}\angle xpb}{2}$$

$$Area\Delta pax = \frac{|x-a|h_L}{2} = \frac{|p-x||p-a|\text{sen}\angle xpa}{2}$$

$$Area\Delta pyb = \frac{|y-b|h_L}{2} = \frac{|p-y||p-b|\text{sen}\angle ypb}{2}$$

$$Area\Delta pay = \frac{|y-a|h_L}{2} = \frac{|p-y||p-a|\text{sen}\angle ypa}{2}$$

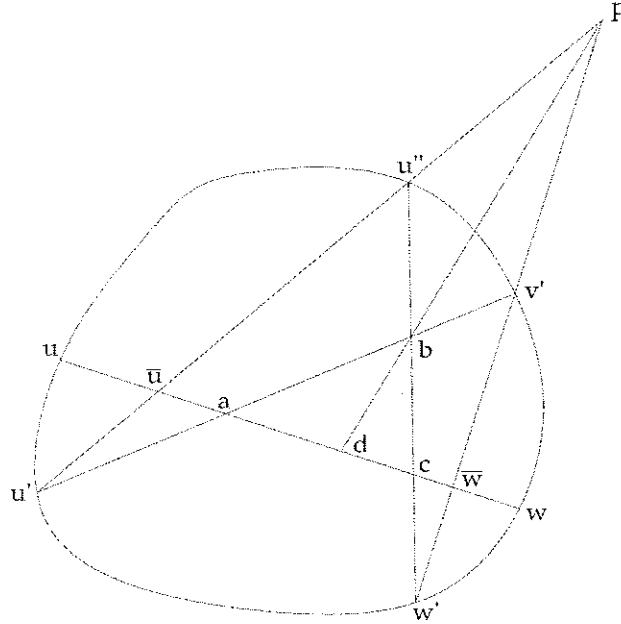
Entonces

$$\begin{aligned} (a, x, y, b) &= \frac{|x-b||y-a|}{|x-a||y-b|} \\ &= \frac{|p-x||p-b|\text{sen}\angle xpb}{|p-x||p-a|\text{sen}\angle xpa} \frac{|p-y||p-b|\text{sen}\angle ypb}{|p-y||p-a|\text{sen}\angle ypa} \\ &= \frac{\text{sen}\angle xpb \text{sen}\angle ypb}{\text{sen}\angle xpa \text{sen}\angle ypa} \end{aligned}$$

y de este cálculo se concluye que la razón cruzada de estos cuatro puntos sólo depende de los ángulos comprendidos entre los lados de los triángulos que se pueden formar con el punto p . Pero los ángulos de los que depende la razón cruzada de los puntos a', x', y', b' tendrán las mismas medidas y, por lo tanto,

$$(a, x, y, b) = (a', x', y', b').$$

Ahora, entonces, podemos demostrar la desigualdad triangular. Para esto tenemos la siguiente figura. Sean $a, b, c, d, \bar{u}, \bar{w} \in \Omega$, $u, u', u'', v', w, w' \in \partial\Omega$ y $p \in \bar{\Omega}^c$.



De esta situación, podemos concluir gracias al lema anterior que

$$(u', a, b, v') = (\bar{u}, a, d, \bar{w}) \geq (u, a, d, w)$$

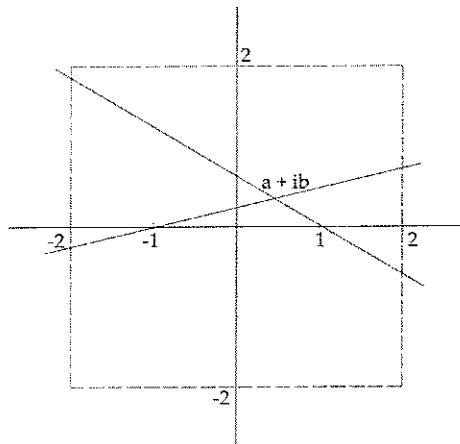
$$(u'', b, c, w') = (\bar{u}, d, c, \bar{w}) \geq (u, d, c, w)$$

Por lo tanto $(u', a, b, v') \cdot (u'', b, c, w') \geq (u, a, d, w) \cdot (u, d, c, w) = (u, a, c, w)$ y aplicando logaritmo se obtiene $d_H(a, b) + d_H(b, c) \geq d_H(a, c)$ con igualdad si y sólo si a, b y c son colineales.

□

Es claro, entonces, que las líneas rectas para d_H en Ω son las geodésicas, ya que es donde los puntos cumplen la igualdad de la desigualdad triangular. Es importante que mencionemos que es necesario que el dominio Ω sea estrictamente convexo para que $d_H(x, y)$ sea una métrica con las características que hemos mencionado, en particular, para que las geodésicas sean sólo las líneas rectas, ya que si el dominio tuviera dos o más lados rectos entonces se tendría igualdad en la desigualdad triangular sin necesidad de

colinealidad de los puntos. Por ejemplo, consideremos el cuadrado $(-2, 2) \times (-2, 2)$ en el plano complejo y un punto $a + ib$ en él, tal que las rectas que lo unen al 1 y al -1 , intersecten los lados verticales del cuadrado.



Entonces se tendrá que

$$d_H(-1, a + ib) + d_H(a + ib, 1) = d_H(-1, a) + d_H(a, 1) = d_H(-1, 1),$$

y d_H no cumple la igualdad sólo para puntos colineales en la desigualdad triangular en ese dominio.

Además, en dominios no acotados encontramos que la métrica de Hilbert puede exhibir comportamientos levemente distintos. Por ejemplo, si tomamos como dominio una franja en \mathbb{C} y calculamos la distancia de Hilbert entre cualquiera dos puntos x e y tal que el segmento que los une es paralelo a las rectas frontera, se tendrá que $d_H(x, y) = 0$ y, por lo tanto, en este dominio la métrica de Hilbert pasa a ser una pseudométrica. También podemos ver que en un dominio acotado por una parábola en \mathbb{C} , al calcular la distancia de Hilbert entre dos puntos cualquiera x e y , tal que el segmento entre ellos sea paralelo al eje de las ordenadas, $d_H(x, y)$ queda indefinida.

Teorema 2.3 *Sea Ω un dominio convexo y acotado en \mathbb{C} . Entonces (Ω, d_H) es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (Ω, d_H) . Como Ω es acotado, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x'_n\}$ que converge en la métrica euclidea a $x \in \bar{\Omega}$.

Si $x \in \Omega$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x'_n, x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x'_n - a_n}{x'_n - b_n} \cdot \frac{\bar{x} - b_n}{\bar{x} - a_n} \right) = 0.$$

Por lo tanto, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente en la métrica de Hilbert y, así, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, x) = 0$.

Ahora supongamos que $x \in \partial\Omega$. Tomamos cualquier $\xi \in \Omega$ y elegimos r tal que $\{x/ |x - \xi| < r\} \subset \Omega$. Sea $|\Omega|$ el diámetro de Ω y sea (a_n, x'_n, ξ, b_n) la cuerda en Ω que pasa por x'_n y ξ , con $a_n, b_n \in \partial\Omega$. Como $x_n \rightarrow x$, y $x \neq \xi$, la cuerda que pasa por x'_n y ξ converge a una cuerda que une ξ y x . Como $\{a_n\} \in \partial\Omega$ es una sucesión acotada y es claro que $a_n \rightarrow x$ y por lo tanto $a_n - x \rightarrow 0$. Por ser $\{x'_n\}$ acotada, existe un entero positivo m tal que para todo n , $d_H(x'_n, \xi) \leq m$. Entonces

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{r^2}{|\Omega| |a_n - x'_n|} \right) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{\xi - a_n}{x'_n - a_n} \cdot \frac{x'_n - b_n}{\xi - b_n} \right) \leq m,$$

lo que implica que $\frac{r^2}{|\Omega| |a_n - x'_n|} \leq e^{2m}$ y $|a_n - x'_n| \geq \frac{r^2}{e^{2m} |\Omega|}$ lo que lleva a una contradicción.

Por lo tanto, Ω es completo con la métrica de Hilbert. □

Cuando necesitemos referirnos a una métrica, por ejemplo d_H , definida en un dominio particular, supongamos Ω , la denotaremos de la forma d_{H_Ω} .

Teorema 2.4 *Sean Ω_1 y Ω_2 dominios convexos y acotados en \mathbb{C} , tales que $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Entonces $d_{H_{\Omega_1}} \geq d_{H_{\Omega_2}}$, donde $d_{H_{\Omega_1}}$ y $d_{H_{\Omega_2}}$ son la métrica de Hilbert en los dominios Ω_1 y Ω_2 respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN

Sean $x, y \in \Omega_1$, $[a, x, y, b]$ la cuerda contenida en Ω_1 con $a, b \in \partial\Omega_1$ y $[c, x, y, d]$ la cuerda contenida en Ω_2 con $c, d \in \partial\Omega_2$. Entonces, por (3), es claro que $d_{H_{\Omega_1}} \geq d_{H_{\Omega_2}}$. □

3. Forma infinitesimal

En el desarrollo de este capítulo revisaremos la definición de la métrica de Hilbert desde un punto de vista distinto que, en particular, nos permitirá compararla en forma cuantitativa con la métrica de Poicaré.

Consideremos al dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y d una métrica en Ω .

Definición 3.1 *La forma infinitesimal de la métrica d en el punto $x \in \Omega$ en la dirección $\vec{v} \in \mathbb{C}$ se define por*

$$F_d(x, \vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(x, x + t\vec{v})}{t}$$

si el límite existe.

Esta definición es una derivada direccional lateral de modo que $F_d(x, \vec{v})$ y $F_d(x, -\vec{v})$ resulten ambas positivas. Sin embargo, en general estas dos cantidades pueden ser distintas entre sí. Además notemos que $F_d(x, \alpha\vec{v}) = \alpha F_d(x, \vec{v})$ si $\alpha > 0$.

Si F_d es independiente de la dirección \vec{v} para todo punto en Ω , decimos que d es una métrica conforme y la función F_d se llama densidad de d en Ω . Si F_d es continua como función de (x, \vec{v}) , decimos que d es una métrica regular.

Definición 3.2 *Sea γ una curva en (Ω, d) , d métrica regular. El largo de curva de γ se define por*

$$l_{d(\gamma)} = \int_{\gamma} F_d(z, \vec{v}) |dz|.$$

donde $\vec{v} = \gamma'(z)$.

Definición 3.3 *Llamaremos métrica interna asociada a la métrica regular d , a la métrica \bar{d} definida por*

$$\bar{d}(x, y) = \inf_{\gamma} l_{d(\gamma)}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas que unen x e y en Ω .

Lema 3.4 Si d es una métrica regular en $\Omega \subset \mathbb{C}$ y \bar{d} es su métrica interna asociada, entonces

$$\bar{d} \geq d.$$

DEMOSTRACIÓN

Probaremos, primero, que para todo $z, w \in \Omega$ y toda curva γ que une z con w se cumple que $d(z, w) \leq l_d(\gamma)$. Para esto usaremos el siguiente lema.

Para $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1)$, se define $g^+(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$

Lema 3.5 Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $g(0) = 0$ y $g^+(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 1)$, entonces $g(1) \leq 0$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $g(1) = a > 0$. Entonces la función $G(t) = g(t) - at$ satisface $G(0) = 0$, $G(1) = 0$ y $G(t) < 0$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeño, y por lo tanto G alcanza su mínimo para algún $\xi \in (0, 1)$. La desigualdad $G(\xi + h) \geq G(\xi)$, para $0 < h < 1 - \xi$, implica que $g^+(\xi) \geq a$, lo que contradice que $g^+(\xi) \leq 0$. \square

Tomemos una aproximación poligonal suficientemente buena para una curva γ que une z con w . Para un trazo, \overline{xy} , de esta aproximación poligonal, caracterizamos sus puntos por $x_t = (1-t)x + ty$ con $t \in [0, 1]$. Luego aplicamos el lema para la función

$$g(t) = d(x, x_t) - \int_0^t F_d(x_s, \vec{v}) ds$$

donde $\vec{v} = \frac{y-x}{|y-x|}$. Entonces

$$d(x, y) \leq l_d(\overline{xy})$$

Además sabemos que

$$l_d(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n l_d(\overline{p_i p_{i+1}})$$

donde $z = p_0, p_1, \dots, p_n = w$ es una partición poligonal de γ .

Y, por lo tanto,

$$l_d(\gamma) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n d(p_i, p_{i+1}) \geq d(z, w).$$

Entonces $d(z, w) \leq \inf_{\gamma} l_d(\gamma) = \bar{d}(z, w)$.

\square

Teorema 3.6 Si d es una métrica regular en $\Omega \subset \mathbb{C}$ y \bar{d} su métrica interna asociada, entonces \bar{d} es métrica.

DEMOSTRACIÓN

Como consecuencia del lema anterior, si $\bar{d}(x, y) = 0$ entonces $d(x, y) = 0$ lo que significa que $x = y$.

El conjunto de las curvas que unen a x con y es el mismo que el de las curvas que unen y con x , luego, $\bar{d}(x, y) = \bar{d}(y, x)$.

Sean $x, y, z \in \Omega$ y sean $\Gamma_{x,y}, \Gamma_{x,z}$ y $\Gamma_{z,y}$ los conjuntos de curvas que unen a x con y , x con z , z con y respectivamente. Además $\Gamma = \{\gamma : \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma_1 \in \Gamma_{x,z}, \gamma_2 \in \Gamma_{z,y}\} \subset \Gamma_{x,y}$. Entonces

$$\bar{d}(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} l_d(\gamma) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} l_d(\gamma) = \inf_{\substack{\gamma_1 \in \Gamma_{x,z} \\ \gamma_2 \in \Gamma_{z,y}}} l_d(\gamma_1) + l_d(\gamma_2) = \bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y).$$

□

Notemos que es posible que $\bar{d}(x, y) = \infty$. En este caso, la métrica interna asociada a d no es métrica, pero esto no ocurre en los dominios en que estamos trabajando.

Definición 3.7 Decimos que la métrica regular d es una métrica interna si coincide con su métrica interna asociada, es decir, $d = \bar{d}$.

Teorema 3.8 Sea d una métrica regular en $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea \bar{d} su métrica interna asociada. Entonces \bar{d} es una métrica interna, es decir, para todo $x, y \in \Omega$

$$\bar{d}(x, y) = \inf_{\gamma} l_{\bar{d}}(\gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas que unen x e y en Ω .

DEMOSTRACIÓN

Queremos demostrar que

$$\bar{d}(x, y) = \inf_{\gamma} l_{\bar{d}}(\gamma),$$

es decir, que

$$\inf_{\gamma} l_d(\gamma) = \inf_{\gamma} l_{\bar{d}}(\gamma)$$

lo que es equivalente a probar que $F_d = F_{\bar{d}}$.

Sean $z_0 \in \Omega$ y $\vec{v} \in \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|\vec{v}| = 1$. Por definición sabemos que

$$F_{\bar{d}}(z_0, \vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{d}(z_0, z_0 + \vec{v}t)}{t}$$

y que

$$\bar{d}(z_0, z_0 + \vec{v}t) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_d(z, \gamma') |dz|$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas γ que unen z_0 con $z_0 + t\vec{v}$.

Entonces tenemos que

$$\bar{d}(z_0, z_0 + \vec{v}t) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_d(z, \gamma') |dz| \leq \int_0^t F_d(z_0 + s\vec{v}, \vec{v}) ds.$$

Por lo tanto

$$\frac{\bar{d}(z_0, z_0 + \vec{v}t)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t F_d(z_0 + s\vec{v}, \vec{v}) ds$$

y

$$F_{\bar{d}}(z_0, \vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{d}(z_0, z_0 + \vec{v}t)}{t} \leq F_d(z_0, \vec{v}).$$

Ahora, podemos decir que

$$\bar{d} \leq \inf \int F_{\bar{d}} \leq \inf \int F_d = \bar{d}$$

y así $F_{\bar{d}} = F_d$.

□

A continuación veremos ejemplos en donde se aplican los conceptos que hemos visto en este capítulo en métricas conocidas.

1. Métrica hiperbólica en \mathbb{D}

Sean $z \in \mathbb{D}$, $\vec{v} \in \mathbb{D}$, con $|\vec{v}| = 1$, y $w = z + t\vec{v}$, con $t \in \mathbb{R}$, tal que $w \in \mathbb{D}$. Entonces la distancia hiperbólica entre z y w está dada por

$$d_h(z, w) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|} \right).$$

Calculamos su forma infinitesimal

$$\begin{aligned}
F_{d_h}(z, \vec{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_h(z, w)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(\left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| + \frac{1}{3} \left(\left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| \right)^3 + \dots \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\vec{v}}{1-z+t\vec{v}z} \right| + \frac{1}{3} \left| \frac{\vec{v}t^2}{(1-z+t\vec{v}z)^3} \right| + \dots \\
&= \frac{1}{1-|z|^2}.
\end{aligned}$$

Como F_{d_h} no depende de la dirección, la métrica hiperbólica es conforme.

Veamos que ésta métrica es interna. Sean $z, w \in \mathbb{D}$, $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, transformación de Möbius tal que $T(z) = 0$ y $T(w) = x \in (0, 1)$ y γ una curva que va desde 0 a x . Entonces

$$l_{d_h}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^x \frac{z'(t)}{1-|z(t)|^2} dt.$$

Se tiene que $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, luego

$$l_h(\gamma) \geq \int_0^x \frac{|r'(t)|}{1-r^2(t)} dt \geq \left| \int_0^x \frac{r'(t)}{1-r^2(t)} dt \right| = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

$$\text{Así, } \inf_{\gamma} l_h(\gamma) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = d_h(0, x) = d_h(T(z), T(w)) = d_h(z, w).$$

2. Pseudo-métrica hiperbólica en \mathbb{D}

Sean $z, w \in \mathbb{D}$ tales que $w = z + t\vec{v}$, con $t \in \mathbb{R}$ y $|\vec{v}| = 1$. La pseudo-métrica hiperbólica en el disco se define por

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_\rho(z, \vec{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left| \frac{z - (z + t\vec{v})}{1 - z(z + t\vec{v})} \right| \\ &= \frac{1}{1 - |z|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $F_\rho = F_{d_h}$ y así podemos concluir que ρ es conforme, pero no es interna, ya que su métrica interna asociada es d_h . De hecho, $\rho \leq d_h$.

3. Se define la siguiente métrica en los reales

$$\sigma(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Esta métrica es equivalente a la métrica euclidea $e(x, y) = |x - y|$ y, además, cumple siempre la desigualdad triangular estricta. Calculamos su forma infinitesimal

$$\begin{aligned} F_\sigma(x, \vec{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t\vec{v}|}{t(1 - |t\vec{v}|)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces $F_\sigma = F_e$ y del mismo modo que el ejemplo anterior σ no es una métrica interna, y se tiene que la métrica interna asociada a σ es la euclidea.

Ahora que hemos estudiado la definición de la forma infinitesimal de una métrica y su relación con la misma, podremos aplicar estos conocimientos a la métrica de Hilbert para obtener nuevos resultados. Como ya tenemos una definición de largo de curva, podemos describir las geodésicas de la métrica de Hilbert. Recordemos que las geodésicas son las curvas donde se cumple que el largo de curva es igual a la distancia entre los extremos de ella. Para esto se necesita la igualdad en la desigualdad triangular y como vimos en el capítulo 1, para la métrica de Hilbert esta igualdad se cumple para puntos colineales y, por eso, las geodésicas para la métrica de Hilbert son las líneas rectas.

Hasta el momento hemos definido y probado algunos teoremas de la métrica de Hilbert sobre dominios estrictamente convexos en \mathbb{C} . Ahora nos restringimos al disco unitario \mathbb{D} para encontrar información más precisa.

Dado un punto $z \in \mathbb{D}$ y una dirección \vec{v} con $|\vec{v}| = 1$, calculamos la forma infinitesimal de la métrica de Hilbert, $F_{d_H}(z, \vec{v})$:

$$\begin{aligned} F_{d_H}(z, \vec{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_H(z + t\vec{v}, z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \log \left(\frac{z-b}{z-a} \cdot \frac{z+t\vec{v}-a}{z+t\vec{v}-b} \right) \end{aligned}$$

donde $a, b \in \partial\mathbb{D}$ son los extremos de la cuerda $[a, z, z + t\vec{v}, b]$. Aplicando Regla de L'Hopital,

$$F_{d_H}(z, \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|}.$$

Como a y b dependen de la dirección \vec{v} podemos ver que la métrica de Hilbert no es conforme.

Estudiando más a fondo esta métrica y su forma infinitesimal logramos acotar F_{d_H} . Así para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$m(z) \leq F_{d_H}(z, \vec{v}) \leq M(z)$$

$$\text{donde } M(z) = \max_{\theta} \frac{1}{2} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|} \text{ y } m(z) = \min_{\theta} \frac{1}{2} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|}$$

con a y b dependiendo de θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \in \mathbb{D}$, tomando $\vec{v} = e^{i\theta}$.

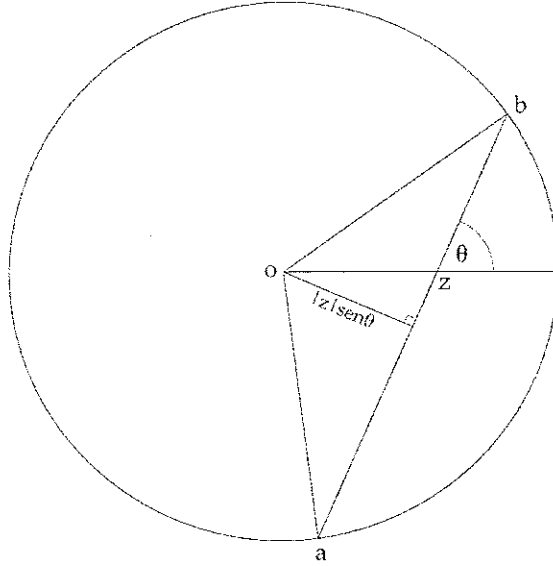
Como F_{d_H} es invariante bajo rotaciones en el disco unitario, basta tomar $z \in (0, 1)$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Vemos que por la relación de cuerdas en un círculo se tiene

$$\begin{aligned} |z-a||z-b| &= (1+|z|)(1-|z|) \\ &= 1-|z|^2. \end{aligned}$$

Entonces hay que maximizar y minimizar

$$F_{d_H}(z) = \frac{1}{2} \frac{|a-b|}{1-|z|^2}.$$

Es claro que $M(z) = \max_{\theta} \frac{1}{2} \frac{|a-b|}{1-|z|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$ cuando $\theta = 0$.



Considerando el triángulo isósceles abo de la figura anterior, se desprende de sus relaciones trigonométricas lo siguiente

$$|b - a| = 2\sqrt{(1 - |z|^2) \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Tomando $|b - a|$ como función de θ , se minimiza y encontramos la cota inferior

$$m(z) = \min_{\theta} \frac{1}{2} \frac{|a - b|}{|z - a| |z - b|} = \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}},$$

que se obtiene cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Hemos probado, entonces, el siguiente teorema.

Teorema 3.9 Sean $z \in \mathbb{D}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}} \leq F_{d_H}(z, e^{i\theta}) \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

donde la cota inferior se alcanza en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y la cota superior se alcanza en $\theta = 0$.

Sólo nos falta ver que la métrica de Hilbert en el disco es interna.

Teorema 3.10 Sean p y q en \mathbb{D} , donde $q = p + \alpha \vec{v}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \mathbb{D}$. Entonces

$$\overline{d_H}(p, q) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_{d_H}(p, \vec{v}) dp = d_H(p, q),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas que unen p con q .

DEMOSTRACIÓN

Sabemos, por definición de la forma infinitesimal, que

$$\inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_{d_H}(p, \vec{v}) dp \geq d_H(p, q).$$

Como las geodésicas para la métrica de Hilbert son las rectas, se tiene que

$$d_H(p, q) = \int_{\overline{pq}} F_{d_H}(p, \vec{v}) dp \geq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_{d_H}(p, \vec{v}) dp.$$

Por lo tanto, $\inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_{d_H}(p, \vec{v}) dp = d_H(p, q)$ y la métrica de Hilbert es interna.

□

4. Comparación de la métrica de Hilbert y la métrica de Poincaré

Como vimos en el capítulo anterior, para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que,

$$\frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \leq F_{d_H}(z, \vec{v}) \leq \frac{1}{1-|z|^2},$$

y la expresión $\frac{1}{1-|z|^2}$ es la forma infinitesimal de la métrica de Poincaré. Gracias a estos hechos podemos establecer una comparación cuantitativa entre ambas métricas en el disco unitario.

Lema 4.1 Sean $p, q \in \mathbb{D}$. Entonces

$$d_H(p, q) \leq d_h(p, q).$$

DEMOSTRACIÓN

Sea γ la geodésica de la métrica de Poincaré en \mathbb{D} que une p y q . Entonces

$$d_h(p, q) = \int_{\gamma} \frac{1}{1-|z|^2} dz \geq \int_{\gamma} F_{d_H}(z) dz \geq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} F_{d_H}(z) dz = d_H(p, q).$$

La igualdad se tendrá si y sólo si p y q están en un diámetro de \mathbb{D} , ya que es en cualquier diámetro del disco donde ambas métricas coinciden.

□

A pesar de este último lema, vamos a demostrar a continuación, que estas métricas no son comparables, es decir, probaremos que no existe $c > 0$ tal que

$$d_H(p, q) \geq c d_h(p, q)$$

para todo p y q en \mathbb{D} .

Lema 4.2

$$\inf_{p,q \in \mathbb{D}} \frac{d_H(p,q)}{d_h(p,q)} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

Esta prueba se basa en que la forma infinitesimal de la métrica de Hilbert es en orden de magnitud mucho menor que la de Poincaré en puntos cercanos a la frontera y en direcciones perpendiculares al radio. En efecto, sabemos que para $x \in (0, 1)$

$$F_{d_H}(x, i) = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}} = \sqrt{F_{d_h}(x)}$$

de modo que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F_{d_H}(x, i)}{F_{d_h}(x)} = 0$. Las correspondientes distancias se comparan de igual manera a escala pequeña y en direcciones apropiadas, es decir, para $x \in (0, 1)$ y $s > 0$ se tiene que $d_h(x, x + is) \approx F_{d_h} s$ y $d_H(x, x + is) \approx F_{d_H} s$ si s es suficientemente pequeño. El siguiente ejemplo muestra que se puede tomar el comportamiento de s tan grande como $k(1 - x)$. Sea $x \in (0, 1)$. Calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{d_H(x, x + is(x))}{d_h(x, x + is(x))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{1 - x^2} + s(x)}{\sqrt{1 - x^2} - s(x)} \right)}{\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2s(x)}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2 s^2(x)} - s(x)} \right)}$$

con $s(x) = k(1 - x)$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{d_H(x, x + is(x))}{d_h(x, x + is(x))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log \left(1 + \frac{2k\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - k\sqrt{1 - x}} \right)}{\log \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{(1 + x)^2 + x^2 k^2} - k} \right)} = 0.$$

Por lo tanto, $\inf_{p,q \in \mathbb{D}} \frac{d_H(p,q)}{d_h(p,q)} = 0$.

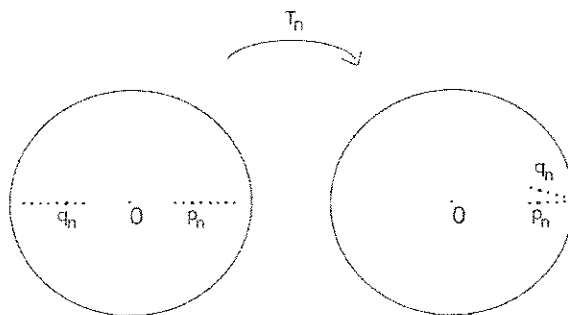
□

Corolario 4.3

$$\inf_{\substack{T \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \\ p, q \in \mathbb{D}}} \frac{d_H(T(p), T(q))}{d_H(p, q)} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ sucesiones en un diámetro de \mathbb{D} y sea $\{T_n\}$ una sucesión de automorfismos del disco unitario tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n(p_n)$ son puntos de un diámetro tal que el segmento $\overline{T_n(p_n)T_n(q_n)}$ sea perpendicular al diámetro y, además, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(p_n) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(q_n) = 1$.



Entonces tenemos que $d_H(p_n, q_n) = d_h(p_n, q_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además como la métrica hiperbólica es invariante bajo transformaciones de Möbius obtenemos

$$\inf_n \frac{d_H(T_n(p_n), T_n(q_n))}{d_H(p_n, q_n)} = \inf_n \frac{d_H(T_n(p_n), T_n(q_n))}{d_h(p_n, q_n)} = \inf_n \frac{d_H(T_n(p_n), T_n(q_n))}{d_h(T_n(p_n), T_n(q_n))} = 0.$$

□

Como consecuencia de este corolario, y como T es invertible, podemos decir que no existen constantes c_1 y c_2 tal que

$$c_2 d_H(T(p), T(q)) \leq d_H(p, q) \leq c_1 d_H(T(p), T(q))$$

para toda T transformación de Möbius.

El corolario anterior descarta la existencia de una versión invariante del Lema de Schwarz, sólo se tiene la versión normalizada que es consecuencia de la invarianza bajo transformaciones de Möbius de la métrica de Poincaré.

Teorema 4.4 (*Lema de Schwarz normalizado*) Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, una función analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces

$$\begin{cases} d_H(f(z), 0) \leq d_H(z, 0) \\ d_H(f'(0), 0) \leq 1 \end{cases}$$

donde las igualdades ocurren si y sólo si $f(z) = cz$ con $|c| = 1$.

DEMOSTRACIÓN

Directa, pues $d_H(f(0), 0) = d_h(f(0), 0)$ y $d_H(f'(0), 0) = d_h(f'(0), 0)$.

□

A continuación veremos que los resultados anteriores también son válidos en dominios más generales.

Teorema 4.5 Sea Ω un dominio convexo y acotado del plano complejo. Entonces

$$d_H \leq 2d_h.$$

Para la demostración de este resultado, necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 4.6 (Koebe) Sea Ω un dominio convexo y acotado. Entonces para todo $w \in \Omega$

$$\frac{1}{2d_\Omega(w)} \leq F_{d_h(\Omega)}(w) \leq \frac{1}{d_\Omega(w)}$$

donde $d_\Omega(w)$ es la distancia euclídeana de w a $\partial\Omega$ y F_{d_h} es la forma infinitesimal de la métrica de Poincaré en Ω .

Para la demostración del teorema de Koebe ver [7].

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 4.5 Sean $w \in \Omega$ y D el disco de centro w y radio $d_\Omega(w)$. Entonces podemos decir que para todo $\theta \in [0, 2\pi]$

$$F_{d_H(\Omega)}(w, e^{i\theta}) \leq F_{d_H(D)}(w, e^{i\theta}) = F_{d_h(D)}(w, e^{i\theta}) = \frac{1}{d_\Omega(w)} \leq 2F_{d_h(\Omega)}(w, e^{i\theta})$$

y, por lo tanto, $d_H \leq 2d_h$.

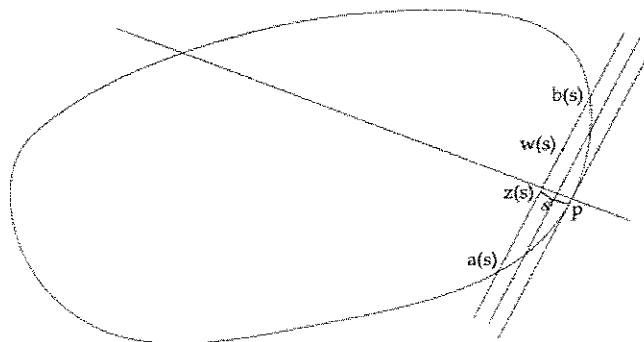
□

Teorema 4.7 Sea Ω un dominio convexo y acotado del plano complejo. Entonces

$$\inf_{z, w \in \Omega} \frac{d_H(z, w)}{d_h(z, w)} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $p \in \partial\Omega$ un punto de tangencia para la recta L y sea $z(s) \in \Omega$ un punto tal que la recta que contiene a z y a p es perpendicular a L . Llamamos s al largo del segmento $\overline{z(s)p}$. Definimos $a(s)$ y $b(s)$ los puntos de intersección de L con $\partial\Omega$. Sea $w(s)$ un punto entre $z(s)$ y $b(s)$ y sea $g(s)$ la distancia entre $z(s)$ y $w(s)$.



Es claro que, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{|b(s) - z(s)|} = 0$ y $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{|a(s) - z(s)|} = 0$. Por el Teorema de Koebe, tenemos que si s es suficientemente pequeño, entonces $F_{d_h}(z(s)) \sim \frac{1}{s}$. Del mismo modo, se tiene que

$$d_h(z(s), w(s)) \sim \int_0^g F_{d_h}(z(s)) dz = \frac{g(s)}{s}.$$

Además, $d_H(z(s), w(s)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z(s) - b(s)}{z(s) - a(s)} \frac{w(s) - a(s)}{w(s) - b(s)} \right)$. Observamos que

$$\frac{w(s) - a(s)}{w(s) - b(s)} = \frac{z(s) - a(s)}{z(s) - b(s)} \frac{1 + \frac{g(s)}{z(s) - a(s)}}{1 - \frac{g(s)}{z(s) - b(s)}} = \frac{z(s) - a(s)}{z(s) - b(s)} \left(1 + \frac{g(s)}{z(s) - a(s)} \right) \left(1 + \frac{g(s)}{z(s) - b(s)} + \dots \right).$$

Entonces

$$d_H(z(s), w(s)) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{g(s)}{z(s) - a(s)} + \frac{g(s)}{z(s) - b(s)} + \dots \right),$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_H(z(s), w(s))}{d_h(z(s), w(s))} = 0.$$

□

5. Distorsión

Es importante el estudio del comportamiento de la métrica de Hilbert bajo funciones analíticas y aunque, como vimos en el capítulo anterior, no se puede dar una comparación para el conjunto de todas las transformaciones de Möbius, sí existe un teorema de distorsión para transformaciones analíticas.

Teorema 5.1 Sean Ω_1 y Ω_2 dominios convexos acotados en el plano complejo y sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ función analítica. Entonces para todo $c > 0$,

$$d_H(f(z), f(w)) \leq cd_H(z, w) \iff F_{d_H}(f(z), Df(z)\vec{v}) \leq cF_{d_H}(z, \vec{v}).$$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $d_H(f(z), f(w)) \leq cd_H(z, w)$. Entonces

$$\frac{d_H(f(z), f(z) + hDf(z)(\vec{v}))}{h} \leq c \frac{d_H(z, z + h\vec{v})}{h}$$

y, haciendo tender h a 0 obtenemos

$$F_{d_H}(f(z), Df(z)\vec{v}) \leq cF_{d_H}(z, \vec{v}).$$

Recíprocamente, supongamos que $F_{d_H}(f(z), Df(z)\vec{v}) \leq cF_{d_H}(z, \vec{v})$. Consideremos γ la curva geodésica que une z con w en Ω_1 . Así, se tiene que

$$\begin{aligned} d_H(z, w) &= \int_{\gamma} F(z, \vec{v}) |dz| \\ &= \int_{f(\gamma)} F_{d_H}(f^{-1}(w), Df^{-1}(w)(Df(\vec{v}))) \frac{|dw|}{|Df(\vec{v})|} \\ &\geq \frac{1}{c} \int_{f(\gamma)} F_{d_H}(w, Df(z)(\vec{v})) \frac{|dw|}{|Df(\vec{v})|} \\ &\geq \frac{1}{c} \inf_{f(\gamma)} \int_{f(\gamma)} F_{d_H}(w, Df(\vec{v})) \frac{|dw|}{|Df(\vec{v})|} \\ &= d_H(f(z), f(w)). \end{aligned}$$

□

Referencias

- [1] A.F. Beardon, *The Klein, Hilbert and Poincaré metrics of a domain*, Journal of Computational and Applied Mathematics **105** (1999), 155–162.
- [2] H.S. Bear, *Part metric and hyperbolic metric*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), 109–123.
- [3] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York (1955).
- [4] P. Hästö, Z. Ibragimov, H. Lindén, *Isometries of relative metrics* (2005).
- [5] Y. Burago, D. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Amer. Math. Soc.(2001).
- [6] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill (1979).
- [7] I.Graham, G.Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Pure and Applied Mathematics (2003).
- [8] R.Courant, H.Robbins, *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press (1996)

