PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Distorsión para p-criterios de Nehari

Por

Rodrigo Vargas

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al grado de
Magíster en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía	:	Martin Chuaqui	- Universidad Católica de Chile.
Comisión Informante	:	Martin Chuaqui	- Universidad Católica de Chile.
		Manuel Elgueta	- Universidad Católica de Chile.
		Rodrigo Hernández	- Universidad Adolfo Ibáñez.

Noviembre, 2008
Santiago - Chile

Índice

Agradecimientos

Primero agradezco a Dios por estar conmigo en cada paso que he dado, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido de vital importancia durante este periodo de estudio.

En el desarrollo de este trabajo de tesis el apoyo, paciencia y amor de mi amada Claudia e hija Mariana han sido fundamentales, es a ellas a quien dedico este trabajo.

A mis padres por su amor, sacrificio y apoyo incondicional, a ellos debo mi formación y logros. A mis hermanos, quienes han estado conmigo siempre dándome su amor infinito. A la familia de Claudia, con quienes he vivido momentos importantes de este proceso, estoy muy agradecido de todo la ayudada brindada, son una familia maravillosa.

A mis Maestros de Matemática quienes supieron motivarme por esta disciplina y agradecer en especial a mi tutor Sr. Martin Chuaqui por la ayuda, enseñanza y sabia dirección en este proceso.

A mis amigos durante este camino, en especial a mi amigo de infancia Eduardo y a mis compañeros Claudia y Mauricio con quienes he compartido muchas vivencias personales su influencia ha sido positiva en mi vida.

En general quisiera agradecer a todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de esta tesis, a las cuales no necesito nombrar porque tanto ellas como yo sabemos que desde los más profundo de mi corazón les agradezco el haberme brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de funciones univalentes en dominios simplemente conexos distintos de $\mathbb{C}$ es un tópico que ha sido sujeto de estudio en el último siglo. En virtud del teorema del mapeo de Riemann, es suficiente estudiar muchas cuestiones que involucran univalencia en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ antes que sobre un dominio simplemente conexo general. Introducimos la clase $\mathcal{S}$ dada por

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ es univalente y } f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

Si f es cualquier función univalente en $\mathbb{D}$ y $g(z) = (f(z) - f(0))/f'(0)$, entonces $g \in \mathcal{S}$, así el estudio de la clase $\mathcal{S}$ proporciona información acerca de cualquier función univalente en $\mathbb{D}$.
Una función f en la clase $\mathcal{S}$ tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad z \in \mathbb{D}.$$

La clase $\mathcal{S}$ no es cerrada bajo la adición y la multiplicación, sin embargo es invariante o cerrada bajo una de serie de transformaciones:

i) Conjugación:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \ldots + \overline{a_n} z^n + \ldots \in \mathcal{S}$.

ii) Rotación:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \in \mathcal{S}$.

iii) Dilatación:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = \dfrac{1}{r} f(rz) \in \mathcal{S}$ para todo $0 < r \leq 1$.

iv) Raíz Cuadrada:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = \sqrt{f(z^2)} \in \mathcal{S}$.

v) Valor Omitido:
Si $f \in \mathcal{S}$ y $w \notin f(\mathbb{D})$ entonces $g(z) = \dfrac{w f(z)}{w - f(z)} \in \mathcal{S}$.

vi) Transformación de Koebe:
Si $f \in \mathcal{S}$ para cada $|a| < 1$

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)} \in \mathcal{S}.$$

Un ejemplo importante de una función que pertenece a la clase $\mathcal{S}$ lo constituye la función de Koebe

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots \ ,$$

la cual mapea $\mathbb{D}$ a todo el plano complejo salvo el segmento cerrado del eje real comprendido entre $-\infty$ a $-1/4$, y juega un papel extremal en la clase $\mathcal{S}$.

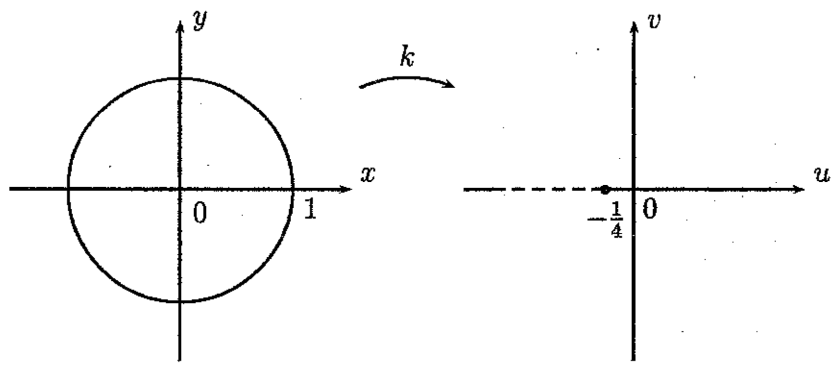

Figura 1: La función de Koebe

Por ejemplo, Bieberbach probó que si $f \in \mathcal{S}$ con $f(z) = z + a_2 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ entonces $|a_2| \leq 2$ y si hay igualdad entonces f es una rotación de la función de Koebe. Una consecuencia de esta desigualdad es el Teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe, que establece que toda $f \in \mathcal{S}$ cubre al menos un disco en torno al origen de radio $1/4$ y si además no cubre ningún disco de radio mayor entonces f es una rotación de la función de Koebe. Otra consecuencia de la desigualdad $|a_2| \leq 2$ es el siguiente teorema de distorsión.

Teorema 1. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$\left| \frac{f''}{f'}(z) - \frac{2\overline{z}}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4}{1-|z|^2} \,. \tag{1.1}$$

Usando este teorema es posible deducir el teorema de distorsión de Koebe.

Teorema 2. *Si $f \in S$ entonces*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{1.2}$$

Si hay igualdad para algún $z_0 \neq 0$ en alguna de las desigualdades entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Mediante una apropiada integración de la desigualdad (1.2) se obtiene el teorema de crecimiento de Koebe.

Teorema 3. *Si $f \in S$ entonces*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{1.3}$$

Si hay igualdad para algún $z_0 \neq 0$ en alguna de las desigualdades entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Las demostraciones de estos teoremas y otros resultados de funciones univalentes pueden ser hallados en los libros de P. Duren [**6**] y C. Pommerenke [**11**].
Algunas condiciones necesarias y otras suficientes para la univalencia de una función analítica y localmente inyectiva en $\mathbb{D}$ dependen del tamaño de la derivada Schwarziana. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Se define la derivada Schwarziana de f por

$$Sf(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

La Schwarziana es invariante bajo composición por la izquierda con transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1, \tag{1.4}$$

es decir, $S(T \circ f) = Sf$. Esto es un caso particular de la regla de composición para la Schwarziana. Si f es cualquier función analítica y localmente univalente en el rango de g, entonces

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)(g')^2 + Sg.$$

Por consiguiente si f es una transformación de Möbius entonces $Sf = 0$. Es posible demostrar que para cualquier f localmente univalente se tiene que

$$\frac{d^2}{dz^2} f'(z)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} f'(z)^{-\frac{1}{2}} Sf(z).$$

Esto sugiere que existe una relación entre la Schwarziana y ecuaciones diferenciales de segundo orden. En efecto, si $Sf = 2p$ y $u = (f')^{-1/2}$ entonces

$$u'' + pu = 0. \tag{1.5}$$

Recíprocamente, si u_1, u_2 son soluciones linealmente independientes de (1.5) y $f = u_1/u_2$ entonces $Sf = 2p$. Debido a que la derivada Schwarziana es invariante bajo composición por la izquierda con transformaciones de Möbius la solución f no es única. Se sigue que si f y g son funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y $Sf = Sg$, entonces existe una transformación de Möbis T tal que $g = T \circ f$. El siguiente resultado es la caracterización fundamental de univalencia en términos de la Schwarziana

Teorema 4. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Entonces la función f es univalente en Ω si y sólo si toda solución no trivial de $u'' + (Sf/2)u = 0$ se anula en Ω a lo más una vez.*

El siguiente teorema fue demostrado en 1949 por Nehari.

Teorema 5. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$|Sf(z)| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}. \tag{1.6}$$

Recíprocamente, si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es analítica y localmente univalente tal que

$$|Sf(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{1.7}$$

entonces $f \in \mathcal{S}$.

La ecuación (1.7) define lo que se conoce como la clase de Nehari N, la cual es una importante subclase de funciones univalentes. Ambas cotas en el teorema son óptimas. Esto se tiene del hecho que la transformación de Koebe tiene $Sk(z) = -6(1-z^2)^{-2}$ y la transformación

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i\varepsilon}$$

posee derivada Schwarziana $Sg(z) = 2(1+\varepsilon^2)(1-z^2)^{-2}$ y es infinito valente para cada $\varepsilon > 0$. Un ejemplo de función que pertenece a la clase N es

$$L(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \ ,$$

y juega un importante rol al ser extremal en muchos problemas de la clase N. La función L mapea a $\mathbb{D}$ en la franja $\{w : |\mathrm{Im}\, w| < \pi/4\}$ y posee $SL(z) = 2(1 - z^2)^{-2}$.

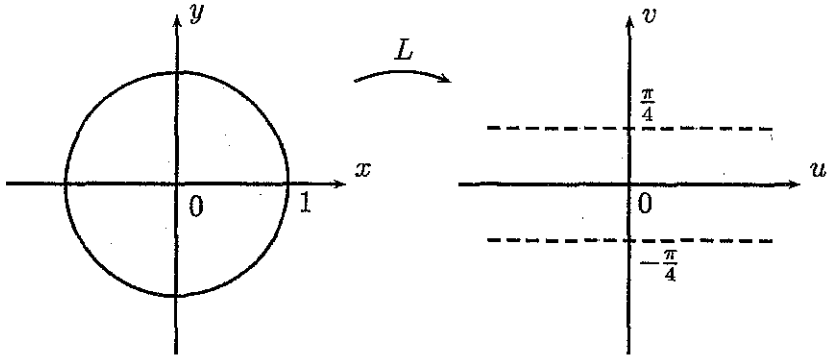

Figura 2: La función L

Otra importante propiedad de la clase de Nehari es que es invariante bajo composición por la derecha con automorfismo del disco.
Usando la relación entre la derivada Schwarziana y las ecuaciones diferenciales, M. Chuaqui y B. Osgood en [4] mostraron cómo obtener cotas de distorsión y crecimiento a partir de cotas sobre la Schwarziana para funciones de la clase de Nehari con la importante normalización $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Cualquier función univalente puede ser normalizada de esta manera sin variar su Schwarziana componiendo adecuadamente por la izquierda con una transformación de Möbius. Mas precisamente, si $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ es analítica en el disco entonces $g = f/(1+a_2f)$ satisface la normalización $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 0$ y posee la misma derivada Schwarziana que f. El resultado es el siguiente teorema.

Teorema 6. *Sea f analítica en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Si f satisface*

$$|Sf(z)| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2},$$

entonces

$$n(|z|) \leq |f(z)| \leq L(|z|),$$

y

$$n'(|z|) \leq |f'(z)| \leq L'(|z|),$$

donde

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+z)^{\sqrt{2}} - (1-z)^{\sqrt{2}}}{(1+z)^{\sqrt{2}} + (1-z)^{\sqrt{2}}}.$$

Si en alguna de estas desigualdades se tiene igualdad para un $z_0 \neq 0$, entonces f es una rotación de la correspondiente función extremal.

La función n pertenece a clase N y posee $Sn(z) = -2/(1-z^2)^2$.
Otro criterio de univalencia obtenido por Nehari en 1949 (ver [**9**]) es el siguiente

Teorema 7 (Nehari). *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es analítica y localmente univalente tal que*

$$|Sf(z)| \leq \frac{\pi^2}{2} \tag{1.8}$$

entonces f es univalente.

La cota es óptima como lo demuestra la función $f(z) = e^{\pi i(1+\varepsilon)z}$ que posee

$$Sf(z) = \frac{\pi^2}{2}(1+\varepsilon)^2$$

y no es univalente en $\mathbb{D}$. Otra condición de univalencia anunciada por Pokorni y demostrada por Nehari es

Teorema 8 (Pokorny-Nehari). *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es analítica y localmente univalente tal que*

$$|Sf(z)| \leq \frac{4}{1-|z|^2} \tag{1.9}$$

entonces f es univalente.

La cota dada en (1.9) es óptima en el siguiente sentido, para todo $C > 4$ existe una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica tal que f no es univalente y $|Sf(z)| \leq C(1-|z|^2)^{-1}$. Para dar un ejemplo explicito de una tal función es necesario introducir la función hipergeométrica

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n \tag{1.10}$$

donde $(a)_n, (b)_n$ y $(c)_n$ son los símbolos de Pochhammer dados por

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

y en donde hemos asumido que $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. La función hipergeométrica es una solución linealmente independiente de la ecuación diferencial hipergemétrica

$$z(z-1)y'' + [(a+b+1)z - c]y' + aby = 0.$$

Gauss demostró que la función hipergeométrica converge absolutamente para $|z| < 1$, y para $|z| = 1$ cuando $\mathrm{Re}\,(c-a-b) > 0$. Por ejemplo, si $a = 1$, $b = c$ entonces obtenemos la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots .$$

Ahora bien, considere la función

$$f(z) = z \cdot \frac{F\left(\frac{5}{4} + \gamma_\varepsilon, \frac{5}{4} - \gamma_\varepsilon; \frac{3}{2}; z^2\right)}{F\left(\frac{3}{4} + \gamma_\varepsilon, \frac{3}{4} - \gamma_\varepsilon; \frac{1}{2}; z^2\right)}$$

con $\gamma_\varepsilon = \sqrt{8\varepsilon + 9}/4$, la cual se obtuvo como el cuociente de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2(1+\varepsilon)}{1-z^2} y = 0 \,. \tag{1.11}$$

Entonces f posse derivada Schwarziana $Sf(z) = 4(1+\varepsilon)(1-z^2)^{-1}$. El Teorema de Sturm (ver Capítulo 2) permite, comparando el coeficiente $p(z) = \dfrac{2(1+\varepsilon)}{1-z^2}$, establecer que las soluciones de la ecuación (1.11) se anulan más de una vez en $\mathbb{D}$ lo que implica según el Teorema 4 que f no es univalente en $\mathbb{D}$.

Los criterios de univalencia de los Teoremas 5 y 6 son corolarios del p-criterio de Nehari que establece lo siguiente.

Teorema 9 (p-criterio). *La función f será univalente en $\mathbb{D}$ si*

$$|Sf(z)| \leq 2p(|z|)$$

donde $p(x)$ es una función con las siguientes propiedades

(i) $p(x)$ *es continua y positiva en* $-1 < x < 1$;
(ii) $p(x) = p(-x)$;
(iii) $(1-x^2)^2 p(x)$ *es no-creciente para* $0 \leq x < 1$;
(iv) la ecuación diferencial $y'' + py = 0$ *tiene una solución que no se anula en* $-1 < x < 1$.

El propósito de esta tesis es estudiar las clases de funciones univalentes dadas por las condiciones (1.8) y (1.9) inspiradas en el trabajo iniciado en **[2]** y **[4]** para la clase N. Obtendremos cotas de distorsión y crecimiento para ambas clases usando un lema de comparación complejo que es obtenido en [**4**]. Por otro parte, se obtienen resultados de distorsión esférica y distorsión con dos puntos. Finalmente, obtenemos que si f satisface la condición (1.9) entonces f mapea $\mathbb{D}$ sobre un dominio de John.

CAPÍTULO 2

Resultados Preliminares

1. Teoremas de Comparación

Comenzamos esta sección con un importante teorema de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, que permite comparar en términos del tamaño del coeficiente q la frecuencia con que las soluciones de la ecuación

$$v'' + qv = 0 \tag{2.1}$$

se pueden anular. Nos referimos al Teorema de Comparación de Sturm. Si consideramos una segunda ecuación

$$w'' + rw = 0 \tag{2.2}$$

y si v, w son las soluciones de (2.1) y (2.2) respectivamente tal que $v(x_0) = w(x_0) = 0$ y $v'(x_0) = w'(x_0) > 0$, se tiene entonces

Teorema 10 (Sturm). *Supongamos que $q \geq r$ y sea $x_1 > x_0$ el primer punto en el que $v(x_1) = 0$. Entonces para todo $x \in [x_0, x_1]$ tenemos que*

$$w(x) \geq v(x)\,. \tag{2.3}$$

Demostración. El wronskiano $\mu = vw' - v'w$ satisface

$$\mu' = vw'' - v''w = (q-r)vw.$$

Por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $\mu(x) \geq 0$ en una vecindad $(x_0, x_0 + \delta)$, como $\mu(x_0) = 0$ entonces $\mu(x) \geq 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$, es decir

$$\frac{w'}{w}(x) \geq \frac{v'}{v}(x) \tag{2.4}$$

para $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, lo cual implica

$$\log w(x)\,\Big|_{x_0}^{x} \geq \log v(x)\,\Big|_{x_0}^{x} \tag{2.5}$$

para $x \in (x_0, x_0+\delta)$, luego $\frac{w(x)}{w(x_0)} \geq \frac{v(x)}{v(x_0)}$ por lo tanto $w(x) \geq v(x)$ para $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Esto implica que el siguiente cero $w(x)$ no puede estar antes de $x_0+\delta$ y este argumento se puede repetir hasta llegar al primer cero de v. □

Una demostración similar da el siguiente corolario, en el cual se han considerado soluciones normalizadas en el origen.

Corolario 1. *Sean q, h funciones continuas en el intervalo $(-1,1)$ y sean v, w las soluciones de*

$$\begin{aligned} v''+qv=0, \quad v(0)=1, \quad v'(0)=0, \\ w''+hw=0, \quad w(0)=1, \quad w'(0)=0. \end{aligned}$$

Si $q \geq h$ entonces hasta el primer cero de v se tiene que

$$w \geq v.$$

Con el objetivo de lograr un criterio de comparación compleja de soluciones de ecuaciones diferenciales estableceremos el siguiente lema, en el cual se considera la función $|u(z)|$ restringida a rectas que pasan por el origen.

Lema 1. *Sea $u(z)$ la solución compleja de*

$$u''(z)+p(z)u(z)=0, \qquad z\in\Omega \tag{2.6}$$

y sea $z=z(s)$ una arcoparametrización de un segmento lineal $[a,b]\subset\Omega$. Sea $v(s)=|u(z(s))|$. Supongamos que $u(z(s))\neq 0$ para $s\in(a,b)$. Entonces

$$v''(s)+|p(z(s))|v(s)\geq 0\,. \tag{2.7}$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} v^2(s) &= |u(z(s))|^2=u(z(s))\overline{u(z(s))}. \\ 2vv' &= u'z'\overline{u}+u\overline{u'z'}=2\mathrm{Re}\{u'z'\overline{u}\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$|vv'|\leq|u'z'\overline{u}|\leq|u'||u|\Longrightarrow|v'|\leq|u'|\ ,$$

de donde usando (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned} vv''+(v')^2 &= \mathrm{Re}\{u''(z')^2\overline{u}+u'z'\overline{u'z'}\} \\ &= \mathrm{Re}\{-p|u|^2(z')^2\}+|u'|^2 \\ &= -\mathrm{Re}\{p(z')^2\}v^2+|u'|^2. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} vv''+\mathrm{Re}\{p(z')^2\}v^2=|u'|^2-(v')^2\geq 0 \Longrightarrow v''+\mathrm{Re}\{p(z')^2\}v\geq 0 \\ \Longrightarrow v''(s)+|p(z(s))|v(s)\geq 0\,. \end{aligned}$$

□

Para la adaptación al caso analítico, consideremos una función $q = q(x) \geq 0$ continua para $x \in (-1,1)$ y las soluciones v y w de

$$\begin{aligned} v''(x) + q(x)v(x) = 0, \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 0\,. \\ w''(x) - q(x)w(x) = 0, \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Sea $p = p(z)$ analítica en $\mathbb{D}$ y supongamos que

$$|p(z)| \leq q(|z|)\,.$$

Lema 2. *Si $v(x) > 0$ para todo $x \in (-1,1)$ entonces la solución de*

$$u'' + pu = 0, \quad u(0) = 1, \ u'(0) = 0$$

satisface

$$v(|z|) \leq |u(z)| \leq w(|z|)\,. \tag{2.8}$$

Demostración. Por el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} v'' + qv = 0, \qquad v(0) = 1, \qquad v'(0) = 0, \\ |u|'' + |p||u| \geq 0, \quad |u|(0) = 1, \quad |u|'(0) = 0. \end{aligned}$$

Consideremos $\mu = |u|'v - |u|v'$ entonces

$$\mu' = |u|''v - |u|v'' \geq (q - |p|)|u|v.$$

La demostración se sigue de la misma manera que en el teorema de Sturm. Para establecer la otra desigualdad la ecuación diferencial $u'' + pu = 0$ la llevamos a una ecuación integral entonces

$$u'(z) - 1 = \int_0^z u''(t)dt = -\int_0^z p(t)u(t)dt.$$

Intercambiando el orden de las integrales mediante el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} u(z) &= u(z) - u(0) = \int_0^z u'(\xi)d\xi \\ &= z - \int_0^z \int_0^\xi p(t)u(t)dtd\xi \\ &= z - \int_0^z \int_t^z p(t)u(t)d\xi dt \\ &= z - \int_0^z (z-t)p(t)u(t)dt\ . \end{aligned}$$

Como $|p(z)| \leq q(|z|)$ es una consecuencia del Lema 8 en [7] que

$$|u(z)| \leq w(|z|)\,.$$

Incluimos aquí la demostración para la comodidad del lector. Haciendo el cambio de variables $t = x\frac{z}{|z|}$ con $0 \leq x \leq |z|$ y $|dt| = dx$, obtenemos que

$$\begin{aligned} |u(z)| &\leq |z| + \int_0^z |z-t||p(t)||u(t)|dt \\ &\leq |z| + \int_0^z |z-t|q(|t|)|u(t)||dt| \\ &\leq |z| + \int_0^{|z|} (|z|-x)q(x)|u(x)|dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos

$$F(r) = r + \int_0^r (r-x)q(x)|u(x)|dx,$$

entonces se tiene que $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ y $F'' \leq qF$. Ahora sea $G = F/w$. Un cálculo sencillo prueba que $G(0) = 1$, $G'(0) = 0$, y que

$$G''w + 2Gw' \leq 0,$$

como $w > 0$ en $(-1,1)$ se sigue que $G'(w)^2 \leq 0$. Luego G es decreciente en $(-1,1)$ y por lo tanto

$$F(r) \leq w(r),$$

para todo $r \in (-1,1)$, es decir $|u(z)| \leq w(|z|)$ como queríamos probar.

□

2. Dominios de John

Una noción geométrica global que es importante en este trabajo es la de dominio de John. Un dominio acotado y simplemente conexo G es llamado un dominio de John si existe $M > 0$ tal que para todo $a, b \in \partial G$ con $[a,b] \subset \overline{G}$

$$\operatorname{diam} H \leq M|a-b|\,,$$

donde H es la componente de menor diámetro de $G \setminus [a,b]$.

Si ∂G es una curva de Jordan continuamente diferenciable a tramos entonces G es un dominio de John si y sólo si no tiene cúspides exteriores de ángulo interior 0.

Una de las muchas caracterizaciones de dominio de John hace uso de un sector anular en la clausura del disco. Para $z \in \mathbb{D}$ se define

$$B(z) = \{w : |z| \leq |w| < 1, |\arg(w) - \arg(z)| \leq \pi(1-|z|)\}.$$

Teorema 11. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ univalente. Entonces $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un dominio de John si y sólo si existe $M > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$\textit{diam}\, f(B(z)) \leq M(1 - |z|^2)|f'(z)|\,. \tag{2.9}$$

Para mayor información en relación con lo anterior, así como muchas otras caracterizaciones de dominios de John, recomendamos la lectura del excelente libro de C. Pommerenke [**10**].

CAPÍTULO 3

Resultados

1. Introducción

Consideremos la clases de funciones univalentes dadas en términos de cotas sobre la derivada Schwarziana

$$\widetilde{N} = \{f : f \text{ analítica en } \mathbb{D} \text{ y } |Sf(z)| \leq \pi^2/2\}$$

y

$$PN = \{f : f \text{ analítica en } \mathbb{D} \text{ y } (1-|z|^2)|Sf(z)| \leq 4\}.$$

Vamos a considerar las funciones de estas clases normalizadas de dos maneras distintas, en la primera

$$f(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \dots$$

mientras que la segunda,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0\,. \tag{3.1}$$

Ambas normalizaciones se obtienen mediante apropiadas composiciones por la izquierda con transformaciones de Möbius. Esta última normalización da lugar a las clases

$$\widetilde{N}_0 = \{f \in \widetilde{N} : f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0\}.$$

y

$$PN_0 = \{f \in PN : f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0\}.$$

Introduciremos las siguientes funciones. Sean

$$m(z) = \tanh\left(\frac{\pi}{2}z\right), \quad M(z) = \tan\left(\frac{\pi}{2}z\right) \tag{3.2}$$

y las funciones

$$h(z) = \int_0^z w^{-2}(t)dt, \quad H(z) = \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z^2}\right), \tag{3.3}$$

donde la función w está en términos de la función hipergeométrica

$$w(z) = F\left(\alpha, \overline{\alpha}; \frac{1}{2}; z^2\right), \quad \alpha = \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}.$$

Las funciones introducidas en (3.2) y (3.3) son analíticas en $\mathbb{D}$, están normalizadas como en (3.1) y poseen derivada Schwarziana

$$Sm(z) = -\frac{\pi^2}{2}, \qquad SM(z) = \frac{\pi^2}{2}, \tag{3.4}$$

$$Sh(z) = \frac{-4}{1-z^2}, \qquad SH(z) = \frac{4}{1-z^2}. \tag{3.5}$$

Estas funciones son extremales en las clases de funciones normalizadas $\widetilde{N}_0$ y PN_0.

2. Crecimiento y Distorsión

Las técnicas de comparación obtenidas en el capítulo anterior nos permiten obtener resultados de distorsión y crecimiento para ambas clases.

Proposición 1.

(1) Si $f \in \widetilde{N}_0$ *entonces*

$$m'(|z|) \leq |f'(z)| \leq M'(|z|), \tag{3.6}$$

$$m(|z|) \leq |f(z)| \leq M(|z|). \tag{3.7}$$

(2) Si $f \in PN_0$ *entonces*

$$h'(|z|) \leq |f'(z)| \leq H'(|z|), \tag{3.8}$$

$$h(|z|) \leq |f(z)| \leq H(|z|). \tag{3.9}$$

Si hay igualdad en alguna de las desigualdades en un punto $z_0 \neq 0$ *entonces* f *es una rotación de la correspondiente extremal.*

Demostración. La función de comparación del Lema 2 viene dada por $q(x) = \pi^2/4$ y la solución de $v'' + qv = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ es

$$v(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

la cual es positiva en $(-1,1)$. Como $|Sf(z)| \leq 2q(|z|)$ el lema establece que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}|z|\right) \leq |u(z)|.$$

La solución de $w'' - qw = 0$, $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ es

$$w(x) = \cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

y el lema establece que $|u(z)| \leq \cosh\left(\frac{\pi}{2}|z|\right)$. Consideremos la funciones

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^x v^{-2}(t)dt = \int_0^x \sec^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), \\ m(x) &= \int_0^x w^{-2}(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \tanh\left(\frac{\pi}{2}x\right). \end{aligned}$$

Como $f'(z) = u^{-2}(z)$, $M'(x) = v^{-2}(x)$ y $m'(x) = w^{-2}(x)$ entonces

$$|u(z)| \leq w(|z|) \Rightarrow w^{-2}(|z|) \leq |u^{-2}(z)| \Rightarrow m'(|z|) \leq |f'(z)|.$$

De manera similar se obtiene la otra desigualdad y se concluye que

$$m'(|z|) \leq |f'(z)| \leq M'(|z|).$$

Para la familia NP_0 la función de comparación dada en el Lema 2 es $q(x) = 2(1-x^2)^{-1}$, la solución de $v'' + qv = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ es

$$v(x) = 1 - x^2,$$

la cual es positiva en $(-1, 1)$. Entonces el Lema establece que si $|Sf(z)| \leq 2q(|z|)$ donde $u'' + (\frac{1}{2}Sf)u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ entonces $1 - |z|^2 \leq |u(z)|$. La solución de $w'' - qw = 0$, $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ es dada en términos de una función hipergeométrica

$$w(z) = F\left(\alpha, \overline{\alpha}; \frac{1}{2}; z^2\right),$$

donde $\alpha = (-1 - i\sqrt{7})/4$, y el concluye que $|u(z)| \leq w(|z|)$. Consideremos las funciones

$$H(x) = \int_0^x v^{-2}(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x^2}\right),$$

$$h(x) = \int_0^x w^{-2}(t)dt.$$

Como $f'(x) = u^{-2}(x)$, $H'(x) = v^{-2}(x)$ y $h'(x) = w^{-2}(x)$ entonces

$$|u(z)| \leq w(|z|) \Rightarrow w^{-2}(|z|) \leq |u^{-2}(z)| \Rightarrow h'(|z|) \leq |f'(z)|.$$

De manera similar se obtiene la otra desigualdad y se concluye que

$$h'(|z|) \leq |f'(z)| \leq H'(|z|).$$

Por otro lado, observemos que

$$f(z) = f(z) - f(0) = \int_0^z f'(\xi)d\xi,$$

entonces

$$|f(z)| \leq \int_0^z |f'(\xi)||d\xi| \leq \int_0^{|z|} M'(\rho)d\rho = M(|z|).$$

Ahora bien, sea $0 < r < 1$ y consideremos z_r con $|z_r| = r$ tal que

$$|f(z_r)| = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

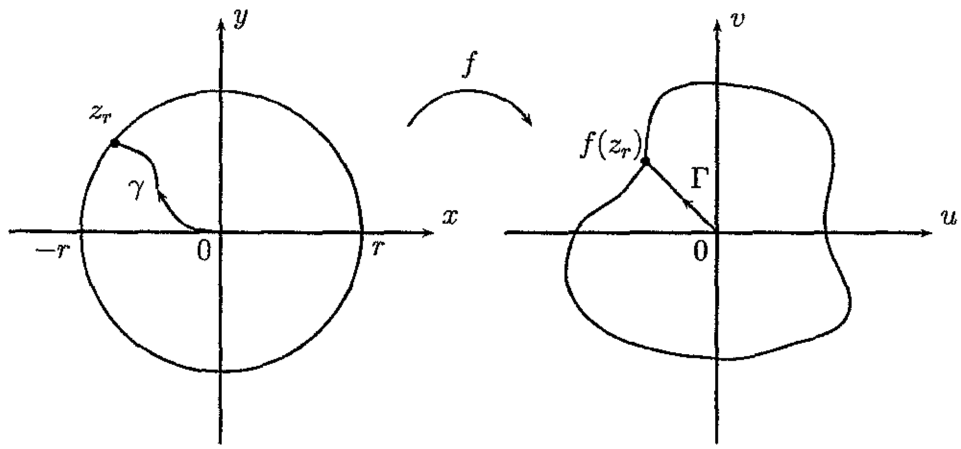

Figura 3: $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$

Esto nos garantiza que $\Gamma = [0, f(z_r)] \subseteq f\{|z| \leq r\}$. Sea $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$, entonces

$$f(z) = \int_\gamma f'(\xi)d\xi = \int_\Gamma dw.$$

Más aún,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\int_\Gamma dw\right| = \int_\Gamma dw = \int_\gamma |f'(\xi)||d\xi| \\ &\geq \int_\gamma m'(|\xi|)|d\xi| \geq \int_\gamma m'(|r|)dr = m(|z|). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Un argumento similar permite probar que $h(|z|) \leq |f(z)| \leq H(|z|)$.
Ahora consideremos los casos de igualdad

(i) $|f(z_0)| = M(|z_0|)$	(v) $|f(z_0)| = H(|z_0|)$
(ii) $|f'(z_0)| = M'(|z_0|)$	(vi) $|f'(z_0)| = H'(|z_0|)$
(iii) $|f(z_0)| = m(|z_0|)$	(vii) $|f(z_0)| = h(|z_0|)$
(iv) $|f'(z_0)| = m'(|z_0|)$	(viii) $|f'(z_0)| = h'(|z_0|)$

para algún $z_0 \neq 0$. Mediante la elección $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, $e^{i\theta} = z_0/|z_0|$, podemos asumir que $z_0 = x_0 > 0$.
Suponga que $|f'(x_0)| = M'(x_0)$. Entonces la función $y = |f'|^{-1/2} - (M')^{-1/2}$ satisface

$$y'' + py \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y'(0) = 0$$

y $y(x_0) = 0$. Se sigue del Lema 4 en [7] que y es idénticamente cero, esto es, que $|f'(x)| = M'(x)$ para todo $[0, x_0]$, y por lo tanto en todo $[0, 1)$ ya que ambos lados son analíticos. Vamos a demostrar que $Sf(x) = SM(x)$ en donde $Sf(x) = 2q(x)$ y $SM(x) = 2p(x)$. A lo largo de $[0, 1)$ sea $\eta = |f'|^{-1} = |u|^2 = (M')^{-1} = v^2$, entonces $\eta = |u|^2 = u\overline{u}$ lo que implica $2|u||u|' = u'\overline{u} + u\overline{u}'$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\eta'' &= u''\overline{u} + u\overline{u}'' + 2|u'|^2 = 2|u||u|'' + 2(|u|')^2 \\ &= -(q + \overline{q})|u|^2 + 2|u'|^2 \geq -2p|u|^2 + 2|u'|^2.\end{aligned}$$

Pero $|u'|^2 \geq (|u|')^2 = (v')^2$ y $-(q + \overline{q}) \geq 2p$. Luego debe haber igualdad en ambos casos, lo que implica $q = p$ en $[0, 1)$ y, por ende, en todo el disco. Entonces $f = M$ es una consecuencia de las normalizaciones. Esto pruebe el caso de igualdad de (ii). Para obtener el caso (i), suponga que $|f(x_0)| = M(x_0)$. Entonces la cadena de desigualdades,

$$|f(x_0)| \leq \int_0^{x_0} |f'(x)| dx \leq \int_0^{x_0} M'(x) dx = M(x),$$

implica que $|f'(x)| = M'(x)$ para todo $x \in [0, x_0]$ y estamos nuevamente en el caso (ii).

Veamos que el caso de igualdad en (iii) se desprende del caso de igualdad en (iv). Si $|f(x_0)| = m(x_0)$ entonces la en desigualdad (3.10) tenemos igualdad en todas partes. Esto implica que γ es el intervalo $[0, x_0]$ y que $|f'(x)| = m'(x)$ a lo largo del intervalo. El hecho que $f(z) = m(z)$ para todo $|z| < 1$ es entonces una consecuencia del Lema 8 en [7], donde los autores caracterizan el caso de igualdad en el punto $x_0 \neq 0$ de las funciones $|u|$ y $v = (m')^{-2}$. La igualdad en un único punto distinto de cero implica que hay igualdad en todas partes.

Por un argumento similar se demuestra los casos de igualdad de (v), (vi), (vii) y (viii). □

3. Distorsión Esférica

Sea $f(z)$ una función meromorfa en $\mathbb{D}$. La derivada esférica es definida por

$$f^*(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2},$$

la cual es invariante bajo rotaciones esféricas, es decir, si

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{f(z) - w}{1 + \overline{w} f(z)}$$

entonces $g^*(z) = f^*(z)$. En efecto, derivando la función g obtenemos

$$g'(z) = e^{i\theta}\frac{1+|w|^2}{(1+\overline{w}f(z))^2}f'(z)\,,$$

y

$$\begin{aligned}
1+|g(z)|^2 &= \frac{|1+\overline{w}f(z)|^2+|f(z)-w|^2}{|1+\overline{w}f(z)|^2}\\
&= \frac{1+2\mathrm{Re}\,\overline{w}f(z)+|wf(z)|^2+|f(z)|^2-2\mathrm{Re}\,\overline{w}f(z)+|w|^2}{|1+\overline{w}f(z)|^2}\\
&= \frac{(1+|w|^2)(1+|f(z)|^2)}{|1+\overline{w}f(z)|^2}\,,
\end{aligned}$$

de donde se establece que

$$g^*(z) = \frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2} = \frac{\dfrac{1+|w|^2}{|1+\overline{w}f(z)|^2}|f'(z)|}{\dfrac{(1+|w|^2)(1+|f(z)|^2)}{|1+\overline{w}f(z)|^2}} = f^*(z).$$

Por lo tanto la derivada esférica juega un rol en la métrica esférica similar al de la derivada ordinaria en la métrica euclidiana. A continuación obtenemos estimaciones óptimas para la distorsión esférica y vamos a considerar el Lema 2 pero con las condiciones iniciales duales, a saber, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Proposición 2.

(1) Si $f \in \widetilde{N}_0$ entonces

$$\frac{m'(|z|)}{1+m^2(|z|)} \le f^*(z) \le \frac{M'(|z|)}{1+M^2(|z|)}. \tag{3.11}$$

(2) Si $f \in PN_0$ entonces

$$\frac{h'(|z|)}{1+h^2(|z|)} \le f^*(z) \le \frac{H'(|z|)}{1+H^2(|z|)}. \tag{3.12}$$

Si hay igualdad en cualquier desigualdad en un punto $z_0 \neq 0$ entonces f es una rotación de la correspondiente función extremal.

Demostración. Sea $f \in \widetilde{N}_0$ y consideremos $g(z) = 1/f(z)$. Entonces, $Sg(z) = Sf(z)$ y

$$g(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \dots\,.$$

Para $u = (g')^{-1/2}$ se tiene

$$u'' + \left(\frac{1}{2}Sf\right)u = 0, \quad u(0) = 0,\ |u'(0)| = 1.$$

Tomando la función $q(x) = \pi^2/4$, las funciones v, w del Lema 2 con condiciones iniciales duales son dadas por

$$v(x) = \sqrt{\frac{M^2}{M'}(x)}, \quad w(x) = \sqrt{\frac{m^2}{m'}(x)}.$$

Luego el Lema 2 establece que

$$\frac{M^2}{M'}(|z|) \le \left|\frac{f^2}{f'}(z)\right| \le \frac{m^2}{m'}(|z|).$$

Usando (3.6) de la Proposición 1 se obtiene que

$$\frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|} = \frac{1}{|f'(z)|} + \left|\frac{f^2}{f'}(z)\right| \ge \frac{1}{M'(|z|)} + \frac{M^2(|z|)}{M'(|z|)},$$

es decir,

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \le \frac{M'(|z|)}{1+M^2(|z|)},$$

y de manera similar

$$\frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|} \le \frac{1}{m'(|z|)} + \frac{m^2(|z|)}{m'(|z|)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{m'(|z|)}{1+m^2(|z|)} \le \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \le \frac{M'(|z|)}{1+M^2(|z|)}.$$

Finalmente, si hay igualdad en alguna de las desigualdades de arriba para algún $z_0 \neq 0$ entonces se desprende en el caso de igualdad en (3.6) que f debe ser una rotación de m o M. Esto prueba la primera parte de la proposición.

De manera similar sea $f \in PN_0$ y consideremos $g(z) = 1/f(z)$. Entonces, $Sg(z) = Sf(z)$ y

$$g(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \dots .$$

Para $u = (g')^{-1/2}$ se tiene

$$u'' + \left(\frac{1}{2}Sf\right)u = 0, \quad u(0) = 0, \ |u'(0)| = 1.$$

Tomando la función $q(x) = 2(1-x^2)^{-1}$ las funciones v, w del Lema 2 con condiciones iniciales duales son dadas por

$$v(x) = \sqrt{\frac{H^2}{H'}(x)}, \quad w(x) = \sqrt{\frac{h^2}{h'}(x)},$$

entonces el lema establece que

$$\frac{H^2}{H'}(|z|) \le \left|\frac{f^2}{f'}(z)\right| \le \frac{h^2}{h'}(|z|).$$

Usando (3.8) de la Proposición 1 se obtiene que

$$\frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|} = \frac{1}{|f'(z)|} + \left|\frac{f^2}{f'}(z)\right| \geq \frac{1}{H'(|z|)} + \frac{H^2(|z|)}{H'(|z|)},$$

es decir,

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq \frac{H'(|z|)}{1+H^2(|z|)},$$

y de manera similar

$$\frac{1+|f(z)|^2}{|f'(z)|} \leq \frac{1}{h'(|z|)} + \frac{h^2(|z|)}{h'(|z|)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{h'(|z|)}{1+h^2(|z|)} \leq \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq \frac{H'(|z|)}{1+H^2(|z|)}.$$

Finalmente, si hay igualdad en alguna de las desigualdades de arriba para algún $z_0 \neq 0$ entonces se desprende en el caso de igualdad en (3.6) que f debe ser una rotación de h o H. $\square$

4. Distorsión para funciones meromorfas

Ya hemos obtenido para ambas clases normalizadas resultados básicos de distorsión y crecimiento. Existe un resultado análogo para funciones meromorfas en donde $1/M$ y $1/H$ son las correspondientes funciones extremales. Para esto consideremos la función

$$\psi(x) = \int_0^x v^{-2}(t)dt \tag{3.13}$$

donde v es la solución de $v'' + pv = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ que no se anula en $-1 < x < 1$ y p es una función par.

Proposición 3. *Sea* $f(z) = \dfrac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$ *y supongamos que*

$$|Sf(z)| \leq 2p(|z|)\,. \tag{3.14}$$

Entonces

(i) $\quad |f'(z)| \leq \dfrac{\psi'(|z|)}{\psi^2(|z|)}.$
Si hay igualdad para cualquier $z_0 \neq 0$ *entonces* f *es una rotación de* $1/\psi$.

(ii) $\quad |f(r_2\xi) - f(r_1\xi)| \leq \dfrac{1}{\psi(r_1)} - \dfrac{1}{\psi(r_2)},\ \ 0 < r_1 < r_2 < 1,\ \ |\xi| = 1.$
Si hay igualdad para cualquier par $r_1 < r_2$ *entonces* f *es una rotación de* $1/\psi$.

Demostración. Sea $|\xi| = 1$ y para $0 < r < 1$ consideremos

$$n_\xi(r) = \frac{1}{\sqrt{v^2(r)|f'(r\xi)|}} = \frac{1}{\sqrt{v^2(r)\phi(r)}}. \tag{3.15}$$

Haremos algunos cálculos preliminares para establecer que:

$$\frac{d}{dr}\{v^2(r)n_\xi'(r)\} = \tag{3.16}$$
$$v^2(r)n_\xi(r)\left\{p(r) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\xi^2 Sf(r\xi)\} + \frac{1}{4}\left[\mathrm{Im}\left\{\xi\frac{f''}{f'}(r\xi)\right\}\right]^2\right\}.$$

Las derivadas de la función en (3.15) son:

$$n_\xi'(r) \;=\; -n_\xi(r)\left\{\frac{v'(r)}{v(r)} + \frac{\phi'(r)}{2\phi(r)}\right\},$$

$$n_\xi''(r) = n_\xi(r)\left\{2\left(\frac{v'(r)}{v(r)}\right)^2 - \frac{v''(r)}{v(r)} + \frac{v'(r)\phi'(r)}{v(r)\phi(r)}\right.$$
$$\left. -\frac{\phi''(r)}{2\phi(r)} + \frac{3}{4}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2\right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\{v^2(r)n_\xi'(r)\} &= 2v(r)v'(r)n_\xi'(r) + v^2(r)n_\xi''(r)\\ &= v^2(r)n_\xi(r)\left\{-\frac{v''(r)}{v(r)} - \frac{\phi''(r)}{2\phi(r)} + \frac{3}{4}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2\right\}\\ &= v^2(r)n_\xi(r)\left\{p(r) - \frac{\phi''(r)}{2\phi(r)} + \frac{3}{4}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\phi(r) = |f'(r\xi)| = \exp(\log|f'(r\xi)|) = \exp(\mathrm{Re}\{\log f'(r\xi)\}),$$

entonces

$$\phi'(r) = |f'(r\xi)|\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''}{f'}(r\xi)\right\},$$

$$\phi''(r) = |f'(r\xi)|\left(\left[\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''}{f'}(r\xi)\right\}\right]^2\right.$$
$$\left. +\mathrm{Re}\left\{\xi^2\left(\frac{f'''(r\xi)f'(r\xi) - (f''(r\xi))^2}{(f'(r\xi))^2}\right)\right\}\right).$$

Luego, obtenemos que

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2-\frac{\phi''(r)}{2\phi(r)}=\frac{1}{4}\left[\mathrm{Re}\left\{\xi\frac{f''}{f'}(r\xi)\right\}\right]^2$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\xi^2\left[\frac{f'''(r\xi)f'(r\xi)-(f''(r\xi))^2}{(f'(r\xi))^2}\right]\right\},$$

usando la identidad $\mathrm{Re}\{z^2\}=(\mathrm{Re}\,z)^2-(\mathrm{Im}\,z)^2$ se establece la identidad (3.16), la cual es no negativa si $|Sf(z)|\leq 2p(|z|)$. Luego, $v^2(r)n'_\xi(r)\geq n'_\xi(0)=1$, es decir

$$n'_\xi(r)\geq\frac{1}{v^2(r)},\tag{3.17}$$

$$n_\xi(r)=\int_0^r n'_\xi(t)dt\geq\int_0^r\frac{dt}{v^2(t)}=\psi(r),$$

esto prueba la primera parte de (i).
Si hay igualdad en $z_0\neq 0$ debió existir igualdad en (3.17) para todos los puntos del segmento $[0,z]$. Esto significa que la deriva en (3.16) es cero. Luego la parte real de la Schwarziana es igual a $p(r)$ mientras la parte imaginaria se anula. Por lo tanto, toda la Schwarziana Sf es extremal a lo largo de aquel segmento y se concluye que f es una rotación de $1/\psi$.
Para establecer la desigualdad en (ii) usamos (i) por integración:

$$\begin{aligned}|f(r_2\xi)-f(r_1\xi)| &\leq \int_{r_1}^{r_2}|f'(r\xi)|dr\\ &\leq \int_{r_1}^{r_2}\frac{\psi'(r)}{\psi^2(r)}dr\\ &= \frac{1}{\psi(r_1)}-\frac{1}{\psi(r_2)}.\end{aligned}$$

□

La proposición anterior se puede aplicar a las clases de funciones que estamos estudiando obteniendo los siguientes corolarios

Corolario 2. *Sea* $f(z)=\frac{1}{z}+b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n+\ldots\in\widetilde{N}$ *entonces*

(i) $|f'(z)|\leq\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}|z|\right)}$.
Si hay igualdad para cualquier $z_0\neq 0$ *entonces* f *es una rotación de* $1/\tan\left(\frac{\pi}{2}z\right)$.

(ii) $|f(r_2\xi)-f(r_1\xi)| \leq \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}r_1\right)} - \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}r_2\right)}, 0 < r_1 < r_2 < 1, |\xi| = 1.$
Si hay igualdad para cualquier par $r_1 < r_2$ entonces f es una rotación de $1/\tan\left(\frac{\pi}{2}z\right)$.

Corolario 3. *Sea $f(z) = \dfrac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots \in PN$ entonces*

(i) $|f'(z)| \leq \left(\dfrac{1}{4}(1-|z|^2)\log\dfrac{1+|z|}{1-|z|} + \dfrac{1}{2}|z|\right)^{-2}$.
Si hay igualdad para cualquier $z_0 \neq 0$ entonces f es una rotación de $1/\left(\frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z^2}\right)\right)$.

(ii) $$|f(r_2\xi) - f(r_1\xi)| \leq \left(\frac{1}{4}\log\frac{1+r_1}{1-r_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{1-r_1^2}\right)\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\log\frac{1+r_2}{1-r_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{1-r_2^2}\right)\right)^{-1}, \quad 0 < r_1 < r_2 < 1, \quad |\xi| = 1.$$
Si hay igualdad para cualquier par $r_1 < r_2$ entonces f es una rotación de $1/\left(\frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z^2}\right)\right)$.

5. Distorsión con dos puntos

Es bien conocido que el teorema de crecimiento de Koebe da una condición necesaria pero no suficiente para la univalencia. Blatter [1] fue el primero en considerar la cuestión de si existe una versión del teorema de crecimiento la cual sea suficiente para determinar la univalencia. Blatter formulo un teorema de distorsión con dos puntos que es invariante bajo composición por la derecha con automorfismos del disco unitario e invariante por composición por la izquierda con automorfismo de $\mathbb{C}$.
A diferencia de la clase N, las clases $\widetilde{N}$ y PN no son invariantes bajo composición por la izquierda con transformaciones de Möbius. De ahí que el resultado obtenido establece una propiedad de distorsión de dos puntos que no es una caracterización para las clase $\widetilde{N}$ y PN.
Como punto de partida establecemos varias propiedades de funciones que satisfacen una simple desigualdad diferencial lineal de segundo orden.

Lema 3. *Sean $\omega \in C^2[a,b]$ y $\omega'' \leq k^2\omega$. Si $\omega(a) \geq 0$ y $\omega(b) \geq 0$, entonces $\omega \geq 0$ en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $m = \min\{\omega(s) : s \in [a,b]\}$. Si $m \geq 0$ entonces no hay nada que probar. Supongamos que $m < 0$. Sea $s_0 \in (a,b)$ con $\omega(s_0) = m$. Luego $\omega(s_0)$ es el mínimo de ω en $[a,b]$ se tiene que

$\omega'(s_0) = 0$ y $\omega''(s_0) \geq 0$. Pero también $\omega''(s_0) \leq k^2\omega(s_0) = k^2 m < 0$, lo que es una contradicción. $\square$

Corolario 4. *Suponga que* $\mu, \nu \in C^2[a,b]$, $\nu'' \leq k^2\nu$ *y* $\mu'' = k^2\mu$. *Si* $\nu(a) \geq \mu(a)$ *y* $\nu(b) \geq \mu(b)$, *entonces* $\nu \geq \mu$ *en* $[a,b]$.

Demostración. El resultado se sigue inmediato aplicando el lema anterior a $\omega = \nu - \mu$. $\square$

Lema 4. *Suponga que* $\nu \in C^2[-L,L]$ *y* $\nu'' \leq k^2\nu$. *Entonces*

$$\int_{-L}^{L} \nu(s)ds \geq \frac{\sinh(kL)}{k\cosh(kL)}\{\nu(L) + \nu(-L)\}\,.$$

Demostración. Sea $\mu \in C^2[-L,L]$ que satisface $\mu'' = k^2\mu$ con las condiciones de borde $\mu(L) = \nu(L)$ y $\mu(-L) = \nu(-L)$. La solución general de $\mu'' = k^2\mu$ es $\mu(s) = A\cosh(ks) + B\sinh(ks)$, donde $A, B \in \mathbb{R}$. Ahora bien, las condiciones de borde implican que $A = \dfrac{\nu(L) + \nu(-L)}{2\cosh(kL)}$ y $B = \dfrac{\nu(L) - \nu(-L)}{2\sinh(kL)}$. Luego, el Corolario 4 implica que $\nu \geq \mu$ en $[-L, L]$. Entonces se obtiene que

$$\int_{-L}^{L} \nu(s)ds \geq \int_{-L}^{L} \mu(s)ds = \frac{2A\sinh(kL)}{k} = \frac{\sinh(kL)}{k\cosh(kL)}\{\nu(L)+\nu(-L)\}.$$

$\square$

Antes de probar el resultado principal de esta sección es conveniente establecer ciertas identidades diferenciales. Suponga que $\gamma : z = z(s)$, $-L \leq s \leq L$, es una curva diferenciable en $\mathbb{D}$ parametrizada por largo hiperbólico. Esto significa que $z'(s) = (1 - |z(s)|^2)e^{i\theta(s)}$, donde $\theta = \arg z'(s)$ y $2L$ es el largo hiperbólico de γ. Entonces se verifica que

$$\begin{aligned} z''(s) &= -(\overline{z(s)}z'(s) + z(s)\overline{z'(s)})e^{i\theta(s)} + i(1 - |z(s)|^2)\theta'(s)e^{i\theta(s)} \\ &= i(1 - |z(s)|^2)e^{i\theta(s)}\left[\frac{d\theta(s)}{ds} + i(\overline{z(s)}e^{i\theta(s)} + z(s)e^{-i\theta(s)}\right] \end{aligned}$$

La curvatura hiperbólica de γ en $z(s)$ es

$$\begin{aligned} \kappa_h(z(s),\gamma) &= (1 - |z(s)|^2)\kappa_e(z(s),\gamma) + \mathrm{Im}\{2e^{i\theta(s)}\overline{z(s)}\} \\ &= (1 - |z(s)|^2)\kappa_e(z(s),\gamma) - i(e^{i\theta(s)}\overline{z(s)} - e^{-i\theta(s)}z(s)), \end{aligned}$$

donde

$$\kappa_e(z(s),\gamma) = \frac{1}{|z'(s)|}\mathrm{Im}\left\{\frac{z''(s)}{z'(s)}\right\}$$

es la curvatura euclidiana de γ en $z(s)$. Como γ esta parametrizada por largo de arco hiperbólico, se obtiene

$$\kappa_e(z(s),\gamma) = \frac{d\theta(s)/ds}{1-|z(s)|^2}.$$

Entonces

$$\kappa_h(z(s),\gamma) = \frac{d\theta(s)}{ds} - i(e^{i\theta}\overline{z(s)} - e^{-i\theta}z(s)).$$

La fórmula que relaciona la curvatura euclidiana de $f \circ \gamma$ con la curvatura hiperbólica de γ es

$$\kappa_e(f(z(s)), f\circ\gamma)(1-|z(s)|^2)|f'(z(s))| = \kappa_h(z(s),\gamma) + \mathrm{Im}\{e^{i\theta(s)}Q_f(z(s))\}$$

donde

$$Q_f(z) = (1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f''(z)} - 2\overline{z}.$$

Por lo tanto, si $\kappa_e(f(z(s), f\circ\gamma) = 0$ obtenemos la expresión

$$z''(s) = i(1-|z(s)|^2)e^{i\theta(s)}[2ie^{i\theta(s)}\overline{z(s)} - \mathrm{Im}\{e^{i\theta(s)}Q_f(z(s))\}].$$

Lema 5. *Sea v la solución de $v'' + pv = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ y donde p satisface las condiciones del p-criterio. Entonces*

(i) la función

$$\varphi(r) = (1-r^2)\frac{v'(r)}{v(r)}$$

es decreciente para $r \in [0,1)$. Además el límite $L = \lim_{r\to1^-}\varphi(r)$ existe y satisface $0 < |L| \leq 2$.

(ii) La función

$$\psi(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{1-r^2}}$$

es decreciente para $r \in [0,1)$. En particular, $1-r^2 \geq v^2(r)$ para todo $r \in [0,1)$.

Demostración. La afirmación de la existencia del límite L y que satisface $0 < |L| \leq 2$ es una consecuencia del Lema 4 en [**5**]. Ahora bien, considere las funciones $f, g : [0,1) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(r) = 1-r^2$ y $g(r) = \frac{v'(r)}{v(r)}$. Como $f'(r) = -2r \leq 0$ y

$$g'(r) = \frac{v''(r)}{v(r)} - \left(\frac{v'(r)}{v(r)}\right)^2 = -p(r) - \left(\frac{v'(r)}{v(r)}\right)^2 \leq 0$$

entonces f y g son funciones decrecientes. Sean $r, s \in [0,1)$ con $r \leq s$ y supongamos que $\varphi(r) = \varphi(s)$ entonces

$$(1-r^2)\frac{v'(r)}{v(r)} = (1-s^2)\frac{v'(s)}{v(s)} \Rightarrow \frac{1-r^2}{1-s^2} = \frac{v'(s)v(r)}{v(s)v'(r)} = R.$$

Siempre que $v'(r) \neq 0$, si $v'(r) = 0$ implica necesariamente que $r = 0$, pues la existencia de un punto $r_0 \neq 0$ tal que $v'(r_0) = 0$ junto la monótonia de v' implican que v es constante en el intervalo $[0, r_0]$ lo cual es una contradicción. Luego, obtenemos que $0 = (1-s^2)\frac{v'(s)}{v(s)}$ y como $|L| > 0$ entonces $s = 0$. Ahora bien, si $R < 1$ entonces $1 - r^2 < 1 - s^2$, esto significa que la función f es creciente lo que es una contradicción. Si por el contrario $R > 1$ entonces $\frac{v'(s)}{v(s)} > \frac{v'(r)}{v(r)}$ esto quiere decir que la función g es creciente lo que es una contradicción. Por lo tanto, $R = 1$ entonces $1 - r^2 = 1 - s^2$ lo que implica que $r = s$, luego la función φ es inyectiva, esto junto a la continuidad de la función garantizan que ella sea monótona. Note que $g(r) \leq g(0) = 0$ para todo $r \in [0,1)$ entonces $\varphi(r) \leq \varphi(0) = 0$ para todo $r \in [0,1)$. Esto significa que la función φ es decreciente. La segunda parte de la demostración es una consecuencia del Lema 1 en [**5**]. $\square$

El disco unitario está dotado de una métrica con propiedades interesantes llamada la métrica hiperbólica, para puntos $a, b \in \mathbb{D}$ definimos

$$d_{\mathbb{D}}(a,b) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\varphi(a,b)}{1-\varphi(a,b)}, \quad \text{donde} \quad \varphi(a,b) = \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|.$$

Una particularidad de esta métrica es que todos los automorfismos conformes del disco son isometrías.

Proposición 4. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica y localmente univalente y supongamos que*

$$|Sf(z)| \leq 2p(|z|)$$

donde $p(x)$ satisface las hipótesis del p-criterio. Entonces para $a, b \in \mathbb{D}$

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{\sinh(\frac{1}{2}kd_{\mathbb{D}}(a,b))}{k\cosh(\frac{1}{2}kd_{\mathbb{D}}(a,b))}\left\{v^2(|a|)|f'(a)| + v^2(|b|)|f'(b)|\right\}$$

donde v es la solución de $v'' + pv = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ que no se anula en $-1 < x < 1$ y $k^2 = 6p(0) + 162$. Recíprocamente, si una función analítica f no constante satisface esta desigualdad, entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

Demostración. Dados $a, b \in \mathbb{D}$. Vamos a considerar el caso donde el segmento lineal $[f(a), f(b)] = \Gamma$ esta contenido en $\Omega = f(\mathbb{D})$ y consideremos $\gamma = f^{-1} \circ \Gamma$. Sea γ parametrizada por largo de arco hiperbólico como γ: $z = z(s)$, $s \in [-L, L]$. Entonces $z'(s) = (1 - |z(s)|^2)e^{i\theta(s)}$, donde $\theta(s) = \arg z'(s)$. Note que $2L \geq d_{\mathbb{D}}(a,b)$ con igualdad si y sólo si γ es el arco de una geodésica hiperbólica uniendo a y *b.* Consideremos $\nu(s) = v^2(|z(s)|)|f'(z(s))|$. Entonces

$$\nu'(s) = \nu(s)\left[2|z(s)|\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\mathrm{Re}\left\{\frac{z'(s)}{z(s)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{z'(s)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right\}\right].$$

Como $\kappa_e(f(z(s)), f\circ\gamma) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu''(s) &= \nu(s)\left[2\left(|z(s)|\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\mathrm{Re}\left\{\frac{z'(s)}{z(s)}\right\}\right)^2\right.\\
&\quad +4|z(s)|\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\mathrm{Re}\left\{\frac{(z'(s))^2}{z(s)}\cdot\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right\} + \mathrm{Re}^2\left\{z'(s)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right\}\\
&\quad +2|z(s)|\mathrm{Im}^2\left\{\frac{z'(s)}{z(s)}\right\}\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)} + 2|z(s)|\mathrm{Re}\left\{\frac{z''(s)}{z(s)}\right\}\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\\
&\quad +2|z(s)|^2\mathrm{Re}^2\left\{\frac{z'(s)}{z(s)}\right\}\frac{v''(|z(s)|)}{v(|z(s)|)} + \mathrm{Re}\left\{z''(s)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right\}\\
&\quad \left.+\mathrm{Re}\left\{(z'(s))^2 Sf(z(s))\right\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{(z'(s))^2\left[\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right]^2\right\}\right]\\
&\le \nu(s)\left[2\left|(1-|z(s)|^2)\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\right|^2\right.\\
&\quad +4\left|(1-|z(s)|^2)^2\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right| + \frac{3}{2}\left|(1-|z(s)|^2)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right|^2\\
&\quad +2\left|\frac{(1-|z(s)|^2)^2 v'(|z(s)|)}{|z(s)|v(|z(s)|)}\right| + 4\left|(1-|z(s)|^2)\frac{v'(|z(s)|}{v(|z(s)|}\right|\\
&\quad +2\left|(1-|z(s)|^2)\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}Q_f(z(s))\right| + 4\left|(1-|z(s)|^2)^2 p(|z(s)|)\right|\\
&\quad \left.2\left|(1-|z(s)|^2)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right| + \left|(1-|z(s)|^2)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}Q_f(z(s))\right|\right]
\end{aligned}$$

Por hipótesis del p-criterio se obtiene que $|(1-|z(s)|^2)^2 p(|z(s)|)| \le p(0)$, al satisfacer f el p-criterio es univalente en $\mathbb{D}$ entonces el Teorema 1 garantiza que $|Q_f(z(s))| \le 4$ y se deduce además que

$$\left|(1-|z(s)|^2)\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right| \le 6.$$

En virtud del Lema 5 parte (i) se tiene que

$$\left|(1-|z(s)|^2)\frac{v'(|z(s)|)}{v(|z(s)|)}\right| \le 2.$$

Por lo tanto,

$$\nu''(s) \le [6p(0) + 162]\nu(s),$$

luego $\nu(s)$ satisface las hipótesis del Lema 4 con $k^2 = 6p(0) + 162$.
Como $f \circ \gamma$ es un segmento de recta uniendo $f(a)$ y $f(b)$,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \int_{f\circ\gamma} |dw| = \int_{\gamma} |f'(z)||dz| \\ &= \int_{-L}^{L} |f'(z(s))||z'(s)|ds \\ &= \int_{-L}^{L} (1 - |z(s)|^2)|f'(z(s))|ds \\ &\geq \int_{-L}^{L} v^2(|z(s)|)|f'(z(s))|ds \\ &= \int_{-L}^{L} \nu(s)ds\,. \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe al Lema 5 parte (ii). El Lema 4 establece que

$$\int_{-L}^{L} \nu(s)ds \geq \frac{\sinh(kL)}{k\cosh(kL)}\{v^2(|a|)|f'(a)| + v^2(|b|)|f'(b)|\}.$$

Como la función $h(t) = \dfrac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$ es estrictamente creciente para $t > 0$ y $d_{\mathbb{D}}(a,b) \leq 2L$, se tiene que

$$\frac{\sinh(kL)}{k\cosh(kL)} \geq \frac{\sinh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}{k\cosh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}.$$

Esto establece la desigualdad cuando $[f(a), f(b)]$ esta contenido en $f(\mathbb{D})$.
Ahora bien, consideremos el caso en el cual el segmento $[f(a), f(b)]$ no esta contenido en $f(\mathbb{D})$. Entonces existen $\alpha, \beta \in \partial\Omega$ tal que $[f(a), \alpha)$ y $(\beta, f(b)]$ están contenidos en $f(\mathbb{D})$ y su unión esta en $[f(a), f(b)]$. Si $c \in \mathbb{D}$ y $f(c) \in [f(a), \alpha)$, entonces la primera parte de la demostración establece

$$|f(a) - f(c)| \geq \frac{\sinh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}{k\cosh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}v^2(|a|)|f'(a)|.$$

Si $f(c) \to \alpha$ a lo largo del segmento $[f(a), \alpha)$, el punto $c \to \partial\mathbb{D}$ y $d_D(a,c) \to \infty$. Como $h(t) \to \frac{1}{2}$ cuando $t \to \infty$, tenemos que

$$|f(a) - \alpha| \geq \frac{v^2(|a|)|f'(a)|}{2k}.$$

Similarmente,

$$|f(b) - \beta| \geq \frac{v^2(|b|)|f'(b)|}{2k}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |f(a)-f(b)| &\geq |f(a)-\alpha|+|\beta-f(b)| \\ &\geq \frac{1}{2k}\{v^2(|a|)|f'(a)|+v^2(|b|)|f'(b)|\} \end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to\infty} h(t)=\frac{1}{2}$ y h es estrictamente creciente, obtenemos

$$|f(a)-f(b)| > \frac{\sinh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}{k\cosh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}\{v^2(|a|)|f'(a)|+v^2(|b|)|f'(b)|\}$$

Luego, la desigualdad es estricta en este caso.

Ahora, suponga que f es una función analítica no constante en $\mathbb{D}$ que satisface la desigualdad. Si f no es univalente, entonces existen $a, b \in \mathbb{D}$ con $a \neq b$ y $f(a)=f(b)$. Como $f(a)=f(b)$, tenemos

$$\frac{\sinh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}{k\cosh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}\{v^2(|a|)|f'(a)|+v^2(|b|)|f'(b)|\}=0$$

Note que $\frac{\sinh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))}{k\cosh(\frac{1}{2}kd_D(a,b))} \neq 0$ ya que $a \neq b$. Luego, $v^2(|a|)|f'(a)| = v^2(|b|)|f'(b)|=0$. Como la solución v es positiva obtenemos que $f'(a) = f'(b)=0$, y luego f no es univalente en ninguna vecindad de a o de b. Como f no es univalente en ninguna vecindad de a, podemos hallar dos sucesiones $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos distintos en $\mathbb{D}$ tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = a$ y $f(c_n)=f(d_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la desigualdad de nuevo se concluye que $f'(c_n)=0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que f debe ser constante. Pero eso contradice la hipótesis que f no es constante. Por lo tanto, f es univalente en $\mathbb{D}$. □

6. Aplicación a Dominios de John

Como consecuencia del corolario 3, sabemos que si $f \in PN$ está normalizado de la forma $f(z)=1/z+b_0+b_1z+\ldots$ entonces

$$(1-|z|^2)^2H^2(|z|)|f'(z)| \leq 1.$$

Lema 6. *Sea* $f(z)=\frac{1}{z}+b_0+b_1z+\ldots \in PN$. *Entonces para* $|\xi|=1$

$$q(r)=(1-r^2)^2H^2(r)|f'(r\xi)|$$

es decreciente para $r \in [0,1)$.

Demostración. Sea $|\xi|=1$ y $r \in [0,1)$ definimos

$$n_\xi(r)=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2|f'(r\xi)|}},$$

se demostró en la proposición 3 que

$$\frac{d}{dr}\left\{(1-r^2)^2 n_\xi'(r)\right\} \geq 0,$$

como $n_\xi(0) = 0$ y $n_\xi'(0) = 1$ consideremos

$$v(r) = (1-r^2)^2 n_\xi'(r) H(r) - n_\xi(r),$$

entonces

$$\begin{aligned} v'(r) &= H(r)\frac{d}{dr}\left\{(1-r^2)^2 n_\xi'(r)\right\} + H'(r)(1-r^2)^2 n_\xi'(r) - n_\xi'(r) \\ &= H(r)\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^2 n_\xi'(r)\right\} \geq 0, \end{aligned}$$

entonces v es creciente, como $v(0) = 0$ entonces $v(r) \geq 0, \quad \forall\, r \in [0,1)$. Luego

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{n_\xi(r)}{H(r)}\right) = \frac{v(r)}{(1-r^2)^2 H^2(r)} \geq 0,$$

como $q(r) = \left(\frac{H(r)}{n_\xi(r)}\right)^2$ se concluye que q es decreciente.

□

Lema 7. *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es una función univalente y si $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ entonces*

$$\frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{(1-|z_1|^2)^2 |f'(z_1)|} \leq \exp(4 d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)), \tag{3.18}$$

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leq \exp(6 d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)). \tag{3.19}$$

Demostración. Consideremos la transformación de Koebe

$$h(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_1}{1+\overline{z_1}z}\right) - f(z_1)}{(1-|z_1|^2) f'(z_1)}.$$

Sea $\rho = 1 - |z_1|^2$ y considere la dilatación

$$g(z) = \frac{1}{\rho} h(\rho z).$$

Tomando $z_2 = \dfrac{\rho z + z_1}{1 + \overline{z_1}\rho z}$ y usando el teorema de crecimiento de Koebe obtenemos

$$\frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{(1-|z_1|^2)^2 |f'(z_1)|} = |g(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2.$$

Si se considera la transformación de Möbius $T(z) = \dfrac{\rho z + z_1}{1 + \overline{z_1}\rho z}$ entonces se sabe que

$$d_{\mathbb{D}}(0, z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

y como la métrica hiperbólica es invariante ante transformaciones de Möbius obtenemos que

$$\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 = \exp(4d_{\mathbb{D}}(0, z)) = \exp(4d_{\mathbb{D}}(T(0), T(z))) = \exp(4d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)).$$

Para establecer la otra desigualdad, usamos el teorema de distorsión clásico para funciones univalentes en el disco

$$\left|\frac{f''}{f'}(z) - \frac{2\overline{z}}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4}{1-|z|^2}$$

de donde se obtiene

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{6}{1-|z|^2}.$$

Usando que el $\log|a| \leq |\log a|$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\log\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| &\leq \left|\log \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \\
&\leq \left|\int_{z_1}^{z_2} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz\right| \\
&\leq \int_{z_1}^{z_2} \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| |dz| \\
&\leq \int_{z_1}^{z_2} \frac{6}{1-|z|^2} |dz| = 6 d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

esto completa la prueba.

□

Los lemas anteriores nos permiten establecer el siguiente resultado para la clase de Pokorny-Nehari

Proposición 5. *Sea $f(z) = \dfrac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots$ perteneciente a PN, entonces $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un dominio de John.*

Demostración. Sea $z = re^{it}$ y $w = \rho e^{i\theta} \in B(z)$. Escribimos $q = (1-|z|^2)^2|f'(z)|$. Por el lema 7 se tiene que

$$|f(re^{i\theta}) - f(re^{it})| \leq K_1 q \tag{3.20}$$

y además

$$(1-r^2)^2|f'(re^{i\theta})| \leq K_2 q, \tag{3.21}$$

donde K_1 y K_2 son constantes absolutas. Se sigue del Lema 6 y la ecuación (3.21) que

$$(1-\rho^2)^2|f'(\rho e^{i\theta})|H^2(\rho) \leq (1-r^2)^2|f'(re^{i\theta})|H^2(r) \leq K_2 q H^2(r) \quad (3.22)$$

Luego

$$\begin{aligned} |f(\rho e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| &\leq \int_r^\rho |f'(se^{i\theta})|ds \leq K_2 q \int_r^\rho \frac{H^2(r)}{(1-s^2)^2 H^2(s)} ds \\ &\leq K_2 q H^2(r) \int_r^1 \frac{H'(s)}{H^2(s)} ds = K_2 q H(r). \end{aligned}$$

Esta desigualdad junto con (3.20) implican

$$\operatorname{diam} f(B(z)) \leq K(1-|z|^2)^2|f'(z)|H(|z|)$$

y como la función $(1-|z|^2)H(|z|) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ obtenemos que

$$\operatorname{diam} f(B(z)) \leq K(1-|z|^2)|f'(z)|,$$

por el Teorema 11 esto implica que $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un dominio de John.

□

Bibliografía

[1] C. Blatter, Ein Verzerrungssatz für schlichte Funktionen, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 651-659.

[2] M. Chuaqui and Ch. Pommerenke, Characteristic Properties of Nehari Functions,

[3] M. Chuaqui, B. Osgood and Ch. Pommerenke, John domains, quaisdiscs, and the Nehari class, Jour. reine angew. Math. **471** (1996), 77-114.

[4] M. Chuaqui and B. Osgood, Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative, Jour. London Math. Soc. (2) **48** (1994), 289-298.

[5] M. Chuaqui, B. Osgood: Finding complete conformal metrics to extend conformal mappings, Indiana U. Math. J. 47 (1998), 1273-1291.

[6] P. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag: New York, 1983.

[7] M. Essén and F. Keogh, The Schwarzian derivative and estimates of function analytic in the unit disk, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **78** (1975), 501-511.

[8] E. Kamke, Differentialgleichungen, Chelsea, New York, 1948.

[9] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc **55** (1949), 545-551.

[10] Ch. Pommerenke, Boundary Behavior of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[11] Ch. Pommerenke, Univalent Functions, with a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975