PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

CONVEXIDAD HIPERBOLICA Y EL TEOREMA DE GEHRING Y POMMERENKE

por

Pilar Herreros Cortázar

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Martin Chuaqui Farrú

Comisión Informante: Martin Chuaqui Farrú
Jan Kiwi Krauskopf
Gonzalo Riera Lira

Agosto, 2003
Santiago, Chile

Agradecimientos

A Carmen y Renato, por que siempre me han ayudado y apoyado, en sus múltiples papeles.

A CONICYT por haberme financiado a través de su Programa Nacional de Becas de Postgrado.

Y especialmente a mi profesor guía Martin Chuaqui. Por todo lo que me enseñó y me ayudó, tanto en el desarrollo de mi tesis como en mis planes futuros.

Índice General

Resumen

El propósito de esta tesis es completar y extender en ciertos aspectos el estudio iniciado en [6]. Consideraremos la clase de funciones que satisfacen

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r)\leq 2,$$

donde $|\xi|=1$ y

$$\sigma_{f,\xi}(r)=\mathrm{Re}\{\xi^2 S_f(r\xi)\}-\frac{1}{2}\left[\mathrm{Im}\left\{\xi\frac{f''(r\xi)}{f'(r\xi)}\right\}\right]^2.$$

Obtendremos un resultado sobre convexidad hiperbólica para las imágenes de funciones en esta clase y usaremos esto para establecer otras propiedades. En particular, vamos a demostrar que la función $L(z)$ es, esencialmente, la única función univalente no acotada en esta clase con $f''(0)=0$, un problema abierto planteado en [6]. Por otro parte, derivamos una serie de teoremas de distorsión asociados al operador $\sigma_{f,\xi}(r)$. Por último, daremos una condición suficiente para que $f(\mathbb{D})$ sea un disco de John.

1 Introducción

Las funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \Omega$ han sido sujeto de estudio en el último siglo, en particular las funciones univalentes. Dentro de las funciones univalentes se estudia principalmente la clase S, las funciones univalentes con la normalización $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Cualquier función univalente se puede llevar a una de esta forma mediante un cambio afín $af + b$.

Una de las propiedades de esta clase es ser cerrada bajo una serie de operaciones o transformaciones como

(i) conjugación $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$;

(ii) rotación $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$;

(iii) dilatación $g(z) = \frac{1}{r} f(rz)$, donde $0 < r < 1$;

(iv) raíz cuadrada $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$;

(v) transformada de Koebe

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}) - f(a)}{(1 - |a|^2) f'(a)};$$

(vi) valor omitido, si $w \notin f(\mathbb{D})$

$$g(z) = \frac{w f(z)}{w - f(z)}.$$

Es decir, si $f \in S$ cada uno de los g definidos arriba están en S.

La función de Koebe

$$K(z) = \frac{z}{(1 - z)^2},$$

que lleva el disco unitario en la región $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$, resulta determinante en la clase S y exhibe un comportamiento extremal en muchos fenómenos geométricos y de distorsión. Por ejemplo, si para $f \in S$ escribimos su serie de potencias, $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, entonces $|a_2| \leq 2$ y $|a_2| = 2$ sólo si f es una rotación de la función de Koebe. De esta desigualdad se deduce el Teorema 1/4 de Koebe que dice que la imagen $f(\mathbb{D})$ de una función $f \in S$ cubre un disco en torno al origen de radio 1/4, y si no cubre ninguno de radio mayor entonces f es una rotación de K.

De la desigualdad $|a_2| \leq 2$ y usando (v) se obtienen teoremas de distorsión para la clase S, por ejemplo

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4}{1 - |z|^2}.$$

De esto se obtiene el teorema de distorsión de Koebe

$$K'(-|z|) \leq |f'(z)| \leq K'(|z|),$$

e integrando apropiadamente obtenemos

$$K(-|z|) \leq |f(z)| \leq K(|z|).$$

En cualquiera de estos casos la igualdad se alcanza para algún $z \neq 0$ si y sólo si $f(z)$ es una rotación de $K(z)$.

En la misma línea de la desigualdad original está la conjetura de Bieberbach, que fue demostrada recién en 1985 por Louis de Branges. Esta dice que si $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ esta en la clase S entonces $|a_n| \leq n$ para todo $n \geq 2$. Nuevamente la función de Koebe es extremal ya que si $|a_n| = n$ para algún n, f es una rotación de ésta.

Otros resultados sobre funciones univalentes y algunas demostraciones de los resultados anteriores se encuentran en [4].

Para funciones analíticas f localmente univalentes se define la derivada Schwarziana como

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

que tiene la propiedad de que $S_f = 0$ si y sólo si f es una transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

y tiene una regla de composición o regla de la cadena dada por

$$S_{f\circ g} = S_f \circ g(g')^2 + S_g.$$

Estas dos propiedades muestran que la derivada Schwarziana es invariante bajo composiciones por la izquierda con transformaciones de Möbius. Así se pueden normalizar las funciónes de forma tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, y $f''(0) = 0$ sin cambiar el valor de su derivada Schwarziana.

Un aspecto interesante de este operador es su relación con las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Si p es una función analítica y consideramos u_1 y u_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $u'' + pu = 0$, entonces la función $f = u_1/u_2$ tiene $S_f = 2p$. Más aún, si $S_g = 2p$ entonces $g = T \circ f$ donde T es una transformación de Möbius. La relación funciona en ambos sentidos ya que dada f con $S_f = 2p$ la función $u_1 = (f')^{-1/2}$ es solución de $u'' + pu = 0$ y $u_2 = u_1/f$ es otra solución, linealmente independiente de u_1. Si además f esta normalizada por $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$, entonces u_1 es la solución con condiciónes iniciales $u_1(0) = 1$ y $u_1'(0) = 0$.

En 1949 Nehari demostró que si f es univalente en el disco unitario entonces

$$(1-|z|^2)^2|S_f(z)| \leq 6,$$

y a su vez, que si f es analítica, localmente univalente y

$$(1-|z|^2)^2|S_f(z)| \leq 2 \qquad (1)$$

entonces f es univalente en el disco unidad. Este último resultado define lo que se conoce como la clase de Nehari (N), una importante subclase de las funciones univalentes. En los resultados anteriores ambas cotas son óptimas como muestran la función de Koebe que tiene $S_k(z) = -6/(1-z^2)^2$ y las funciones

$$f(z) = \left[\frac{1+z}{1-z}\right]^{i\epsilon}, \quad \epsilon > 0$$

que cumple $(1-|z|^2)^2|S_f(z)| \leq 2(1+\epsilon^2)$ y toma algunos valores infinitas veces en el disco. Otra función interesante, extremal para muchos fenómenos de la clase de Nehari, es

$$L(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

que lleva el disco unitario en la franja $T = \{w : |\text{Im } w| < \pi/4\}$ y tiene $S_L(z) = 2/(1-z^2)^2$.

La regla de la cadena, junto con el lema de Schwarz y el hecho de que las transformaciones de Möbius tienen Schwarziana igual a 0, nos muestran que la clase N es invariante bajo precomposición con automorfismos del disco. De hecho, si σ es un automorfismo del disco y $f \in N$, tenemos

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|S_{f\circ\sigma}(z)| &= (1-|z|^2)|S_f(\sigma(z))(\sigma'(z))^2 + S_\sigma(z)| \\ &= (1-|\sigma(z)|^2)|S_f(\sigma(z))| \leq 2.\end{aligned}$$

En 1962, Ahlfors y Weill mostraron que si f es meromorfa y satisface la condición

$$(1-|z|^2)^2|S_f(z)| \leq 2t \qquad (2)$$

para $0 \leq t < 1$, entonces además de ser univalente tiene una extensión cuasiconforme a la esfera y $f(\mathbb{D})$ es un cuasidisco. Además del resultado en sí, se dio origen al estudio de esta nueva condición, y a una colección de subclases de la clase de Nehari: las funciones analíticas y localmente univalentes que satisfacen la condición (2), a las que llamaremos N_t. En este ámbito se presentan las funciones extremales

$$A_t(z) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{(1+z)^{\sqrt{1-t}} - (1-z)^{\sqrt{1-t}}}{(1+z)^{\sqrt{1-t}} + (1-z)^{\sqrt{1-t}}}$$

para $-1 \leq t < 1$, que tienen

$$S_{A_t}(z) = \frac{2t}{(1-z^2)^2}.$$

Usando la relación entre la derivada Schwarziana y las ecuaciones diferenciales, Chuaqui y Osgood establecen en 1993 una serie de cotas de distorsión para las funciones normalizadas de la clase de Nehari, así como para las de las clases N_t, demostrando que si f es analítica en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$ se tiene:

(i) si $f \in N$ entonces

$$A_{-1}(|z|) \leq |f(z)| \leq L(|z|),$$
$$A'_{-1}(|z|) \leq |f'(z)| \leq L'(|z|),$$

(ii) si $f \in N_t$ entonces

$$A_{-t}(|z|) \leq |f(z)| \leq A_t(|z|),$$
$$A'_{-t}(|z|) \leq |f'(z)| \leq A'_t(|z|),$$

y si se alcanza la igualdad para algún $z \neq 0$ entonces f es conjugada por rotación de L, A_{-1} o $A_{\pm t}$ según corresponda.

Siguiendo la misma línea, Chuaqui y Osgood demuestran en 1994 que bajo las mismas normalizaciones

(i) si $f \in N$ entonces

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2} = \frac{L''(|z|)}{L'(|z|)},$$

(ii) si $f \in N_t$ entonces

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2t|z|}{1-|z|^2} = \frac{A''_t(|z|)}{A'_t(|z|)}.$$

Con respecto a la clase de Nehari, en 1984 Gehring y Pommerenke demuestran que si una función f es meromorfa en el disco y $(1-|z|^2)^2|S_f(z)| \leq 2$, entonces f tiene una extensión esféricamente continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y $f(\mathbb{D})$ es un dominio de Jordan o $f = T \circ L \circ \sigma$, donde T es una transformación de Möbius y σ un automorfismo del disco. Más aún, si $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ y $f(z_0) \neq \infty$, entonces

$$|f(rz_0) - f(z_0)| = O(dist(f(rz_0), \partial f(\mathbb{D}))^{1/2}), \quad \text{al} \quad r \to 1.$$

Esto se puede interpretar como que la frontera de la imagen en $f(z_0)$ no tiene cúspides externas de orden mayor que $1/2$, el equivalente a dos círculos tangentes.

En el caso excepcional, cuando $f(\mathbb{D})$ no es un dominio de Jordan, sabemos que $f = T \circ L \circ \sigma$, de donde se deduce que a lo largo de la geodésica hiperbólica

$\gamma = \sigma^{-1}([0,1))$ tenemos $(1-|z|^2)^2|S_f(z)| = 2$. Por lo tanto, si $(1-|z|^2)^2|S_f(z)| < 2$ entonces $f(\mathbb{D})$ es un dominio de Jordan.

Si además de que $f \in N$ se tiene que $f''(0) = 0$ entonces el teorema de Gehring y Pommerenke implica que o bien $f = \psi \circ L \circ \sigma$, donde ψ es afín y σ una rotación, o f tiene una extención a $\overline{\mathbb{D}}$ y existen constantes M_1 y M_2 tales que

$$|f(z) - f(z')| \leq M_1 \left(\log \frac{3}{|z - z'|}\right)^{-1}, \quad z,\ z' \in \overline{\mathbb{D}}.$$

y

$$|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \leq M_2[dist(f(re^{i\theta}), \partial f(\overline{\mathbb{D}}))]^{1/2}, \quad 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Existen otras condiciones sobre la derivada Schwarziana o la derivada pre-Schwarziana

$$P_f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

de una función analítica y localmente univalente f que también garantizan la univalencia de f, por ejemplo

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |S_f(z)| \leq \pi^2/2,$$

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|S_f(z)| \leq 4,$$

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|P_f(z)| \leq 1.$$

Estas condiciones son óptimas y han sido estudiadas obteniendo algunos resultados similares a los de la clase de Nehari.

Finalmente, sea f localmente univalente en $\mathbb{D}$, y sea $\xi \in \partial\mathbb{D}$. Se define

$$\sigma_{f,\xi}(r) = \mathrm{Re}\{\xi^2 S_f(r\xi)\} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Im}\xi P_f(r\xi)\}\right]^2.$$

Esta cantidad, aun cuando complicada en aspecto, aparece de manera natural al estudiar el módulo $|u|$ de soluciones de la ecuación $u'' + (1/2)S_f u = 0$. Esto queda de manifiesto en [3] y en [5]. En base a esto, Kari y Per Hag consideran en [6] una clase más general que la clase de Nehari, definida por la condición

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - r^2)^2 \sigma_{f,\xi}(r) \leq 2, \qquad (3)$$

para la cual establecen, entre otras cosas, un análogo parcial del teorema de Gehring y Pommerenke y una condición suficiente para que $f(\mathbb{D})$ sea un disco de John.

El propósito de esta tesis es completar y extender en ciertos aspectos el estudio iniciado en [6]. En particular, vamos a demostrar que la función $L(z)$ es, escencialmente, la única función univalente no acotada que satisface (3) y $f''(0) = 0$, un problema abierto planteado en [6]. Por otro parte, derivamos una serie de teoremas de distorsión asociados al operador $\sigma_{f,\xi}(r)$. Por último, daremos una condición suficiente para que $f(\mathbb{D})$ sea un disco de John. Esta condición es en parte geometrica y su aspecto analítico generaliza la condición establecida en [6].

2 Resultados Preliminares

Empezaremos esta sección dando algunas definiciones geométricas.

Definición 2.1 *Un dominio acotado y simplemente conexo G se dice un dominio de John si existe M tal que, para a y $b \in \partial G$ tales que el segmento que los une está contenido en G,*

$$diam\ H \leq M|a-b|$$

donde H es la componente de menor diámetro de $G \setminus [a,b]$.

Esta definición se puede interpretar geométricamente como que si ∂G es una curva de Jordan suave a tramos entonces G es un dominio de John si y sólo si no tiene cúspides exteriores (de ángulo interior 0).

Definición 2.2 *Un dominio simplemente conexo G se dice linealmente conexo si existe M tal que todo par de puntos w_1 y $w_2 \in G$ se pueden unir por una curva $\gamma \subseteq G$ con*

$$diam\ \gamma \leq M|w_1 - w_2|.$$

Esta definición se puede interpretar geométricamente como que si ∂G es una curva de Jordan suave a tramos entonces G es linealmente conexo si y sólo si no tiene cúspides interiores (de ángulo interior 2π).

Definición 2.3 *Una curva de Jordan J es un cuasicírculo si existe M tal que para todo a y $b \in J$*

$$diam\ J(a,b) \leq M|a-b|$$

donde $J(a,b)$ es el arco de J entre a y b de menor diámetro. A la región encerrada por un cuasicírculo la llamaremos cuasidisco.

Geométricamente, esta definición es equivalente a que una curva de Jordan suave a tramos es un cuasicírculo si y sólo si no tiene cúspides internas ni externas. Aquí se puede observar otra caracterización de cuasidisco: un dominio G es un cuasidisco si y sólo si es un dominio de John linealmente conexo.

Otras caracterizaciones de dominios de John, dominios linealmente conexos o cuasidiscos se pueden encontrar en [7].

En 1996 Chuaqui, Osgood y Pommerenke demuestran que si f esta en la clase de Nehari y $f(\mathbb{D})$ es un disco de John, entonces $f(\mathbb{D})$ es un cuasidisco. Así inician el estudio de la relación entre la clase de Nehari y los discos de John, y establecen que si f esta en la clase de Nehari y cumple la normalización $f(0)=0$, $f'(0)=1$ y $f''(0)=0$

entonces son equivalentes:

(i) $f(\mathbb{D})$ es un disco de John;

(ii)

$$\limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}<2;$$

(iii)

$$\limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|<2.$$

En 2001 Kari y Per Hag continúan con este estudio y dan una condición necesaria y una suficiente sobre la pre-schwarziana para que f sea un disco de John. La condición suficiente viene del Teorema 3.7: *Si f es analitica, univalente en $\mathbb{D}$ y*

$$\limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}<2$$

entonces $f(\mathbb{D})$ es un disco de John.

En el mismo trabajo Kari y Per Hag se basan en la demostración del teorema antes mencionado de Gehring y Pommerenke para considerar una nueva clase de funciones. Para entender el origen de esta clase, y por qué será de utilidad más adelante, daremos un esquema de la demostración de dicho teorema.

Sea $f\in N$ normalizada por $f''(0)=0$. Se considera, para cada $|\xi|=1$,

$$h(t)=\xi\frac{e^t-1}{e^t+1}\,,\qquad t\in T=\{w:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,w<\frac{\pi}{2}\},$$

y se estudia la función $g(t)=f\circ h$, que tiene

$$\mathrm{Re}\{S_g(t)\}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-r^2)^2\mathrm{Re}\{\xi^2S_f(r\xi)\}\leq 0$$

donde $r=|h(t)|$. Se introduce la función $v(t)=|g(t)|^{-1/2}$, que, excepto donde g tiene un polo, satisface $v''-pv=0$ con

$$p(t)=-\mathrm{Re}\{S_g(t)\}+\frac{1}{2}\left[\mathrm{Im}\left\{\frac{g''(t)}{g'(t)}\right\}\right]^2\geq 0.$$

Analizando esta ecuación, junto con la condición $f''(0)=0$, se obtiene que v es convexa y positiva en todo $\mathbb{R}$ y tiene un mínimo absoluto en $t=0$, lo que implica que g no tiene polos. Aquí la demostración se separa en dos casos. Primero, si $v'(t_0) = 0$ para algún $t_0 > 0$, por la convexidad de v se obtiene que $\mathrm{Re}\{g''/g'(t)\} = 0$ para $0 \leq t \leq t_0$. Por otro lado, de (1) y $p \geq 0$ se obtiene $\mathrm{Im}\{g''/g'(t)\} = 0$, por lo que $g''(t) = 0$ y $g = f \circ h$ es una transformación de Möbius. Esto quiere decir que $f = \psi \circ L \circ \sigma$, donde ψ es afín y σ una rotación.

El otro caso, si f no es como arriba, existe $\alpha > 0$ tal que $v'(t) \geq \alpha$ para todo $t > t_0$ y para todo ξ, de donde se obtienen las cotas de distorsión buscadas.

Basándose en esta demostración, Kari y Per Hag consideran la condición $p(t) \geq 0$, sin que f esté necesariamente en la clase de Nehari. Esta condición esta dada a través de la función g ahí definida y al escribirla en función de f se obtiene la condición

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \leq 2, \tag{4}$$

donde $|\xi| = 1$ y

$$\sigma_{f,\xi}(r) = \mathrm{Re}\{\xi^2 S_f(r\xi)\} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Im}\left\{\xi\frac{f''(r\xi)}{f'(r\xi)}\right\}\right]^2.$$

Esta condición define una clase de funciones que llamaremos la clase de Nehari-Hag (NH). Esta clase es más amplia que la clase N ya que

$$\sigma_{f,\xi}(r) = \mathrm{Re}\{\xi^2 S_f(r\xi)\} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Im}\left\{\xi\frac{f''(r\xi)}{f'(r\xi)}\right\}\right]^2 \leq |S_f(r\xi)|.$$

Además, es invariante bajo rotaciones del disco ya que la condición toma el supremo sobre todo $|\xi| = 1$, y bajo post-composición con funciones afines ya que éstas dejan invariante la pre-Schwarziana, luego también dejan invariante la Schwarziana y $\sigma_{f,\xi}$. Es importante observar que esta condición no implica univalencia, como veremos en la Sección 4.

Kari y Per Hag demuestran un equivalente al teorema de Gehring y Pommerenke, la Proposición 5.3: *Si $f : \mathbb{D} \to \Omega$ es univalente en $\mathbb{D}$ con $f''(0) = 0$ y*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \leq 2$$

donde $z = r\xi$, $r \in [0,1)$ y $|\xi| = 1$, entonces se cumple una de las siguientes condiciones:

(i) $\Omega = f(\mathbb{D})$ es no acotado;

(ii) f tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$ y existen constantes M_1 y M_2 tales que

$$|f(z) - f(z')| \leq M_1\left(\log\frac{3}{|z-z'|}\right)^{-1}$$

para $z, z' \in \overline{\mathbb{D}}$ *y*

$$|f(r\xi) - f(\xi)| \leq M_2[dist(f(r\xi), \partial\Omega)]^{1/2}.$$

La demostración de esta proposición sigue la demostración de Gehring y Pommerenke, definiendo las mismas funciones y obteniendo de la misma forma que v es convexa y positiva en todo $\mathbb{R}$, y que tiene un mínimo absoluto en $t = 0$. Aquí la demostración cambia ya que no se puede afirmar que $\mathrm{Im}\{g''/g'(t)\} = 0$. La demostración ahora se separa en dos casos. El primero, si $p(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, para algún ξ. En este caso v es constante y de esto, junto con propiedades de las funciones univalentes, se obtiene que f es no acotada.

En el otro caso, si para todo ξ existe algún t tal que $p(t) > 0$, se deduce que existe $\alpha > 0$ tal que $v'(t) \geq \alpha$ para todo $t > t_0$ y para todo ξ. Desde aquí se vuelve a seguir la demostración de Gehring y Pommerenke para obtener las cotas de distorsión buscadas.

Kari y Per Hag plantean esta nueva clase NH como la apropiada para estudiar la relación con discos de John, y demuestran el Teorema 5.7: *Si* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *es analítica y localmente univalente con* $f''(0) = 0$ *y*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) < 2,$$

entonces $\Omega = f(\mathbb{D})$ *es un disco de John.*

Otra línea que se ha relacionado con la clase de Nehari y con las funciones univalentes en general es el estudio de la métrica hiperbólica. En el disco unitario la métrica hiperbólica, también conocida como métrica de Poincaré, tiene por densidad

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

La distancia hiperbólica entre dos puntos está dada por

$$d_h(z_1, z_2) = \min_{\gamma} \int_{\gamma} \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| = \min_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

donde el mínimo se considera sobre todas las curvas $\gamma \subseteq \mathbb{D}$ que unen z_1 y z_2.

Como $\lambda_{\mathbb{D}}$ es una función radial, es fácil ver que para $z_1 = 0$ el mínimo se alcanza integrando sobre el radio correspondiente a z_2. Además, del lema de Schwarz se obtiene que los automorfismos del disco son isometrías hiperbólicas. Estos dos resultados nos muestran que el mínimo de la definición se alcanza en el arco de círculo que une z_1 y z_2 y corta el círculo unitario de forma ortogonal.

También se estudia la métrica hiperbólica de otros dominios, en particular de $\Omega = f(\mathbb{D})$ donde f es conforme. En dominios Ω simplemente conexos, la métrica de Poincaré se define imponiendo que sea un invariante conforme. Esto fuerza a que

$$\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Del lema de Schwarz y el teorema 1/4 de Koebe se obtienen las desigualdades

$$\frac{1}{4d(z,\partial\Omega)} \leq \lambda_\Omega(z) \leq \frac{1}{d(z,\partial\Omega)},$$

donde $d(z,\partial\Omega)$ es la distancia euclidiana de z a la frontera.

En esta línea Chuaqui y Osgood demostraron en [3] que cuando f esta en la clase de Nehari y $f''(0) = 0$, entonces existe un $c > 0$ tal que $|\nabla \log \lambda_\Omega(w)| \geq c|w|\lambda_\Omega(w)^{1/2}$. También demostraron que si f es acotada y esta en la clase de Nehari, entonces λ_Ω tiene un único punto critico.

Una función φ real definida sobre Ω se dice hiperbólicamente convexa si para toda curva geodésica $w = w(t)$ arcoparametrizada en la métrica hiperbólica, $\phi(t) = \varphi(w(t))$ es una función convexa en el sentido usual.

Chuaqui, Osgood y Pommerenke dan una caracterización de la clase de Nehari mediante su métrica hiperbólica demostrando que para f meromorfa y univalente en $\mathbb{D}$ son equivalentes:

(i) f está en la clase de Nehari;

(ii) para todo $\alpha \geq 1/2$ la función $\lambda^\alpha_{T(\Omega)}$ es hiperbólicamente convexa para toda transformación de Möbius T.

En el mismo teorema se dan otras condiciones equivalentes, similares a (ii), que serán omitidas.

3 Resultados

Vamos a considerar las funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \Omega$ localmente univalentes con $f''(0) = 0$ y

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \leq 2.$$

A esta clase de funciónes la llamaremos NH^*. Al igual que NH esta clase es cerrada bajo rotaciones del disco y bajo post-composición con funciones afines.

Definición 3.1 *Una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice radialmente h-convexa con respecto a w_0 si $\phi(t) = \varphi(w(t))$ es convexa en el sentido usual para toda curva geodésica $w = w(t)$ con $w(0) = w_0$ arcoparametrizada en la métrica hiperbólica.*

Una función $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se dirá radialmente h-convexa si lo es con respecto al 0.

Afirmación 3.1 *Sea $f : \mathbb{D} \to \Omega$ una función de Riemann. Entonces $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es radialmente h-convexa con respecto a w_0 si y sólo si $\varphi \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ radialmente h-convexa con respecto a $f^{-1}(w_0)$.*

Demostración: Por ser f mapeo de Riemann, $z = z(s)$ es un segmento geodésico hiperbolico arcoparametrizado si y sólo si $w(s) = f(z(s))$ lo es, luego $\psi(s) = \varphi \circ f(z(s)) = \varphi(w(s)) = \phi(s)$ por lo que $\psi''(s) \geq 0$ si y solo si $\phi''(s) \geq 0$.

Proposición 3.1 *Si consideramos la región $\Omega = f(\mathbb{D})$, con $f \in NH^*$; entonces $\lambda_\Omega^{1/2}(w)$ es radialmente h-convexa con respecto a $w_0 = f(0)$.*

Demostración: Debido a la Afirmación 3.1 verificar la h-convexidad radial de $\lambda^{1/2}(w)$ respecto a $w_0 = f(0)$ es equivalente a verificar la h-convexidad radial de $h_f(z) = \lambda^{1/2}(f(z)) = 1/\sqrt{(1-|z|^2)|f'(z)|}$ con respecto a 0. Como la clase NH^* es cerrada bajo precomposición con rotaciones del disco, y para $g(z) = f(\xi z)$, $|\xi| = 1$, se tiene que $h_f(z) = h_g(\xi^{-1}z)$, para verificar la h-convexidad radial con respecto al 0 de $h_f(z)$, con f en esta clase, basta verificar que $h_g(z)$ es h-convexa en $[0, 1)$ para toda g en la clase.

La arcoparametrización de $[0, 1)$ debe cumplir $x'(t)/1 - x^2(t) = 1$, de donde

$$\frac{d^2}{ds^2}h_f(x(s)) = \frac{d}{ds}(\frac{d}{dx}h_f\frac{dx}{ds}) = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}h_f(1-x^2))\frac{dx}{ds} = (1-x^2)\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{d}{dx}h_f).$$

Por otro lado $h'/h = (\log h)' = x/(1-x^2) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{f''/f'\}$, de donde

$$((1-x^2)h')' = \left(xh - \frac{1}{2}h(1-x^2)\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\}\right)'$$

$$= h + xh' - \frac{1}{2}\left[-2xh\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\} + (1-x^2)h'\ \mathrm{Re}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\} + h(1-x^2)\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\}\right]$$

$$= h\left(1 + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{(1-x^2)}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\}^2 + \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)'\right\}\right]\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{(1-x^2)}{2}\left[\mathrm{Re}\{S_f\} - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\}^2\right]\right)$$

$$= h\left(\frac{2-(1-x^2)^2\sigma_{f,1}(x)}{2(1-x^2)}\right).$$

Luego

$$\frac{d^2}{ds^2}h_f(x(s)) = h_f\left[1 - \frac{(1-x^2)^2\sigma_{f,1}(x)}{2}\right]. \tag{5}$$

Volviendo a nuestro problema original, si tenemos $f:\mathbb{D}\to\Omega$ con $f''(0)=0$ y

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \le 2$$

entonces

$$\frac{d^2}{ds^2}h_f(\xi r(s)) = \frac{d^2}{ds^2}h_g(r(s)) = h_g\left[1 - \frac{(1-r^2)^2\sigma_{g,1}(r)}{2}\right] \ge 0,$$

lo que demuestre la Proposición 3.1.

El la Proposición 5.3 de [6], a diferencia del teorema análogo de Gehring y Pommerenke, se deja abierto el problema de clasificar las funciones no acotadas. Veremos que las funciones no acotadas de esta clase son una transformación afín de rotaciones de $L(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$.

Teorema 3.1 *Si $f \in NH^*$ es univalente y $\Omega = f(\mathbb{D})$ es no acotado, entonces $f(z) = aL(\xi z) + b$.*

Demostración: En la demostración de la Proposición 5.3 de [6] se ve que las funciones no acotadas son las que cumplen $p_\xi(t) \equiv 0$ en $[0,\infty)$ para algún $|\xi| = 1$, lo que es equivalente a $(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \equiv 2$ en $[0,1)$ para algún $|\xi|=1$.

Consideremos $g(z) = f(\xi z)$, que es de la misma clase y cumple $(1-r^2)^2\sigma_{g,1}(r) = (1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \equiv 2$, por lo que tenemos $\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{d}{dx}h_g) = h_g\{\frac{2-(1-x^2)^2\sigma_{g,1}(x)}{2(1-x^2)}\} = 0$. Luego como $g''(0) = f''(0) = 0$ y $\frac{d}{dx}h_g(x) = h_g(x)[x/(1-x^2) - 1/2\mathrm{Re}\{g''/g'\}]$ tenemos $\nabla h_g(0) = 0$ y $\frac{d}{dx}h_g = 0$ en

$[0,1)$. Como h_g es radialmente h-convexa y $\nabla h_g(0) = 0$, en cada radio $h_g(0)$ es un mínimo absoluto, por lo que es un mínimo absoluto en el disco. Como para $x \in [0,1)$ vimos que $\frac{d}{dx}h_g = 0$ tenemos que $h_g(x) = h_g(0)$ es un mínimo absoluto en todo el segmento. Por esto $\nabla h_g(x) = 0$ para $x \in [0,1)$. Por otro lado tenemos $\log h_g = -1/2\log(1-|z|^2) - 1/2\log|g'(z)|$ de donde $\nabla h_g/h_g = \frac{\bar{z}}{2(1-|z|^2)} - g''/4g'$. Para $x \in [0,1)$ tenemos $g''/g'(x) = 2x/(1-x^2) = L''/L'(x)$, y por continuación analítica $g''/g' = L''/L'$ en $\mathbb{D}$, de donde

$$\log g'(z) = \log L'(z) + c,$$

$$g'(z) = aL'(z),$$

$$g(z) = aL(z) + b,$$

luego $f(z) = aL(\xi z) + b$. Esto demuestra el Teorema 3.1.

En analogía con la condición dada por Ahlfors y Weill y las clases N_t, para la clase NH consideremos la condición

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \leq 2t \tag{6}$$

con $t \in (0,1)$ y llamemos a las subclases de NH dadas por esta condición NH_t. Análogamente llamaremos NH_t^* a la clase de funciones de NH_t con la normalización $f''(0) = 0$.

Teorema 3.2 *(i) Si $f \in NH^*$, entonces*

$$\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq \frac{2r}{1-r^2} = \frac{L''(r)}{L'(r)}. \tag{7}$$

(ii) Si $f \in NH_t^*$, entonces

$$\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq \frac{2rt}{1-r^2} = \frac{A_t''(r)}{A_t'(r)}. \tag{8}$$

La cota en (8) no es exacta, en la demostración se da la cota exacta pero no es tan explícita. Si consideramos además la normalización $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ podemos obtener algunas cotas sobre f y f'. Debido a que la postcomposición con funciones afines deja invariante tanto f''/f' como la condición $f''(0) = 0$, la clase NH_t^* es invariante bajo estas composiciones y cualquier función de esta clase puede ser normalizada sin problema, manteniéndose dentro de NH_t^*.

Teorema 3.3 *Sea f analítica en el disco con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.*

(i) Si $f \in NH^*$, entonces

$$|f'(z)| \leq L'(|z|) \tag{9}$$

y

$$|f(z)| \leq L(|z|). \tag{10}$$

(ii) Si $f \in NH_t^*$, entonces

$$|f'(z)| \leq A_t'(|z|) \tag{11}$$

y

$$|f(z)| \leq A_t(|z|). \tag{12}$$

Para la demostración de estos dos teoremas necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.1 *Sea $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que satisface $u'' - cu \geq 0$ con condición inicial $u(0) = 1$ y $u'(0) = 0$ donde $c \geq 0$. Entonces*

(i) $u'/u \geq w'/w$,

(ii) $u \geq w$,

donde w es la solución de $w'' - cw = 0$, $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$.

La solución w del lema es clásica; para $c > 0$

$$w(s) = \frac{e^{\sqrt{c}s} + e^{-\sqrt{c}s}}{2}$$

es claramente no negativa en $[0, \infty)$, al igual que su derivada

$$w'(s) = \frac{\sqrt{c}}{2}(e^{\sqrt{c}s} - e^{-\sqrt{c}s}).$$

Para $c = 0$ tenemos la solución trivial $w(s) = 1$.

Demostración: Sea $v = u'w - uw'$, entonces $v(0) = 0$ y $v'(s) = u''w - uw'' = w(u'' - cu)$. Como $w > 0$ para $s \in [0, \infty)$ y $u'' - cu \geq 0$ tenemos que $v'(s) \geq 0$, lo que junto con $v(0) = 0$ nos da $v(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \infty)$. Luego $u'w \geq uw'$ y mientras u sea positiva, lo que sucede al menos en una vecindad de 0 ya que $u(0) = 1$, tenemos $u'/u \geq w'/w$, es decir i) . Integrando este resultado tenemos

$$\log u = \int_0^s u'/u \geq \int_0^s w'/w = \log w$$

y por la monotonía del logaritmo obtenemos $u \geq w$, es decir (ii), mientras $u > 0$. Pero como $w > 0$, y mientras $u > 0$ se tiene que $u \geq w$, entonces $u > 0$ para todo $s \in [0, \infty)$, y se tendrá que (i) y (ii) se cumplen para todo $s \in [0, \infty)$.

Para el caso $c = 0$, (i) se obtiene de la misma forma mientras que (ii) se obtiene de $u'(s) = v(s) \geq 0$ lo que junto con $u(0) = 1$ nos da $u(s) \geq 1 = w(s)$.

Demostración Teorema 3.2: Considerando $h_f(z(s))$ como función de $s = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$, arcoparámetro hiperbólico de $[0, 1)$, y $u = h_f(s)/h_f(0)$, que cumple $u(0) = 1$ y $u'(0) = h'_f(0)/h_f(0) = 0$, (6) junto con (5) nos dice que $\frac{d^2}{ds^2}u(s) = \frac{d^2}{ds^2}h_f(r(s))/h_f(0) \geq (1-t)h_f(s)/h_f(0) = (1-t)u(s)$. Luego u cumple las hipótesis del lema con $c = 1 - t$. Por (5) tenemos

$$\frac{\frac{d}{ds}u}{u} = \frac{\frac{d}{ds}h}{h} = \frac{\frac{d}{dr}h\frac{dr}{ds}}{h} = \frac{(1-r^2)\frac{d}{dr}h}{h} = r - \frac{(1-r^2)}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\right\}.$$

Por otro lado, para $t \neq 1$ tenemos que

$$\frac{\frac{d}{ds}w}{w} = \sqrt{1-t}\,\frac{e^{2\sqrt{1-t}s} - 1}{e^{2\sqrt{1-t}s} + 1}$$

y si lo consideramos como función de r

$$\frac{\frac{d}{ds}w}{w} = \sqrt{1-t}\,\frac{(1+r)^{\sqrt{1-t}} - (1-r)^{\sqrt{1-t}}}{(1+r)^{\sqrt{1-t}} + (1-r)^{\sqrt{1-t}}} = (1-t)A_t(r).$$

Por la parte (i) del lema tenemos que

$$r - \frac{(1-r^2)}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\right\} = \frac{\frac{d}{ds}u}{u} \geq \frac{\frac{d}{ds}w}{w} = (1-t)A_t(r)$$

de donde

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\right\} \leq \frac{2r - 2(1-t)A_t(r)}{1-r^2}.$$

Se sabe que $A_t(r)$ es convexa en $[0, 1)$ por lo que aplicando el teorema del valor medio obtenemos

$$A_t(r)/r = A'_t(\tilde{r}) \geq A'_t(0) = 1$$

de donde

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\right\} \leq \frac{2r - 2(1-t)r}{1-r^2} = \frac{2rt}{1-r^2}.$$

Para completar la demostración, para cada $z = \xi r$ consideremos $g(z) = f(\xi z)$, entonces $g'(z) = \xi f'(\xi z)$, $g''(z) = \xi^2 f''(\xi z)$ y $g''/g'(z) = \xi f''/f'(\xi z)$. Como la función $g \in NH_t^*$ tenemos

$$\mathrm{Re}\left\{\xi \frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{g''(r)}{g'(r)}\right\} \leq \frac{2rt}{1-r^2}.$$

Para $t = 1$ aplicando la parte (i) del lema tenemos

$$r - 1/2(1-r^2)\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\right\} = \frac{\frac{d}{ds}u}{u} \geq \frac{\frac{d}{ds}w}{w} = 0$$

de donde

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\right\} \leq \frac{2r}{1-r^2}.$$

Considerando $g(z) = f(\xi z)$ como antes obtenemos

$$\mathrm{Re}\left\{\xi \frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{g''(r)}{g'(r)}\right\} \leq \frac{2r}{1-r^2},$$

lo que concluye la demostración.

Demostración Teorema 3.3: La normalización impuesta sobre f nos da las condiciones iniciales para h_f, ya que $h_f(0) = 1/\sqrt{(1-|0|^2)|f'(0)|} = 1$ y $h_f'(0) = h_f(0)[r/(1-r^2) - 1/2\mathrm{Re}\{f''/f'(r)\}]\big|_{r=0} = 0$. Ahora podemos aplicar la parte (ii) del lema a $h_f(s)$ y obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{(1-|r|^2)|f'(r)|}} = h_f(r) \geq w(r) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{\sqrt{1-t}}{2}} + \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{-\frac{\sqrt{1-t}}{2}}\right]$$

de donde

$$|f'(r)| \leq \frac{4(1-r^2)^{\sqrt{1-t}-1}}{[(1+r)^{\sqrt{1-t}} + (1-r)^{\sqrt{1-t}}]^2} = A_t'(r).$$

Para completar la demostración consideremos para cada $z = \xi r$, al igual que antes, $g(z) = f(\xi z)$. Esta sigue estando en la clase NH_t^* y cumple la normalización, excepto por $g'(0) = \xi$. Sin embargo al ser $|\xi| = 1$ la demostración anterior se aplica a g sin ningún problema, por lo que obtenemos

$$|f'(\xi r)| = |\xi^{-1} g'(r)| = |g'(r)| \leq A_t'(r).$$

Ahora

$$|f(z)| = \left|\int_0^r f'(\xi s)ds\right| \leq \int_0^r |f'(\xi s)|ds \leq \int_0^r A_t'(s)ds = A_t(r),$$

lo que concluye la demostración.

Para $c = 0$ podemos seguir la misma argumentación obteniendo

$$|f'(\xi r)| \leq \frac{2r}{1-r^2} = L'(r)$$

e integrando

$$|f(z)| = \left|\int_0^r f'(\xi s)ds\right| \leq \int_0^r L'(s)ds = L(r),$$

Lo cual completa la demostración del Teorema 3.3.

A diferencia de la clase N, la clase NH no es invariante bajo composición por la izquierda con transformaciónes de Möbius. Esto hace que la condición $f''(0) = 0$, impuesta en los resultados anteriores, no resulte natural. Por esto, en los siguientes resultados eliminaremos esta condición, cambiándola por una de naturaleza geométrica. Al tratar de enunciar un resultado similar al Teorema 3.2, nos damos cuenta de que éste no se puede cumplir cerca del cero, ya que esto obligaría a que $f''(0) = 0$. A continuación, remplazaremos esta normalización por (13) para obtener estimaciones cerca de la frontera.

Teorema 3.4 *Sea $f : \mathbb{D} \to \Omega$ analítica, localmente univalente. Si para un $|\xi| = 1$ fijo*

$$\int_0^1 |f'(\xi t)|dt < \infty \tag{13}$$

y

$$\limsup_{r\to 1}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) < 2t \leq 2 \tag{14}$$

entonces

$$\limsup_{r\to 1}(1-r^2)\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq 2t. \tag{15}$$

Para la demostración necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 3.2 *Sea $u > 0$ solución de $u'' + pu = 0$ en $[0,1)$ con $u'(0) \neq 0$ y tal que $\int_0^1 u^{-2}(t)dt < \infty$, y sea $v > 0$ solución de $v'' + qv = 0$ en $[0,1)$, donde $0 \leq p(x) \leq q(x)$ para $x \in [x_0, 1)$. Entonces*

$$\limsup_{x\to 1}[-(1-x)u'/u] \leq \limsup_{x\to 1}[-(1-x)v'/v]. \tag{16}$$

Demostración: Utilizaremos un argumento similar a la demostración del teorema de comparación de Sturm, pero sólo sobre el segmento $[x_0, 1)$ ya que tan sólo ahí tenemos la condición $p(x) \leq q(x)$. Para esto necesitamos que las condiciones iniciales (en x_0) de ambas funciones sean iguales.

Se sabe que si u es como arriba entonces $\bar{u}(x) = u(x)\int_0^x u^{-2}(t)dt$ es solución de $u'' + pu = 0$ con $\bar{u}(0) = 0$ y $\bar{u}'(0) = 1/u(0) > 0$, linealmente independiente de u. Si $\tilde{u}$ es la solución de $u'' + pu = 0$ con condiciones iniciales $\tilde{u}(x_0) = v(x_0)$ y $\tilde{u}'(x_0) = v'(x_0)$ entonces $\tilde{u} = au + b\bar{u} = u(a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt)$ donde a y b son constantes. Como $\tilde{u}(x_0) = v(x_0) > 0$, $\tilde{u} > 0$ al menos en una vecindad de x_0.

Consideremos $w = \tilde{u}'v - \tilde{u}v'$ en $[x_0, 1)$. luego $w(x_0) = 0$ y $w' = \tilde{u}''v - \tilde{u}v'' = \tilde{u}v(q-p) \geq 0$, mientras $\tilde{u} \geq 0$, luego $w \geq 0$ para x en esta vecindad y $\tilde{u}'/\tilde{u} \geq v'/v$. Si continuamos el argumento clásico, como en el Lema 3.1, veremos que $\tilde{u} \geq v > 0$, por lo que el argumento anterior vale en todo $[x_0, 1)$.

Por otro lado $\tilde{u}' = u'(a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt) + u(bu^{-2})$ y

$$u'/u + \frac{bu^{-2}}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt} = \tilde{u}'/\tilde{u} \geq v'/v$$

por lo que

$$-(1-x)u'/u \leq -(1-x)v'/v + \frac{(1-x)bu^{-2}}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt} \tag{17}$$

y

$$\limsup_{x\to 1} -(1-x)u'/u \leq \limsup_{x\to 1} -(1-x)v'/v + \limsup_{x\to 1} \frac{(1-x)bu^{-2}}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt}.$$

Veremos que

$$\limsup_{x\to 1} \frac{(1-x)bu^{-2}}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt} \leq 0,$$

con lo que el lema quedaría demostrado.

Como tanto u como $\tilde{u}$ son positivas en $[x_0, 1)$, $a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt > 0$ por lo que: si $b \leq 0$

$$\frac{(1-x)bu^{-2}}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt} \leq 0$$

lo que dice directamente que

$$\limsup_{x\to 1} \frac{(1-x)bu^{-2}}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt} \leq 0.$$

Si $b > 0$, tenemos en x_0 que $a > -b\int_0^{x_0} u^{-2}(t)dt$ por lo que

$$a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt > b\left(\int_0^x u^{-2}(t)dt - \int_0^{x_0} u^{-2}(t)dt\right) = b\int_{x_0}^x u^{-2}(t)dt > 0$$

para $x > x_0$, luego

$$0 < \frac{b}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt} < \frac{b}{b\int_{x_0}^x u^{-2}(t)dt} < \infty, \tag{18}$$

es decir tenemos que

$$\frac{b}{a + b\int_0^x u^{-2}(t)dt}$$

esta acotado por ambos lados. Luego basta ver que $\limsup_{x\to 1}(1-x)u^{-2} = 0$.

Supongamos que $\limsup_{x\to 1}(1-x)u^{-2} = k > 0$. Como $\lim_{x\to 1}(1-x) = 0$ esto nos dice que $\liminf_{x\to 1} u^2 = 0$, por lo que hay algún punto $x_1 \in [x_0, 1)$ con $u'(x_1) < 0$, y como $u'' = -pu < 0$, $u'(x) < 0$ en todo $[x_1, 1)$ y u es monótona decreciente y acotada en este intervalo, por lo que $\lim_{x\to 1}(1-x)u^{-2}$ existe y es igual a k. Sea $0 < c < k$, por la definición de limite existe $x_2 \in [x_1, 1)$ tal que para $x \in [x_2, 1)$ se tiene $(1-x)u^{-2}(x) \geq c$, luego

$$\int_{x_2}^1 u^{-2} \geq \int_{x_2}^1 \frac{c}{1-x} = \infty,$$

lo que nos lleva a una contradicción.

Demostración Teorema 3.4: Queremos aplicar el lema a la función h_f definida antes, que cumple $((1-r^2)h_f')' = h_f[1-(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r)/2]$. Como esta ecuación tiene término de primer orden no nulo, utilizando un método estándar la transformamos en la ecuación $g'' + pg = 0$ donde $g = |f'(\xi r)|^{-1/2}$ y $p(r) = \sigma_{f,\xi}(r)/2$.

Como $\limsup_{r\to 1}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) = \alpha < 2t$, existe $r_0 \in [0,1)$ tal que para $r \in [r_0, 1)$ se tiene $(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \leq (2t+\alpha)/2 < 2t$, luego $p(r) = \sigma_{f,\xi}(r)/2 < t/(1-r^2)^2 = q(r)$.

Para $t < 1$ la solución de $v'' + qv = 0$, $v(0) = 1$ y $v'(0) = 0$ es conocida y $\int_0^r v^{-2}(t)dt = A_t(r) \leq M < \infty$. Además

$$\int_0^1 g^{-2}(t)dt = \int_0^1 |f'(\xi t)|dt < \infty,$$

con lo que se cumplen las hipótesis del lema. Este nos dice que

$$\limsup_{r\to 1} -(1-r)\frac{g'(r)}{g(r)} \leq \limsup_{r\to 1} -(1-r)\frac{v'(r)}{v(r)},$$

$$\limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)}{2}\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq \limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)}{2}\frac{A_t''(r)}{A_t'(r)},$$

$$\limsup_{r\to 1}(1-r)\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq \limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)2rt}{(1-r^2)} = t.$$

Como $\lim_{r\to 1}(1+r) = 2$, podemos decir que

$$\limsup_{r\to 1}(1-r^2)\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} = \lim_{r\to 1}(1+r)\limsup_{r\to 1}(1-r)\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq 2t.$$

En el caso $t = 1$ la solución de $v''+qv = 0$, $v(0) = 1$ y $v'(0) = 0$ es $v(r) = (1-r^2)^{1/2}$, $\int_0^r v^{-2}(t)dt = N(r)$. Podemos seguir el mismo argumento obteniendo

$$\limsup_{r\to 1}(1-r^2)\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\right\} \leq 2.$$

Teorema 3.5 *Sea $f : \mathbb{D} \to \Omega$ analítica y univalente con área de $\Omega = f(\mathbb{D})$ finita. Si*

$$\limsup_{r\to 1}\sup_{|\xi|=1}(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) < 2t, \tag{19}$$

entonces

(i)

$$\lim_{r\to 1}\sup_{|\xi|=1}(1-r^2)|f'(\xi r)| = 0,$$

(ii) para todo ξ con $|\xi| = 1$,

$$\int_0^1 |f'(\xi r)|dr < \infty.$$

Demostración: Consideremos nuevamente la función $h_f(z) = 1/\sqrt{(1-|z|^2)|f'(z)|}$. Vimos en (5) que si consideramos s como la arcoparametrización hiperbólica del radio $[0, \xi)$ tenemos que

$$\frac{d^2}{ds^2}h_f(\xi r(s)) = h_f[1 - \frac{(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r)}{2}].$$

La condición (19) nos dice que existe un $r_0 < 1$ tal que $(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) \leq a < 2$ para $r > r_0$ y para todo ξ, por lo que para $r(s) > r_0$ tendremos que

$$\frac{d^2}{ds^2}h_f(\xi r(s)) \geq 1 - \frac{a}{2} > 0.$$

Luego a partir de r_0 la función $h_f(z)$ es radialmente hiperbólicamente convexa.

La primera afirmación será que para cada $|\xi| = 1$ existe un $r_\xi > r_0$ tal que $h_f'(\xi r_1) \geq 0$, donde por h_f' entendemos derivada con respecto a r. Para demostrar esta afirmación por contradicción supongamos que existe un ξ tal que $h_f'(\xi r) < 0$ para todo $r > r_0$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\xi = 1$. Para continuar la demostración necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.3 *Sea $f : \mathbb{D} \to \Omega$ univalente, entonces para todo z_1 y z_2 en $\mathbb{D}$*

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leq \exp(6\ d_h(z_1, z_2)), \tag{20}$$

donde $d_h(z_1, z_2)$ denota la distancia hiperbólica entre estos dos puntos.

Demostración: Un resultado clásico sobre funciones univalentes en el disco es que

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\right| < \frac{4}{1-|z|^2}$$

de donde

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{6}{1-|z|^2}.$$

Como $\log|a| \leq |\log a|$ tenemos que

$$\log\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leq \left|\log\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leq \left|\int_{z_1}^{z_2}\frac{f''(z)}{f'(z)}dz\right|$$

$$\leq \int_{z_1}^{z_2}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right||dz| \leq \int_{z_1}^{z_2}\frac{6|dz|}{1-|z|^2} = 6d_h(z_1, z_2),$$

de donde se obtiene (20).

Continuando con la demostración del Teorema 3.5, si $h_f'(r) < 0$ para todo $r < r_0$, entonces $h_f(r) \leq h_f(r_0)$ de donde

$$|f'(r)| \geq \frac{c}{1-r^2} \tag{21}$$

con $c = h_f(r_0)^{-2}$.

Consideremos la región

$$R = \left\{re^{i\theta} : r > r_1 = \max\{r_0, 3/4\}, |\theta| < \pi\frac{1-r^2}{r}\right\}.$$

Esta región está parametrizada de forma 1-1 por r y θ en estos intervalos. Además en esta región se cumple

$$d_h(re^{i\theta}, r) \leq \int_0^\theta \frac{|ire^{1\theta}d\theta|}{1-r^2} = \frac{r|\theta|}{1-r^2} \leq \pi,$$

lo que, junto con (20) nos dice que $|f'(re^{i\theta})| \geq |f(r)|e^{-6\pi}$.

Si calculamos el área de la imagen de R, usando la desigualdad anterior tenemos que

$$A_R = \int\int_R |f'(z)|^2 dA \geq \int_{r_1}^{1} \int_{-\pi\frac{1-r^2}{r}}^{\pi\frac{1-r^2}{r}} |f'(r)|^2 e^{-12\pi} r \, d\theta dr$$
$$= \int_{r_1}^{1} |f'(r)|^2 e^{-12\pi} 2\pi (1-r^2) dr,$$

y usando (21) tenemos que

$$A_R \geq e^{-12\pi} 2\pi \int_{r_1}^{1} \frac{c^2}{1-r^2} dr = \infty,$$

y como $A_R < A_{\mathbb{D}} < \infty$ tenemos una contradicción.

Luego para cada $|\xi| = 1$ existe un $r_\xi > r_0$ tal que $h_f'(\xi r_\xi) \geq 0$. Tomemos como $r_\xi = \inf\{r > r_0 : h_f'(\xi r) \geq 0\}$. Nuestra siguiente afirmación es que si tomamos $r_1 = \sup_{|\xi|=1} r_\xi$, entonces $r_1 < 1$. Demostraremos esta afirmación por contradicción, para esto supongamos que $r_1 = 1$.

Por definición de supremo, esto quiere decir que existe una sucesión $r_{\xi_n} \to 1$. Por compacidad del disco unitario la sucesión $\{\xi_n\}$ tiene una subsucesion convergente, podemos suponer que $\xi_n \to \lambda$. Como h_f es radialmente h-convexa y existe r_λ con $h'(\lambda r_\lambda) \geq 0$, entonces para $r_2 > r_\lambda$ tenemos que $h'(r_2) > 0$. Como h_f' es continua tanto en r como en ξ existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para $|r_2 - r| < \epsilon$ y $|\xi - \lambda| < \delta$ $h_f'(\xi r) > 0$. Por la h-convexidad radial de h_f esto implica que $h_f'(\xi r) > 0$ para $r > r_2$ y $|\xi - \lambda| < \delta$. Ahora, como $\xi_n \to \lambda$ y $r_{\xi_n} \to 1$ para algún n tenemos que $|\xi - \xi_n| < \delta$ y $r_{\xi_n} > r_2$, luego $h_f'(\xi_n r_2) > 0$ con $r_2 < r_{\xi_n}$ lo que contradice la definición de r_{ξ_n}.

Tenemos entonces $r_1 < 1$ tal que $h_f'(\xi r_1) \geq 0$ para todo ξ. Por la h-convexidad radial $h_f'(\xi r) > 0$ para $r > r_1$, en particular si tomamos $r_2 > r_1$. Sea

$$\alpha = \min_{|\xi|=1} (1 - r_2^2) h_f'(\xi r_2).$$

Por la compacidad del círculo, α se alcanza para algun ξ, por lo que $\alpha > 0$. Nuevamente por la h-convexidad radial tenemos que $(1-r^2)h_f'(\xi r) \geq \alpha$ para todo ξ y todo $r \geq r_2$. Luego

$$h_f(\xi r) = h_f(\xi r_2) + \int_{r_2}^{r} h_f'(\xi x) dx \geq h_f(\xi r_2) + \int_{r_2}^{r} \frac{\alpha}{1-r^2} dx$$
$$\geq h_f(\xi r_2) - \frac{\alpha}{2} \log\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right) + \frac{\alpha}{2} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

de donde tomando

$$c = \sup_{|\xi|=1} h_f(\xi r_2) - \frac{\alpha}{2} \log\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)$$

obtenemos

$$(1-r^2)|f'(\xi r)| \leq \left[c + \frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right]^{-2}.$$

De la desigualdad anterior vemos que

$$\limsup_{r\to 1} \sup_{|\xi|=1}(1-r^2)|f'(\xi r)| \leq \limsup_{r\to 1} \left[c + \frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right]^{-2} = 0.$$

Ademas,

$$\begin{aligned}\int_{r_2}^{1} |f'(\xi r)|dr &\leq \int_{r_2}^{1} (1-r^2)^{-1}\left[c + \frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right]^{-2} dr \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[c + \frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)\right]^{-1} < \infty,\end{aligned}$$

con lo que termina la demostración.

Kari y Per Hag, en el Teorema 5.7 de [6], demuestran que si $f \in NH_t^*$, entonces $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un disco de John. Usando los resultados anteriores veremos que la condición $f''(0) = 0$ se puede cambiar por que Ω tenga area finita, y que la condición (2) se puede cambiar por la condición (6).

Teorema 3.6 *Sea f analítica y univalente en el disco con área de $\Omega = f(\mathbb{D})$ finita y que cumple la condición* (19). *Entonces Ω es un disco de John.*

Demostración: El Teorema 3.7 de [6] dice que si f es conforme y

$$\limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\mathrm{Re}\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} < 2 \tag{22}$$

entonces $f(\mathbb{D})$ es un disco de John. En la demostración de este teorema la condición (22) sólo se usa para establecer la existencia de un $\beta \in (0,2)$ y un $r_0 \in (0,1)$ tales que para $r_0 \leq r < 1$ se tiene

$$\mathrm{Re}\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\} < \frac{\beta}{1-r^2}$$

para todo $|\xi| = 1$. Veremos que esto ultimo se puede establecer también a partir de las hipótesis del teorema.

Vamos a reconstruir el Teorema 3.4, pero ahora buscando un limite uniforme en ξ. Del Teorema 3.5, (ii), obtenemos que

$$\int_0^1 |f'(\xi r)|dr < \infty,$$

por lo que se cumplen las hipotesis del Teorema 3.4. Consideramos las mismas funciónes, $g = |f'(\xi r)|^{-1/2}$, $p(r) = \sigma_{f,\xi}(r)/2$, $q(r) = t/(1-r^2)^2$ y $v = (A_t')^{-1/2}$. De la condición (19) obtenemos que hay un r_1 tal que para todo $r > r_1$ y todo ξ, $(1-r^2)^2\sigma_{f,\xi}(r) < 2t$, luego $p < q$. Estas funciones cumplen las hipótesis del Lema 3.2 de donde usaremos (17), un paso intermedio de su demostración. Este dice que para $r > r_1$

$$-(1-r)g'/g < -(1-r)v'/v + \frac{(1-r)bg^{-2}}{a + b\int_0^r g^{-2}(t)dt}$$

lo que escrito en función de f y multiplicado por $(1+r)$ es

$$(1-r^2)\mathrm{Re}\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\} < 2rt + \frac{(1-r^2)b|f'(\xi r)|}{a + b\int_0^r |f'(\xi t)|dt}.$$

Afirmamos que existe K independiente de ξ tal que

$$\frac{b}{a + b\int_0^r |f'(\xi t)|dt} < K.$$

De hecho si tomamos $r_2 > r_1$ y

$$K = (\inf_{|\xi|=1}\int_{r_1}^{r_2} |f'(\xi t)|dt)^{-1}$$

entonces para $r > r_2$

$$\int_{r_1}^{r} |f'(\xi t)|dt > \int_{r_1}^{r} |f'(\xi t)|dt \geq K^{-1}.$$

Si $b > 0$, vimos en (18) que

$$\frac{b}{a + b\int_0^r |f'(\xi t)|dt} < \frac{1}{\int_{r_1}^{r_2} |f'(\xi t)|dt} < K.$$

Si $b \leq 0$, como $a + b\int_0^r |f'(\xi t)|dt > 0$,

$$\frac{b}{a + b\int_0^r |f'(\xi t)|dt} \leq 0 < K.$$

Luego para $r > r_2$ tenemos que

$$(1-r^2)\mathrm{Re}\{\xi\frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\} < 2rt + K(1-x^2)|f'(\xi r)|.$$

Por Teorema 3.5, (ii), existe $r_3 > r_2$ tal que para $r > r_3$

$$K(1-x^2)|f'(\xi r)| < (1-t),$$

luego para $r > r_3$

$$(1-r^2)\mathrm{Re}\{\xi \frac{f''(\xi r)}{f'(\xi r)}\} < 2rt + 1 - t < t + 1.$$

Es decir tomando $\beta = t + 1$ y $r_0 = r_3$ podemos continuar el argumento de la demostración del teorema 3.7 de Hag y Hag, obteniendo que Ω es un disco de John.

4 Ejemplo

Se sabe que si una función satisface

$$(1-|z|^2)^2|S_f(z)| \leq k$$

existe un $\delta(k) > 0$ tal que la función es univalente en cualquier sub-disco de $\mathbb{D}$ de radio hiperbólico menor o igual a δ.

En el caso de $\sigma_{f,\xi}$ no se puede establecer un resultado similar, como muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos

$$f_c(z) = e^{cz},$$

que tiene $f_c' = cf_c$, $f_c'' = c^2 f_c$ y $f_c''/f_c' = c$, con lo cual $S_{f_c} = -c^2/2$ y

$$\sigma_{f_c,\xi}(r) = \mathrm{Re}\{-\xi^2\frac{c^2}{2}\} - \frac{1}{2}[\mathrm{Im}\{\xi c\}]^2$$

$$\leq \mathrm{Re}\{-\xi^2\frac{c^2}{2}\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\xi^2 c^2\} - \frac{1}{2}[\mathrm{Re}\{\xi c\}]^2 \leq 0.$$

Para $c > \pi$ la función no es univalente, de hecho

$$f_c(-\pi i/c) = e^{-\pi i} = e^{\pi i} = f_c(\pi i/c)$$

por lo que f_c no es univalente en ningún disco, centrado en el origen, de radio mayor que $\pi i/c$.

Luego para cada radio δ existe una función f_c con $\sigma_{f_c,\xi}(r) \leq 0$ que no es univalente en el disco de radio δ. En particular, este ejemplo también muestra que las funciónes de la clase de Nehari-Hag no son necesariamente univalentes.

Referencias

[1] M. Chuaqui y B. Osgood, Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative, J. London Math. Soc.(2) 48(1993), 289-298.

[2] M. Chuaqui y B. Osgood, Ahlfors-Weill extensions of conformal mappings n critical points of the Poincaré metric, Comment. Math. Helev. 69 (1994), 659-668.

[3] M. Chuaqui, B. Osgood y Ch. Pommerenke, John domains, quasidisks, and the Nehari class, J. reine angew. Math. 471 (1996), 77-114.

[4] P.L. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag: New York, 1983.

[5] F.W. Gehring y Ch.Pommerenke,On the Nehari univalence criterion and quasicircles, Comment. Math. Helev. 59 (1984), 226-242.

[6] K. Hag y P. Hag, John disks and the pre-Schwarzian derivative, Ann. Acad. Sci. Fenn. 26 (2001), 205-224.

[7] Ch. Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag: Berlin, 1992.