PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Productos Finitos de Productos Regularizados

Por Víctor Antonio Castillo Garate

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al grado de Magíster en Matemáticas.

COMITÉ DE TESIS

Sr. Eduardo Friedman (U. de Chile) (Prof. Guía)
Sr. Olivier Bourget (UC) (Co- tutor)
Sr. Ricardo Menares (UC)
Sr. Yves Martin (U. de Chile)

1. Resumen

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en p variables con coeficientes complejos. Se define su *Serie Zeta* mediante

$$\zeta(s,f;g) := \sum_{k\in\mathbb{N}_0^p} g(k)f(k)^{-s}, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 0$$

Bajo alguna hipótesis de regularidad, se define la *Discrepancia Múltiple* asociada a una colección de polinomios $\{f_1,\ldots,f_n\}$ como

$$D(f_1,\ldots,f_n;g) := \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\left(\sum_{i=1}^{n} Z\left(s,f_i;g\right) - Z\left(s,f_1\cdots f_n;g\right)\right).$$

El objetivo de este trabajo es probar la fórmula de reducción

$$D(f_1,\ldots,f_n;g) = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{\deg f_i + \deg f_j}{\deg f_1 + \cdots + \deg f_n} D(f_i,f_j;g). \tag{1}$$

la cual permite expresar la Discrepancia de una colección de polinomios sólo en términos de las interacciones entre pares.

Para probar este resultado definiremos un análogo integral de las Series Zeta, llamadas *Integrales Zeta* definidas por

$$Z(s,f;g) := \int_{x\in[0,\infty)^p} g(x)(f(x))^{-s}\,dx, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 0$$

Construiremos la continuación analítica explícita de $Z(s,f;g)$ a $s=0$, la cual nos permitirá probar la fórmula (1) para integrales zeta. A partir de esto, utilizando la *Fórmula de Raabe*, deduciremos nuestro resultado para las series.

2. Introducción: Discrepancia y Productos Zeta-Regularizados

Sean f, g polinomios en p variables con coeficientes complejos. Se define la *Serie Zeta* asociada mediante

$$\zeta(s, f; g) \quad := \quad \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} g(k_1, \ldots, k_p) f(k_1, \ldots, k_p)^{-s}. \tag{2}$$

Bajo alguna hipótesis de no nulidad de f (por ejemplo, si f satisface la Hipótesis de Mahler Definición 2.1) Mahler [Ma] probó que existe una rama analítica de $\log f$, que la *serie zeta* (2) converge para s en algún semiplano derecho $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, y se extiende a una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, siendo regular en $s = 0$.

Si $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ satisface la Hipótesis de Mahler definimos el producto *zeta-regularizado* mediante:

$$\widehat{\prod}_{k \in \mathbb{N}_0^p} f(k) := \exp\left(-\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0^p} f(k)^{-s} \right) \right) \qquad (\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\})$$

que se utiliza [JL] como sustituto para el producto divergente $\prod_k f(k)$.

Se define la *discrepancia* $D(f_1, f_2; g)$ mediante

$$D(f_1, f_2; g) := \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(\zeta(s, f_1; g) + \zeta(s, f_2; g) - \zeta(s, f_1\, f_2; g) \Big).$$

Siguiendo los resultados de Kurokawa [KW] y Mizuno [Mi] nos interesa analizar $D(f_1, f_2; 1)$, la cual podemos expresar en términos de productos regularizados como

$$\exp(D(f_1, f_2; 1)) = \frac{\widehat{\prod}_{k \in \mathbb{N}_0^p} (f_1(k) f_2(k))}{\widehat{\prod}_{k \in \mathbb{N}_0^p} f_1(k)\ \widehat{\prod}_{k \in \mathbb{N}_0^p} f_2(k)}$$

Desde el trabajo de Shintani [Sh] se conocen ejemplos donde $D(f_1, f_2; g) \neq 0$, es decir, la expresión $\exp(D(f_1, f_2; 1)) \neq 1$ en general y es una forma de medir la no conmutatividad que resulta al multiplicar un número finito de productos regularizados. Sin embargo, la discrepancia $D(f_1, f_2; g) = \zeta'(0, f_1; g) + \zeta'(0, f_2; g) - \zeta'(0, f_1 f_2; g)$ es más sencilla que cada sumando $\zeta'(0, f_i; g)$. Por ejemplo Mizuno [Mi, pág. 157] probó que si todas las constantes z_i, τ_i, η_i son positivas y $\tau_1\eta_2 - \tau_2\eta_1 \neq 0$, entonces

$$\exp(F) := \frac{\widehat{\prod}_{l,m=0}^{\infty} (l\tau_1 + m\eta_1 + z_1)(l\tau_2 + m\eta_2 + z_2)}{\left(\widehat{\prod}_{l,m=0}^{\infty} (l\tau_1 + m\eta_1 + z_1)\right) \left(\widehat{\prod}_{l,m=0}^{\infty} (l\tau_2 + m\eta_2 + z_2)\right)}.$$

donde

$$F = \frac{\tau_1\eta_2 - \tau_2\eta_1}{4} \left(\frac{\log\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}{\eta_1\eta_2} B_2\left(\frac{z_2\eta_1 - z_1\eta_2}{\tau_2\eta_1 - \tau_1\eta_2} \right) - \frac{\log\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)}{\tau_1\tau_2} B_2\left(\frac{z_2\tau_1 - z_1\tau_2}{\tau_1\eta_2 - \tau_2\eta_1} \right) \right).$$

y $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$. En este caso los productos regularizados individuales son funciones Γ-dobles de Barnes.

Generalizando lo anterior, podemos definir la discrepancia de n polinomios $f_1, \ldots, f_n$, mediante el producto *zeta-regularizado*

$$\exp(D(f_1,\dots,f_n;1)) = \frac{\widehat{\prod}_{k\in\mathbb{N}^p}\prod_{j=1}^n f_j(k)}{\prod_{j=1}^n \widehat{\prod}_{k\in\mathbb{N}^p} f_j(k)}.$$

Equivalentemente, en términos de *series zeta*,

$$D(f_1,\dots,f_n;1) := \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\Big(\zeta(s,f_1;1)+\zeta(s,f_2;1)+\cdots+\zeta(s,f_n;1)-\zeta(s,f_1\,f_2\cdots\,f_n;1)\Big).$$

Varios autores, entre ellos Mizuno [Mi], han encontrado fórmulas explícitas para la discrepancia de polinomios lineales en una y dos variables. Por ejemplo en [FR, pág. 377] se prueba la expresión:

$$D(a_1x+w_1,\dots,a_nx+w_n;1) = \sum_{j=1}^n\left(\frac{\log a_j}{n}\left(\sum_{k=1}^n\frac{w_k}{a_k}-n\frac{w_j}{a_j}\right)\right).$$

De hecho Shintani [Sh, pág. 6] entrega, casi sin demostración, una fórmula para la discrepancia de n polinomios lineales en r variables cuando $g=1$:

Fórmula de Shintani. *Si los polinomios lineales*

$$f_i(x_1,\dots,x_r) := a_{1,i}(x_1+z_1)+\cdots+a_{r,i}(x_r+z_r),\ i\in\{1,\dots,n\}$$

satisfacen $\prod_{1\le j<k\le n}\left(a_{p,j}a_{q,k}-a_{p,k}a_{q,j}\right)\neq 0, \forall p\neq q$, *entonces*

(3)

$$D(f_1,\dots,f_n;1) = \frac{(-1)^r}{n}\sum_l\sum_{p\in T_2}\sum_{1\le j<k\le n}\frac{\prod_{i\in T_1}\left(a_{i,j}a_{p,k}-a_{i,k}a_{p,j}\right)^{l_i-1}}{a_{p,j}a_{p,k}\prod_{p\neq q\in T_2}\left(a_{q,j}a_{p,k}-a_{q,k}a_{p,j}\right)}\log\left(\frac{a_{p,j}}{a_{p,k}}\right)\prod_{i=1}^r\left\{\frac{B_{l_i}(z_i)}{l_i!}\right\}.$$

donde B_{l_i} *es el* l_i*-ésimo polinomio de Bernoulli y la suma con respecto a* l *es sobre todas las* r*-tuplas de enteros no negativos tales que* $l_1+\cdots+l_r=r$,

$$T_1 := \{i\in 1,\dots,r : l_i>1\} \text{ y } T_2 := \{i\in 1,\dots,r : l_i=0\}\ .$$

□

En particular esto implica que $D(f_1,\dots,f_n;1)=\frac{2}{n}\sum_{1\le j<k\le n}D(f_i,f_j;1)$. El resultado principal de la tesis consiste en demostrar que esta fórmula es completamente general.

Definición 2.1. *Sea* $f(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_p]$*, un polinomio con coeficientes complejos en* p *variables. Diremos que* f *satisface la Hipótesis de Mahler si:*

Hipótesis de Mahler *: El polinomio* $f(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_p]$ *es no constante y no se anula en ningún punto del octante cerrado* $\mathbb{R}_+^p := [0,\infty)^p$*. Además su parte homogénea de grado máximo* $f_{top}(x)$ *no se anula en ningún punto de* $\mathbb{R}_+^p\setminus\{0\}$.

Notar que si dos polinomios f_1, f_2 satisfacen la Hipótesis de Mahler, entonces el producto $f_1\,f_2$ también la satisface, ya que $(f_1f_2)_{top}=(f_1)_{top}(f_2)_{top}$.

En la sección (8.3) probaremos nuestro resultado principal, el cual permite restringir el estudio a discrepancias de pares.

Teorema 2.1. *Si* $f_1,\dots,f_n\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_p]$ *satisfacen la Hipótesis de Mahler, entonces* $D(f_1,\dots,f_n;g)$ *puede expresarse como una combinación lineal de las discrepancias de pares mediante la fórmula:*

$$D(f_1,\ldots,f_n;g)=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\deg f_i+\deg f_j}{\deg f_1+\cdots+\deg f_n}D(f_i,f_j;g). \tag{4}$$

□

Análogamente a las *series zeta* definidas anteriormente, se define la *integral zeta* mediante la fórmula:

$$Z(s,f;g):=\int_{x\in[0,\infty)^p} g(x)(f(x))^{-s}\,dx. \tag{5}$$

Siguiendo a Mahler [Ma] se puede probar que, bajo la Hipótesis de Mahler para f, la integral $Z(s,f;g)$ converge en algún semiplano $\mathrm{Re}(s)\gg 0$, se extiende como función meromorfa a todo $\mathbb{C}$ y es regular en $s=0$.

La discrepancia para *integrales zeta* $F(f_1,\ldots,f_n;g)$ se define mediante

$$F(f_1,\ldots,f_n;g):=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\Big(Z(s,f_1;g)+Z(s,f_2;g)+\cdots+Z(s,f_n;g)-Z(s,f_1\,f_2\cdots f_n;g)\Big). \tag{6}$$

En general resulta mucho más sencillo obtener la continuación analítica explícita para la *integral zeta* $Z(s,f;g)$ que para su análogo de *series zeta* $\zeta(s,f;g)$.

Afortunadamente, existe una fórmula integral (*La Fórmula de Raabe*, Teorema 5.1) que relaciona $\zeta(s,f^{[a]};g^{[a]})$ y $Z(s,f^{[a]},g^{[a]})$, donde $h^{[a]}(x):=h(a+x)$. Por esto, nuestro método de demostración consiste en obtener primero la fórmula (4) para la discrepancia F de *integrales zeta* (en una variable) usando explícitamente la continuación analítica de $Z(s,f;g)$ construida por Mahler [Ma, pág. 390-398]. Utilizando coordenadas cúbicas en $\mathbb{R}^p$ e integrando la ecuación en una variable, podremos generalizar estos resultados a p variables. Luego, mediante la fórmula de Raabe podremos traspasar este resultado a discrepancia de series.

Como "subproducto" de la demostración encontramos el siguiente resultado, debido a [FP] en el caso $N=0$.

Teorema 2.2. *Sean $f,g\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$ polinomios en p variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler y $N\ge 0$ un entero. Entonces la continuación analítica de la* integral zeta *en $s=-N$ está dada por:*

$$Z(-N,f;g)=-\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\left\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)\,(f(\rho\sigma))^N\log\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)d\sigma\right\}.$$

donde $m=\deg(f)$, $\log$ es la rama principal del logaritmo y $\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}$ se calcula en base a la expansión de Laurent para $\rho=\infty$.

3. Series e Integrales Zeta

Se puede probar fácilmente (Lema 3.1) que el conjunto $\mathcal{M}_{d,p}$ de los polinomios de grado d en p variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler es abierto en el espacio euclideano de polinomios de grado d en p variables (espacio de coeficientes). Sin embargo, no se sabe si este conjunto es conexo ni simplemente conexo.

La Hipótesis de Mahler nos asegura la existencia de una rama analítica del logaritmo $\log(f(x))$ para $x\in\mathbb{R}_+^p$, la cual es única salvo sumar un múltiplo entero de $2\pi i$. Si $f_1,\ldots,f_n$ satisfacen esta hipótesis existe una rama analítica del logaritmo $\log f_j(x)$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Definimos la rama del logaritmo para el producto mediante: [1]

$$\log \prod_{j=1}^{n} f_j(x) := \sum_{j=1}^{n} \log f_j(x), \tag{7}$$

lo que asegura que

$$\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(x) \right)^{-s} = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)^{-s}.$$

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{M}_{m,p}$ el espacio de coeficientes de todos los polinomios de grado m en p variables con coeficientes complejos que satisfacen la Hipótesis de Mahler. Entonces $\mathcal{M}_{m,p}$ es un conjunto abierto no vacío en el espacio vectorial finito dimensional de coeficientes de todos los polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ de grado $\leq m$.*

Demostración: Ver referencia [FP, pág. 6].

□

Notación 3.1. *Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ polinomio en p variables. Para $a \in \mathbb{C}^p$ denotamos por $f^{[a]}$ al polinomio trasladado en a definido por $f^{[a]}(x) := f(x + a)$. Notar que se tiene $\left(f^{[a]}\right)_{top} = f_{top}$. Además si f satisface la Hipótesis de Mahler, entonces $f^{[t]}$ también la satisface para todo $t \in \mathbb{R}_+^p$.*

Notación 3.2. *Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ polinomio en p variables de grado m. Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, denotamos por $f_{(j)}$ la componente homogénea de grado j en f, es decir, la suma de todos los monomios de grado j en $f(x)$.*

Corolario 3.1. *Si $f \in \mathcal{M}_{m,p}$ (en el espacio de coeficientes), entonces existe una vecindad de* 0*, $U \subseteq \mathbb{C}^p$ tal que $f^{[a+t]} \in \mathcal{M}_{m,p}$ para todo $a \in U, t \in \mathbb{R}_+^p$. Más aún, se puede elegir una rama continua de $\log f^{[a+t]}(x)$ para $t, x \in \mathbb{R}_+^p$ y $a \in U$.*

Demostración:

Los coeficientes de $f^{[a]}$ dependen contínuamente de a (de hecho, polinomialmente), y no altera el grado $\deg(f) = \deg(f^{[a]})$. Además, $\mathcal{M}_{m,p}$ es abierto por el Lema 3.1. Por lo tanto, existe U vecindad de cero tal que $f^{[a]} \in \mathcal{M}_{m,p}$ para todo $a \in U$.

Notar que $f^{[a+t]} = (f^{[a]})^{[t]}$ y $f^{[a]} \in \mathcal{M}_{m,p}$. Además, si $h \in \mathcal{M}_{m,p}$ entonces $h^{[t]} \in \mathcal{M}_{m,p}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+^p$. De esto se obtiene el Corolario.

□

Teorema 3.1. ***(Mahler*** [Ma]***)*** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ polinomios en $p \geq 1$ variables tal que f satisface la Hipótesis de Mahler. Entonces la integral y serie zeta*

$$\begin{aligned} Z(s, f; g) &:= \int_{x \in \mathbb{R}_+^p} g(x)(f(x))^{-s}\, dx, \\ \zeta(s, f; g) &:= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} g(k_1, \ldots, k_p) f(k_1, \ldots, k_p)^{-s}. \end{aligned}$$

[1] En lo que sigue siempre asumiremos que las ramas del logaritmo se eligen de manera que $(ab)^{-s} = a^{-s}b^{-s}$.

convergen absolutamente en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > \frac{\deg(g)+p}{\deg(f)}$ *y se extienden a funciones meromorfas en* $\mathbb{C}$*, con a lo más polos simples en los números racionales contenidos en:*

$$\mathfrak{P} = \left\{ s \in \mathbb{C} : s = \frac{p + deg(g) - l}{deg(f)}, \qquad (l = 0, 1, 2..) \quad s \neq 0, -1, -2, \cdots \right\}$$

(notar que $\mathfrak{P}$ *no depende de los coeficientes de* f *ni de* g*, solamente de sus grados). Además,* $Z(s, f; g)$ *y* $\zeta(s, f; g)$ *son regulares en los enteros no positivos* $s = 0, -1, -2, \ldots$.

Fuera del conjunto de polos $\mathfrak{P}$*, la funciones* $\zeta(s, f; g)$ *y* $Z(s, f; g)$ *son funciones analíticas en* s *y localmente en los coeficientes de* f *y* g *cuando la rama de* $\log f(x)$ *se elige contínuamente en* $x \in \mathbb{R}_+^p$ *y en los coeficientes de* f.

□

La demostración del siguiente resultado se encuentra en [FP, pág. 20]. Sin embargo, por completitud se entrega en el Anexo (página 33) una prueba distinta y simplificada.

Teorema 3.2. ***(Fórmula para valores en*** $s = 0$ ***de*** ζ ***y Z)*** *Sean* $f_j \in \mathbb{C}[x]$, $(j = 1, \ldots, n)$ *polinomios en una variable que satisfacen la Hipótesis de Mahler y sea* $g \in \mathbb{C}[x]$*. Entonces se tiene*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \right) Z(0, f_1 f_2 \cdots f_n; g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) Z(0, f_j; g),$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \right) \zeta(0, f_1 f_2 \cdots f_n; g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \zeta(0, f_j; g).$$

□

4. Discrepancia de series e integrales Zeta

Definición 4.1. *Sean* $f_1, \ldots, f_n, g \in C[x_1, \ldots, x_p]$*, tales que* $f_i, (i = 1, \ldots, n)$ *satisfacen la Hipótesis de Mahler. Entonces se define la discrepancia integral de* $f_1, \ldots, f_n$ *como:*

$$F(f_1, \ldots, f_n; g) := \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(Z(s, f_1, g) + Z(s, f_2, g) + \cdots + Z(s, f_n, g) - Z(s, f_1\, f_2 \cdots f_n, g) \Big),$$

y la discrepancia de series

$$D(f_1, \ldots, f_n; g) := \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(\zeta(s, f_1, g) + \zeta(s, f_2, g) + \cdots + \zeta(s, f_n, g) - \zeta(s, f_1\, f_2 \cdots f_n, g) \Big)$$

.

Las definiciones de discrepancia tienen sentido debido al Teorema de Mahler (Teorema 3.1) y al hecho que la Hipótesis de Mahler se preserva bajo productos.

Si f satisface la Hipótesis de Mahler, entonces $Z(s, f; g)$ depende de la rama del logaritmo $\log f$ utilizada. Sin embargo, el valor en cero $Z(0, f; g)$ ***no*** depende de tal elección, ya que todas las ramas continuas de $\log f(x)$ sobre $\mathbb{R}_+^p$ difieren por un múltiplo entero de $2\pi i$. Es decir, si log y log* son dos ramas del logaritmo para f y definimos:

$$\begin{aligned} Z(s, f; g) &:= \int_{x \in \mathbb{R}_+^p} g(x) \exp(-s \log(f(x)))\, dx \qquad (\mathrm{Re}(s) \geq 0)\,, \\ Z(s, f^*; g) &:= \int_{x \in \mathbb{R}_+^p} g(x) \exp(-s \log^*(f(x)))\; dx \qquad (\mathrm{Re}(s) \geq 0)\,. \end{aligned}$$

entonces $\log^*(f(x)) = \log(f(x)) + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. Luego: $Z(s, f^*; g) = Z(s, f; g)\exp(-s\,2k\pi i)$. Se concluye que $Z(0, f^*; g) = Z(0, f; g)$. Análogamente $\zeta(0, f^*; g) = \zeta(0, f; g)$. Más generalmente, los valores en enteros negativos $Z(-N, f; g)$ y $\zeta(-N, f; g)$ $N \in \mathbb{N}$, ***no*** dependen de la rama de $\log f$ utilizada. Por otro lado, el valor de la derivada en cero $Z'(0, f; g)$ ***sí*** depende de la elección de rama del logaritmo $\log f$, como veremos a continuación

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} Z(s, f^*; g) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(Z(s, f; g)\exp(-s\,2k\pi i) \Big) = -2k\pi i Z(0, f; g) + Z'(0, f; g).$$

Si escogemos distintas ramas del logaritmo para cada f_j, digamos

$$f_j^*(x)^{-s} := \exp\left(-s(\log f_j(x) + 2k_j\pi i)\right) \qquad k_j \in \mathbb{Z}, \quad (j = 1, 2),$$

con la ecuación de compatibilidad usual $(f_1^* f_2^*)^{-s} := (f_1^*)^{-s}(f_2^*)^{-s}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} Z(s, f_1^*; g) &= -2k_1\pi i\, Z(0, f_1; g) + Z'(0, f_1; g), \\
\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} Z(s, f_2^*; g) &= -2k_2\pi i\, Z(0, f_2; g) + Z'(0, f_2; g), \\
\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} Z(s, (f_1 f_2)^*; g) &= -2(k_1 + k_2)\pi i\, Z(0, f_1 f_2; g) + Z'(0, f_1 f_2; g).
\end{aligned}$$

Luego al calcular la discrepancia con las ramas f_j^* se obtiene:

$$\begin{aligned}
F(f_1^*, f_2^*; g) &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(Z(s, f_1^*; g) + Z(s, f_2^*; g) - Z(s, f_1^* f_2^*; g) \Big) \\
&= Z'(0, f_1; g) + Z'(0, f_2; g) - Z'(0, f_1 f_2; g) + \\
&\quad +2\pi i \left(-k_1 Z(0, f_1; g) - k_2 Z(0, f_2; g) + (k_1 + k_2)\, Z(0, f_1 f_2; g)\right) \\
&= F(f_1, f_2; g) + 2\pi i \left(-k_1 Z(0, f_1; g) - k_2 Z(0, f_2; g) + (k_1 + k_2)\, Z(0, f_1 f_2; g)\right).
\end{aligned}$$

Por la fórmula del producto para valores en cero de series o integrales zeta (Teorema 3.2) sabemos que

$$Z(0, f_1 f_2; g) = \frac{\deg(f_1)}{\deg(f_1) + \deg(f_2)} Z(0, f_1; g) + \frac{\deg(f_2)}{\deg(f_1) + \deg(f_2)} Z(0, f_2; g).$$

Por lo tanto, la diferencia entre las discrepancias $F(f_1^*, f_2^*; g) - F(f_1, f_2; g)$, usando diferentes ramas del logaritmo, es igual a

$$2\pi i\, \Lambda \left(Z(0, f_1; g) - Z(0, f_2; g)\right). \tag{8}$$

donde $\Lambda := \frac{k_2 \deg(f_1) - k_1 \deg(f_2)}{\deg(f_1) + \deg(f_2)}$.

lo cual prueba que la discrepancia (de integrales o de series) depende de las ramas del logaritmo utilizadas.

Para facilitar la notación, omitiremos esta dependencia al escribir solamente $D(f_1, \ldots, f_n; g)$, en vez de $D((f_1, \log_1), (f_2, \log_2), \ldots, (f_n, \log_n); g)$, pero debemos tener en cuenta que D y F dependen tambien de las ramas del log utilizadas para cada f_i.

Si $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$, $(i = 1, \ldots, n)$ satisfacen la Hipótesis de Mahler, entonces

$$\begin{aligned}
D(f_0 \cdot f_1, f_2, \ldots, f_n; g) &= D(f_0, f_1, \ldots, f_n; g) - D(f_0, f_1; g), \\
F(f_0 \cdot f_1, f_2, \ldots, f_n; g) &= F(f_0, f_1, \ldots, f_n; g) - F(f_0, f_1; g),
\end{aligned} \tag{9}$$

donde la rama del logaritmo usada para cada f_j es la misma en cada lado de las ecuaciones. Estas propiedades son consecuencia directa de la definición de discrepancia, usando la fórmula que la define para $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ y luego extendiendo el resultado por continuación analítica a $s = 0$. Es decir, para $\mathrm{Re}(s) \gg 0$

$$\zeta(s, f_0 \cdot f_1; g) + \zeta(s, f_2; g) + \cdots + \zeta(s, f_n; g) - \zeta(s, f_0 f_1 f_2 \cdots f_n; g) =$$
$$= \zeta(s, f_0; g) + \zeta(s, f_1; g) + \cdots + \zeta(s, f_n; g) - \zeta(s, f_0 f_1 f_2 \cdots f_n; g) - (\zeta(s, f_0; g) + \zeta(s, f_1; g) - \zeta(s, f_0 \cdot f_1; g))$$

Derivando y usando continuación analítica a $s = 0$ obtenemos (9).

5. Relación entre discrepancias integrales y de series

Definimos los *Polinomios de Bernoulli* $B_j(t) \in \mathbb{Q}[t]$, $j = 0, 1, 2..$ por inducción mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} B_0(t) &= 1, \\ \frac{dB_j}{dt} &= j\, B_{j-1}(t) \qquad (j \geq 1), \\ \int_0^1 B_j(t)\, dt &= 0 \qquad (j \geq 1). \end{aligned}$$

Por ejemplo, los primeros son: $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$, $B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}\, t^2 + \frac{1}{2}\, t$. Se definen los *Números de Bernoulli* mediante: $B_j := B_j(0)$. Tales números se relacionan directamente con los valores en enteros de la función zeta de Riemann [Ap, cap. 12].

El siguiente teorema (conocido como la Fórmula de Raabe [FP, pág. 5] [2]) nos permitirá establecer una relación entre la discrepancia integral F y de series D, que permite deducir nuestro resultado principal (4) a partir de la fórmula correspondiente para F.

Teorema 5.1. *Sean f, $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$, y asumamos que f satisface la Hipótesis de Mahler. Entonces:*

(1) *Para $s \in \mathbb{C}$, fuera del posible conjunto de polos $\mathfrak{P}$ dado por Mahler (Teorema 3.1), se tiene*

$$Z(s, f; g) = \int_{t \in [0,1]^p} \zeta(s, f^{[t]}; g^{[t]})\, dt,$$

donde dt es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^p$.

(2) *Para $a \in \mathbb{C}^p$ en una vecindad de cero, y $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ que satisfacen la Hipótesis de Mahler, las aplicaciones definidas por $a \mapsto F(f_1^{[a]}, \ldots, f_n^{[a]}; g^{[a]})$ y $a \mapsto D(f_1^{[a]}, \ldots, f_n^{[a]}; g^{[a]})$ son polinomiales.*

(3) *Si P y Q son dos polinomios en p variables relacionados mediante la fórmula*

$$P(a) = \int_{t \in [0,1]^p} Q(a + t)\, dt, \tag{10}$$

con $P(a_1, \ldots, a_p) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^p a_i^{L_i}$, entonces:

$$Q(a_1, \ldots, a_p) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^p B_{L_i}(a_i),$$

donde B_{L_i} es el L_i-ésimo polinomio de Bernoulli.

[2] La fórmula original de Raabe (1843) es $\int_0^1 \log\left(\Gamma(x + t)/\sqrt{2\pi}\right)\, dt = x \log x$, ver [FR] y [FP] para su generalización.

Demostración: Ver Anexo página 34.

□

Probando primero el correspondiente resultado para la discrepancia de integrales F y luego usando la fórmula de inversión de Raabe, probaremos nuestro resultado principal.

6. Continuación analítica explícita de $Z(s, f; g)$ en una variable

Para probar el Teorema 2.1 encontraremos una fórmula que nos permita calcular explícitamente la discrepancia $F(f_1, f_2; g)$, que generalizaremos por inducción a una fórmula para $F(f_1, \ldots, f_n; g)$. Primero veremos el caso en una variable ($p = 1$) el cual, como veremos luego, es suficiente para tratar el caso general en p variables. El método de continuación analítica está tomado de Mahler [Ma].

Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios de grados $m = \deg(f)$ y $q = \deg(g)$ tal que f satisface la Hipótesis de Mahler (en una variable). Para $\mathrm{Re}(s) > \frac{q+1}{m}$ y $\omega > 0$ consideramos la siguiente descomposición

$$Z(s, f; g) := \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s} dx = \int_0^\omega g(x) f(x)^{-s} dx + \int_\omega^\infty g(x) f(x)^{-s} dx = Z_1 + Z_2,$$

donde las funciones Z_1 y Z_2 están dadas por:

$$\begin{aligned} Z_1(s, \omega, f; g) &:= \int_0^\omega g(x) f(x)^{-s} dx, \\ Z_2(s, \omega, f; g) &:= \int_\omega^\infty g(x) f(x)^{-s} dx. \end{aligned}$$

Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones cualquiera. Denotamos por $f(x) = O(g(x))$ si existen constantes $M, R > 0$ tales que $|f(x)| \leq M g(x) \quad \forall |x| \geq R$.

- **Continuación Analítica de Z_1**

  Como el intervalo $[0, \omega]$ es compacto, por el teorema de Morera la función $Z_1(s, \omega)$ es una función entera de s, cuya derivada en $s = 0$ es

$$Z_1'(0, \omega, f; g) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \int_0^\omega g(x) f(x)^{-s} dx = \int_0^\omega -g(x) \log(f(x)) dx.$$

  Hemos definido $\log(f_1 f_2) = \log f_1 + \log f_2$, por lo tanto, la derivada de $Z_1(s, \omega, f; g)$ en $s = 0$ satisface

$$Z_1'(0, \omega, f_1 f_2; g) = Z_1'(0, \omega, f_1; g) + Z_1'(0, \omega, f_2; g), \tag{11}$$

  Como consecuencia, la discrepancia integral $F(f_1, f_2; g)$ sólo depende del comportamiento de los polinomios f_1, f_2, g *en el infinito* ($\omega \gg 0$).

- **Continuación Analítica de Z_2**

  Nuestro primer objetivo será encontrar una continuación analítica para $Z_2(s, \omega, f; g)$ válida en $s = 0$.

  Sea $f_{top}(x)$ el monomio de mayor grado en $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Para $x > 0$, definimos la función racional $r(x) := (f(x) - f_{top}(x))/(f_{top}(x))$, y notemos que $r(x) = O(x^{-1})$ para $x \to \infty$.

Luego si $m = \deg(f)$ y $x \neq 0$:

$$f(x) = x^m f_{top}(1)(1 + r(x))$$

Elijamos la rama de $f_{top}(1)^{-s}$ de modo que $f(x)^{-s} = x^{-ms} f_{top}(1)^{-s}(1 + r(x))^{-s}$ y para $x \geq \omega \gg 0$ utilizamos la rama principal en $\log(1 + r(x))$ y $\log x$. Entonces

$$Z_2(s, \omega, f; g) = f_{top}(1)^{-s} \int_w^\infty x^{-ms} g(x)(1 + r(x))^{-s} dx.$$

Utilizaremos el siguiente resultado del análisis real [WW, pág. 90-95]:

Lema 6.1. (Fórmula de Taylor con resto integral)

Si $G \in C^n[0, 1]$, entonces para todo $1 \leq k \leq n$ y $0 \leq q \leq 1$ se tiene

$$G(q) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{G^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} q^\lambda + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^q G^{(k)}(t)(q - t)^{k-1} dt.$$

□

Si $\rho \in \mathbb{C}$ y $|\rho| < 1$, $t \in [0, 1]$ aplicamos la fórmula anterior a la función

$$G(t) = (1 + t\rho)^{-s}$$

donde usamos la rama principal de $\log$. Usando el lema 6.1, el resto de Taylor para $q = 1$ es

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^1 G^{(k)}(t)(1-t)^{k-1} dt}{(k-1)!} &= \frac{\rho^k (-s)(-s-1)\cdots(-s-k+1)}{(k-1)!} \int_0^1 (1 + t\rho)^{-s-k}(1-t)^{k-1} dt \\
&= \frac{\rho^k}{(k-1)!}(-1)^k s(s+1)\cdots(s+k-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+t\rho)^{s+k}} dt \\
&= k\rho^k \binom{-s}{k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+t\rho)^{s+k}} dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
G(1) = (1+\rho)^{-s} &= \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{G^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} + k\rho^k \binom{-s}{k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+t\rho)^{s+k}} dt \\
&= \sum_{\lambda=0}^{k-1} \rho^\lambda \binom{-s}{\lambda} + k\rho^k \binom{-s}{k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+t\rho)^{s+k}} dt.
\end{aligned}$$

Como $r(x) = O(x^{-1})$ podemos elegir $\omega > 0$ suficientemente grande tal que $|r(x)| \leq 1/2$ para todo $x \geq \omega$, entonces

$$\begin{aligned}
Z_2(s, \omega, f; g) &= f_{top}(1)^{-s} \int_\omega^\infty x^{-ms} g(x)(1 + r(x))^{-s} dx, \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > \frac{q+1}{m}\right) \\
&= f_{top}(1)^{-s} \Bigg[\int_\omega^\infty x^{-ms} g(x) \sum_{\lambda=0}^{k-1} r(x)^\lambda \binom{-s}{\lambda} dx \\
&\quad + k\binom{-s}{k} \int_\omega^\infty x^{-ms} g(x) r(x)^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+tr(x))^{s+k}} dt \ \ dx \Bigg]
\end{aligned}$$

Sea $k := q+2$, donde $q = \deg(g)$. Entonces

$$Z_2(s,\omega,f;g) = \sum_{\lambda=0}^{q+1} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega) + (q+2)\binom{-s}{q+2} N_{q+2}(s,\omega), \qquad \mathrm{Re}(s) > \frac{q+1}{m}$$

donde las funciones $M_\lambda(s,\omega)$ y $N_{q+2}(s,\omega)$ están dadas por:

$$M_\lambda(s,\omega) := f_{top}(1)^{-s} \int_\omega^\infty x^{-ms} g(x) r(x)^\lambda dx, \qquad \lambda = 0,1,..,q+1 \tag{12}$$

$$N_{q+2}(s,\omega) := f_{top}(1)^{-s} \int_\omega^\infty x^{-ms} g(x) r(x)^{q+2} \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{s+q+2}} dt \right) dx \tag{13}$$

Procederemos ahora a construir la continuación analítica explícita a $s=0$ de las funciones $\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega)$ y $\binom{-s}{q+2} N_{q+2}(s,\omega)$.

Continuación Analítica de $\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega)$.

Recordando la definición de $r(x) = (f(x) - f_{top}(x))/f_{top}(x)$ y descomponiendo f, g en sus partes homogéneas, podemos definir constantes A_λ^h mediante la ecuación

$$\begin{aligned} g(x)r(x)^\lambda &= g(x)\left(\frac{f_{(m-1)}(1)}{x f_{top}(1)} + \frac{f_{(m-2)}(1)}{x^2 f_{top}(1)} + .. + \frac{f_{(0)}}{x^m f_{top}(1)} \right)^\lambda \\ &= x^q \left(g_{(q)}(1) + x^{-1} g_{(q-1)}(1) + .. + x^{-q} g_{(0)} \right) \left(\frac{f_{(m-1)}(1)}{x f_{top}(1)} + .. + \frac{f_{(0)}}{x^m f_{top}(1)} \right)^\lambda \\ &=: x^{q-\lambda} \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} A_\lambda^h \, x^{-h} \end{aligned}$$

Reemplazando $g(x)r(x)^\lambda$ en la definición de $M_\lambda(s,\omega)$ (ecuación (12)) obtenemos:

$$\begin{aligned} M_\lambda(s,\omega) &= f_{top}(1)^{-s} \int_\omega^\infty x^{-ms} x^{q-\lambda} \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} A_\lambda^h \, x^{-h} \, dx, \\ &= f_{top}(1)^{-s} \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} A_\lambda^h \frac{\omega^{q-\lambda-h-ms+1}}{ms+\lambda+h-q-1}. \end{aligned}$$

Notamos que la última integral es convergente ya que $\mathrm{Re}(s) > \frac{q+1}{m}$, por lo tanto, cuando $0 \le \lambda \le q+1$ y $0 \le h \le q+(m-1)\lambda$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(q-\lambda-h-ms+1) &\le \mathrm{Re}(q+1-ms-h) \\ &\le \mathrm{Re}(q+1-ms) \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(q-\lambda-h-ms) < -1 \quad \Rightarrow \quad \int_\omega^\infty x^{q-\lambda-h-ms} \, dx \quad \text{es convergente.}$$

Lema 6.2. *La función M_λ definida en (12) puede expresarse, mediante*

$$M_\lambda(s,\omega) = f_{top}(1)^{-s} \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} A_\lambda^h \frac{\omega^{q-\lambda-h-ms+1}}{ms+\lambda+h-q-1}. \tag{14}$$

Por lo tanto, la función $\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega)$ *posee continuación meromorfa a* $\mathbb{C}$, *con polos simples en* $s = \frac{q+1-\lambda-h}{m}$ *para* $h = 0, 1, \ldots, q+(m-1)\lambda$, *y es analítica en* $s = 0$.

Demostración:

Si $s = 0$ es un polo de $M_\lambda(s,\omega)$, este proviene de (14) con $s = 0 = \frac{q+1-\lambda-h}{m}$, es decir, $\lambda + h = q + 1$. Como $h \leq q + (m-1)\lambda$ tenemos la desigualdad

$$\lambda + q + (m-1)\lambda \geq \lambda + h = q + 1$$

es decir, $\lambda \geq 1/m$. En particular $\lambda \neq 0$, por lo tanto, $M_0(s,\omega)$ es regular en $s = 0$.
Si $\lambda > 0$ entonces

$$\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega) = \frac{(-s)(-s-1)\cdots(-s-\lambda-1)}{\lambda!} M_\lambda(s,\omega).$$

Como los polos de $M_\lambda(s,\omega)$ son todos simples, el factor $(-s)$ convierte a $\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega)$ en una función regular en $s = 0$.
Se concluye que $\sum_{\lambda=0}^{q+1} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega)$ define una función analítica en $s = 0$. $\square$

Continuación Analítica de $N_{q+2}(s,\omega)$: Recordemos que hemos elegido $\omega \gg 0$ tal que $|r(x)| \leq 1/2$ para todo $x \geq \omega$.

Lema 6.3. *La función dada por* $Z_2(s,\omega,f;g) = \int_\omega^\infty g(x) f(x)^{-s} dx$, $(\omega \gg 0)$, *posee extensión meromorfa al semiplano* $\mathrm{Re}(s) > -1/m$, *con polos simples en*

$$\left\{ s = \frac{q+1-\lambda-h}{m}, \qquad h = 0, 1, \ldots, q+(m-1)\lambda, \quad \mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{m} \right\}$$

y es regular en $s = 0$.

Demostración:

Sabemos que

$$Z_2(s,\omega,f;g) = \sum_{\lambda=0}^{q+1} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,\omega) + (q+2)\binom{-s}{q+2} N_{q+2}(s,\omega). \tag{15}$$

Para $\mathrm{Re}(s) > (q+1)/m$,

$$N_{q+2}(s,\omega) = f_{top}(1)^{-s} \int_\omega^\infty x^{-ms} g(x) r(x)^{q+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{s+q+2}} dt\, dx. \tag{16}$$

Probaremos que la integral (16) es convergente en $s = 0$. Notemos primero que como $|r(x)| \leq 1/2$ para $x \geq \omega$,

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{s+q+2}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{(1-1/2)^{\mathrm{Re}(s)+q+2}} dt = 2^{\mathrm{Re}(s)+q+2}. \tag{17}$$

Por otro lado, como $r(x) = O(x^{-1})$, la función a integrar en (16) verifica

$$x^{-ms} g(x) r(x)^{q+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{s+q+2}}\, dt = O(x^{-m\mathrm{Re}(s)+q-(q+2)}) = O(x^{-m(\mathrm{Re}(s)+2/m)}).$$

Por lo tanto, $N_{q+2}(s, \omega)$ se extiende analíticamente a la región $-m(\mathrm{Re}(s) + 2/m) < -1$, *i. e.* $\mathrm{Re}(s) > \frac{-1}{m}$. Es decir, $N_k(s, \omega)$ posee extensión analítica a $s = 0$. Por el lema 6.2 y la ecuación (15) se tiene que $Z_2(s, \omega, f; g)$ posee extensión analítica a $s = 0$.

□

Por el lema 6.3, la función $Z(s, f; g)$ posee continuación analítica a $s = 0$, por lo tanto, $F(f_1, f_2; g)$ está bien definida mediante (6). Además como

$$Z_1'(0, \omega, f_1 f_2; g) = Z_1'(0, \omega, f_1; g) + Z_1'(0, \omega, f_2; g),$$

se tiene para todo $\omega \gg 0$

$$F(f_1, f_2; g) = Z_2'(0, f_1, g, \omega) + Z_2'(0, f_2, g, \omega) - Z_2'(0, f_1\, f_2, g, \omega). \tag{18}$$

En particular, para definir la discrepancia integral $F(f_1, f_2; g)$ de dos polinomios *en una variable* no se requiere toda la Hipótesis de Mahler, ya que cualquier polinomio no constante posee sus ceros en una región acotada y podemos utilizar la ecuación (18) para definir la discrepancia.

7. Discrepancia Integral de Polinomios en una Variable

7.1. **Fórmulas explícitas para la Discrepancia Integral en una variable.** Nuestro siguiente objetivo será obtener una fórmula explícita para la discrepancia integral de dos polinomios en una sola variable. Utilizaremos la continuación de $Z(s, f; g)$ construida en la sección 6. Comenzaremos con el siguiente lema:

Lema 7.1.

$$\lim_{\omega \to \infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(\binom{-s}{q+2} N_{q+2}(s, \omega) \right) \right\} = 0.$$

donde $N_{q+2}(s, \omega)$ está definida por (16) y es analítica en $s = 0$.

Demostración:

Por definición

$$\binom{-s}{q+2} N_{q+2}(s, \omega) = \binom{-s}{q+2} f_{top}(1)^{-s} \int_\omega^\infty x^{-ms} g(x) r(x)^{q+2} \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{s+q+2}}\, dt \right) dx.$$

Sabemos que las funciones $N_{q+2}(s, \omega)$ y $\binom{-s}{q+2}$ son analíticas en $s = 0$ (por el lema 6.2 y la demostración del lema 6.3). Por la regla de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \binom{-s}{q+2} N_{q+2}(s, \omega) &= \left(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \binom{-s}{q+2} \right) \int_\omega^\infty g(x) r(x)^{q+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{q+2}}\, dt\, dx, \\ &= \frac{(-1)^{q+2}}{q+2} \int_\omega^\infty g(x) r(x)^{q+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{q+2}}\, dt\, dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad (17) y como $r(x) = O(x^{-1})$

$$g(x) r(x)^{q+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+1}}{(1+tr(x))^{q+2}}\, dt = O(x^{-2}).$$

Conluimos utilizando el Teorema de Convergencia Dominada:

$$\lim_{\omega\to\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\left(\binom{-s}{q+2}N_{q+2}(s,\omega)\right)\right\}=0.$$

$\square$

Definición 7.1. *Para $\lambda \in \mathbb{N}$ sea $L:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ dada por*

$$L(1) := 0, \tag{19}$$

$$L(\lambda) := \frac{(-1)^\lambda}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\lambda-1}\frac{1}{k}\right) \qquad (\lambda \geq 1)\,. \tag{20}$$

Lema 7.2. *Sea $M_\lambda(s,\omega) = f_{top}(1)^{-s}\int_\omega^\infty x^{-ms}g(x)r(x)^\lambda dx$. Entonces utilizando la continuación analítica para M_λ descrita en la ecuación (14) se tiene*

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\left(\sum_{\lambda=0}^{q+1}\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,\omega)\right)=\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left(\frac{L(\lambda)}{m}A_\lambda^{q+1-\lambda}+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda\, m}A_\lambda^{q+1-\lambda}\log\left(f_{top}(1)\right)\right)+P(\omega),$$

donde $m=\deg(f)$, $q=\deg(g)$,

$$P(\omega)=\sum_{\substack{\lambda=-N_1\\ \lambda\neq 0}}^{N_2}B_\lambda\omega^\lambda+\log\omega\sum_{\lambda=0}^{N_3}C_\lambda\omega^\lambda. \qquad (N_i\in\mathbb{N})\,, \tag{21}$$

y B_λ, C_λ son constantes (que dependen de los polinomios f y g).

Demostración:

Por el lema 6.2, sabemos que $M_0(s,\omega)$ y $\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,\omega)$ para $\lambda\geq 1$ son analíticas en $s=0$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\left(\sum_{\lambda=0}^{q+1}\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,\omega)\right)=M_0'(0,\omega)+\sum_{\lambda=1}^{q+1}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\left(\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,\omega)\right). \tag{22}$$

Reemplazando en la ecuación (14),

$$\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,\omega)=\binom{-s}{\lambda}f_{top}(1)^{-s}\sum_{\substack{h=0\\ h\neq q+1-\lambda}}^{q+(m-1)\lambda}\left\{A_\lambda^h\;\frac{\omega^{q-\lambda-h-ms+1}}{ms+\lambda+h-q-1}\right\}$$
$$+\binom{-s}{\lambda}\frac{1}{ms}f_{top}(1)^{-s}\;A_\lambda^{q+1-\lambda}\;\omega^{-ms}. \tag{23}$$

Evidentemente, las funciones de s

$$\binom{-s}{\lambda}\frac{1}{ms},\quad f_{top}(1)^{-s},\quad \frac{\omega^{q-\lambda-h-ms+1}}{ms+\lambda+h-q-1},\quad (h\neq q+1-\lambda)$$

son analíticas en $s=0$. Notemos que para $\lambda\geq 1$

$$(24)\qquad \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left[\binom{-s}{\lambda}\frac{1}{s}\right] = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left[\frac{(-s)(-s-1)\cdots(-s-\lambda+1)}{\lambda!}\frac{1}{s}\right]$$
$$= \frac{(-1)^\lambda}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\lambda-1}\frac{1}{k}\right) = L(\lambda),$$
$$(25)\qquad \binom{-s}{\lambda}\frac{1}{s}\Big|_{s=0} = \frac{(-s)(-s-1)\cdots(-s-\lambda+1)}{\lambda!}\frac{1}{s}\Big|_{s=0} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda}.$$

Por (14) y (24) cuando $\lambda \geq 1$,

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,w) = \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\binom{-s}{\lambda}\right)}^{=\frac{(-1)^\lambda}{\lambda}}\sum_{\substack{h=0\\ h\neq q+1-\lambda}}^{q+(m-1)\lambda} A_\lambda^h\,\frac{\omega^{q-\lambda-h+1}}{\lambda+h-q-1} + \frac{L(\lambda)}{m}A_\lambda^{q+1-\lambda}$$
$$-A_\lambda^{q+1-\lambda}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda}\frac{1}{m}\Big[\log f_{top}(1) + m\log\omega\Big],$$
$$= \frac{L(\lambda)}{m}A_\lambda^{q+1-\lambda} + \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda\, m}A_\lambda^{q+1-\lambda}\log f_{top}(1)$$
$$+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}A_\lambda^{q+1-\lambda}\log\omega + \frac{(-1)^\lambda}{\lambda}\sum_{\substack{h=0\\ h\neq q+1-\lambda}}^{q+(m-1)\lambda} A_\lambda^h\frac{\omega^{q-\lambda-h+1}}{\lambda+h-q-1}.$$

Por otro lado, para $\lambda = 0$, usando la definición de $M_0(s,\omega)$,

$$M_0'(0,\omega) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left(f_{top}(1)^{-s}\sum_{h=0}^{q}A_0^h\frac{\omega^{q-h-ms+1}}{ms+h-q-1}\right) =$$
$$= -\log(f_{top}(1))\sum_{h=0}^{q}A_0^h\frac{\omega^{q-h+1}}{h-q-1} + \sum_{h=0}^{q}\left(-A_0^h\, m\log(\omega)\frac{\omega^{q-h+1}}{h-q-1} - m\,A_0^h\frac{\omega^{q-h+1}}{(h-q-1)^2}\right).$$

Reemplazando los resultados obtenidos para $\lambda = 0$ y $\lambda \geq 1$ en la ecuación (22) obtenemos

$$(26)\qquad \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\sum_{\lambda=0}^{q+1}\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,\omega) =$$
$$\sum_{h=0}^{q}\left[-\log(f_{top}(1))\,A_0^h\,\frac{\omega^{q-h+1}}{h-q-1} + \frac{m\,A_0^h\,\omega^{q-h+1}\log\omega}{q-h+1} - \frac{m\,A_0^h\,\omega^{q-h+1}}{(h-q-1)^2}\right]$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left[\frac{L(\lambda)}{m}A_\lambda^{q+1-\lambda} + \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda\, m}A_\lambda^{q+1-\lambda}\log f_{top}(1) + \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}A_\lambda^{q+1-\lambda}\log\omega\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^\lambda}{\lambda}\sum_{\substack{h=0\\ h\neq q+1-\lambda}}^{q+(m-1)\lambda}A_\lambda^h\frac{\omega^{q-\lambda-h+1}}{\lambda+h-q-1}\right].$$

En esta expresión, los únicos términos independientes de ω son

$$\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left(\frac{L(\lambda)}{m}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda\, m}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}\log f_{top}(1)\right).$$

Todos los otros términos forman $P(\omega)$

$$(27)\qquad P(\omega)=\sum_{h=0}^{q}\left[-\log(f_{top}(1))\,A_0^h\,\frac{\omega^{q-h+1}}{h-q-1}+\frac{m\,A_0^h\,\omega^{q-h+1}\log\omega}{q-h+1}-\frac{m\,A_0^h\,\omega^{q-h+1}}{(h-q-1)^2}\right]+$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left[\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}\log\omega+\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda}\sum_{\substack{h=0\\ h\neq q+1-\lambda}}^{q+(m-1)\lambda}A_{\lambda}^{h}\frac{\omega^{q-\lambda-h+1}}{\lambda+h-q-1}\right].$$

De aquí se deduce el lema.

□

De la ecuación (15) y los lemas 6.3, 7.2 obtenemos

Lema 7.3. *La función $Z_2(s,\omega,f;g)$ posee extensión analítica a $s=0$ y su derivada en ese punto es*

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}Z_2(s,\omega,f;g)=\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left(\frac{L(\lambda)}{m}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda\, m}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}\log\left(f_{top}(1)\right)\right)$$
$$+P(\omega)+(q+2)\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\binom{-s}{q+2}N_{q+2}(s,\omega),$$

donde $P(\omega)$ está dada por la ecuación (27).

□

Para enfatizar la dependencia de los polinomios f y g en $P(\omega)$, escribiremos $P(\omega)=P(\omega,f;g)$. De la misma forma, en el lema 7.3 denotamos por:

$$(28)\qquad T(f;g):=\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left(\frac{L(\lambda)}{m}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda\, m}A_{\lambda}^{q+1-\lambda}\log\left(f_{top}(1)\right)\right).$$

Lema 7.4. *Sean $f_1,f_2,g\in\mathbb{C}[x]$ tales que f_1,f_2 satisfacen la Hipótesis de Mahler. Entonces*

$$(29)\qquad P(\omega,f_1f_2;g)=P(\omega,f_1;g)+P(\omega,f_2;g)+\sum_{\lambda=-N_1}^{-1}b_{\lambda}\omega^{\lambda}.$$

donde las constantes b_λ dependen de f_1,f_2 y g.
Demostración:

Sea $K(\omega)=P(\omega,f_1;g)+P(\omega,f_2;g)-P(\omega,f_1f_2;g)$. Por la ecuación (11) sabemos que para todo $\omega\gg 0$,

$$F(f_1,f_2;g)=Z_2'(0,\omega,f_1;g)+Z_2'(0,\omega,f_2;g)-Z_2'(0,\omega,f_1\,f_2;g).$$

En particular, podemos tomar el límite cuando ω tiende a infinito, ya que el lado izquierdo de esta ecuación no depende de ω. Por el lema 7.3,

$$F(f_1,f_2;g)-(T(f_1;g)+T(f_2;g)-T(f_1f_2;g)) = \lim_{\omega\to\infty}\Big\{K(\omega)+(q+2)\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\binom{-s}{q+2}N_{q+2}(s,\omega;f_1)$$
$$+(q+2)\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\binom{-s}{q+2}N_{q+2}(s,\omega;f_2)-(q+2)\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\binom{-s}{q+2}N_{q+2}(s,\omega;f_1f_2)\Big\}.$$

Es decir,

$$(30)\qquad F(f_1,f_2;g)-(T(f_1;g)+T(f_2;g)-T(f_1f_2;g)) = \lim_{\omega\to\infty}K(\omega) \qquad \text{(por el lema 7.1).}$$

Por lo tanto $\lim_{\omega\to\infty}K(\omega)$ existe. Además para $j<0$: $\omega^j\to 0$, cuando $\omega\to\infty$, por lo tanto:

$$\lim_{\omega\to\infty}K(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\Big(\sum_{\lambda=1}^{M_2}b_\lambda\omega^\lambda+\log\omega\sum_{\lambda=0}^{M_3}c_\lambda\omega^\lambda\Big).$$

donde b_λ y c_λ son constantes que dependen de f_1, f_2 y g.

Considerando el término dominante cuando $\omega\to\infty$ está claro que este límite existe si y solo si todas las constantes $b_\lambda=c_\lambda=0$ para todo $\lambda\geq 0$. Esto prueba (29).

□

Por el lema 7.4 y la ecuación (30) tenemos, al tomar $\omega\to\infty$

$$(31)\qquad F(f_1,f_2;g) \quad = \quad T(f_1;g)+T(f_2;g)-T(f_1f_2;g) \qquad \text{(ver (28))}$$

donde las constantes $A_\lambda^{q+1-\lambda}$ están dadas por

$$A_\lambda^{q+1-\lambda}(f)=\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\Big\{g(x)r(x)^\lambda\Big\}=\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\Big\{g(x)\Big(\frac{f(x)-f_{top}(x)}{f_{top}(x)}\Big)^\lambda\Big\}.$$

Para $\lambda>q+1$, ($q=\deg(g)$, $m=\deg(f)$),

$$\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\Big(g(x)r(x)^\lambda\Big)=\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\Big\{x^q\big(g_{(q)}(1)+\cdots+x^{-q}g_{(0)}\big)\Big(\frac{f_{(m-1)}(1)}{xf_{top}(1)}+\cdots+\frac{f_{(0)}}{x^mf_{top}(1)}\Big)^\lambda\Big\}$$

$$=\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\Big\{\underbrace{x^q(g_{(q)}(1)+x^{-1}g_{(q-1)}(1)+\cdots+x^{-q}g_{(0)})\Big(\Big(\frac{f_{(m-1)}(1)}{xf_{top}(1)}\Big)^\lambda+O(x^{-\lambda-1})\Big)}_{=O(x^{q-\lambda})}\Big\}=0,$$

ya que: $q-\lambda<-1$. Luego para todo $M\geq q+1$,

$$(32)\qquad T(f;g) \quad = \quad \mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{M}g(x)\frac{r(x)^\lambda}{m}\Big(L(\lambda)+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}\log(f_{top}(1))\Big)\Big\}.$$

Usando el siguiente lema podremos extender la suma finita $\sum_{\lambda=1}^{M}$ en la ecuación (32) a una serie convergente.

Lema 7.5. *La función* $L(\lambda)$ *es acotada para* $\lambda\in\mathbb{R}_+$. *Mas aún, se tiene* $\lim_{\lambda\to\infty}L(\lambda)=0$.

Demostración:

Utilizando el criterio de comparación integral

$$\left|\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{\lambda-1}\frac{1}{k}\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(1+\int_{1}^{\lambda-1}\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1+\log(\lambda-1)\right) \longrightarrow 0 \ \ (\lambda\to\infty).$$

□

Por la elección de $\omega \gg 0$ sabemos que $|r(x)| \leq 1/2$, para todo $x \geq \omega$. Por el lema 7.5, se concluye que para $x \geq \omega$ la serie

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} r(x)^{\lambda}\left(L(\lambda)+\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda}\log(f_{top}(1))\right) \tag{33}$$

es convergente. Por lo tanto, por las ecuaciones (31) y (32) la discrepancia puede calcularse mediante:

$$F(f_1,f_2;g) = T(f_1;g)+T(f_2;g)-T(f_1f_2;g), \tag{34}$$

donde

$$T(f;g) = \mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\left\{\sum_{\lambda=1}^{\infty} g(x)\frac{r(x)^{\lambda}}{m}\left(L(\lambda)+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}\log(f_{top}(1))\right)\right\}. \tag{35}$$

y la rama de $\log(f_{top}(1))$ se elige como la rama que hace válida la igualdad

$$f(x)^{-s} = x^{-ms} f_{top}(1)^{-s}(1+r(x))^{-s},$$

con $\log(x)$ y $\log(1+r(x))$ las ramas principales ($x \gg 0$).

En este caso $\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}$ se calcula en base a la expansión de Laurent de la función

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} g(x)\frac{r(x)^{\lambda}}{m}\left(L(\lambda)+\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}\log(f_{top}(1))\right)$$

en torno al punto $x=\infty$, ya que la serie (33) es una serie de potencias en $1/x$ convergente para $|x| \gg 0$.

El siguiente lema nos ayudará a reconocer una expresión sencilla para la serie $T(f;g)$.

Lema 7.6. *Si $y \in \mathbb{C}$ con $|y|<1$ entonces*

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} y^{\lambda}L(\lambda) = \frac{(\log(1+y))^2}{2},$$

donde log *es la rama principal del logaritmo.*

Demostración:

Sea $H(y)=\sum_{\lambda=2}^{\infty}L(\lambda)y^{\lambda}$. Entonces por la convergencia uniforme y absoluta en $|y|<1$ podemos derivar término a término y reordenar

$$
\begin{aligned}
H'(y) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} L(\lambda)\lambda y^{\lambda-1} &= \sum_{\lambda=2}^{\infty} (-1)^{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lambda-1}\right) y^{\lambda-1} \\
&= y - y^2\left(1+\frac{1}{2}\right) + y^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - y^4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \cdots \\
&= \left(y - y^2 + y^3 - y^4 + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(y^2 - y^3 + y^4 - \cdots\right) + \cdots \\
&= \frac{y}{1+y} - \frac{y^2}{2}\frac{1}{1+y} + \frac{y^3}{3}\frac{1}{1+y} - \frac{y^4}{4}\frac{1}{1+y} + \cdots \\
&= \frac{1}{1+y}\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots\right) = \frac{\log(1+y)}{1+y}.
\end{aligned}
$$

Integrando y notando que $H(0) = 0$ se obtiene $H(y) = \frac{(\log(1+y))^2}{2}$.

□

Usando el lema 7.6 vemos que para $x \geq \omega$ (de manera que $|r(x)| < 1/2$):

$$
\sum_{\lambda=1}^{\infty} r(x)^{\lambda} L(\lambda) = \frac{\left(\log(1+r(x))\right)^2}{2} = \frac{\log^2\left(\frac{f}{f_{top}}(x)\right)}{2},
$$

donde log es la rama principal del logaritmo. Similarmente obtenemos la fórmula

$$
\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda} r(x)^{\lambda} = \log\left(1 + r(x)\right) = \log\left(\frac{f(x)}{f_{top}(x)}\right).
$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (35) obtenemos

$$
T(f;g) = \mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\left\{\frac{g(x)}{m}\left[\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{f(x)}{f_{1_{top}}(x)}\right) + \log(f_{top}(1))\log\left(\frac{f(x)}{f_{top}(x)}\right)\right]\right\}.
$$

Por (34)

$$
\begin{aligned}
F(f_1, f_2; g) \quad &= \quad \mathrm{Coeff}_{x^{-1}}\left\{g(x)\left[\frac{\log^2\left(\frac{f_1(x)}{f_{1_{top}}(x)}\right)}{2m_1} + \frac{\log(f_{1_{top}}(1))}{m_1}\log\left(\frac{f_1(x)}{f_{1_{top}}(x)}\right)\right.\right. \\
&+ \quad \frac{\log^2\left(\frac{f_2(x)}{f_{2_{top}}(x)}\right)}{2m_2} + \frac{\log(f_{2_{top}}(1))}{m_2}\log\left(\frac{f_2(x)}{f_{2_{top}}(x)}\right) \\
&- \quad \left.\left.\frac{\log^2\left(\frac{f_1 f_2(x)}{(f_1 f_2)_{top}(x)}\right)}{2(m_1+m_2)} - \frac{\log((f_1 f_2)_{top}(1))}{m_1+m_2}\log\left(\frac{f_1 f_2(x)}{(f_1 f_2)_{top}(x)}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Recordar que, por la elección de ramas del logaritmo $\log(f_1 f_2) := \log(f_1) + \log(f_2)$, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\log(f_1 f_2) = m_1\log(x) + \log(f_{1_{top}}(1)) + \log(1 + r_1(x)) \\
+ m_2\log(x) + \log(f_{2_{top}}(1)) + \log(1 + r_2(x)).
\end{aligned}
$$

Es decir, $\log(f_{1_{top}}(1) f_{2_{top}}(1)) := \log(f_{1_{top}}(1)) + \log(f_{2_{top}}(1))$. Además, como la rama $\log\left(\frac{f_1 f_2(x)}{(f_1 f_2)_{top}(x)}\right)$ corresponde a la rama principal y $\frac{f}{f_{top}}(x) = 1 + r(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$, tenemos:

$$\log\left(\frac{f_1 f_2(x)}{(f_1 f_2)_{top}(x)}\right) = \log\left(\frac{f_1}{f_{1_{top}}(x)}\right) + \log\left(\frac{f_2(x)}{f_{2_{top}}(x)}\right). \tag{37}$$

para $x \gg 0$.

Definamos, para abreviar,

$$\begin{aligned} h_i(x) &:= \frac{f_i(x)}{f_{i_{top}}(x)} \qquad a_i := f_{i_{top}}(1) \qquad (i = 1, 2). \\ \widetilde{h_1}(x) &:= h_1(x)^{m_2} \qquad \widetilde{h_2}(x) := h_2(x)^{m_1} \qquad \widetilde{a_1} := a_1^{m_2} \qquad \widetilde{a_2} := a_2^{m_1} \end{aligned} \tag{38}$$

Reemplazando las funciones h_i en la ecuación (36), se concluye que

$$\begin{aligned} F(f_1, f_2; g) = \operatorname{Coeff}_{x^{-1}} \Bigg\{ g(x) \Bigg[& \frac{1}{2m_1} \log^2(h_1(x)) + \frac{\log(a_1)}{m_1} \log(h_1(x)) + \\ & + \frac{1}{2m_2} \log^2(h_2(x)) + \frac{\log(a_2)}{m_2} \log(h_2(x)) \\ & - \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \log^2(h_1(x) h_2(x)) - \frac{\log(a_1) + \log(a_2)}{m_1 + m_2} \log(h_1(x) h_2(x)) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Definimos las ramas del logaritmo como

$$\begin{aligned} \log(\widetilde{h_1}(x)) &:= m_2 \log(h_1(x)) \\ \log(\widetilde{h_2}(x)) &:= m_1 \log(h_2(x)) \\ \log(\widetilde{a_1}) &:= m_2 \log(a_1) \\ \log(\widetilde{a_2}) &:= m_1 \log(a_2) \end{aligned} \tag{39}$$

Notamos que las ramas de $\log \widetilde{h_i}$ siguen siendo las ramas principales cuando $x \to \infty$.

Usando las funciones definidas en (38), con la elección de ramas como en (37) y (39) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& F(f_1, f_2; g) = \\
= \; & \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \Big\{ g(x) \Big[\frac{1}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \log^2(\overbrace{h_1(x)^{m_2}}^{\widetilde{h_1(x)}}) + \frac{1}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \log^2(\overbrace{h_2(x)^{m_1}}^{\widetilde{h_2(x)}}) + \\
& + \frac{1}{m_1m_2(m_1+m_2)} \log(h_1(x)^{m_2}) \log(\overbrace{a_1^{m_2}}^{\widetilde{a_1}}) + \frac{1}{m_1m_2(m_1+m_2)} \log(h_2(x)^{m_1}) \log(\overbrace{a_2^{m_1}}^{\widetilde{a_2}}) \\
& - \frac{1}{m_1m_2(m_1+m_2)} \Big\{ \log(h_2(x)^{m_1}) \log(a_1^{m_2}) + \log(h_2(x)^{m_1}) \log(h_1(x)^{m_2}) + \\
& + \log(h_1(x)^{m_2}) \log(a_2^{m_1}) \Big\} \Big] \Big\} \\
= \; & \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \Big\{ \frac{g(x)}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \Big[\log^2(\widetilde{h_1(x)}) + \log^2(\widetilde{h_2(x)}) + 2\log(\widetilde{h_1(x)}) \log(\widetilde{a_1}) + \\
& +2\log(\widetilde{h_2(x)}) \log(\widetilde{a_2}) - 2\log(\widetilde{h_2(x)}) \log(\widetilde{a_1}) - 2\log(\widetilde{h_2(x)}) \log(\widetilde{h_1(x)}) - 2\log(\widetilde{h_1(x)}) \log(\widetilde{a_2}) \Big] \Big\} \\
= \; & \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \Big\{ \frac{g(x)}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \Big[\big(\log(\widetilde{h_1(x)}) - \log(\widetilde{h_2(x)}) + \log(\widetilde{a_1}) - \log(\widetilde{a_2}) \big)^2 \\
& - \big(\log(\widetilde{a_1}) - \log(\widetilde{a_2}) \big)^2 \Big] \Big\}
\end{aligned}
$$

Como $g(x)\big(\log(\widetilde{a_1}) - \log(\widetilde{a_2})\big)^2$ no posee potencias negativas de x se tiene

$$
\begin{aligned}
F(f_1, f_2; g) &= \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \frac{g(x)}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \left[\log^2 \left(\frac{\widetilde{h_1(x)}}{\widetilde{h_2(x)}} \frac{\widetilde{a_1}}{\widetilde{a_2}} \right) \right] \\
&= \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \frac{g(x)}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \left[\log^2 \left(\frac{\left(\frac{f_1(x)}{f_{1_{top}}(x)} \right)^{m_2}}{\left(\frac{f_2(x)}{f_{2_{top}}(x)} \right)^{m_1}} \frac{{a_1}^{m_2}}{{a_2}^{m_1}} \right) \right]
\end{aligned}
$$

pero $f_{i_{top}}(x) = x^{m_i} f_{i_{top}}(1) = x^{m_i} a_i$, $(i = 1, 2)$ luego

$$
F(f_1, f_2; g) = \frac{1}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \left[g(x) \log^2 \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) \right],
$$

donde las ramas del log se eligen de manera que

$$
\lim_{x\to\infty} \log^2 \left(\frac{\widetilde{h_1(x)}}{\widetilde{h_2(x)}} \frac{\widetilde{a_1}}{\widetilde{a_2}} \right) = \big(m_2 \log\big(f_{1_{top}}(1)\big) - m_1 \log\big(f_{2_{top}}(1)\big) \big)^2, \tag{40}
$$

$$
\lim_{x\to\infty} \log^2 \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) = \left(m_2 \log(a_1) - m_1 \log(a_2) \right)^2. \tag{41}
$$

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 7.1. *Sean $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x]$ de grados m_1, m_2 respectivamente y sea $g(x) \in \mathbb{C}[x]$. Entonces la discrepancia entre f_1 y f_2 está dada por:*

$$F(f_1, f_2; g) = \frac{1}{2m_1m_2(m_1+m_2)} \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \left[g(x) \log^2 \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) \right]$$

donde log *es la rama del logaritmo que verifica*

$$\lim_{x \to \infty} \log \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) = m_2 \log(f_{1_{top}}(1)) - m_1 \log(f_{2_{top}}(1))$$

y $\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}$ *se calcula mediante la expansión de Taylor en la variable $1/x$ en torno a $x = 0$.*

□

Corolario 7.1. ***(Fórmula de reducción a grados iguales)*** *Sean $f_1, f_2, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios tales que f_1, f_2 satisfacen la Hipótesis de Mahler en una variable. Si $\deg(f_1) = m_1$ y $\deg(f_2) = m_2$ entonces:*

$$F(f_1, f_2; g) = \frac{2}{m_1+m_2} F(f_1^{m_2}, f_2^{m_1}; g).$$

donde se eligen las ramas de manera que $\log(f_1^{m_2}) := m_2 \log(f_1)$, $\log(f_2^{m_1}) := m_1 \log(f_2)$.

Demostración:

Por la fórmula del teorema 7.1:

(42)
$$F(f_1^{m_2}, f_2^{m_1}; g) = \frac{\mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \left[g(x) \log^2 \left(\frac{(f_1(x)^{m_2})^{m_1m_2}}{(f_2(x)^{m_1})^{m_1m_2}} \right) \right]}{2(m_1m_2)(m_1m_2)(m_1m_2+m_1m_2)}$$

donde la rama del log corresponde a la que verifica

(43)
$$\lim_{x \to \infty} \log \left(\frac{(f_1(x)^{m_2})^{m_1m_2}}{(f_2(x)^{m_1})^{m_1m_2}} \right) = m_1m_2 \left(m_2 \log(f_{1_{top}}(1)) - m_1 \log(f_{2_{top}}(1)) \right).$$

Si definimos la rama

(44)
$$\log \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) := \frac{1}{m_1m_2} \log \left(\frac{(f_1(x)^{m_2})^{m_1m_2}}{(f_2(x)^{m_1})^{m_1m_2}} \right),$$

donde la rama del lado derecho está dada por (43), entonces

(45)
$$\lim_{x \to \infty} \log \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) = m_2 \log(f_{1_{top}}(1)) - m_1 \log(f_{2_{top}}(1)),$$

por (42) y (44)

$$\begin{aligned} F(f_1^{m_2}, f_2^{m_1}; g) &= \frac{1}{4(m_1m_2)^3} \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \left[g(x)(m_1m_2)^2 \log^2 \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4(m_1m_2)} \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \left[g(x) \log^2 \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) \right] \\ &= \frac{m_1+m_2}{2} \frac{1}{2(m_1m_2)(m_1+m_2)} \mathrm{Coeff}_{x^{-1}} \left[g(x) \log^2 \left(\frac{f_1(x)^{m_2}}{f_2(x)^{m_1}} \right) \right] \\ &= \frac{m_1+m_2}{2} F(f_1, f_2; g). \end{aligned}$$

$\square$

7.2. **Discrepancia Integral Múltiple en una variable.** En el siguiente teorema probamos nuestro resultado principal en una variable, es decir, que la discrepancia integral de una colección de n polinomios en $\mathbb{C}[x]$ puede expresarse como una combinación lineal de discrepancias de polinomios tomados de a pares. Comenzaremos con el siguiente lema.

Lema 7.7. *Sean $f_1, \ldots, f_N \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en una variable de grados respectivos $m_1, \ldots, m_N$ cada uno de los cuales satisface la Hipótesis de Mahler, $N \geq 3$, $g \in \mathbb{C}[x]$ arbitrario. Entonces:*

$$\sum_{j=2}^{N-1} F((f_1 f_2)^{m_{j+1}}, f_{j+1}^{m_1+m_2}; g) + \sum_{3\leq i<j\leq N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g) + \frac{m_1 + \cdots + m_N}{2} F(f_1, f_2; g) = \sum_{1\leq i<j\leq N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g)$$

cuando las ramas del $\log$ *se eligen de la forma* $\log(f_i^M) := M\log(f_i)$ *y* $\log(f_1 f_2) := \log(f_1) + \log(f_2)$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, N\}$ *y todo* $M \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Usaremos inducción sobre $N \geq 3$. Notamos que:

$$\sum_{1\leq i<j\leq N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g) - \sum_{3\leq i<j\leq N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g) = \sum_{j=2}^{N} F(f_1^{m_j}, f_j^{m_1}; g) + \sum_{j=3}^{N} F(f_2^{m_j}, f_j^{m_2}; g).$$

Por lo tanto, basta probar

$$\sum_{j=2}^{N-1} F((f_1 f_2)^{m_{j+1}}, f_{j+1}^{m_1+m_2}; g) + \frac{m_1 + \cdots + m_N}{2} F(f_1, f_2; g) = \sum_{j=2}^{N} F(f_1^{m_j}, f_j^{m_1}; g) + \sum_{j=3}^{N} F(f_2^{m_j}, f_j^{m_2}; g) \tag{46}$$

Inducción.

(1) $N = 3$.

Para $N = 3$ la igualdad (46) se reduce a

$$F((f_1 f_2)^{m_3}, f_3^{m_1+m_2}; g) + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} F(f_1, f_2; g) = F(f_1^{m_2}, f_2^{m_1}; g) + F(f_1^{m_3}, f_3^{m_1}; g) + F(f_2^{m_3}, f_3^{m_2}; g).$$

Es decir, por el corolario 7.1, debemos probar

$$(m_1 + m_2 + m_3) F(f_1 f_2, f_3; g) + m_3 F(f_1, f_2; g) = (m_1 + m_3) F(f_1, f_3) + (m_2 + m_3) F(f_2, f_3). \tag{47}$$

Por la elección de ramas del logaritmo tenemos

$$\log\left(\frac{(f_1f_2)^{m_3}}{f_3^{m_1+m_2}}\right) = m_3\log f_1 + m_3\log f_2 - (m_1+m_2)\log f_3,$$
$$\log\left(\frac{f_1^{m_2}}{f_2^{m_1}}\right) = m_2\log f_1 - m_1\log f_2.$$

Calculemos, en vista del teorema 7.1,

$$\frac{m_1+m_2+m_3}{2(m_1+m_2)m_3(m_1+m_2+m_3)}\log^2\left(\frac{(f_1f_2)^{m_3}}{f_3^{m_1+m_2}}\right) + m_3\frac{1}{2(m_1m_2)(m_1+m_2)}\log^2\left(\frac{f_1^{m_2}}{f_2^{m_1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(m_1+m_2)}\left(\frac{1}{m_3}\Big(m_3(\log(f_1)+\log(f_2)) - (m_1+m_2)\log(f_3)\Big)^2 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{m_3}{m_1m_2}\Big(m_2\log(f_1) - m_1\log(f_2)\Big)^2\right)\\
&= \frac{m_1^2m_2\log^2(f_3) + m_1m_3^2\log^2(f_2) + m_1m_2^2\log^2(f_3) + m_2m_3^2\log^2(f_1)}{2m_1m_2m_3}\\
&\quad - \log(f_2)\log(f_3) - \log(f_1)\log(f_3)\\
&= \frac{1}{2m_1m_3}\left((m_3\log(f_1) - m_1\log(f_3))^2\right) + \frac{1}{2m_2m_3}\left((m_3\log(f_2) - m_2\log(f_3))^2\right)\\
&= \frac{m_1+m_3}{2(m_1m_3)(m_1+m_3)}\log^2\left(\frac{f_1^{m_3}}{f_3^{m_1}}\right) + \frac{m_2+m_3}{2(m_2m_3)(m_2+m_3)}\log^2\left(\frac{f_2^{m_3}}{f_3^{m_2}}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando por el polinomio $g(x)$ y aplicando $\mathrm{Coeff}_{x^{-1}}$ a esta igualdad obtenemos la ecuación buscada. Esto prueba el caso $N = 3$.

(2) Hipótesis de Inducción: Suponemos que la ecuación

$$\sum_{j=2}^{N-1} F((f_1f_2)^{m_{j+1}}, f_{j+1}^{m_1+m_2}; g) + \frac{m_1+\cdots+m_N}{2}F(f_1,f_2;g) = \sum_{j=2}^{N} F(f_1^{m_j}, f_j^{m_1}; g) + \sum_{j=3}^{N} F(f_2^{m_j}, f_j^{m_2}; g). \tag{48}$$

es válida para N y la probamos para $N+1$. Notamos que cuando N aumenta en uno, los términos adicionales que aparecen a cada lado de la ecuación (48) son

$$F((f_1f_2)^{m_{N+1}}, f_{N+1}^{m_1+m_2}; g) + \frac{m_{N+1}}{2}F(f_1,f_2;g) = F(f_1^{m_{N+1}}, f_{m_{N+1}}^{m_1}; g) + F(f_2^{m_{N+1}}, f_{N+1}^{m_2}; g)$$

Esta igualdad es válida por el Corolario 7.1 y (47), cambiando f_3 por f_{N+1}. Esto completa la inducción.

□

Teorema 7.2. *Sean, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en una variable de grados respectivos $m_1, m_2, \ldots, m_n$ cada uno de los cuales satisface la Hipótesis de Mahler y sea $g \in \mathbb{C}[x]$ arbitrario. Entonces:*

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_n; g) \quad = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{m_i + m_j}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} F(f_i, f_j; g). \tag{49}$$

Demostración:

Procederemos por inducción sobre n.

Inducción

(1) $n = 2$ es trivial.

(2) *Hipótesis de Inducción*: Suponemos que la fórmula es válida para $n = N-1 \geq 2$. Usaremos la fórmula de reducción (9) para la discrepancia integral F

$$F(f_1, f_2, .., f_N; g) = F(f_1 f_2, f_3, \ldots, f_N; g) + F(f_1, f_2; g) \tag{50}$$

Por el corolario 7.1 y la hipótesis de inducción sabemos que

$$F(\underbrace{f_1 f_2, f_3, \ldots, f_N}_{N-1 \text{ polinomios}}; g) = \frac{2\left[\sum_{j=2}^{N-1} F((f_1 f_2)^{m_{j+1}}, f_{j+1}^{m_1+m_2}; g) + \sum_{3\le i<j\le N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g)\right]}{(m_1 + m_2) + \cdots + m_N}.$$

Reemplazando esto en la fórmula de reducción (50)

$$\begin{aligned} F(f_1, f_2, \ldots, f_N; g) \quad &= \quad \frac{2}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \left[\sum_{j=2}^{N-1} F((f_1 f_2)^{m_{j+1}}, f_{j+1}^{m_1+m_2}; g) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{3\le i<j\le N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g) + \frac{m_1 + \cdots + m_N}{2} F(f_1, f_2; g) \right] \end{aligned}$$

Luego, por el lema 7.7,

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_N; g) = \frac{2}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \sum_{1\le i<j\le N} F(f_i^{m_j}, f_j^{m_i}; g).$$

$\square$

8. Polinomios en p variables

Sean $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ polinomios en p variables. Para $\mathrm{Re}(s) > \frac{\deg(g)+p}{\deg(f)}$, definimos

$$Z(s, f; g) := \int_{x\in\mathbb{R}_+^p} g(x)(f(x))^{-s}\, dx,$$

que pronto veremos es convergente. En Z haremos el cambio a coordenadas cúbicas (ρ, σ) en $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ dado por

$$\begin{aligned} \rho(x) \quad &:= \quad Max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}, &(51)\\ \sigma(x) \quad &:= \quad \frac{x}{\rho(x)}, &(52) \end{aligned}$$

donde $\rho \in [0, \infty)$ y $\sigma \in \partial C_+^p := \{x \in \mathbb{R}_+^p : \rho(x) = 1\}$ es una parte de la frontera del hiper-cubo unitario.

Sobre el subconjunto de $\mathbb{R}_+^p$ donde $x_1 > x_j$ para todo $j \neq 1$, la matriz Jacobiana J (de orden $p \times p$) para esta transformación está dada por:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \sigma_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & \rho & 0 \\ \sigma_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

ya que $\frac{\partial x_1}{\partial \rho} = 1$, $\frac{\partial x_1}{\partial \sigma} = 0$, y si $j \neq 1$ $\frac{\partial x_j}{\partial \rho} = \sigma_j$, $\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_j} = \rho$.

El determinante de J es en este caso

$$|\det(J)| = \left| \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \right| = \rho^{p-1}.$$

El mismo resultado vale si $x_i = \rho$ para cualquier i. Por lo tanto, la integral Z en coordenadas cúbicas está dada por

$$Z(s, f; g) = \int_{\partial C_+^p} \int_{\rho=0}^{\infty} g(\rho\sigma)(f(\rho\sigma))^{-s} \rho^{p-1} \, d\rho \, d\sigma, \tag{53}$$

donde $d\sigma$ corresponde a la medida de Lebesgue en dimensión $p-1$ sobre la frontera del cubo unitario del primer octante en $\mathbb{R}^p$. Observar que al utilizar coordenadas cúbicas en vez de esféricas obtenemos un Jacobiano mucho más sencillo, ya que $d\sigma$ no involucra funciones trigonométricas.

Definición 8.1. *Dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, .., x_p]$ de grado m, sea $f(\rho\sigma)$ el polinomio f expresado en coordenadas cúbicas (ρ, σ), es decir*

$$f(\rho\sigma) = a_m(\sigma)\rho^m + a_{m-1}(\sigma)\rho^{m-1} + \cdots + a_0(\sigma).$$

donde cada $a_j(\sigma)$, $j = 0, 1, 2, .., m$ es un polinomio en p variables $(\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_p) \in \partial C_+^p$. Para cada $\sigma \in \partial C_+^p$ definimos el polinomio $f_\sigma(\rho) \in \mathbb{C}[\rho]$ en una variable asociado a f

$$f_\sigma(\rho) = a_m(\sigma)\rho^m + a_{m-1}(\sigma)\rho^{m-1} + \cdots + a_0(\sigma), \qquad (a_m(\sigma) = f_{top}(\sigma)).$$

□

Usando la definición anterior y la ecuación (53)

$$Z(s, f; g) = \int_{\partial C_+^p} Z(s, f_\sigma(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho)) \, d\sigma. \tag{54}$$

Notemos que si $f(\rho\sigma)$ satisface la Hipótesis de Mahler en $\mathbb{R}_+^p$, entonces $f_\sigma(\rho)$ también satisface la Hipótesis de Mahler en $\mathbb{R}_+$, ya que si $f_\sigma(\rho) = 0$ para algún $\sigma \in \partial C_+^p$ y $\rho \geq 0$, entonces $f(\rho\sigma) = 0$ en $x = \rho\sigma \in \mathbb{R}_+^p$. Además como f_{top} no se anula en $\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$, f_σ es no constante para todo $\sigma \in \partial C_+^p$. De hecho: $\deg(f_\sigma) = \deg(f)$, para todo $\sigma \in \partial C_+^p$.

8.1. **Continuación Analítica de $Z(s,f;g)$ a los enteros negativos.**

Teorema 8.1. *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x_1, .., x_p]$ polinomios en p variables con f verificando la Hipótesis de Mahler y $N \geq 0$ un entero. Entonces la continuación analítica de la* integral zeta *en $s = -N$ está dada por:*

$$Z(-N, f; g) = -\frac{1}{m} \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}} \left\{ \int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma) \left(f(\rho\sigma)\right)^N \log\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right) d\sigma \right\},$$

donde $m = \deg(f)$ y $\log$ es la rama principal del logaritmo.

Demostración:

Por la fórmula obtenida en [FP, pág. 9] sabemos:

$$Z(-N, f; g) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda = N + \lceil p/m \rceil}^{q+p+Nm} \frac{(-1)^{\lambda - N}}{\lambda - N} \frac{1}{\binom{\lambda}{N}} \int_{\partial C_+^p} B_{\lambda,N}(\sigma) f_{top}(\sigma)^N d\sigma, \tag{55}$$

donde $m = deg(f)$, $q = deg(g)$ y las funciones $B_{\lambda,N}(\sigma)$, $r_f(\rho\sigma)$ se definen mediante:

$$\begin{aligned} B_{\lambda,N}(\sigma) &= \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}} \left\{ g(\rho\sigma) r_f(\rho\sigma)^\lambda \right\} \\ r_f(\rho\sigma) &= \frac{a_{m-1}(\sigma)}{\rho f_{top}(\sigma)} + \frac{a_{m-2}(\sigma)}{\rho^2 f_{top}(\sigma)} + \cdots + \frac{a_{(0)}}{\rho^m f_{top}(\sigma)}, \quad a_{(j)}(\sigma) = f_{(j)}(\sigma). \end{aligned}$$

$\lceil x \rceil$ es el menor entero $\geq x$ y $a_j(\sigma)$ es el coeficiente de ρ^j en $f_\sigma(\rho)$, $(a_m(\sigma) = f_{top}(\sigma))$. Empezaremos por probar que la suma finita que aparece en la ecuación (55) puede extenderse a una serie convergente. Probaremos que:

$$B_{\lambda,N}(\sigma) = 0 \quad \text{si } \lambda \in \{0, 1, 2, \ldots, N + \lceil \tfrac{p}{m} \rceil - 1\} \cup \{p + q + 1 + Nm, p + q + 2 + Nm, \ldots\}.$$

Para esto, notemos que en la expresión

$$g(\rho\sigma) r_f(\rho\sigma)^\lambda = \left(\rho^q g_q(\sigma) + \cdots + g_0(\sigma)\right) \left(\frac{a_{m-1}(\sigma)}{\rho f_{top}(\sigma)} + \cdots + \frac{a_0(\sigma)}{\rho^m f_{top}(\sigma)}\right)^\lambda$$

podemos ordenar las potencias de ρ de manera decreciente:

$$g(\rho\sigma) r_f(\rho\sigma)^\lambda = c_{q-\lambda}\, \rho^{q-\lambda} + \cdots + c_{-m\lambda}\, \rho^{-m\lambda}$$

En particular $g(\rho\sigma) r_f(\rho\sigma)^\lambda$ no posee potencias de ρ mayores que $q - \lambda$, o menores que $-m\lambda$. Por lo tanto, si $\lambda \geq q + p + 1 + Nm$, entonces no hay potencias de ρ mayores que $q - \lambda < -p - Nm$. Si $0 \leq \lambda \leq N + \lceil p/m \rceil - 1$, entonces como $\lceil p/m \rceil < p/m + 1$ se tiene $-mN - p < -m\lambda \leq 0$, es decir, no hay potencias de ρ inferiores a $-mN - p$. Por lo tanto:

$$B_{\lambda,N}(\sigma) \equiv 0$$

si λ no pertenece al conjunto: $\{N + \lceil p/m \rceil, \ldots, q + p + Nm\}$.

En conclusión, usando la ecuación (55), podemos expresar la continuación analítica de $Z(s,f;g)$ en $s = -N$ mediante

$$Z(-N, f; g) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda = N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda - N}}{\lambda - N} \frac{1}{\binom{\lambda}{N}} \int_{\partial C_+^p} B_{\lambda,N}(\sigma) f_{top}(\sigma)^N d\sigma$$

Reemplazando la definición de $B_{\lambda,N}(\sigma)$,

$$\begin{aligned}
Z(-N,f;g) &= \frac{1}{m}\int_{\partial C_+^p}\sum_{\lambda=N+1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N}\frac{1}{\binom{\lambda}{N}}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma)r_f(\rho\sigma)^{\lambda}\right)\right)f_{top}(\sigma)^N d\sigma \\
&= \frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)\sum_{\lambda=N+1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N}\frac{1}{\binom{\lambda}{N}}r_f(\rho\sigma)^{\lambda}\right)f_{top}(\sigma)^N d\sigma\right\} \\
&= \frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{l}}{l}\frac{1}{\binom{l+N}{N}}r_f(\rho\sigma)^{l+N}\right)f_{top}(\sigma)^N d\sigma\right\}
\end{aligned}$$

Queremos obtener una expresión sencilla para:

$$f_N(r) := \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\frac{r^{N+l}}{\binom{l+N}{N}}, \qquad |r|<1$$

Derivando término a término la serie que define f_N obtenemos

$$\begin{aligned}
f_N'(r) &= N!\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l(N+l)r^{N+l-1}}{l(l+1)\cdots(l+N)} \\
&= N\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{r^{N-1+l}}{\binom{l+N-1}{N-1}} = Nf_{N-1}(r),
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones f_N están únicamente determinadas por las condiciones:

$$f_N'(r) = Nf_{N-1}(r) \tag{56}$$
$$f_N(0) = 0 \tag{57}$$
$$f_0(r) = -\log(1+r) \tag{58}$$

Se prueba por inducción que la solución de estas ecuaciones recursivas es

$$f_N(r) = -(1+r)^N\log(1+r) + \left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\right)\left((1+r)^N-1\right) - \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}r^k\left(\sum_{j=1}^{N-k}\frac{1}{j}\right). \tag{59}$$

En nuestro caso $r = r_f(\rho\sigma)$, por lo tanto $1 + r_f(\rho\sigma) = \frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)$. Definir $H(l) := \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}$. Reemplazando (59) en $Z(-N,f;g)$:

$$\begin{aligned}
Z(-N,f;g) = \frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\Bigg\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)\Bigg[-\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)^N\log\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)+ \\
+H(N)\left(\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)^N-1\right) - \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)-1\right)^k H(N-k)\Bigg]f_{top}(\sigma)^N d\sigma\Bigg\}
\end{aligned}$$

Como f_{top} es un polinomio homogéneo de grado $m = \deg f$, se tiene $f_{top}(\rho\sigma) = \rho^m f_{top}(\sigma)$, por lo tanto, de la fórmula anterior

$$Z(-N,f;g)=\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\Bigg\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)\Bigg[-\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)^N \log\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)+$$

$$+H(N)\left(\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)^N-1\right)-\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)-1\right)^k H(N-k)\Bigg]f_{top}(\rho\sigma)^N d\sigma\Bigg\}$$

Notamos que para todo $k\in\{1,\dots,N\}$ la expresiones

$$\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)-1\right)^k f_{top}(\rho\sigma)^N$$

y

$$\left(\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)^N-1\right)f_{top}(\rho\sigma)^N=f(\rho\sigma)^N-f_{top}(\rho\sigma)^N$$

son un polinomio en la variable ρ, por lo tanto, podemos eliminar estos términos al calcular $\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}$,

$$\begin{aligned}
Z(-N,f;g) &= -\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\Bigg\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)\Bigg[\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)^N \log\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)\Bigg]f_{top}(\rho\sigma)^N d\sigma\Bigg\}\\
&= -\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\Bigg\{\int_{\partial C_+^p} g(\rho\sigma)f(\rho\sigma)^N \log\left(\frac{f}{f_{top}}(\rho\sigma)\right)d\sigma\Bigg\}.
\end{aligned}$$

□

8.2. **Discrepancia Integral Múltiple.**

Lema 8.1. *Sea X espacio topológico compacto, μ una medida de Borel finita, positiva y sea $\mathcal{D}$ subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si: $H:\mathcal{D}\times X\to\mathbb{C}$ es continua y la función $s\mapsto H(s,x)$ es analítica en $s\in\mathcal{D}$ para todo $x\in X$, entonces la función $g:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ definida por*

$$g(s)=\int_X H(s,x)\,d\mu(x)$$

es analítica en $\mathcal{D}$ y su derivada está dada por:

$$g'(s)=\int_X \frac{\partial}{\partial s}\left(H(s,x)\right)\,d\mu(x).$$

Demostración: Ver Anexo, página 36.

□

El siguiente lema se deduce directamente de las estimaciones uniformes hechas por Mahler [Ma].

Lema 8.2. *Sea $\mathcal{M}_{m,p}$ el subespacio (abierto por el lema 3.1) de coeficientes de los polinomios de grado m en p variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler. Sean $f\in\mathcal{M}_{m,p}$ y $g\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_p]$. Entonces existe $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ vecindad de $s=0$ tal que la aplicación:*

$$\begin{array}{ll}\mathcal{D}\times\partial C_+^p & \to\mathbb{C}\\ (s,\sigma) & \mapsto Z(s,f_\sigma;g_\sigma)\end{array}$$

es continua y analítica en cada variable. Lo mismo es válido para $(s,\sigma)\mapsto\zeta(s,f_\sigma;g_\sigma)$

□

El siguiente corolario muestra que no se pierde generalidad al estudiar discrepancias integrales en una sola variable.

Corolario 8.1. *Sean $f_1, \dots, f_n, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p]$ polinomios en p variables con $\deg(f_i) = m_i$, $(i = 1, \dots, n)$. Entonces si $F(f_{1_\sigma}(\rho), \dots, f_{n_\sigma}(\rho); g_\sigma(\rho)\rho^{p-1})$ denota la discrepancia unidimensional respecto a ρ, es decir, considerando $\sigma \in \partial C_+^p$ como constante, la discrepancia en p variables $F(f_1, \dots, f_n; g)$ puede calcularse mediante*

$$F(f_1, \dots, f_n; g) = \int_{\partial C_+^p} F(f_{1_\sigma}(\rho), \dots, f_{n_\sigma}(\rho); g_\sigma(\rho)\rho^{p-1})\, d\sigma.$$

donde la discrepancia $F(f_{1_\sigma}(\rho), \dots, f_{n_\sigma}(\rho); g_\sigma(\rho)\rho^{p-1})$ se calcula como discrepancia en una sola variable ρ, considerando σ constante.

Demostración:

Por la ecuación (54) sabemos que:

$$(60) \quad Z(s, f_i; g) = \int_{\partial C_+^p} Z(s, f_{i_\sigma}(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho))\, d\sigma, \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > \frac{p + \deg(g_\sigma)}{\deg(f_{i_\sigma})} \qquad i = 1, \dots, n \right)$$

Por la Hipótesis de Mahler para f_i, $\deg(f_{i_\sigma}) = m_i = \deg(f_i)$ no depende de σ porque $f_{i_{top}}(\sigma)$ nunca se anula. Además como $\sigma \in \partial C_+^p \subseteq R_+^p$, si f_i satisface la Hipótesis de Mahler, también la satisface f_{i_σ} para todo i. Por lo tanto $Z(s, f_{i_\sigma}(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho))$ existe en el semi-plano $\mathrm{Re}(s) > \frac{p+\deg(g)}{\deg(f_i)}$ y posee continuación analítica a $s = 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Por la ecuación (60) se deduce que

$$F(f_1, \dots, f_n; g) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(\int_{\partial C_+^p} \sum_{i=1}^{n} \big(Z(s, f_{i_\sigma}(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho)) \big) - Z\big(s, \prod_{j=1}^{n} f_{j_\sigma}(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho)\big)\, d\sigma \right)$$

Sabemos que los coeficientes del polinomio (en una variable) f_σ dependen polinomialmente de σ, por lo tanto, por el lema 8.2, la función

$$(s, \sigma) \mapsto (s, f_\sigma, g_\sigma) \mapsto Z(s, f_\sigma; g_\sigma)$$

es contínua en (s, σ). Se concluye entonces que la función

$$H(s, \sigma) := \sum_{i=1}^{n} \big(Z(s, f_{i_\sigma}(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho)) \big) - Z\big(s, \prod_{j=1}^{n} f_{j_\sigma}(\rho), \rho^{p-1} g_\sigma(\rho)\big)$$

es continua en (s, σ) y analítica en una vecindad de $s = 0$. Finalmente, para todo $\sigma \in \partial C_+^p$

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} H(s, \sigma) = F(f_{1_\sigma}(\rho), \dots, f_{n_\sigma}(\rho); g_\sigma(\rho)\rho^{p-1}).$$

Por lo tanto, por el Lema 8.1, obtenemos lo buscado.

□

Corolario 8.2. *Sean $f_1, f_2, \dots, f_n, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p]$ polinomios en $p \geq 1$ variables tales que todos los f_i satisfacen la Hipótesis de Mahler. Si $\deg(f_i) = m_i$ $(i = 1, \dots, n)$ entonces*

$$F(f_1, \dots, f_n; g) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i + m_j}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} F(f_i, f_j; g).$$

Demostración:

Aplicar $\int_{\partial C_+^p} d\sigma$ a la fórmula en una variable del Teorema 7.2 y luego usar el Corolario 8.1. $\square$

8.3. **Discrepancia Múltiple de Series.** El siguiente es nuestro resultado principal.

Teorema 8.2. *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_p]$ polinomios en p variables tales que todos los f_i satisfacen la hipótesis de Mahler. Sea $D(f_1, \ldots, f_n; g)$ la discrepancia de series.*

Si $\deg(f_i) = m_i$ $i = 1, \ldots, n$ entonces $D(f_1, \ldots, f_n; g)$ puede calcularse mediante una combinación lineal de discrepancias de pares usando la fórmula

$$D(f_1, \ldots, f_n; g) = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_i + m_j}{m_1 + \cdots + m_n} D(f_i, f_j; g)$$

.

Demostración:

Sea $\omega_{i,j} = \frac{m_i + m_j}{m_1 + .. + m_n}$. Por el corolario 8.2 sabemos que para las discrepancias integrales se tiene

$$F(f_1, \ldots, f_n; g) = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_i + m_j}{m_1 + .. + m_n} F(f_i, f_j; g) = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j} \, F(f_i, f_j; g).$$

Por el corolario 3.1 existe $U \subseteq \mathbb{C}^p$ vecindad de cero tal que las traslaciones $f_i^{[a]}$ $(i = 1, \ldots, n)$ satisfacen la Hipótesis de Mahler para todo $a \in U$. Además por el teorema 5.1 se tiene

$$\begin{aligned}
Z(s, f_i^{[a]}; g^{[a]}) &= \int_{[0,1]^p} \zeta(s, f_i^{[a+t]}; g^{[a+t]}) \, dt, \qquad (i = 1, \ldots, n) \\
Z(s, (f_1 \cdots f_n)^{[a]}; g^{[a]}) &= Z(s, f_1^{[a]} \cdots f_n^{[a]}; g^{[a]}) = \int_{[0,1]^p} \zeta(s, (f_1 \cdots f_n)^{[a+t]}; g^{[a+t]}) \, dt \\
&= \int_{[0,1]^p} \zeta(s, f_1^{[a+t]} \cdots f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]}) \, dt.
\end{aligned}$$

Puede probarse que la función $(s, \mathrm{Coeff}(f), \mathrm{Coeff}(g)) \mapsto \zeta(s, f; g)$ es continua y de hecho analítica en las tres variables sobre su dominio de definición (Ver el lema 8.2 y el trabajo de Mahler [Ma])[3]. Por lo tanto, por el Lema 8.1,

$$F(f_1^{[a]}, \ldots, f_n^{[a]}; g^{[a]}) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(Z(s, f_1^{[a]}; g^{[a]}) + \cdots + Z(s, f_n^{[a]}; g^{[a]}) - Z(s, f_1^{[a]} .. f_n^{[a]}; g^{[a]}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(\int_{[0,1]^p} \zeta(s, f_1^{[a+t]}; g^{[a+t]}) + \cdots + \zeta(s, f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]}) - \zeta(s, f_1^{[a+t]} \cdots f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]}) \, dt \right) \\
&= \int_{[0,1]^p} \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(\zeta(s, f_1^{[a+t]}; g^{[a+t]}) + \cdots + \zeta(s, f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]}) - \zeta(s, f_1^{[a+t]} \cdots f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]}) \right) dt \\
&= \int_{[0,1]^p} D(f_1^{[a+t]}, \ldots, f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]}) \, dt.
\end{aligned}$$

Se concluye que las discrepancias de series $D(f_1, \ldots, f_n; g)$ y de integrales $F(f_1, \ldots, f_n; g)$ están relacionadas por la siguiente fórmula integral:

[3] Más precisamente, si $f_0 \in \mathcal{M}_{m,p}$, existe una vecindad U de f_0 en $\mathcal{M}_{m,p}$ tal que para $f \in U$, $x \in [0, \infty)^p$ se puede definir una rama de $\log(f(x))$. Para $f \in U$, $t \in [0, \infty)^p$ y s cerca de cero, la función $(s, f, g, t) \mapsto Z(s, f^{[t]}; g^{[t]})$ es analítica.

$$P(a) := F(f_1^{[a]}, \dots, f_n^{[a]}; g^{[a]}) = \int_{[0,1]^p} D(f_1^{[a+t]}, \dots, f_n^{[a+t]}; g^{[a+t]})\, dt =: \int_{[0,1]^p} Q(a+t)\, dt \tag{61}$$

Por [DF, pág. 3], las funciones P y Q son polinomios en p variables $a = (a_1, \dots, a_p)$. Por lo tanto, en notación de multi-índices

$$P(a) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^p a_i^{L_i}.$$

Considerar el operador $R : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p] \mapsto \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p]$ dado por

$$R\,(S(x)) = \int_{[0,1]^p} S(x+t)\ dt \qquad (S(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p])\,.$$

Por el teorema 5.1 sabemos que este operador es lineal e invertible con inversa

$$R^{-1}\left(\sum_L c_L \prod_{i=1}^p x_i^{L_i}\right) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^p B_{L_i}(x_i).$$

Utilizando esto en la ecuación (61) concluimos que el polinomio Q está dado por

$$Q(a) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^p B_{L_i}(a_i), \qquad Q(a) := D(f_1^{[a]}, \dots, f_n^{[a]}; g^{[a]}). \tag{62}$$

donde B_{L_i} es el L_i-ésimo polinomio de Bernoulli. Análogamente, si $P_{i,j}(a) := F(f_i^{[a]}, f_j^{[a]}; g^{[a]})$ y $Q_{i,j}(a) := D(f_i^{[a]}, f_j^{[a]}; g^{[a]})$, entonces $Q_{i,j}$ se obtiene de $P_{i,j}$ cambiando cada monomio de la forma $a^L := a_1^{L_1} \cdots a_p^{L_p}$ por $B_L(a) := B_{L_1}(a_1) \cdots B_{L_p}(a_p)$.

Por el teorema 7.2 sabemos que

$$F(f_1^{[a]}, f_2^{[a]}, \dots, f_n^{[a]}; g^{[a]}) = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j}\, F(f_i^{[a]}, f_j^{[a]}; g^{[a]}) = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j}\, P_{i,j}(a)$$

es decir, el polinomio P se descompone en una combinación lineal de la forma:

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j} P_{i,j}(a) \\ \sum_L c_L a^L &= \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j} \sum_L c_L^{i,j} a^L \end{aligned}$$

Aplicando el operador lineal R^{-1} a esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_L c_L B_L(a) &= \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j} \sum_L c_L^{i,j} B_L(a), \\ Q(a) &= \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j}\, Q_{i,j}(a), \end{aligned}$$

Es decir, por (62)

$$D(f_1^{[a]}, \dots, f_n^{[a]}; g^{[a]}) = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{i,j}\, D(f_i^{[a]}, f_j^{[a]}; g^{[a]}).$$

En particular, cuando $a = 0$:

$$D(f_1, .., f_n; g) = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_i + m_j}{m_1 + .. + m_n} D(f_i, f_j; g)$$

.

$\square$

Anexos A. Algunos Lemas

Teorema A.1. ***(Fórmula para valores en $s = 0$ de ζ y Z)*** *Sean $f_j \in \mathbb{C}[x]$, $(j = 1, \dots, n)$ polinomios en una variable que satisfacen la Hipótesis de Mahler y sea $g \in \mathbb{C}[x]$. Entonces se tiene*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\right) Z(0, f_1 f_2 \cdots f_n; g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) Z(0, f_j; g),$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\right) \zeta(0, f_1 f_2 \cdots f_n; g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \zeta(0, f_j; g).$$

Demostración:

(1) Supongamos primero que cada f_j es de la forma: $f_j(x) = x + a_j, \quad j = 1, .., n$ (donde cada $a_j \notin (-\infty, 0]$ por la Hipótesis de Mahler). Usamos la rama principal del logaritmo para definir $Z(s, f_j; g)$. Notamos que para $i \neq j$ tenemos de (5),

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \Big(Z(s, f_1 \cdots f_n; g) \Big) = s^2 Z(s + 1, f_1 \cdots f_n; \widehat{g}),$$

donde $\widehat{g}(x) := g(x) \prod_{\substack{1 \le \ell \le n \\ \ell \neq i,j}} (x + a_\ell)$. Evaluando en $s = 0$ y usando el hecho que todos los posibles polos de $Z(s + 1, f; g)$ son simples (por el teorema 3.1) obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \Big(Z(0, f_1 \cdots f_n; g) \Big) = 0. \tag{63}$$

Por la referencia [FP, pág. 13] sabemos que $Z(0, f_1 \cdots f_n; g)$ y $\zeta(0, f_1 \cdots f_n; g)$ son polinomios en los a_j $(j = 1, \dots, n)$. Por lo tanto, por la ecuación (63), el polinomio $Z(0, f_1 \cdots f_n; g)$ no tiene términos "cruzados" de la forma $a_i\, a_j$ con $i \neq j$. Es decir

$$Z(0, f_1 \cdots f_n; g) = c + \sum_{i=1}^{n} P_{i,n}(a_i),$$

donde c es una constante y $P_{i,n}$ son polinomios en una variable con $P_{i,n}(0) = 0$. Por la simetría en los a_i de $Z(0; f_1 \cdots f_n; g) = Z(0; (x + a_1) \cdots (x + a_n); g)$ se tiene

$$Z(0; f_1 \cdots f_n; g) = \sum_{i=1}^{n} P_n(a_i), \tag{64}$$

con $P_n(x) := P_{n,i}(x) + c/n \quad (i = 1, \dots, n)$.

Tomando $a = a_1 = \cdots = a_n$, de manera que $f = f_1 = \cdots = f_n$, tenemos

$$\begin{aligned} Z(0,f;g) &= Z(s,f;g)\big|_{s=0} = Z(ns,f;g)\big|_{s=0} = Z(s,f^n;g)\big|_{s=0} \\ &= Z(0,f^n;g) = \sum_{j=1}^{n} P_n(a) = nP_n(a). \end{aligned}$$

Por la ecuación (64) concluimos:

$$nZ(0,f_1f_2\cdots f_n;g) = \sum_{j=1}^{n} Z(0,f_j;g) \qquad (f_j(x) = x + a_j)\,.$$

(2) Supongamos ahora que cada f_j es un polinomio mónico en una variable. Factorizamos cada f_j como $f_j = \prod_{i=1}^{\deg(f_j)} R_{j,i}$, donde los polinomios $R_{j,i} \in \mathbb{C}[x]$ son mónicos de grado 1. Como cada f_j satisface la Hipótesis de Mahler, es fácil ver que tambien la cumplen los $R_{j,i}$. Por el caso anterior tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{k=1}^{n}\deg(f_k)\Big) Z\Big(0;\prod_{j=1}^{n} f_j;g\Big) &= \Big(\sum_{k=1}^{n}\deg(f_k)\Big) Z\Big(0;\prod_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le d_j}} R_{j,i};g\Big) = \sum_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le d_j}} Z(0;R_{j,i};g) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{\deg(f_j)} Z(0;R_{j,i};g)\Big) = \sum_{j=1}^{n}\deg(f_j)Z(0;f_j;g), \end{aligned}$$

(3) Finalmente, supongamos que $f \in \mathbb{C}[x]$ satisface la Hipótesis de Mahler. Sea $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Entonces eligiendo las ramas del log con la convención usual $(\lambda f(x))^{-s} = \lambda^{-s}(f(x))^{-s}$ tenemos:

$$Z(s,\lambda f;g) = \lambda^{-s}Z(s,f;g)$$

por lo tanto, $Z(0,\lambda f;g) = Z(0,f;g)$. Por el caso anterior obtenemos el resultado buscado para polinomios $f_j \in \mathbb{C}[x]$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, no necesariamente mónicos.

La prueba es la misma para el caso de series zeta cambiando Z por ζ en la demostración.

□

Teorema A.2. *Sean f, $g \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$, y asumamos que f satisface la Hipótesis de Mahler. Entonces:*

(1) *Para $s \in \mathbb{C}$, fuera del posible conjunto de polos $\mathfrak{P}$ dado por Mahler (Teorema 3.1), se tiene*

$$Z(s,f;g) = \int_{t\in[0,1]^p} \zeta(s,f^{[t]};g^{[t]})\,dt,$$

donde dt es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^p$.

(2) *Para $a \in \mathbb{C}^p$ en una vecindad de cero, y $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$ que satisfacen la Hipótesis de Mahler, las aplicaciones definidas por $a \mapsto F(f_1^{[a]},\ldots,f_n^{[a]};g^{[a]})$ y $a \mapsto D(f_1^{[a]},\ldots,f_n^{[a]};g^{[a]})$ son polinomiales.*

(3) *Si P y Q son dos polinomios en p variables relacionados mediante la fórmula*

$$P(a) = \int_{t\in[0,1]^p} Q(a+t)\,dt, \tag{65}$$

con $P(a_1,\ldots,a_p) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^{p} a_i^{L_i}$, entonces:

$$Q(a_1,\ldots,a_p) = \sum_L c_L \prod_{i=1}^{p} B_{L_i}(a_i),$$

donde B_{L_i} es el L_i-ésimo polinomio de Bernoulli.

Demostración:

(1) Sean $m = \deg(f)$ y $q = \deg(g)$, entonces para $\mathrm{Re}(s) > \frac{p+q}{m}$ las funciones $Z(s,f;g)$ y $\zeta(s,f;g)$ pueden evaluarse usando la integral y la serie que las define, respectivamente. Notar también que si $t = (t_1,\ldots,t_p) \in \mathbb{R}_+^p$ entonces $f^{[t]}$ tambien satisface la Hipótesis de Mahler y tiene el mismo grado que f. Tenemos el siguiente cálculo para $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \frac{p+q}{m}$ y $k = (k_1,\ldots,k_p)$ suficientemente grande:

$$\left|g(k+t)f(k+t)^{-s}\right| \le C_{\Im s} \max\{|k_i+t_i|\}^q \max\{|k_i+t_i|\}^{-m\sigma} \le C_{\Im s}\,(\max_i\{k_i\})^{\overbrace{q-m\sigma}^{<-p}}.$$

donde $C_{\Im s} \in \mathbb{C}$ depende de la parte imaginaria de s y puede elegirse uniformemente acotada si s está en un compacto de $\mathrm{Re}(s) > \frac{p+q}{m}$. Como $\sum_{k\in\mathbb{N}^p} (\max_i\{k_i\})^{p'}$ converge uniformemente en compactos de $p' < -p$, podemos intercambiar serie con integral

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^p} \zeta(s,f^{[t]},g^{[t]})\,dt &= \int_{[0,1]^p} \sum_{k\in\mathbb{N}^p} g(k+t)f(k+t)^{-s}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{N}^p}\int_{[0,1]^p} g(k+t)f(k+t)^{-s}\,dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^p}\int_{k+[0,1]^p} g(t)f(t)^{-s}\,dt = \int_{\mathbb{R}_+^p} g(t)f(t)^{-s}\,dt = Z(s,f;g).\end{aligned}$$

Por continuación analítica a s fuera del conjunto de polos $\mathfrak{P}$, se obtiene (1).

(2) Para $a \mapsto D(f_1^{[a]}, f_2^{[a]},\ldots,f_n^{[a]}; g^{[a]})$ ver [DF, pág. 37] notando que $(f_a)_{top} = f_{top}$. Para la aplicación $a \mapsto F(f_1^{[a]}, f_2^{[a]},\ldots,f_n^{[a]}; g^{[a]})$ basta con aplicar la parte (1) .

(3) Sea $V = V_{m,p}$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial finito-dimensional de polinomios en p variables $(a_1,\ldots,a_p)$ con coeficientes complejos de grado a lo más m. Entonces los monomios:

$$\left\{a_1^{n1}\cdots a_p^{n_p} : n_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{p} n_i \le m\right\}$$

y los polinomios de Bernoulli

$$\left\{B_{n_1}(a_1)\cdots B_{n_p}(a_p) : n_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{p} n_i \le m\right\}$$

son bases del espacio V (por inducción sobre m usando el hecho que los $B_j(x)$ son polinomios de grado j). Sea $R : V \to V$ la aplicación $\mathbb{C}$-lineal dada por:

$$R(Q)(a) := \int_{[0,1]^p} Q(a+t)\,dt.$$

Sea $L = (n_1,\ldots,n_p)$ multi-índice. Definimos: $a^L := a_1^{n_1}\cdots a_p^{n_p}$ y $B_L(a) := B_{n_1}(a_1)\cdots B_{n_p}(a_p)$. Sabemos que: $B'_{j+1}(x) = (j+1)B_j(x)$, y $B_j(x+1) - B_j(x) = jx^{j-1}$ [Ap]. Calculamos:

$$\begin{aligned} R(B_L(a)) &= \int_{[0,1]^p} B_L(a+t)\,dt = \prod_{i=1}^{p} \int_0^1 B_{L_i}(a_i+x)\,dx \\ &= \prod_{i=1}^{p} \frac{B_{L_i+1}(a_i+1) - B_{L_i+1}(a_i)}{L_i+1} = a_1^{L_1}\cdots a_p^{L_p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto R lleva una base en la otra, es decir, R es invertible con inversa definida por: $R^{-1}(a^L) = B_L(a)$. Por la linealidad de R se obtiene (3).

□

Lema A.1. *Sea X espacio topológico compacto, μ una medida de Borel finita, positiva y sea* D *subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si: $H : \mathrm{D}\times X \to \mathbb{C}$ es continua y la función $s \mapsto H(s,x)$ es analítica en $s \in D$ para todo $x \in X$, entonces la función $g : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(s) = \int_X H(s,x)\,d\mu(x)$$

es analítica en D *y su derivada está dada por:*

$$g'(s) = \int_X \frac{\partial}{\partial s}\left(H(s,x)\right)\,d\mu(x).$$

Demostración:

Probaremos primero que g es continua para utilizar el Teorema de Morera. Sea $s \in \mathcal{D}$. Por definición de g, si $h \in \mathbb{C}$ con $|h|$ suficientemente pequeño, entonces:

$$g(s+h) - g(s) = \int_X \left(H(s+h,x) - H(s,x)\right)\,d\mu(x)$$

Como X es compacto y H es continua, por convergencia acotada se concluye que:

$$\lim_{h\to 0} \int_X \left(H(s+h,x) - H(s,x)\right)\,d\mu(x) = \int_X \lim_{h\to 0}\left(H(s+h,x) - H(s,x)\right)\,d\mu(x) = 0.$$

Por lo tanto, g es continua en $\mathcal{D}$. Ahora podemos utilizar el teorema de Morera para probar que g es analítica en $\mathcal{D}$. Sea $s_0 \in \mathcal{D}$ y sea γ una curva cerrada simple contenida en $\mathcal{D}$ que contiene a s_0 en su interior. Como H es continua y $\gamma \times X$ es compacto: $H \in L^1(\{\gamma\}\times X)$. Por lo tanto, por el Teorema de Fubini (ya que μ es medida finita),

$$\int_\gamma g(s)\,ds = \int_\gamma \int_X H(s,x)\,d\mu(x)\,ds = \int_X \underbrace{\int_\gamma H(s,x)\,ds}_{=0}\,d\mu(x) = 0.$$

El Teorema de Morera asegura que g es analítica en $\mathcal{D}$.

Afirmación: La función $H'(s,x) := \frac{\partial}{\partial s}H(s,x)$, es continua en $\mathcal{D}\times X$.

Sean $x \in X$, $s \in \mathcal{D}$ y $r > 0$ tal que el disco cerrado $\overline{D(s,r)} \subseteq \mathcal{D}$, $\gamma := \partial\overline{D(s,r)}$ en el sentido anti-horario. Por la fórmula de Cauchy,

$$H'(s,x) = \frac{\partial}{\partial s}H(s,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D(s,r)}} \frac{H(\alpha,x)}{\alpha - s}\,d\alpha.$$

Luego para Δs y Δx suficientemente pequeños:

$$\begin{aligned}
\left|H'(s+\Delta s,x+\Delta x)-H'(s,x)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D(s,r)}}\left(\frac{H(\alpha,x+\Delta x)}{\alpha-s-\Delta s}-\frac{H(\alpha,x)}{\alpha-s}\right)d\alpha\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{(\alpha-s)(H(\alpha,x+\Delta x)-H(\alpha,x))+\Delta s H(\alpha,x)}{(\alpha-s)^2-\Delta s(\alpha-s)}\right)d\alpha\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\left(\frac{|\alpha-s|\,|H(\alpha,x+\Delta x)-H(\alpha,x)|+|\Delta s|\,|H(\alpha,x)|}{|\alpha-s|^2-|\Delta s|\,|\alpha-s|}\right)d\alpha
\end{aligned}$$

Por la continuidad uniforme de H en el compacto $\gamma\times X$ se obtiene:

$$H'(s+\Delta s,x+\Delta x)-H'(s,x)\overset{\Delta s,\Delta x\to 0}{\longrightarrow}0.$$

.

De aquí la afirmación.

Ahora como g es analítica en $\mathcal{D}$ podemos usar la fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned}
g'(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D(r,s)}}\frac{g(\alpha)}{\alpha-s}\,d\alpha &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D(r,s)}}\frac{\int_X H(\alpha,x)\,d\mu(x)}{\alpha-s}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D(r,s)}}\int_X\frac{H(\alpha,x)}{\alpha-s}\,d\mu(x)\,d\alpha.
\end{aligned}$$

Podemos utilizar el teorema de Fubini, ya que H es continua y $\gamma\times X$ es compacto, además $|\alpha-s|=r>0$. Entonces,

$$g'(s)=\int_X\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D(r,s)}}\frac{H(\alpha,x)}{\alpha-s}\,d\alpha\;d\mu(x)=\int_X H'(s,x)\,d\mu(x).$$

□

Referencias

[Ap] Apostol, Tom M., *Introduction to analytic number theory, Undergraduate Texts in Mathematics*, New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1976.

[DF] F. Diaz y Diaz y E. Friedman, *Finite products of regularized products*, Math. Research Lett. **15** (2008), 33–41.

[FP] E. Friedman y A. Pereira, *Special values of Dirichlet series and zeta integrals*, arXiv:1105.2603 (2011).

[FR] E. Friedman y S. Ruijsenaars, *Shintani-Barnes zeta and gamma functions*, Advances Math. **187** (2004) 362–395.

[JL] J. Jorgenson y S. Lang, Basic Analysis of Regularized Series and Products, Springer Lecture Notes in Math. 1425, Springer: Berlin, 1993.

[KW] N. Kurokawa y M. Wakayama, *A generalization of Lerch's formula*, Czechoslovak Math. J. **54** (2004) 941–947.

[Ma] K. Mahler, *Über einen Satz von Mellin*, Math. Ann. **100** (1928) 384–398.

[Mi] Y. Mizuno. *Generalized Lerch formulas: Examples of zeta-regularized products.* J. Number Theory **118** (2006) 155-171.

[Sh] T. Shintani, *On values at $s=1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields*, in: Algebraic Number Theory, Papers Contributed for the International Symposium, Kyoto 1976 (S. Iyanaga, Ed.), Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo 1977, 201–212.

[WW] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, 4-th. ed., Cambridge University Press, 1927.