FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Funciones casi periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias y Teoría de Favard

Por
Pablo Javier González López

Tésis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al grado académico de Magíster en Matemáticas.

DIRECTORES DE TÉSIS:
Olivier Bourget y Gonzalo Robledo Veloso

Diciembre 2018

Santiago, Chile

Dedicado a mis Padres
Alicia y Víctor
Por creer siempre en mí

Agradecimientos

Hoy está culminando una etapa importante de mi vida académica y es inevitable no pensar en todas las personas que me han apoyado para llegar hasta aquí. Este ha sido un proceso de mucho aprendizaje, no solo desde mi área: las matemáticas, sino que también, desde las situaciones y vivencias que se han dado en el día a día durante este largo camino. Muchas personas vieron esta realidad desde adentro y también desde afuera, y me brindaron su apoyo y ayuda incondicional. Primero que todo, quiero agradecerle a mi familia, quienes siempre creyeron en mí y nunca dudaron de mi proceso a pesar de los tropiezos que existieron. En especial, a mis padres que siempre me dieron ánimo para continuar frente a todo lo que se presentaba y jamás cuestionaron la posibilidad de terminar exitosamente esta etapa.

También quiero agradecer al Profesor Gonzalo Robledo, quien fue testigo de toda mi formación como matemático, primero como docente en el primer año de Licenciatura, y en la actualidad, como uno de mis Profesores guías en la Tesis de Magíster. Para mí es importante decir que el profesor Gonzalo no solo me dio la oportunidad de conocer a un gran profesional, también me permitió descubrir a una gran persona, con una excelente memoria y pasión por el fútbol. Muchas veces dudé en este largo camino y le quiero agradecer al Profesor Gonzalo por mostrarme que estas caídas eran parte de la formación, que lo importante era ser capaz de levantarse frente a la adversidad y por sobre todo, que cualquier objetivo se puede lograr con esfuerzo.

Además agradecer al Profesor Olivier Bourget por la paciencia, por toda la ayuda académica y consejos durante el Magíster.

Quiero agradecer a mis compaeros de Magíster y amigos: Manuel, Pablo y Francisco, con los cuales compartí la mayor parte del tiempo en este postgrado y siempre me brindaron su ayuda y apoyo. Por otro lado, agradecer a Nicolé por escucharme en mis momentos de estrés, por ser una gran amiga y siempre darme buenas ideas a la hora de realizar cambios estéticos a todos los textos que escribí.

No puedo dejar de lado a mis amigos de infancia con los que hasta el día de hoy comparto: Carlos y Matías, los cuales siempre me dieron su apoyo y en los momentos difíciles, fieles a su estilo, me daban energías y ánimos para continuar.

Finalmente, agradecer a todas las personas que de alguna u otra forma me ayudaron durante este largo camino, y que ahora no tengo la oportunidad de compartir con ellas y decirles que lo logré... Estaré siempre agradecido, fueron una parte importante en esta etapa de mi vida y eso nunca lo olvidaré.

Índice general

Resumen

En este trabajo estudiaremos las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria no autónoma:

$$x' = A(t)x,$$

y su perturbación:

$$y' = A(t)y + g(t),$$

donde $A(t)$ y $g(t)$ son funciones casi periódicas en el sentido de H. Bohr y/o S. Bochner. En particular, haremos una relectura del importante trabajo de Jean Favard el cual intenta establecer la relación de lo sistemas precedentes con las soluciones del sistema:

$$x' = A^*(t)x,$$

y su respectiva perturbación:

$$y' = A^*(t)y + g^*(t),$$

donde A^* y g^* son elementos pertenecientes a la envoltura de A y g respectivamente, es decir, existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A(t+h_n)$ y $g(t+h_n)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$ a $A^*(t)$ y $g^*(t)$ respectivamente.

En el primer capitulo definimos la casi periodicidad en el sentido de Bochner y Bohr y sus propiedades.

En el capítulo 2 estudiaremos diversas propiedades del sistema no autónomo:

$$x' = A(t)x,$$

para lo cual presentaremos la propiedad de Dicotomía exponencial y su respectivo espectro.

Por último, en la tercera parte se demostrarán los Teoremas de Favard.

Introducción

Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica de período $T \in \mathbb{R}$, es decir:

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Generalmente, este tipo de función cumple un rol muy importante en diversas áreas de la matemática, en particular, en las ecuaciones diferenciales y la modelización de fenómemos oscilatorios. Sin embargo, si analizamos este tipo de funciones como un conjunto en si mismo, es interesante plantearse las siguientes preguntas: *¿Existirá un conjunto que contenga al conjunto de las funciones periódicas? ¿Existirá una generalización de las funciones periódicas?* Mas aún, al analizar las funciones periódicas como conjunto tenemos que tanto $\sin(t)$ y $\cos(\sqrt{t})$ pertenecen a este conjunto pero un hecho no trivial es saber si la función:

$$\sin(t) + \cos(\sqrt{2}t),$$

mantiene esta propiedad de periodicidad. Para responder estas preguntas introduciremos el concepto de función casi periódica.
En este trabajo definiremos y trabajaremos en base a la teoría que envuelve a las funciones casi periódicas, este concepto fue creado y desarrollado por el matemático danés Harald Bohr [**8**] (hermano del físico Niels Bohr) y posteriormente se siguió estudiando por diversos matemáticos, entre ellos, Salomon Bochner. Para entender esto de mejor manera trabajaremos con dos definiciones, una según H. Bohr y la otra según S. Bochner, y veremos la equivalencia entre ellas (asegurada por una hermosa pero compleja demostración)

Una de las tantas cosas interesantes que satisfacen las funciones casi periódicas es que efectivamente son una generalización de las funciones periódicas. Además, analizaremos todas las propiedades que satisfacen estas funciones como conjunto. Posteriormente, utilizaremos toda la teoría de funciones casi periódicas para estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias no autónomas:

$$x' = A(t)x$$

y su perturbación

$$y' = A(t)y + g(t),$$

donde $A(t)$ y $g(t)$ son funciones casi periódicas. Es importante infatizar que para esta parte nos basaremos en el trabajo hecho por J. Favard [**20**] en el cual se relacionaron las soluciones de las ecuaciones dadas anteriormente, todo esto con el fin de obtener criterios para obtener soluciones casi periódicas. Como consecuencia de esto, analizaremos la casi periodicidad de la siguiente función:

$$\int_0^t f(s)\, ds,$$

donde f es una función casi periódica, es decir, responderemos a la pregunta *¿La integral de una función casi periódica es siempre casi periódica?*

Por otro lado, con el mismo fin de estudiar el sitema no autónomo $x'(t) = A(t)x$ introduciremos el concepto de Dicotomía exponencial, el cual nos dará importantes criterios para obtener soluciones acotadas de sistemas no autónomos ya sean homogéneos o no homogéneos, lo cual va a estar ligado diretamente con las propiedades de las funciones casi periódicas.

Como una herramienta para complementar lo anterior, definiremos funciones a través de sucesiones de funciones casi periódicas, es decir, consideraremos una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que para una función casi periódica dada f, la sucesión $f(t+h_n)$ converja uniformemente en $\mathbb{R}$ a otra función f^* Este hecho será clave en lo resultados propuestos por J. Favard ya que nos darán una conexión entre las ecuaciones:

$$x'(t) = f(t)x, \quad \text{y} \quad y' = f^*(t)y,$$

para finalmente saber cuando, a partir de las soluciones casi periódicas de una ecuación, podemos determinar que la ecuación satisface la definición de Dicotomía exponencial. Todo esto se trabajará principalmente en $\mathbb{R}^n$ con la norma euclideana pero de todas manera dedicaremos una sección a casos mas generales.

Parte 1

Funciones casi periodicas

1.1. Casi periodicidad en el sentido de Harald Bohr

La siguiente sección recopila resultados presentados principalmente en los libros de A.S. Besicovitch [**5**], A. Fink [**23**] y el artículo seminal de H. Bohr [**7**]. Es preciso enfatizar que se ha mejorado la prolijidad de las demostraciones y se han incluido ejemplos originales.

1.1.1. Preliminares.

La definición de casi periodicidad en el sentido de Bohr requiere introducir previamente los conceptos de conjunto relativamente denso en $\mathbb{R}$ y de ε–casi período de una función continua.

Definición 1.1. *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es relativamente denso, si existe $\ell > 0$ tal que todo intervalo de largo ℓ contiene al menos un elemento de E, es decir:*

$$[x, x+\ell] \cap E \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.1.1. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, es relativamente denso, ya que basta tomar $\ell \geq 1$ y así se tiene que:

$$[x] + 1 \in [x, x+\ell] \cap \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.1.2. Si $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto:

$$E = \{kT \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

es relativamente denso, en efecto, si consideramos $\ell \geq T$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$mT < x \leq (m+1)T.$$

Pero, del hecho que $\ell \geq T$, sumado con la desigualdad anterior, se sigue que:

$$(m+1)T = mT + T < x + \ell.$$

Por ende, $(m+1)T \in [x, x+\ell] \cap E$, y así, el conjunto E es relativamente denso.

A partir de la definición de densidad relativa junto con los ejemplos anteriores, se deduce que todo conjunto que está uniformemente distribuido en $\mathbb{R}$ será relativamente denso, ya que así, todo intervalo con un largo suficientemente grande contendrá un elemento del conjunto, asimismo, se sigue el siguiente lema:

Lema 1.1. *Sea E un conjunto relativamente denso y considere $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E \subseteq A$. Entonces el conjunto A es relativamente denso.*

Demostración. Dado que E es un conjunto relativamente denso, existe $\ell > 0$, tal que:

$$[x, x+\ell] \cap E \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pero, como $E \subseteq A$, lo anterior implica que :

$$[x, x+\ell] \cap A \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo que implica que el conjunto A es relativamente denso. □

Ejemplo 1.1.3. Del lema anterior, se sigue que el conjunto:

$$E = \{\pm\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\},$$

es relativamente denso ya que $E \subseteq \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ es relativamente denso por lo visto en el Ejemplo 1,1,1.

DEFINICIÓN 1.2. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *una función continua. Un número* $\tau \in \mathbb{R}$, *es traslación o* $\varepsilon-$*casi periodo de* f *si y solo si:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Al conjunto de los $\varepsilon-$*casi periodos de* f *lo denotaremos por* $E\{\varepsilon, f\}$.

LEMA 1.2. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *una función continua. Entonces:*

(*i*) *Si* $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$, *entonces* $-\tau \in E\{\varepsilon, f\}$.
(*ii*) *Si* $\tau, \sigma \in E\{\varepsilon, f\}$, *entonces* $\tau + \sigma \in E\{2\varepsilon, f\}$.
(*iii*) *Si* $\tau, \sigma \in E\{\varepsilon, f\}$, *entonces* $\tau - \sigma \in E\{2\varepsilon, f\}$.

DEMOSTRACIÓN. (*i*) Sea $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$, entonces de la desigualdad (1,1) y el cambios de variable $t - \tau = s$ se sigue que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t-\tau) - f(t)| = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s) - f(s+\tau)| = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s+\tau) - f(s)| < \varepsilon,$$

lo que implica que $-\tau \in E\{\varepsilon, f\}$.

(*ii*) Si $\tau, \sigma \in E\{\varepsilon, f\}$, entonces se satisface (1,1), y además:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\sigma) - f(t)| < \varepsilon.$$

De esto, se sigue que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau+\sigma)-f(t)| \le \underbrace{\sup_{t\in\mathbb{R}} |f((t+\tau)+\sigma) - f(t+\tau)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Por lo tanto $\tau + \sigma \in E\{2\varepsilon, f\}$.

(*iii*) Si $\sigma \in E\{\varepsilon, f\}$, entonces $-\sigma \in E\{\varepsilon, f\}$ por el punto (*i*). Por ende, $\tau + (-\sigma) = \tau - \sigma \in E\{2\varepsilon, f\}$, por el punto (*ii*). $\square$

DEFINICIÓN 1.3. [**19**] *Una función continua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es llamada Bohr-casi periódica si y solo si, para cada* $\varepsilon > 0$, *el conjunto* $E\{\varepsilon, f\}$ *es relativamente denso. Es decir, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\ell(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$[x, x + \ell(\varepsilon)] \cap E\{\varepsilon, f\} \neq \emptyset \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

EJEMPLO 1.1.4. Las funciones Bohr-casi periódicas son una generalización del conjunto $C_T := C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a saber las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas de periodo $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En efecto, si $f \in C_T$ se tiene:

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Por otro lado, consideremos el conjunto:

$$B = \{kT \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$ arbitrario, notemos que $B \subseteq E\{\varepsilon, f\}$, ya que, si $\tau \in B$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\tau = kT$. Así, de la igualdad (1,2), se sigue que:

$$|f(t+\tau) - f(t)| = |f(t+kT) - f(t)| = |f(t) - f(t)| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

lo cual implica:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| = 0 < \varepsilon.$$

Por ende, $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$. Finalmente, como $B \subseteq E\{\varepsilon, f\}$, del Ejemplo 1,1,2, junto con el Lema 1,1, se sigue que f es una función Bohr-casi periódica. Asimismo, toda función constante es Bohr–casi periodica.

Diremos que T es **periodo fundamental** de f si es el menor real positivo que satisface (1,2).

1.1.2. Propiedades de las funciones Bohr casi periodicas.

TEOREMA 1.1. *Toda función Bohr-casi periodica es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Bohr-casi periodica, el conjunto $E\{\frac{\varepsilon}{3}, f\}$ es relativamente denso. Así, existe $\ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$, tal que todo intervalo de largo $\ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ contiene un elemento de $E\{\frac{\varepsilon}{3}, f\}$.

Dado que para cada $x \in \mathbb{R}$, el intervalo $[-x, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) - x + 1]$ tiene un largo mayor que $\ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, existe $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{3}, f\}$ tal que $\tau \in [-x, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) - x + 1]$, es decir:

$$-x \leq \tau \leq \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) - x + 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \tau + x \leq \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 1,$$

y por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{3}, f\}$ tal que $x + \tau \in [0, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 1]$.

La continuidad de f en $\mathbb{R}$ implica la continuidad uniforme en $[-1, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 2]$, por ende, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que para todo $t, s \in [-1, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 2]$, se cumple que:

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Ahora, sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $|x - y| < \delta$, entonces existe $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{3}, f\}$, tal que $x + \tau \in [0, \ell(\frac{\varepsilon}{3}) + 1] \subseteq [-1, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 2]$, de esto, junto con el hecho que $\delta \in (0, 1)$, se sigue que:

$$\ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 2 > \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 1 + y - x \geq x + \tau + y - x = y + \tau = y + \tau + x - x \geq y - x > -1.$$

Por ende, como $x + \tau, y + \tau \in [-1, \ell\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 2]$, de la expresión (1,3), tenemos que:

$$|f(x + \tau) - f(y + \tau)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.4}$$

Además, como $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{3}, f\}$, entonces:

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Finalmente, de las expresiones (1,4) y (1,5), se concluye que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x + \tau)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f(x + \tau) - f(y + \tau)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f(y + \tau) - f(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la función f es uniformemente continua. $\square$

COROLARIO 1.1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Bohr-casi periodica, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subseteq E\{\varepsilon, f\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es Bohr-casi periodica, del Teorema 1,1 se sigue que f es uniformemente continua, por ende, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.6}$$

Luego, sea $\tau \in (-\delta, \delta)$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$|(x+\tau) - x| = |\tau| < \delta$$

Así, de (1,6), se sigue que:

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R},$$

lo cual implica que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$ y así $(-\delta, \delta) \subseteq E\{\varepsilon, f\}$. □

Lema 1.3. *Sea f una función Bohr-casi periodica. Entonces, para todo par de números positivos ε_1 y ε_2 tales que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, existe $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ tal que si $\tau \in \mathbb{R}$ cumple que:*

$$d(\tau, E\{\varepsilon_1, f\}) := \text{ínf}\{|\tau - \tau'| \,:\, \tau' \in E\{\varepsilon_1, f\}\} < \delta, \tag{1.7}$$

entonces $\tau \in E\{\varepsilon_2, f\}$.

Demostración. Sea $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Como f es Bohr-casi periódica, del Corolario 1,1, tenemos que existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subseteq E\{\varepsilon, f\}$.

Luego, notemos que si $\tau_1 \in E\{\varepsilon_1, f\}$ y $\tau_2 \in E\{\varepsilon, f\}$, entonces:

$$\begin{aligned} |f(x+\tau_1) - f(x)| &< \varepsilon_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ |f(x+\tau_2) - f(x)| &< \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Así, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$|f(x+\tau_1+\tau_2) - f(x)| \leq |f(x+\tau_1+\tau_2) - f(x+\tau_1)| + |f(x+\tau_1) - f(x)| \leq \varepsilon_2.$$

Lo cual implica que $\tau_1 + \tau_2 \in E\{\varepsilon_2, f\}$. Por otro lado, sea $\tau \in \mathbb{R}$ tal que se cumple la expresión (1,7), esto es

$$\text{ínf}\{|\tau - \tau'| \,:\, \tau' \in E\{\varepsilon_1, f\}\} < \delta.$$

Por ende, existe $\tilde{\tau} \in E\{\varepsilon_1, f\}$, tal que:

$$|\tau - \tilde{\tau}| < \delta,$$

es decir, $\tau - \tilde{\tau} \in (-\delta, \delta)$, lo que implica que $\tau - \tilde{\tau} \in E\{\varepsilon, f\}$. Finalmente, notemos que:

$$\tau = \underbrace{\tau - \tilde{\tau}}_{\in E\{\varepsilon, f\}} + \underbrace{\tilde{\tau}}_{\in E\{\varepsilon_1, f\}}.$$

Y por lo hecho anteriormente, concluímos que $\tau \in E\{\varepsilon_2, f\}$. □

Teorema 1.2. *Sean f y g funciones Bohr casi periódicas, entonces para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $E\{\varepsilon, f\} \cap E\{\varepsilon, g\}$ es relativamente denso.*

Demostración. La demostración sera dividida en una serie de pasos para facilitar su comprensión.

Paso 1: Dado $\varepsilon > 0$, el Lema 1.3 implica la existencia de $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\tau \in E\{\varepsilon/4, f\}$, entonces:

$$\tau + \delta' \in E\{\varepsilon/2, f\} \quad \text{para todo } |\delta'| < \delta.$$

Paso 2: Como f y g son Bohr casi periódicas, es fácil demostrar la existencia de $\ell_0 := \ell_0(f, g, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{\varepsilon}{8}, f\right\} \cap (x, x+\ell_0) \neq & \quad \varnothing, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ E\left\{\frac{\varepsilon}{4}, g\right\} \cap (x, x+\ell_0) \neq & \quad \varnothing, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto induce una partición de $\mathbb{R}$ del tipo:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}} I_{\pm n} \quad \text{donde } I_n = [n\ell_0, (n+1)\ell_0].$$

Como I_n es un intervalo de largo ℓ_0, para cada $n \in \mathbb{Z}$ sabemos que existen:

$$\tau_f^{(n)} \in E\{\varepsilon/8, f\} \cap I_n \quad \text{y} \quad \tau_g^{(n)} \in E\{\varepsilon/4, g\} \cap I_n,$$

lo cual implica que:

$$d^{(n)} := \tau_f^{(n)} - \tau_g^{(n)} \in (-\ell_0, \ell_0). \tag{1.8}$$

Paso 3: Considere la partición uniforme del intervalo $(-\ell_0, \ell_0)$ de la forma:

$$(-\ell_0, \ell_0) = i_1 \cup i_2 \cup \cdots \cup i_M, \quad \text{donde } i_j = \left[\alpha_j, \alpha_j + \frac{2\ell_0}{M}\right]$$

y M es elegido de tal forma que se verifique:

$$\frac{2\ell_0}{M} < \delta.$$

Notemos que cada elemento $d^{(n)}$ definido por (1.8) debe pertencener a algún intervalo i_j (con $j = 1, \ldots, M$). En efecto, si $\tau_f^{(n)}, \tau_g^{(n)} \in I_n$, entonces:

$$\begin{aligned} n\ell_0 \leq & \quad \tau_f^{(n)} & \leq (n+1)\ell_0, \\ -(n+1)\ell_0 \leq & \quad -\tau_g^{(n)} & \leq -n\ell_0, \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $\tau_f^{(n)} - \tau_g^{(n)} = d^{(n)} \in [-\ell_0, \ell_0]$ y por ende, $d^{(n)} \in i_j$ para algún $j = 1, .., .M$.

Esto permite introducir el siguiente conjunto:

$$\Lambda_M = \left\{ j \in \{1, \ldots, M\} \colon \exists \quad I_n \text{ y } I_{n'} \quad \text{tales que } d^{(n)}, d^{(n')} \in i_j \right\}.$$

Luego, dado que para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $d^{(n)} \in [-\ell_0, \ell_0]$ y además este intervalo está particionado en un número finito de subintervalos, debe existir algún $j \in \{1, ..., M\}$ tal que i_j contiene infinitos elementos de la forma $d^{(n)} = \tau_f^{(n)} - \tau_g^{(n)}$, lo cual implica que $\Lambda_M \neq \varnothing$. Por otro lado, será util considerar el conjunto Λ_M de la forma:

$$\Lambda_M := \{m_1, m_2, \ldots, m_P\} \subseteq \{1, \ldots, M\}.$$

Además, notemos que:

$$i_{m_1} \cup i_{m_2} \cup \cdots \cup i_{m_P} \subseteq (-\ell_0, \ell_0).$$

Posteriormente, del hecho que Λ_M posee finitos elementos, se sigue que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall i_{m_j} \quad \text{con } j \in \{1, \ldots, P\} \quad \exists I_k \text{ e } I_{k'} \text{ tales que } d^{(k)}, d^{(k')} \in i_{m_j} \text{ y } |k|, |k'| < N_0.$$

Paso 4: Considere un número $X > 0$ suficientemente grande tal que:

$$[-N_0\ell_0, (N_0+1)\ell_0] \subset (-X, X),$$

donde

$$[-N_0\ell_0, (N_0+1)\ell_0] = I_{-N_0} \cup \cdots \cup I_{-2} \cup I_{-1} \cup I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup \cdots I_{N_0}.$$

Ahora, sea $\ell = 4X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario y veamos que el intervalo $(\alpha-2X, \alpha+2X)$ contiene un elemento $\tau^* \in E\{\varepsilon/2, f\} \cap E\{\varepsilon/2, g\}$. Para ello, notemos que el intervalo $(\alpha - X, \alpha + X)$, tiene largo $2X > 2\ell$ y por ende, $(\alpha - X, \alpha + X)$ contiene a I_p para algún $p \in \mathbb{Z}$.

Posteriormente, por lo hecho en el *Paso 3,* tenemos que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $I_q \subseteq (-X, X)$ y $d^{(p)}, d^{(q)} \in i_{m_r}$ para algún $r \in \{1, ..., P\}$. De esto, se sigue que:

$$|d^{(p)} - d^{(q)}| < \frac{2\ell_0}{M} < \delta,$$

lo que a su vez implica que:

$$\left|\left(\tau_g^{(p)} - \tau_g^{(q)}\right) - \left(\tau_f^{(p)} - \tau_f^{(q)}\right)\right| < \delta \tag{1.9}$$

Paso 5: Veamos que $\tau^* = \tau_g^{(p)} - \tau_g^{(q)}$ pertenece a $(\alpha - 2X, \alpha + 2X)$, para ello, notemos que $\tau_g^{(p)} \in (\alpha - X, \alpha + X)$ lo cual implica que:

$$\alpha - X < \tau_g^{(p)} < \alpha + X,$$

de igual forma, como $\tau_g^{(q)} \in (-X, X)$ tenemos que $-X < -\tau_g^{(q)} < X$. Por ende, se sigue que:

$$\alpha - 2x < \tau_g^{(p)} - \tau_g^{(q)} < \alpha + 2X,$$

y así $\tau^* \in (\alpha - 2X, \alpha + 2X)$.

Paso 6: Del hecho que $\tau_g^{(p)}, \tau_g^{(q)} \in E\{\varepsilon/4, g\}$ junto con la parte *(iii)* del Lema 1.2 se sigue que $\tau^* = \tau_g^{(p)} - \tau_g^{(q)}$ pertenece al conjunto $E\{g, \varepsilon/2\}$.

Veamos ahora que $\tau^* \in E\{f, \varepsilon/2\}$, para ello, notemos que del hecho que $\tau_f^{(p)}, \tau_f^{(q)} \in E\{\varepsilon/8, f\}$ junto con el punto *(iii)* del Lema 1.2 se sigue que $\tau_f^{(p)} - \tau_f^{(q)} \in E\{\varepsilon/4, f\}$. Finalmente, del *Paso 1* junto con la desigualdad (1,9) podemos concluir que:

$$\tau_f^{(p)} - \tau_f^{(q)} + \left(\tau_g^{(p)} - \tau_g^{(q)}\right) - \left(\tau_f^{(p)} - \tau_f^{(q)}\right) = \tau_g^{(p)} - \tau_g^{(q)} \in E\{\varepsilon/2, f\}.$$

Por lo tanto:

$$(\alpha - 2X, \alpha + 2X) \cap \left(E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, f\right\} \cap E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, g\right\}\right) \neq \varnothing,$$

y por ende, el conjunto $(\alpha - 2X, \alpha + 2X)$ contiene un elemento de $E\{\varepsilon, f\} \cap E\{\varepsilon, g\}$ lo que implica que que este conjunto es relativamente denso. □

Corolario 1.2. *Si f y g son funciones Bohr casi periódicas, entonces $f + g$ es Bohr casi periodica.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, el Teorema anterior implica que $E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, f\right\} \cap E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, g\right\}$ es relativamente denso, por otro lado, si $\tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, f\right\} \cap E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, g\right\}$, entonces:

$$|f(x+\tau)+g(x+\tau)-f(x)-g(x)| \leq \underbrace{|f(x+\tau)-f(x)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x+\tau)-g(x)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, la desigualdad anterior implica que $\tau \in E\{\varepsilon, f+g\}$, por ende $E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, f\right\} \cap E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, g\right\} \subseteq E\{\varepsilon, f+g\}$

Finalmente, como $E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, f\right\} \cap E\left\{\frac{\varepsilon}{2}, g\right\}$ es relativamente denso, de lo anterior junto con el Lema 1,1, concluimos que $E\{\varepsilon, f+g\}$ es relativamente denso y por lo tanto $f+g$ es Bohr casi periódica. □

Corolario 1.3. *El conjunto de funciones Bohr casi periódicas es un espacio vectorial*

Demostración. Por lo hecho en el Corolario 1,2, basta con probar que dada una función f Bohr casi periódica, entonces para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que λf también es una función Bohr casi periódica. En efecto, si $\lambda = 0$, el resultado se obtiene inmediatamente, si $\lambda \neq 0$, como f es Bohr casi periódica, dado $\varepsilon > 0$ el conjunto $E\left\{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, f\right\}$ es relativamente denso. Además, si $\tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, f\right\}$ entonces:

$$|\lambda f(\tau+x) - \lambda f(x)| = |\lambda||f(\tau+x)-f(x)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por ende, $E\left\{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, f\right\} \subseteq E\{\varepsilon, \lambda f\}$, y así, del Lema 1,1 concluimos que $E\{\varepsilon, \lambda f\}$ es relativamente denso y por lo tanto, f es una función Bohr casi periódica. □

Observación 1.1.1. Una consecuencia de este resultado combinada con el Ejemplo 1.1.4, es que si f es T_1–periódica, g es T_2–periódica y $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$, entonces $f+g$ es Bohr casi periódica pero sin embargo, $f+g \notin C_T$ para todo $T \in \mathbb{R}$. Una demostración sencilla de este último hecho, puede ser consultada en [**3**, pp. 213–218].

Teorema 1.3. *Toda función Bohr-casi periódica es acotada.*

Demostración. Sea f una función Bohr-casi periódica, entonces para $\varepsilon = 1$ existe un número $\ell_1 > 0$, tal que el conjunto $E\{1, f\}$, es relativamente denso. Además, como f es continua, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$, para todo $t \in [0, \ell_1]$. Por otro lado, notemos que para cada $t \in \mathbb{R}$, el largo del intervalo $[-t, -t+\ell_1]$, es ℓ_1, por ende, existe un elemento $\tau \in E\{1, f\} \cap [-t, -t+\ell_1]$, es decir:

$$-t \leq \tau \leq -t+\ell_1 \iff 0 \leq \tau + t \leq \ell_1 \iff \tau + t \in [0, \ell_1].$$

Así, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $\tau \in E\{1, f\}$, tal que $t+\tau \in [0, \ell_1]$ y consecuentemente:

$$|f(t+\tau)| \leq M, \quad \text{y} \quad |f(t+\tau)-f(t)| < 1.$$

Finalmente, para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, se tiene:

$$|f(t)| \leq |f(t+\tau)-f(t)| + |f(t+\tau)| < 1 + M.$$

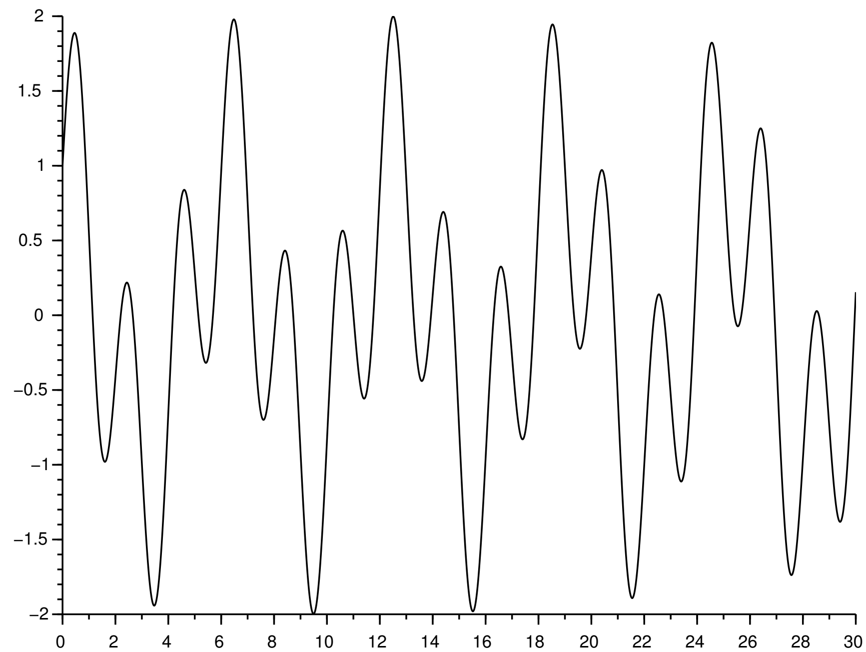

Figura 1. Gráfico de la función $f(t) = \cos(t) + \sin(\pi t)$, la cual es casi periódica pero no es T–periodica.

Por lo tanto, $|f(t)| < 1 + M$, para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que implica que f es una función acotada. $\square$

Teorema 1.4. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Bohr casi periódica, entonces $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, también es una función Bohr casi periódica.*

Demostración. Como f es una función Bohr-casi periódica, el Teorema 1,3 implica la existencia de $M > 0$, tal que:

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además, la casi periodicidad de f implica que el conjunto $E\{\frac{\varepsilon}{2M}, f\}$ es relativamente denso.

Posteriormente, si $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{2M}, f\}$, entonces para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, se cumple:

$$|\{f(t+\tau)\}^2 - \{f(t)\}^2| \leq \{\underbrace{|f(t+\tau)|}_{\leq M} + \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\underbrace{|f(t+\tau) - f(t)|}_{<\frac{\varepsilon}{2M}} < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

De esta forma, si $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{2M}, f\}$, entonces:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\{f(x+\tau)\}^2 - \{f(x)\}^2| < \varepsilon.$$

Por ende, $\tau \in E\{\varepsilon, f^2\}$, lo que implica que $E\{\frac{\varepsilon}{2M}, f\} \subseteq E\{\varepsilon, f^2\}$.

Finalmente, como el conjunto $E\{\frac{\varepsilon}{2M}, f\}$ es relativamente denso, y además $E\{\frac{\varepsilon}{2M}, f\} \subseteq E\{\varepsilon, f^2\}$, del Lema 1,1 se sigue que $E\{\varepsilon, f^2\}$ es relativamente denso, por lo tanto f^2 es una función Bohr-casi periódica y por ende, $f^2 \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\square$

Observación 1.1.2. Ahora, consideremos los conjuntos:

$$\begin{aligned} BC(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y acotada}\}, \\ P(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y periódica.}\}, \\ \mathcal{AP}_{\text{bohr}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es Bohr-casi periódica}\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$P(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \bigcup_{T\in\mathbb{R}} C_T(\mathbb{R},\mathbb{R}), \tag{1.10}$$

donde C_T fue definido en el Ejemplo 1.1.4.

Por otro lado, sea $||\cdot||_\infty : BC(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$, definida por:

$$||f||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Notemos que $(BC(\mathbb{R},\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach y además del Teorema 1,3, se sigue que $\mathcal{AP}_{\text{Bohr}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Teorema 1.5. *$\mathcal{AP}_{\text{Bohr}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Como $\mathcal{AP}_{\text{Bohr}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio vectorial contenido en $(BC(\mathbb{R},\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$. Sólo tenemos que demostrar que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Bohr-casi periódicas, la cual converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$ a una función f, entonces f es Bohr-casi periódica.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como f_n converge uniformemente a f, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|f(t) - f_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ahora, como f_N es una función Bohr-casi periódica, se cumple:

$$|f_N(t+\tau) - f_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall \tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_N(t)\right\}.$$

Luego, si $\tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_N(t)\right\}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(t+\tau) - f(t)| &= |f(t+\tau) - f_N(t+\tau) + f_N(t+\tau) - f_N(t) + f_N(t) - f(t)|, \\ &\leq |f(t+\tau) - f_N(t+\tau)| + |f_N(t+\tau) - f_N(t)| + |f(t) - f_N(t)|, \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$ y por lo tanto $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_N(t)\right\} \subseteq E\{\varepsilon, f\}$.

Finalmente, como la función f_N es Bohr-casi periódica, se sigue que el conjunto $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_N(t)\right\}$, es relativamente denso, y dado que $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_N(t)\right\} \subseteq E\{\varepsilon, f\}$, del Lema 1,1, se tiene que $E\{\varepsilon, f\}$, es relativamente denso, por lo que se concluye que f es una función Bohr-casi periódica. $\square$

Corolario 1.4. *El producto de dos funciones Bohr casi–periódicas es una función Bohr casi periódica.*

Demostración. Sean f_1 y f_2 dos funciones Bohr casi periodicas y notemos que:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = g(t),$$

donde:

$$g(t) = \frac{1}{4}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\}^2 - \frac{1}{4}\left\{f_1(t) - f_2(t)\right\}^2.$$

Luego, de los Teoremas 1,5 y 1,4, se sigue que tanto $\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\}^2$ como $\left\{f_1(t) - f_2(t)\right\}^2$ pertenecen a $\mathcal{AP}_{\mathrm{Bohr}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Finalmente, del mismo Teorema 1,9, se concluye que $g \in \mathcal{AP}_{\mathrm{Bohr}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

Observación 1.1.3. Una consecuencia de los resultados anteriores es que el conjunto $\mathcal{AP}_{\mathrm{Bohr}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un Álgebra de Banach.

1.2. Casi periodicidad en el sentido de Salomon Bochner

Al igual que en la sección anterior, recopilamos resultados presentados principalmente en los libros de Besicovitch y Fink, mejorando la prolijidad de las demostraciones e incluyendo ejemplos originales.

1.2.1. Preliminares.

Definición 1.4. *Una función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada Bochner-casi periódica si y solo si, dada cualquier sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, existe una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que la sucesión de funciones $\{f(t+h_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.2.1. De igual forma que en la sección anterior, las funciones Bochner-casi periódicas generalizan a las funciones periódicas continuas. Así, si f es una función continua y periódica, entonces existe $T \in \mathbb{R}$, distinto de cero, tal que se cumple la igualdad (1,2).

Ahora, sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de números reales arbitraria, así, por el algoritmo de la división, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n \in \mathbb{Z}$ y ϕ_n, tales que:

$$h_n = a_n T + \phi_n, \quad \text{donde} \quad |\phi_n| < T.$$

Por ende, como la sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, por Teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $\{\phi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que:

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_{n_k} = \phi \in \mathbb{R}.$$

Posteriormente, notemos que de la expresión (1,2), se sigue que:

$$f(t + h_{n_k}) = f(t + a_{n_k}T + \phi_{n_k}) = f(t + \phi_{n_k}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Por otra parte, dado que la función f es continua, tenemos que es uniformemente continua en el compacto $[-2T, 2T]$, por ende, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $u, v \in [-2T, 2T]$, con $|u - v| < \delta$, se cumple que:

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon/4. \tag{1.12}$$

Además, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq N$, entonces:

$$|\phi_{n_k} - \phi| < \delta. \tag{1.13}$$

Por ende, si $k \geq N$, de la expresión (1,13), tenemos que:

$$|(t + \phi_{n_k}) - (t + \phi)| = |\phi_{n_k} - \phi| < \delta, \quad \forall t \in [-T, T],$$

y de la desigualdad (1,12) se sigue que:

$$|f(t + \phi_{n_k}) - f(t + \phi)| < \varepsilon/4, \quad \forall t \in [-T, T],$$

lo cual implica que:

$$\sup_{t \in [-T,T]} |f(t + \phi_{n_k}) - f(t + \phi)| \leq \varepsilon/4 < \varepsilon/2. \tag{1.14}$$

Finalmente, sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, entonces existen $a \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{R}$, con $|r| < T$, tales que $t = aT + r$. De esto, junto con la expresión (1,2), se sigue que:

$$|f(t+\phi_{n_k}) - f(t+\phi)| = |f(aT+r+\phi_{n_k}) - f(aT+r+\phi)| = |f(r+\phi_{n_k}) - f(r+\phi)|.$$

Pero, como $|r| < T$, entonces:

$$|f(t + \phi_{n_k}) - f(t + \phi)| = |f(r + \phi_{n_k}) - f(r + \phi)| \leq \sup_{t \in [-T,T]} |f(t + \phi_{n_k}) - f(t + \phi)|$$

y de (1,14), se tiene que:

$$|f(t + \phi_{n_k}) - f(t + \phi)| < \varepsilon/2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, lo anterior implica que:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t + \phi_{n_k}) - f(t + \phi)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Por ende, de la desigualdad anterior junto con la expresión (1,11), se sigue que $\{f(t + h_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$, lo cual implica que f es una función Bochner-casi periódica.

TEOREMA 1.6. *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones Bochner-casi periódicas, si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la función $\lambda f + g$, es Bochner-casi periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números reales. Luego, dado que la función f es Bochner-casi periódica, existe una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$f(t + h_{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{||\cdot||_\infty} \varphi(t). \tag{1.15}$$

A su vez, como la función g es Bochner-casi periódica, para $\{h_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ existe una subsucesión $\{h_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$g(t + h_{n_{k_j}}) \xrightarrow[j \to \infty]{||\cdot||_\infty} \phi(t). \tag{1.16}$$

Ahora, considere la sucesión de funciones $\{f(t + h_{n_{k_j}})\}_{j \in \mathbb{N}}$, la cual es una subsucesión de $\{f(t + h_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$, por ende, de (1,15), se sigue que:

$$f(t + h_{n_{k_j}}) \xrightarrow[j \to \infty]{||\cdot||_\infty} \varphi(t). \tag{1.17}$$

Finalmente, por las expresiones (1,16) y (1,17), tenemos:

$$(\lambda f + g)(t + h_{n_{k_j}}) = \lambda f(t + h_{n_{k_j}}) + g(t + h_{n_{k_j}}) \xrightarrow[j \to \infty]{||\cdot||_\infty} \lambda\varphi(x) + \phi(x)$$

Así, $\{(\lambda f + g)(t + h_{n_{k_j}})\}_{j \in \mathbb{N}}$, converge uniformemente, y como $\{h_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se concluye que la función $\lambda f + g$ es Bochner-casi periódica. $\square$

Observación 1.2.1. Introduzcamos ahora el siguiente conjunto:

$$\mathcal{AP}_{\text{Bochner}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es Bochner-casi periódica}\}.$$

Notemos que a diferencia de las funciones Bohr-casi periódicas, a priori, no sabemos si las funciones Bochner-casi periódicas son acotadas ni mucho menos si son un espacio métrico completo (con la métrica inducida por la norma $||\cdot||_\infty$). Sin embargo, del teorema anterior, se sigue que el cojunto $\mathcal{AP}_{\text{Bochner}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Pero, para indagar mas sobre este conjunto, necesitaremos algunos resultados previos muy importantes, por lo cual, abordaremos este problema en secciones futuras.

1.3. Equivalencias entre Bohr y Bochner.

Con todo lo hecho en la sección anterior, notemos que a priori, las definiciones dadas por Harald Bohr y Salomon Bochner parecen muy diferentes. Aún así, es natural preguntarse si hay alguna relación en estas definiciones. A continuación daremos algunos Teoremas, los cuales nos darán una respuesta a la pregunta planteada anteriormente.

Teorema 1.7. *Toda función Bohr-casi periódica es Bochner-casi periódica.*

Demostración. Sea f una función Bohr-casi periódica y considere $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión arbitraria de números reales, luego para $\varepsilon = 1/4$, se tiene que el conjunto $E\{\frac{1}{4}, f\}$ es relativamente denso, lo cual implica que existe $\ell\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, tal que:

$$\left[x - \ell\left(\frac{1}{4}\right), x\right] \cap E\left\{\frac{1}{4}, f\right\} \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\tau_n \in E\left\{\frac{1}{4}, f\right\}$, tal que $\tau_n \in \left[h_n - \ell\left(\frac{1}{4}\right), h_n\right]$, es decir:

$$h_n - \ell\left(\frac{1}{4}\right) \leq \tau_n \leq h_n, \quad \text{o bien} \quad 0 \leq \underbrace{h_n - \tau_n}_{=\ell_n} \leq \ell\left(\frac{1}{4}\right).$$

Así, si consideramos $\ell_n = h_n - \tau_n$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $\tau_n \in E\left\{\frac{1}{4}, f\right\}$ y $\ell_n \in \left[0, \ell\left(\frac{1}{4}\right)\right]$, tales que:

$$h_n = \tau_n + \ell_n. \tag{1.18}$$

Pero, como la sucesión $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es acotada, existe una subsucesión $\{\ell_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que:

$$\lim_{k\to+\infty} \ell_{n_k} = \tilde{\ell} \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, como $\tau_n \in E\left\{\frac{1}{4}, f\right\}$, del Lema 1,2, se sigue que $-\tau_n \in E\left\{\frac{1}{4}, f\right\}$. Con esto, junto con la igualdad (1,18), se tiene que :

$$\begin{aligned} |f(t+h_n) - f(t+\ell_n)| &= |f(t+h_n) - f(t+\tau_n+\ell_n-\tau_n)|, \\ &= |f(t+h_n) - f((t+h_n)-\tau_n)|, \\ &< \frac{1}{4}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En particular:

$$|f(t+h_{n_k}) - f(t+\ell_{n_k})| < \frac{1}{4}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Luego, por Teorema 1,1, tenemos que f es uniformemente continua, así, aplicando las mismas ideas que en la demostración del Ejemplo 1,2,1, se sigue que:

$$f(t+\ell_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} f(t+\tilde{\ell}).$$

Así, existe $K_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|f(t+\ell_{n_k}) - f(t+\tilde{\ell})| < \frac{1}{4}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall k > K_0.$$

De la desigualdad anterior, junto con la expresión (1,19), se sigue que para cada $k > K_0$, se cumple:

$$|f(t+h_{n_k}) - f(t+\tilde{\ell})| \leq \underbrace{|f(t+h_{n_k}) - f(t+\ell_{n_k})|}_{<\frac{1}{4}} + \underbrace{|f(t+\ell_{n_k}) - f(t+\tilde{\ell})|}_{<\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Y de la desigualdad anterior, se sigue que:

$$|f(t+h_{n_j}) - f(t+h_{n_k})| < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall j,k > K_0.$$

Ahora, notemos que para $\varepsilon = 1/8$, se tiene que el conjunto $E\left\{\frac{1}{8}, f\right\}$ es relativamente denso, por lo tanto, si repetimos el proceso hecho anteriormente para la sucesión $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces existe una subsución $\{h^{(1)}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, para la cual existe $K_1 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left| f\left(t+h^{(1)}_{n_j}\right) - f\left(t+h^{(1)}_{n_k}\right) \right| < \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall j,k > K_1.$$

Por ende, repitiendo el proceso recursivamente, tenemos que para $p \in \mathbb{N}$ arbitrario, a la sucesión $\left\{h^{(p-1)}_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, le podemos extraer una subsuscesión $\{h^{(p)}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que también es subsucesión de $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por construcción), para la cual, existe un número $K_p \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left| f\left(t+h^{(p)}_{n_j}\right) - f\left(t+h^{(p)}_{n_k}\right) \right| < \frac{1}{p+1} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall j,k > K_p. \tag{1.20}$$

Así, tenemos la siguiente colección de sucesiones:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & f\left(t+h^{(1)}_{n_1}\right), f\left(t+h^{(1)}_{n_2}\right), \ldots, f\left(t+h^{(1)}_{n_m}\right), \ldots \\
\text{(II)} & f\left(t+h^{(2)}_{n_1}\right), f\left(t+h^{(2)}_{n_2}\right), \ldots, f\left(t+h^{(2)}_{n_m}\right), \ldots \\
\vdots & \\
\text{(P)} & f\left(t+h^{(P)}_{n_1}\right), f\left(t+h^{(P)}_{n_2}\right), \ldots, f\left(t+h^{(P)}_{n_m}\right), \ldots
\end{array}$$

Finalmente, considere la subsucesión de $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por los elementos de la diagonal del esquema anterior, es decir, la subsucesión $\left\{h^{(k)}_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Luego, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $P \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\frac{1}{P+1} < \varepsilon.$$

Luego, por la construcción hecha anteriormente, existe $K_P \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left| f\left(t+h^{(P)}_{n_j}\right) - f\left(t+h^{(P)}_{n_k}\right) \right| < \frac{1}{P+1} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall j,k > K_P.$$

Considere ahora $K = \text{máx}\{P, K_P\}$, entonces si $j, m > K$, en particular $j, m > P$, y por la construcción que hemos realizado, tenemos que los términos $f\left(t + h_{n_j}^{(j)}\right)$ y $f\left(t + h_{n_m}^{(m)}\right)$ son términos de la sucesión $\left\{f\left(t + h_{n_k}^{(P)}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Luego, como $j, m > K$, entonces $j, m > K_P$, lo cual, por la expresión (1,20), implica que:

$$\left|f\left(t + h_{n_j}^{(j)}\right) - f\left(t + h_{n_m}^{(m)}\right)\right| < \frac{1}{P+1} < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Así, la sucesión $\left\{f\left(t + h_{n_k}^{(k)}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, es de Cauchy, y como el conjunto de las funciones Bohr-casi periódicas es un espacio métrico completo, se tiene que $\left\{f\left(t + h_{n_k}^{(k)}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto, la función f es Bochner-casi periódica. □

Teorema 1.8. *Toda función Bochner-casi periodica es Bohr-casi periódica.*

Demostración. Sea f una función Bochner-casi periodica y supongamos que no es Bohr-casi periodica, es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $E\{\varepsilon, f\}$ no es relativamente denso:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall \ell > 0\, \exists\, x(\ell) \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \quad [x(\ell), x(\ell) + \ell] \cap E\{\varepsilon, f\} = \emptyset.$$

En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un intervalo L_n, de largo $r_n > 0$, tal que:

$$L_n \cap E\{\varepsilon, f\} = \emptyset. \tag{1.21}$$

Ahora, sea $h_1 \in \mathbb{R}$ arbitrario y considere h_2 tal que:

$$h_2 - h_1 \in L_1 = L_{\nu_1}. \tag{1.22}$$

Luego, considere $r_{\nu_2} \in \mathbb{R}$, de manera que:

$$|h_2 - h_1| < r_{\nu_2}.$$

Posteriormente, sea $h_3 \in \mathbb{R}$, tal que $h_3 - h_2, h_3 - h_1 \in L_{\nu_2}$, de esto, junto con (1,22), se sigue que si $x = h_3 - h_2$, e $y = h_3 - h_1$, entonces:

$$|x - y| = |h_3 - h_2 - h_3 + h_1| = |h_1 - h_2| < r_{\nu_2}.$$

De igual forma, sea $r_{\nu_3} \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\text{máx}\{|h_3 - h_2|, |h_3 - h_1|, |h_1 - h_2|\} < r_{\nu_3}.$$

Posteriormente, sea $h_4 \in \mathbb{R}$, tal que $h_4 - h_3, h_4 - h_2, h_4 - h_1 \in L_{\nu_3}$. Así, si $x = h_4 - h_3, y = h_4 - h_2, z = h_4 - h_1$, entonces:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |h_2 - h_3| < r_{\nu_3}, \\ |x - z| &= |h_1 - h_3| < r_{\nu_3}, \\ |y - z| &= |h_1 - h_2| < r_{\nu_3}. \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso inductivamente, podemos escoger un intervalo L_{ν_n}, de largo r_{ν_n}, donde:

$$\text{máx}\{|h_i - h_j| \,:\, i > j;\, i = 1, ..., n\,; j = 1, ..., n-1\} < r_{\nu_n}. \tag{1.23}$$

Así, existe un número h_{n+1}, tal que:

$$h_{n+1} - h_m \in L_{\nu_n}, \quad \forall m \in \{1, ..., n\}.$$

Ahora, considere la sucesión de funciones $\{f(t+h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tales que $n_1 > n_2$, entonces de (1,23), tenemos que:

$$|h_{n_1} - h_{n_2}| < r_{n_1}.$$

Además, por el proceso hecho anteriormente, se sigue que $h_{n_1} - h_{n_2} \in L_{n_1-1}$. Pero, de la expresión (1,21), se tiene que $h_{n_1} - h_{n_2} \notin E\{\varepsilon, f\}$, es decir:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+h_{n_1}) - f(t+h_{n_2})| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+h_{n_1}-h_{n_2}) - f(t)| \geq \varepsilon.$$

Por ende, para toda subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\{f(t+h_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$, lo cual contradice la hipótesis de Bochner-casi periodicidad de f.

Por lo tanto, f es una función Bohr-casi periodica. $\square$

Observación 1.3.1. Diremos que una función f es casi periodica si y solo si es Bohr-casi periodica o Bochner-casi periodica.

1.4. El conjunto de las funciones casi periodicas.

Dado que en las secciones anteriores hemos probado que las definiciones de función casi periódica de Bohr y Bochner son equivalentes, en base a la Observación 1,3,1, definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es casi periódica}\}$$

y por lo hecho en los Teoremas 1,7 y 1,8, se sigue la igualdad:

$$\mathcal{AP}_{\text{Bohr}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{AP}_{\text{Bochner}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

donde además por el Teorema 1,3, tenemos la siguiente relación:

$$P(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq BC(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Es importante enfatizar la gran importancia que tiene la equivalencia entre las definiciones de Bohr y Bochner, ya que, de aquí en adelante para probar algunas propiedades acerca de las funciones casi periódicas, algunas de estas serán mas entendibles con la definición de Bohr mientras que con otras propiedades, será mas factible usar la definición de Bochner. Siguiendo con lo anterior, notemos que de la Observación 1,1,3, se concluye el siguiente Teorema:

Teorema 1.9. *El conjunto $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la suma usual de funciones y la métrica inducida por la norma $||\cdot||_\infty$.*

Recordemos que si S un espacio topológico, un conjunto $E \subset S$ es denso en ninguna parte si y solo si satisface que $\text{int}(\bar{A}) = \varnothing$.

Por otro lado, un subconjunto $E \subset S$ es magro o de primera categoría si existe una sucesión numerable de subconjuntos $E_n \subseteq S$, densos en ninguna parte tales que E puede describirse como:

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n,$$

finalmente, si E no es de primera categoría, entonces decimos que es de segunda categoría.

El siguiente resultado (formulado recientemente por Ding *et.al.* [**49**]) demuestra que las funciones periodicas continuas son de primera categoría en el conjunto de las funciones casi periodicas.

Teorema 1.10. *El conjunto $P(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es de primera categoría en $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*

Demostración. Primero, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ considere el conjunto:

$$P_n = \{f \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists\, l \in [n, n+1] \text{ tal que } f(t+l) = f(t),\, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Luego, notemos que:

$$P(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n.$$

Ahora, probemos que $\mathrm{int}(\bar{P_n}) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para esto, dividiremos el proceso en dos pasos:
Paso 1: Veamos primero que cada P_n es un subconjunto cerrado de $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, para esto, probaremos que cada $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash P_n$ es abierto en $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En efecto, sea $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash P_n$, entonces para todo $\ell \in [n, n+1]$ existe $t_\ell \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(t_\ell + \ell) \neq f(t_\ell).$$

De lo anterior, se sigue que $|f(t_\ell + \ell) - f(t_\ell)| > 0$, y por ende, para cada $\ell \in [n, n+1]$ definimos:

$$\varepsilon_\ell := \frac{1}{4}|f(t_\ell + \ell) - f(t_\ell)|$$

Además, como f es continua, para cada $\ell \in [n, n+1]$ existe δ_ℓ tal que si $|s - \ell| < \delta_\ell$, entonces $|f(s) - f(\ell)| < \varepsilon_\ell$. Por ende, para cada $s \in (s - \delta_\ell, \ell + \delta_\ell)$ se satisface:

$$|f(t_\ell + s) - f(t_\ell)| \geq \underbrace{|f(t_\ell + \ell) - f(t_\ell)|}_{= 4\varepsilon_\ell} - \underbrace{|f(t_\ell + s) - f(t_\ell + \ell)|}_{\leq \varepsilon_\ell} \geq 3\varepsilon_\ell.$$

Por ende:

$$|f(t_\ell + s) - f(t_\ell)| \geq 3\varepsilon_\ell, \quad \forall s \in (\ell - \delta_\ell, \ell + \delta_\ell). \tag{1.24}$$

Por otro lado, dado que:

$$[n, n+1] \subseteq \bigcup_{\ell \in [n, n+1]} (\ell - \delta_\ell, \ell + \delta_\ell),$$

del Teorema de Heine-Borel se sigue que existen $\ell_1, ..., \ell_k \in [n, n+1]$ y $\varepsilon_{\ell_1}, \ldots, \varepsilon_{\ell_k}$ tales que:

$$[n, n+1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (\ell_j - \delta_{\ell_j}, \ell_j + \delta_{\ell_j}) \tag{1.25}$$

y además

$$|f(t_{\ell_j} + s) - f(t_{\ell_j})| \geq 3\varepsilon_{\ell_j}, \quad \forall s \in (\ell_j - \delta_{\ell_j}, \ell_j + \delta_{\ell_j}) \tag{1.26}$$

para algún entero positivo k. Posteriormente, consideremos el conjunto:

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,:\, \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t) - f(t)| < \varepsilon\},$$

donde $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_j \,:\, j = 1, ..., k\}$. Veamos que $B(f, \varepsilon) \subseteq \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\backslash P_n$. En efecto, si $g \in B(f, \varepsilon)$, entonces de (1,25) tenemos que para cada $\ell \in [n, n+1]$ existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que:

$$\ell \in (\ell_j - \delta_{\ell_j}, \ell_j + \delta_{\ell_j}).$$

Además, de (1,26) se sigue que:

$$|f(t_{\ell_j} + \ell) - f(t_{t_{\ell_j}})| \geq 3\varepsilon_{\ell_j} \geq 3\varepsilon,$$

de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} |g(t_{\ell_j} + \ell) - g(t_{\ell_j})| &\geq |f(t_{\ell_j} + \ell) - f(t_{\ell_j})| - |f(t_{\ell_j} + \ell) - g(t_{\ell_j} + \ell)| \\ &\quad -|f(t_{\ell_j}) - g(t_{\ell_j})|, \\ &\geq 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

por ende, $g(t_{\ell_j} + \ell) \neq g(t_{\ell_j})$, y así $B(f, \varepsilon) \subseteq \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Por lo tanto, P_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Paso 2: Probemos ahora que P_n tiene interior vacío para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para esto, notemos que lo anterior es equivalente a probar que:

$$B(f, \delta) \cap (\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\backslash P_n) \neq \varnothing, \quad \forall \delta > 0,\, \forall f \in P_n, \tag{1.27}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$. Luego, para probar la expresión anterior, consideraremos los siguientes casos:

Caso 2.1. f es constante: Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces tenemos que la función $t \mapsto f_\delta(t)$ dada por:

$$f_\delta(t) = \frac{\cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)}{3} \cdot \delta \cdot x_0 + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $x_0 \in \{-1, 1\}$, satisface que:

$$|f_\delta(t) - f(t)| = \left| \frac{\cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)}{3} \cdot \delta \cdot x_0 \right| \leq \frac{2}{3}\delta < \delta,$$

lo cual implica que $f_\delta \in B(f, \delta)$, pero como f_δ no es periódica (ver Observación 1.1.1), se sigue que $f_\delta \notin P_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso 2.2 f no es constante: Sea ℓ_0 el periodo fundamental de f y considere la función $t \mapsto f_\delta(t)$ dada por:

$$f_\delta(t) = f(t) + f\left(\frac{t}{\pi}\right) \cdot \frac{\delta}{M_f}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde:

$$M_f = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Así, de igual forma que en el caso anterior, tenemos que:

$$|f_\delta(t) - f(t)| = \left| f\left(\frac{t}{\pi}\right) \cdot \frac{\delta}{M_f} \right| < \delta,$$

lo que implica que $f_\delta \in B(f, \delta)$. Veamos ahora que $f_\delta \notin P_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en efecto, supongamos que existe $T \in [n, n+1]$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$f_\delta(t + T) = f_\delta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

esto implica que:

$$f(t+T)+f\left(\frac{t+T}{\pi}\right)\cdot\frac{\delta}{M_f}=f(t)+f\left(\frac{t}{\pi}\right)\cdot\frac{\delta}{M_f},\quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{1.28}$$

A partir de esto, consideramos las funciones:

$$F_1(t)=f(t+T)-f(t),\qquad F_2(t)=\frac{\delta}{M_f}\left[f\left(\frac{t}{\pi}\right)-f\left(\frac{t+T}{\pi}\right)\right], \tag{1.29}$$

donde $t\in\mathbb{R}$. Posteriormente, de la igualdad (1,28), tenemos que $F_1(t)=F_2(t)$. Luego, si $F_1(t)=F_2(t)=K$, para alguna constante $K\in\mathbb{R}$, entonces:

$$f(t+T)=f(t)+K,\quad \forall t\in\mathbb{R},$$

lo cual implica que:

$$f(jT)=f(0)+jK,\quad \forall j\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Por ende, como f es acotada, se sigue que:

$$K=\lim_{j\to\infty}\frac{f(jT)-f(0)}{j}=0.$$

Por lo tanto:

$$f(t+T)=f(t),\quad f\left(\frac{t}{\pi}\right)=f\left(\frac{t+T}{\pi}\right),$$

para todo $t\in\mathbb{R}$. Pero, si ℓ_0 es el periodo fundamental de f, entonces $\pi\ell_0$ es el periodo fundamental de $f(\cdot/\pi)$. Por ende, ℓ_0 divide a T y además, $\pi\ell_0$ divide a T, es decir, existen enteros p y q, distintos de cero, tales que:

$$T=\ell_0 p,\quad T=q\pi\ell_0.$$

De lo anterior se sigue que $\pi=p/q$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f_\delta\notin P_n$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

De igual forma, si $F_1=F_2$ no es una función constante, de (1,29) tenemos que ℓ_0 y $\pi\ell_0$ son periodos de F_1 y F_2 respectivamente. Pero, al igual que antes, si T_0 es periodo de $F_1=F_2$, entonces T_0 divide a ℓ_0 y $\pi\ell_0$, es decir, existen enteros $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ distintos de cero, tales que:

$$\ell_0=\tilde{p}T_0,\quad \pi\ell_0=\tilde{q}T_0.$$

Así, tenemos que $\pi=\tilde{q}/\tilde{p}$ lo cual también es una contradicción.

Por ende, $f_\delta\notin P_n$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y así la expresión (1,27) queda demostrada.

Finalmente, con todo lo hecho anteriormente, concluimos que:

$$P(\mathbb{R},\mathbb{R})=\bigcup_{n=0}^{\infty}P_n,$$

donde $\operatorname{int}(\bar{P}_n)=\varnothing$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, lo que implica que el conjunto $P(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un conjunto de primera categoría en $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. □

COROLARIO 1.5. *El conjuntos de las funciones continuas y periódicas $P(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tiene interior vacío en $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Demostración. Por lo hecho en el Teorema anterior, notemos que:

$$P(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n,$$

donde cada P_n es un conjunto cerrado en $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ con interior vacío. Finalmente, como el conjunto $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio métrico completo, del Teorema de Baire concluimos que el conjunto:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n = P(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

tiene interior vacío en $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. □

1.5. Envoltura de una función.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función casi periódica y considere $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números reales, notemos que de la definición dada por Bochner, existe una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\{f(t+h_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Así, a partir de lo anterior, definimos *la envoltura de* f, como el conjunto dado por:

$$H(f) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } f(t+h_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{ g unif. en } \mathbb{R}\}.$$

De la definición anterior, se sigue de inmediato que $f \in H(f)$, ya que basta tomar la sucesión identicamente nula, por ende, $H(f) \neq \varnothing$. Además, tenemos las siguientes propiedades:

Lema 1.4. *Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones casi periódicas. Entonces:*

(i) $g \in H(f)$, *si y solo si,* $f \in H(g)$.
(ii) *Si* $q \in H(g)$ *y* $g \in H(f)$, *entonces* $q \in H(f)$.
(iii) *Si* $g, q \in H(f)$, *entonces* $g \in H(q)$.

Demostración. *(i)* Si $g \in H(f)$, entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $f(t+h_n)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función g, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+h_n) - g(t)| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

De lo anterior, se sigue que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t-h_n) - f(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - f(t+h_n)| < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

lo cual implica que $\{g(t-h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, y en consecuencia, $f \in H(g)$.

Finalmente, si $f \in H(g)$, basta con realizar el mismo proceso que antes para concluir que $g \in H(f)$.
(ii) Si $q \in H(g)$ y $g \in H(f)$, existen sucesiones $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $g(t+h_n)$ y $f(t+j_n)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$ a q y g respectivamente. Así, existen N_1 y N_2, tales que:

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t+h_n) - q(t)| &< \varepsilon/2, \quad \forall n > N_1, \\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+j_n) - g(t)| &< \varepsilon/2, \quad \forall n > N_2. \end{aligned}$$

De esto, se sigue que:

$$
\begin{array}{ccccc}
f(t+h_1+j_1), & f(t+h_1+j_2), & \ldots & f(t+h_1+j_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & g(t+h_1) \\
f(t+h_2+j_1), & f(t+h_2+j_2), & \ldots & f(t+h_2+j_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & g(t+h_2) \\
f(t+h_3+j_1), & f(t+h_3+j_2), & \ldots & f(t+h_3+j_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & g(t+h_3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f(t+h_m+j_1), & f(t+h_m+j_2), & \ldots & f(t+h_m+j_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & g(t+h_m) \\
 & & & & & \Big\downarrow m\to\infty \\
 & & & & & q(t)
\end{array}
$$

Luego, consideremos la sucesión $\{f(t+h_n+j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, formada por los elementos de la diagonal del esquema anterior. Por ende, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para todo $n > N$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$|f(t+h_n+j_n) - q(t)| \leq \underbrace{|f(t+h_n+j_n) - g(t+h_n)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|g(t+h_n) - q(t)|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Lo cual, implica que:

$$f(t+h_n+j_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} q(t).$$

Por lo tanto $q \in H(f)$.
(iii) Si $g, q \in H(f)$, entonces de (i), se sigue que $f \in H(q)$ y $g \in H(f)$. Finalmente, de (ii) concluimos que $g \in H(q)$. $\square$

Ejemplo 1.5.1. Sea $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y considere $f(t) = \sin(\beta t)$. Veamos que la envoltura $H(f)$ de f es igual al siguiente conjunto:

$$S = \{a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t) \mid a^2 + b^2 = 1\},$$

en efecto, si $g \in H(f)$, entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(t+h_n)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a g. Por otro lado, notemos que:

$$f(t+h_n) = \sin(\beta t + \beta h_n) = \cos(\beta h_n)\sin(\beta t) + \sin(\beta h_n)\cos(\beta t).$$

Pero, como $\{\cos(\beta h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\sin(\beta h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas, sin pérdida de generalidad, existen dos subsucesiones $\{\cos(\beta h_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{\beta\sin(h_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ respectivamente tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\beta h_{n_k}) = a \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \sin(\beta h_{n_k}) = b.$$

Así:

$$\cos(\beta h_{n_k})\sin(\beta t) + \sin(\beta h_{n_k})\cos(\beta t) \xrightarrow[n\to\infty]{||\cdot||_\infty} a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t).$$

Pero, como $f(t+h_n)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a g, en particular, tenemos que:

$$\cos(\beta h_{n_k})\sin(\beta t) + \sin(\beta h_{n_k})\cos(\beta t) \xrightarrow[n\to\infty]{||\cdot||_\infty} g(t),$$

lo cual implica que $g(t) = a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)$ y además, como:

$$\cos^2(\beta h_{n_k}) + \sin^2(\beta h_{n_k}) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

se sigue que $a^2 + b^2 = 1$ y por ende $g \in S$. Ahora, si $g \in S$, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 = 1$, tales que:

$$g(t) = a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t).$$

Luego, dado que $a, b \in [-1, 1]$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\cos(\beta\theta) = a, \quad \text{y} \quad \sin(\beta\theta) = b.$$

Por ende, si consideramos la sucesión constante $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$h_n = \beta\theta, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tenemos que:

$$f(t + h_n) = \cos(\beta\theta)\sin(\beta t) + \sin(\beta\theta)\cos(\beta t) = a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t) = g(t),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f(t + h_n)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a $g(t)$. Por lo tanto $g \in H(f)$ y así $H(f) = S$.

Por ejemplo, considere $\beta = 1{,}75$, por ende, la función $f(t) = \sin(1{,}75t)$ cuya envoltura se puede ver a través de las siguientes gráficas:

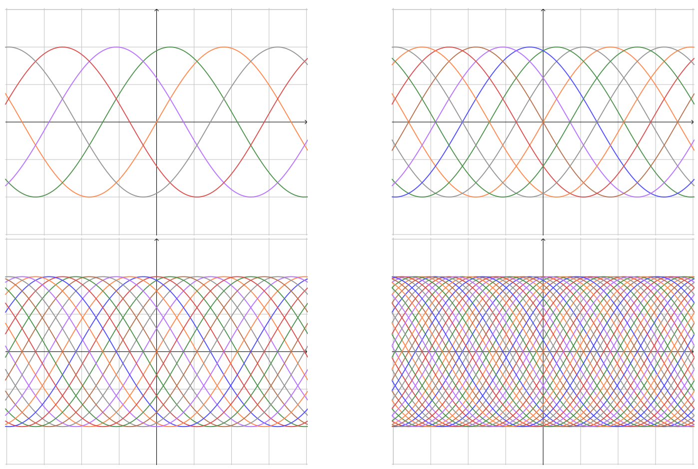

Figura 2. Gráfica de funciones pertenecientes a la envoltura de $f(t)$, en la parte superior de izquierda a derecha se muestran 5 y 10 elementos respectivamente mientras que en la parte inferior de izquierda a derecha se muestran 20 y 40 respectivamente.

1.6. Integral de una función casi periódica: algunos resultados

Es importante destacar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es casi periódica, no necesariamente es cierto que la función $t \mapsto \mathfrak{F}(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ también lo sea. Por ejemplo, si $f(t)$ es constante, $\mathfrak{F}(t)$ no es acotada y el Teorema 1.3 implica que $\mathfrak{F}(t)$ no es casi periodica. El resultado que estudiaremos a continuación proporciona una condición suficiente:

Teorema 1.11. *Sea $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces toda solución $t \mapsto F(t)$ acotada en $\mathbb{R}$ de la ecuación* (1,30) *es casi periódica.*

Este resultado tiene muchas demostraciones. Sin embargo, nos focalizaremos en la demostración realizada por Favard [**20**, pp.43–46] debido a que los métodos utilizados pueden ser adaptados al estudio de resultados más generales.

1.6.1. Preliminares. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función casi periódica y $f^* \in H(f)$, y consideremos la siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \tag{1.30}$$

$$\frac{dx}{dt} = f^*(t). \tag{1.31}$$

Considerando la definición del conjunto $H(f)$, estudiaremos la relación entre las soluciones de (1,30) y (1,31). Dicho esto, tenemos los siguientes lemas técnicos.

LEMA 1.5. *Sea $t \mapsto F(t)$ una solución acotada en $\mathbb{R}$ de* (1,30)*, entonces existe una solución $t \mapsto F^*(t)$ de* (1,31) *y una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(*i*) *La condición inicial de* (1,31) *satisface:*

$$\lim_{n\to+\infty} F(k_n) = F^*(0),$$

(*ii*) *$F(t + k_n)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos a $F^*(t)$,*

(*iii*) *las cotas inferiores y superiores de F y F^* satisfacen las siguientes relaciones:*

$$g := \inf_{t\in\mathbb{R}} F(t) \leq \inf_{t\in\mathbb{R}} F^*(t) := g' \quad \text{y} \quad G' := \sup_{t\in\mathbb{R}} F^*(t) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} F(t) := G.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, dado que $f^* \in H(f)$, existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $f(t + h_n)$ converge a f^* uniformemente en $\mathbb{R}$. Además, como F is acotada por hipótesis, se sigue que $\{F(h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Por ende, existe una subsucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} F(k_n) = \eta \in \mathbb{R}, \tag{1.32}$$

y además:

$$f(t + k_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} f^*(t). \tag{1.33}$$

Ahora, sea $t \mapsto F^*(t)$ una solución de (1,31) con condición inicial $F^*(0) = \eta$. Posteriormente, sea $t \in [-L, L]$, donde $L > 0$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces de (1,32) y (1,33), tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|F(k_n) - F^*(0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(t+k_n) - f^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \forall n > N, \forall t \in [-L, L]. \tag{1.34}$$

Además, como $F(t)$ es solución de (1,30), entonces $F(t + k_n)$ es solución de:

$$\frac{dx}{dt} = f(t + k_n).$$

Y como F^* es solución de (1,31), se sigue que:

$$\frac{d}{dt}\Big\{F(t + k_n) - F^*(t)\Big\} = f(t + k_n) - f^*(t),$$

lo cual, implica que:

$$F(t + k_n) - F^*(t) = F(k_n) - F^*(0) + \int_0^t \{f(s + k_n) - f^*(s)\}\, ds.$$

Luego, de (1.34), tenemos que para cada $n > N$ y $t \in [-L, L]$, se cumple:

$$\begin{aligned} |F(t+k_n) - F^*(t)| &\leq |F(k_n) - F^*(0)| + \int_0^t |f(s+k_n) - f^*(s)|ds, \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L}|t| = \varepsilon \end{aligned}$$

Lo que implica que $F(t+k_n)$ converge uniformemente en compactos a F^*, es decir:

(1.35) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\quad \text{t.q.}\quad n > N \Rightarrow |F(t+k_n) - F^*(t)| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [-L, L].$

Por ende, los puntos (i) y (ii) quedan demostrados.
Ahora, si $|t| \leq L$, de (1,35) se sigue que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\quad \text{t.q.}\quad n > N \Rightarrow F^*(t) < F(t+k_n) + \varepsilon < G + \varepsilon,$$

de lo anterior, tenemos que:

$$\sup_{|t| \leq L} F^*(t) < G + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Pero, como la parte derecha de la desigualdad anterior no depende de t, se tiene:

$$G' = \sup_{t \in \mathbb{R}} F^*(t) < G + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

y por ende $G' \leq G$. De igual forma, de (1,35), se tiene que:

$$-\varepsilon + g < \inf_{|t| \leq L} F^*(t), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Pero, dado que el lado izquierdo de la desigualdad anterior no depende de t, se sigue que:

$$-\varepsilon + g < \inf_{t \in \mathbb{R}} F^*(t) = g', \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Lo que implica que $g \leq g'$ finalizando así la demostración. □

Notemos que el lema anterior, proporciona un criterio para encontrar soluciones del sistema (1,31) a partir de las soluciones del sistema (1,30). Inversamente, aplicando el mismo proceso que en la demostración anterior, podemos encontrar un criterio para encontrar soluciones del sistema (1,30) a partir de la soluciones del sistema (1,31), todo esto se resume en el siguiente lema técnico cuya demostración es similar.

Lema 1.6. *Sea $t \mapsto F(t)$ una solución acotada en $\mathbb{R}$ de* (1,30), *y $t \mapsto F^*(t)$ una solución* (1,31) *dada por el Lema* 1,5. *Entonces existe una solución $t \mapsto \widetilde{F}(t)$ de* (1,30) *y una sucesión $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que:*

(i) *La condición inicial de* (1,30), *satisface:*

$$\lim_{n \to +\infty} F^*(k_n) = \widetilde{F}(0),$$

(ii) *$F^*(t+k_n)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos a $\widetilde{F}(t)$,*

(iii) *las cotas superior e inferiores de F^* y $\widetilde{F}$ satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$g' := \inf_{t \in \mathbb{R}} F^*(t) \leq \inf_{t \in \mathbb{R}} \widetilde{F}(t) := \tilde{g} \quad \text{y} \quad \tilde{G} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \widetilde{F}(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} F^*(t) := G'.$$

Es importante enfatizar que los resultados de los lemas anteriores, no aseguran inmediatamente la igualdad entre la soluciones $t \mapsto \widetilde{F}(t)$ y $t \mapsto F(t)$ de (1.30). sin embargo, esta equivalencia será probada en el siguiente lema:

LEMA 1.7. *Las soluciones* $t \mapsto F(t)$ *y* $t \mapsto \widetilde{F}(t)$ *de* (1.30)*, dadas por los lemas* 1,5 *y* 1,6 *respectivamente son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, notemos que toda solución de (1,30) es de la forma:

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds + C, \quad \text{para algún } C \in \mathbb{R}.$$

De esto, se sigue que para $F(t)$ y $\widetilde{F}(t)$ existen constantes A y $\tilde{A} \in \mathbb{R}$, tales que:

$$F(t) = \mathfrak{F}(t) + A, \quad \widetilde{F}(t) = \mathfrak{F}(t) + \tilde{A},$$

donde:

$$\mathfrak{F}(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Pero, lo anterior implica que:

$$\widetilde{F}(t) = F(t) + B, \quad \text{donde } B = \tilde{A} - A.$$

Como $B \in \mathbb{R}$ es una constante, usando lo anterior, es fácil notar que los infimos y supremos de $\widetilde{F}$ y F verifican:

$$\tilde{g} = g + B, \quad y \quad \tilde{G} = G + B.$$

De la igualdad anterior, combinada con los Lemas 1,5 y 1,6, tenemos que:

$$g \leq g' \leq \tilde{g} = g + B,$$

lo que implica que $0 \leq B$. Pero, por otro lado, también tenemos que:

$$G \geq G' \geq \tilde{G} = G + B,$$

es decir $B \leq 0$, por ende $B = 0$, lo que a su vez implica que $A = \tilde{A}$. Por lo tanto:

$$F(t) = \widetilde{F}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, F y $\widetilde{F}$ son iguales y además se tiene que $g = g'$ y $G = G'$. □

1.6.2. Demostración del Teorema 1.11. Dado que $t \mapsto F(t)$ es solución acotada de (1,30) se tiene que:

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds + C, \quad \text{para algún } C \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

Además, como f es casi periódica, dada una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $f(t + k_n)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $f^*(t)$. Luego, del Lema 1,5 se tiene que $F(t + k_n)$ converge uniformemente a $F^*(t)$ sobre conjuntos compactos. A continuación demostraremos por contradicción que $F(t + k_n)$ converge uniformemente a $F^*(t)$ en $\mathbb{R}$. Para hacer la lectura mas comprensible, dividiremos la demostración en cinco pasos.

Paso 1: Si $F(t + k_n)$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$, entonces no es una sucesión de cauchy, por ende:

$$\exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \overline{\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad m, n > N \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t + k_m) - F(t + k_n)| < \alpha\big)},$$

lo cual, es equivalente a:

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \overline{\big(m, n > N \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t + k_m) - F(t + k_n)| < \alpha\big)},$$

lo que a su vez implica:

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad m, n > N \quad \text{y} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t+k_m) - F(t+k_n)| \geq \alpha,$$

pero, la proposición anterior, es equivalente a:

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, M_n, N_n > n \quad \text{y} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t+k_{M_n}) - F(t+k_{N_n})| \geq \alpha.$$

Finalmente, de la proposición anterior, se sigue que:

$$\exists \alpha > 0\, \text{t.q.}\, \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, t_{M_n}, M_n, N_n > n \quad \text{y} \quad |F(t_{M_n}+k_{M_n}) - F(t_{M_n}+k_{N_n})| \geq \alpha.$$

Por otro lado, como $F(t+k_n)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos, tenemos que dado $\alpha > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$M_n, N_n > n \quad \text{y} \quad \sup_{t\in[-n,n]} |F(t+k_{M_n}) - F(t+k_{N_n})| < \alpha.$$

Por ende, tenemos que t_{M_n} es a una sucesión divergente, la cual satisface que $t_{M_n} \notin [-n, n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto, si $F(t+k_n)$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$, entonces existen:

a) Un número positivo $\alpha > 0$,
b) dos sucesiones $\{M_n\}$ y $\{N_n\}$,
c) una sucesión divergente $\{t_{M_n}\}$

tales que:

$$|F(t_{M_n}+k_{M_n}) - F(t_{M_n}+k_{N_n})| \geq \alpha. \tag{1.37}$$

Paso 2: Como F es acotada, existen dos subsucesiones $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente, tales que:

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_{\mu_n}+k_{\mu_n}) = \eta_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} F(t_{\mu_n}+k_{\nu_n}) = \eta_2.$$

Además, de (1,37), se sigue que $\eta_1 \neq \eta_2$. Por otro lado, como f es casi periódica, sin pérdida de generalidad, tenemos:

$$f(t+t_{\mu_n}+k_{\mu_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} f_1^*(t),$$

y

$$f(t+t_{\mu_n}+k_{\nu_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} f_2^*(t).$$

Paso 3: Por lo hecho en el Lema 1.5, podemos obtener subsucesiones tales que las funciones:

$$F(t+t_{\mu_n}+k_{\mu_n}) = \eta_1 + \int_0^{t+t_{\mu_n}+k_{\mu_n}} f(s)\,ds,$$

y

$$F(t+t_{\mu_n}+k_{\nu_n}) = \eta_2 + \int_0^{t+t_{\mu_n}+k_{\nu_n}} f(s)\,ds,$$

convergen uniformemente sobre conjuntos compactos a $F_1^*(t)$ y $F_2^*(t)$, respectivamente, donde estas últimas dos funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f_1^*(t),$$

y

$$\frac{dx}{dt} = f_2^*(t),$$

con condiciones iniciales η_1, η_2 respectivamente. Es decir:

$$\begin{aligned} F_1^*(t) &= \eta_1 + \int_0^t f_1^*(s)ds, \\ F_2^*(t) &= \eta_2 + \int_0^t f_2^*(s)ds. \end{aligned}$$

Paso 4: Como $\{f(t+k_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, tenemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+k_{\mu_n}) - f(t+k_{\nu_n})| < \varepsilon/3, \quad \forall n > N_1.$$

De lo anterior, se sigue que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+t_{\mu_n}+k_{\mu_n}) - f(t+t_{\mu_n}+k_{\nu_n})| < \varepsilon/3, \quad \forall n > N_1.$$

Por otro lado, de los pasos anteriores, tenemos que existen $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$, tales que:

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_1^*(t) - f(t+t_{\mu_n}+k_{\mu_n})| < \varepsilon/3, \quad \forall n > N_2, \\ &\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+t_{\mu_n}+k_{\nu_n}) - f_2^*(t)| < \varepsilon/3, \quad \forall n > N_3. \end{aligned}$$

Así, de las desigualdades anteriores, tenemos que para cada $t \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$|f_1^*(t) - f_2^*(t)| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto $f_1^*(t) = f_2^*(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Paso 5: Dado que $f_1^*(t) = f_2^*(t)$, tenemos:

$$\begin{aligned} F_1^*(t) &= \eta_1 + \int_0^t f_1^*(s)\,ds \\ &= \eta_1 - \eta_2 + \eta_2 + \int_0^t f_1^*(s)\,ds \\ &= \eta_1 - \eta_2 + F_2^*(t). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $f_1^* \in H(f)$ y $F(t_{\mu_n}+k_{\mu_n}) \to \eta_1$, de los Lemas 1,5, 1,6 y 1,7, se sigue que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} F(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} F_1^*(t) = G.$$

De igual forma, dado que $f_2^* \in H(f)$ y $F(t_{\mu_n}+k_{\nu_n}) \to \eta_2$, de los Lemas 1,5, 1,6 y 1,7 tenemos que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} F(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} F_2^*(t) = G.$$

Finalmente, de lo anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} F_1^*(t) &= \eta_1 - \eta_2 + \sup_{t\in\mathbb{R}} F_2^*(t) \\ G &= \eta_1 - \eta_2 + G, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\eta_1 = \eta_2$, obteniendo así una contradicción con lo hecho en el paso 2.

Por lo tanto, $t \mapsto F(t)$ es una función casi periódica.

1.7. Casi periodicidad en contextos mas generales

Sea X un $\mathbb{C}$–espacio de Banach con norma $||\cdot||$ y consideremos una función $f\colon \mathbb{R}\to X$.

Definición 1.5. *Se dice que $f\in \mathcal{AP}_{Bohr}(\mathbb{R},X)$, es decir, $f\colon\mathbb{R}\to X$ es Bohr–casi periodica si para todo $\varepsilon>0$ existe $\ell(\varepsilon)>0$ tal que todo intervalo de largo $\ell(\varepsilon)$ contiene un elemento τ tal que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t+\tau)-f(t)||<\varepsilon.$$

El caso del espacio de Banach $X=\mathbb{R}^n$ será de particular importancia.

Proposición 1.1. *Dada $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ tal que $f=(f_1,\ldots,f_n)$ se tiene que*

$$f\in\mathcal{AP}_{Bohr}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\quad \text{si y solo si}\quad f_i\in\mathcal{AP}_{Bohr}(\mathbb{R},\mathbb{R})\quad(\forall\, i=1,\ldots,n).$$

Demostración. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la norma infinito $||\cdot||_\infty$ y supongamos que $f\in\mathcal{AP}_{Bohr}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, entonces dado $\varepsilon>0$, existe $\ell(\varepsilon)>0$ tal que para todo intervalo de largo $\ell(\varepsilon)$ existe $\tau\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}||f(t+\tau)-f(t)||_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}}\text{máx}\,\{|f_1(t+\tau)-f_1(t)|,\ldots,|f_n(t+\tau)-f_n(t)|\}<\varepsilon.$$

Por ende, tenemos que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f_i(t+\tau)-f_i(t)|<\varepsilon,\quad \forall i=1,...,n.$$

Lo cual implica que $f_i\in\mathcal{AP}_{Bohr}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, para todo $i=1,...,n$.

Ahora, supongamos que $f_i\in\mathcal{AP}_{Bohr}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, para todo $i=1,...,n$. Entonces del Teorema 1,2 tenemos que el conjunto:

$$E=\bigcap_{i=1}^{n}E\{\varepsilon,f_i\},$$

es relativamente denso. Además, si $\tau\in E$, entonces $\tau\in E\{\varepsilon,f_i\}$, para todo $i=1,...,n$. Es decir:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f_i(t+\tau)-f_i(t)|<\varepsilon,\quad \forall i=1,...,n.$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}}\text{máx}\{|f_i(t+\tau)-f_i(t)|\ :\ i=1,...,n\} &< \varepsilon,\\ \sup_{t\in\mathbb{R}}||f(t+\tau)-f(t)||_\infty &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Por ende, $E\subseteq E\{f,\varepsilon\}$, y como E es relativamente denso, del Lema 1,1 se sigue que $E\{f,\varepsilon\}$ es relativamente denso y por lo tanto, $f\in\mathcal{AP}_{\text{Bohr}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. □

Otro enfoque muy importante que se le puede dar a las funciones casi periódicas es el que tiene que ver con el concepto de C^*- Álgebra, pero para esto, deberemos introducir algunos conceptos previos:

Definición 1.6. $(\mathcal{A},+,\cdot,*,||\cdot||)$ *es una C^*- álgebra si $(\mathcal{A},+,\cdot,||\cdot||)$ es un álgebra de de Banach sobre $\mathbb{C}$ y además la función $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ satisface:*

(a) $(x+y)^*=x^*+y^*$, *para todo* $x,y\in\mathcal{A}$,
(b) $(\lambda x)^*=\overline{\lambda}x^*$, *para todo* $x\in\mathcal{A},\lambda\in\mathbb{C}$,

(c) $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$, *para todo* $x, y \in \mathcal{A}$,
(d) $(x^*)^* = x$, *para todo* $x \in \mathcal{A}$,
(e) $||x \cdot x^*|| = ||x||^2$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$ *(C^* identidad).*

Es fácil notar que $(\mathbb{C}, +, \cdot, |\cdot|)$ es un ejemplo elemental e importante de C^*-álgebra. Por otro lado, el conjunto $M_n(\mathbb{C})$ de las matrices de orden n sobre $\mathbb{C}$ es una C^*-álgebra considerando la operación * como la traspuesta conjugada.

Definición 1.7. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos C^*- Álgebras. La aplicación $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un $^*-$homomorfismo si satisface:*
(a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, *para todo* $x, y \in \mathcal{A}$,
(b) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{A}$,
(c) $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$, *para todo* $x, y \in \mathcal{A}$,
(d) $T(x^*) = T^*(x)$, *para todo* $x \in \mathcal{A}$.

A partir de esto, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.8. *Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, su espectro de Gelfand es el conjunto $\Omega(\mathcal{A})$ formado por todos los $^*-$homomorfismos de $\mathcal{A}$ a $\mathbb{C}$, es decir:*

$$\Omega(\mathcal{A}) = \{\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \ : \ \varphi \text{ es } ^*\text{−homomorfismo}\}.$$

Ahora, si μ es la medida de Lebesgue, consideremos el conjunto $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ con su respectiva norma dada por:

$$||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|,$$

y además consideremos el conjunto:

$$A = \{e_\lambda(x) = e^{i\lambda x} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

y siguiendo los pasos de [**10**] trabajaremos con la siguiente definición de función casi periódica:

Definición 1.9. *El álgebra de las funciones casi periódicas $\mathcal{AP}$ es la subálgebra de $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ generada por el conjunto A.*

Por otra parte, definimos el siguiente tipo de función:

Definición 1.10. *Si $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función de la forma:*

$$p = \sum_{j=1}^{n} r_j e_{\lambda_j}, \quad \text{donde } r_j \in \mathbb{C}, \ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Entonces, decimos que p es un polinomio casi periódico. De igual forma, definimos AP^0 como el conjunto de todos los polinomios casi periódicos.

Ejemplo 1.7.1. De la definición anterior se sigue que:

$$p(x) = 10e^{ix} + (3 + 5i)e^{2ix} - 3ie^{\pi ix} + 2e^{5ix},$$

es un polinomio casi periódico. La gráfica de este polinomio está dada por la Figura 3 la cual fue obtenida a partir de [**10**, pag.7]

Observación 1.7.1. A partir de lo anterior, en [**10**] se establece que el conjunto $\mathcal{AP}$ es la clausura bajo la norma $||\cdot||_{L^\infty}$ de AP^0, es decir:

$$\mathcal{AP} = \overline{AP^0}^{||\cdot||_{L^\infty}}$$

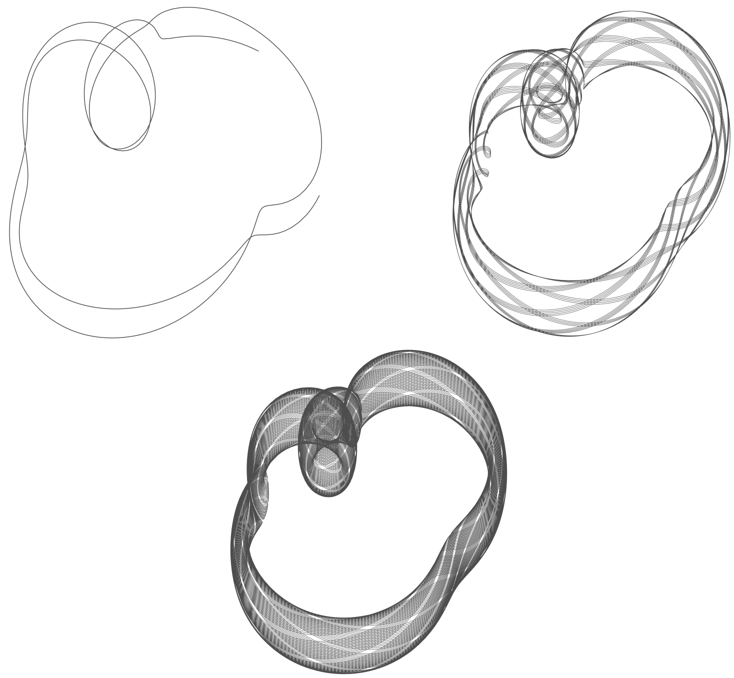

FIGURA 3. Gráfica de $10e^{ix}+(3+5i)e^{2ix}-3ie^{\pi ix}+2e^{5ix}$ para $x\in[-6,6],[-100,100]$ de izquierda a derecha respectivamente en la parte superior y $x\in[-300,300]$ en la parte inferior.

DEFINICIÓN 1.11. *Una colección* $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}\subseteq\mathbb{R}$ *se dice racionalmente dependiente si existen* $k_1,...,k_m\in\mathbb{Z}$ *no todos nulos, tales que:*

$$k_1\lambda_1+\cdots+k_m\lambda_m\in\mathbb{Z}.$$

De no cumplirse lo anterior, decimos que el conjunto $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$ *es racionalmente independiente.*

Así, presentamos el siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse en [**10**]:

TEOREMA 1.12. (Kronecker) *Sean* $\lambda_1,...,\lambda_m$ *en* $\mathbb{R}$ *y considere la función* $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{T}^m$ *dada por:*

$$\varphi(\ell)=(e^{2\pi i\lambda_1\ell},...,e^{2\pi i\lambda_m\ell}),$$

donde:

$$\mathbb{T}^m=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1\ \text{(m veces)}$$

Si $\lambda_1,...,\lambda_m$ *son racionalmente independientes, entonces* $\varphi(\mathbb{N})$ *es un subconjunto denso de* $\mathbb{T}^m$

COROLARIO 1.6. *Sean* $\lambda_1,...,\lambda_m$ *en* $\mathbb{R}$, $T\in\mathbb{R}$ *y considere la función:*

$$\varphi:]T,+\infty[\to\mathbb{T}^m,\quad x\mapsto(e^{i\lambda_1x},...,e^{i\lambda_mx})$$

Si $\lambda_1,...,\lambda_m$ *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{Z}$, *entonces* $\varphi(\,]T,+\infty[\,)$ *es un subconjunto denso de* $\mathbb{T}^m$

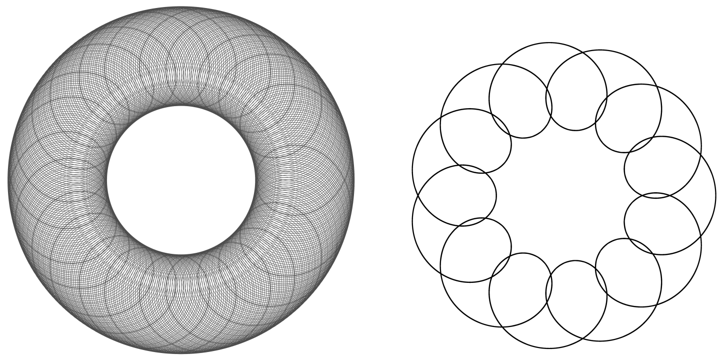

FIGURA 4. Gráfica de la imagen de $e^{ix} + 0{,}4e^{i\lambda x}$ para $x \in [-100, 100]$ considerando $\lambda = 4\pi$ en el lado izquierdo y $\lambda = 12$ en el lado derecho (ver [**10**, pag.10] para más detalles)

OBSERVACIÓN 1.7.2. De lo anterior, tenemos que si $f :]-100, +\infty[\to \mathbb{T}^2$ es una función dada por:

$$f(\ell) = \left(e^{i\ell}, e^{\lambda i \ell}\right)$$

entonces el conjunto:

$$f(\,]-100, +\infty[\,) = \left\{ \left(e^{i\ell}, e^{\lambda i\ell}\right) \,:\, \ell \in]-100, +\infty[\,\right\},$$

es denso en $\mathbb{T}^2$ si $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Esto se puede ver de mejor manera a través del gráfico dado en la Figura 4.

1.8. Comentarios sobre la parte 1

El espacio de las funciones casi periódicas puede ser visto como un caso particular de otros espacios.

El espacio de las funciones casi automórficas $\mathcal{AA}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Este espacio está formado por las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para toda sucesión $\{\tau_n\}_n$ existe una subsucesión τ_{n_k} y una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la sucesiones de funciones $\{f(t+\tau_{n_k})\}_{n_k}$ y $\{g(t-\tau_{n_k})\}_{n_k}$ convergen puntualmente a $g(t)$ y $f(t)$ respectivamente.

Las funciones casi automórficas fueron introducidas por W.A. Veech en [**44**] y desarrolladas por varios autores como H. Furstenberg y S. Bochner [**6**]. Una buena síntesis de este espacio se puede encontrar en la monografía de N'Guérékata [**35**].

Es fácil notar que $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{AA}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Además, a igual que las funciones casi–periodicas, el conjunto $\mathcal{AA}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la norma del supremo y un álgebra de Banach. Similarmente, toda función casi automórfica es acotada y uniformmente continua (una demostración elegante de estas propiedades puede consultarse en [**16**]).

El espacio de las funciones pseudo casi periódicas $\mathcal{PAP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Está formado por las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admiten la descomposición:

$$f(t) = g(t) + \phi(t)$$

donde $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\phi \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\phi(t)|\, dt = 0.$$

Este conjunto fué introducido por Chuanyi Zhang en una serie de artículos [**45, 46, 47**] y sistematizado en la monografía [**48**]. Es fácil demostrar que es un espacio de Banach.

El espacio de las funciones remotamente casi periódicas $\mathcal{RAP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Está formado por todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que los siguientes conjuntos

$$E\{f,\varepsilon\} = \left\{\tau \in \mathbb{R}\colon \limsup_{|t|\to+\infty} |f(t+\tau)-f(t)| < \varepsilon\right\}.$$

Son relativamente densos para todo $\varepsilon > 0$. Este espacio fué introducido por D. Sarason en [**40**] quien demuestra que es un espacio de Banach. Sin embargo, una demostración más detallada y completa puede consultarse en [**32**].

Por otro lado, es importante mencionar que también existe el concepto de función cuasi periódica, el cual no tiene relación con las definiciónes trabajadas anteriormente de casi periodicidad. **El espacio de las funciones cuasi periódicas** está formado por todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forma:

$$f(t) = F(\omega_1 t, ..., \omega_n t),$$

donde $F(x_1,...,x_n)$ es una función continua de periodo 2π en $x_1,...,x_n$. Los números reales $\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$ son llamados *frecuencias básicas* de $f(t)$. Además, en este caso tenemos que las funciones cuasi periódicas son un subconjunto de las fuciones casi periódicas. Diversos matemáticos han trabajado con funciones cuasi periódicas, entre ellos, P. Bhol en [**9**], de hecho, es por este trabajo que H. Bohr llamaba a las funciones cuasi periódicas como *funciones de Bohl.* Además, cabe destacar que las funciones cuasi periódicas precedieron a las funciones casi periódicas en el sentido de H. Bohr por varias décadas. Finalmente, otro matemático que ha trabajado con funciones cuasi periódicas es J. Moser, el cual en [**33**] trabaja con teoría de perturbaciones con sistemas Hamiltonianos para funciones cuasi periódicas.

Parte 2

Sistemas lineales no autónomos

2.1. Introducción

Consideremos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales no autónomo:

$$x' = A(t)x, \tag{2.1}$$

donde $t \in J \subseteq \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $t \mapsto A(t)$ es una función matricial continua en el intervalo J. Para una revisión detallada de la teoría de sistemas lineales no autónomos el lector puede consultar [**1**],[**28**].

Definición 2.1. *Una matriz fundamental del sistema* (2,1) *es una función matricial* $X : J \subseteq \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ *tal que sus columnas forman una base de soluciones de* (2,1) *y por lo tanto satisface la ecuación diferencial matricial:*

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

Como las columnas de la matriz fundamental forman una base de soluciones de (2,1), se sigue directamente que es una matriz invertible. Así, a partir de esto, definiremos el concepto de matriz de transición o de evolución.

Definición 2.2. *Si* $X : J \subseteq \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ *es una matriz fundamental del sistema* (2,1), *definimos la matriz de transición u operador de evolución como la función matricial dada por*

$$X(t,s) = X(t)X^{-1}(s).$$

Observación 2.1.1. Es fácil verificar que la matriz de transición asociada al sistema (2.1) tiene las siguientes propiedades:

(i) $X(t,t) = I$ para todo $t \in J$,
(ii) $X^{-1}(t,s) = X(s,t)$ para todo $t,s \in J$.
(iii) $\frac{\partial}{\partial t}X(t,s) = A(t)X(t,s)$,
(iv) $\frac{\partial}{\partial s}X(t,s) = -X(t,s)A(s)$.

Definición 2.3. *El sistema* (2.1) *es cinemáticamente similar al sistema*

$$y' = B(t)y \tag{2.2}$$

si existe una función matricial $Q\colon J \to M_n(\mathbb{R})$ *invertible y derivable, con las propiedades*

$$\sup_{t\in J} ||Q(t)|| \leq M, \quad \sup_{t\in J} ||Q^{-1}(t)|| \leq M, \quad \sup_{t\in J} ||\dot{Q}(t)|| \leq M,$$

y además satisface:

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t), \tag{2.3}$$

lo cual implica que el cambio de variables $x(t) = Q(t)y(t)$ *transforma* (2.1) *en* (2.2).

El concepto de similaridad cinemática es introducido por L. Markus en [**30**]. Sin embargo, el primer ejemplo de similaridad cinemática se remonta al trabajo de G. Floquet [**24**], en el cual se considera una matriz continua y ω–periódica $A(t+\omega) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ en (2.1) y se demuestra que la matriz de transición es de la forma

$$X(t,0) = P(t)e^{Dt} \quad \text{con } P(t+\omega) = P(t) \text{ y } D \in M_n(\mathbb{C}), \tag{2.4}$$

lo cual implica que el sistema ω–periódico (2.1) es cinemáticamente similar al sistema lineal autónomo

$$y' = Dy.$$

De igual forma, es natural preguntarse si A es una matriz casi periódica y además el sistema 2,1 es cinemáticamente similar a 2,2 entonces qué propiedades satisfacen las matrices

Es importante destacar que en la literatura soviética, la definición de similaridad cinemática se conoce como **reducibilidad.** En la misma literatura soviética, basta con que solo se cumpla la igualdad (2,3) para definir el concepto de similaridad cinemática. También es preciso advertir al lector que en el texto de Coppel [**15**] el concepto de **reducibilidad** corresponde a que un sistema sea cinemáticamente similar a un sistema triangular por bloques.

2.2. Dicotomía Exponencial

DEFINICIÓN 2.4. *El sistema* (2,1) *tiene dicotomía exponencial en* $J \subseteq \mathbb{R}$ *si existen números positivos* $K \geq 1$, $\alpha > 0$ *y un proyector* $P^2 = P$ *tal que para todo* $t, s \in J$ *se satisface:*

$$\begin{cases} ||X(t)PX^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s, \quad \text{donde } t, s \in J, \\ ||X(t)(I-P)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{si} \quad t < s, \quad \text{donde } t, s \in J, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde K *y* α *se conocen como las constantes de la dicotomía.*

DEFINICIÓN 2.5. *Supongamos que la ecuación* (2,1) *tiene Dicotomía exponencial en* $J \subseteq \mathbb{R}$ *con proyector* $P^2 = P$. *Entonces, se define la función de Green como la aplicación* $(t, s) \mapsto G(t, s)$ *dada por:*

$$G(t,s) = \begin{cases} X(t)PX^{-1}(s) & \text{si} \quad t \geq s, \quad \text{donde } t, s \in J, \\ -X(t)(I-P)X^{-1}(s) & \text{si} \quad t < s, \quad \text{donde } t, s \in J. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 2.2.1. Existen pocos criterios y métodos para determinar si el sistema (2.1) tiene la propiedad de dicotomía exponencial, a saber consideraremos los siguientes casos:

a) En el caso autónomo, la propiedad de dicotomía exponencial es equivalente a la propiedad de hiperbolicidad: En efecto, si $A(t) = A$ es constante para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces (2.1) tiene una dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ si y solo si los valores propios de A tienen parte real distinta de cero.
b) La dicotomía exponencial se preserva por similaridad cinemática: En efecto, en [**15**, p.41] se demuestra que si el sistema (2.1) tiene una dicotomía exponencial en J y es cinemáticamente similar a (2.2), entonces este último tambien tiene una dicotomía exponencial en J. Por ejemplo, si A es una función matricial continua tal que $A(t + \omega) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ el sistema (2.1) tiene una dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ si y sólo si ninguno de los valores propios de la matriz D definida en (2.4) tiene parte real distinta de cero.
c) La dicotomía exponencial se preserva ante perturbaciones pequeñas (propiedad de *Roughness*): En efecto, si (2.1) tiene una dicotomía exponencial en $[0, +\infty)$ y $B(t)$ es tal que

$$||B(t)|| \leq \delta \leq \frac{\alpha}{36K^5},$$

entonces se demuestra (ver [**15**, pp.42–46]) que el sistema

$$x' = [A(t) + B(t)]x$$

tambien tiene una dicotomía exponencial en $[0, +\infty)$.

El siguiente resultado es enunciado sin demostración en [**15**]:

Lema 2.1. *El sistema* (2,1) *tiene dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}$ *con* $K \geq 1$, $\alpha > 0$ *y un proyector* $P^2 = P$ *si y solo si para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que:*

$$|X(t)P\xi| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi| \quad \text{si} \quad t \geq s, \tag{2.6}$$

$$|X(t)(I-P)\xi| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}|X(s)(I-P)\xi| \quad \text{si} \quad t < s. \tag{2.7}$$

Demostración. Supongamos que (2,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ y probemos la desigualdad (2,6), para ello, notemos que (2,6) es válida para $P\xi = 0$. Luego, si $P\xi \neq 0$, entonces de la definición de norma matricial junto con la primera desigualdad de (2,5), se sigue que:

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)\nu| &\leq ||X(t)PX^{-1}(s)||\,|\nu|, \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\nu|, \end{aligned}$$

para todo $\nu \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. En particular, para $\nu = X(t)P\xi$. Por ende, para todo $t \geq s$, tenemos que:

$$|X(t)P\xi| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi|.$$

Además, siguiendo las mismas ideas anteriores, se sigue la desigualdad (2,7). Supongamos ahora que se cumplen (2,6) y (2,7) y veamos que la ecuación (2,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, para esto, considere ν tal que $P\xi = X^{-1}(t)\nu$ para $t \geq s$ y notemos que:

$$\begin{aligned} |X(t)P\xi| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi|, \\ |X(t)PX^{-1}(s)\nu| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}|X(t)X^{-1}(t)\nu|, \\ |X(t)PX^{-1}(s)\nu| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\nu|. \end{aligned}$$

Pero, la desigualdad anterior es válida para todo $\nu \in \mathbb{R}^n$, por ende:

$$||X(t)PX^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \forall\, t \geq s.$$

De igual forma obtenemos la segunda desigualdad de (2.5). Por lo tanto, el sistema (2.1) tiene dicotomía exponencial en todo $\mathbb{R}$. □

Lema 2.2. *Si el sistema* (2,1) *tiene dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}$*, entonces su única solución acotada es la trivial.*

Demostración. Sea $t \mapsto x^*(t)$ una solución acotada en $\mathbb{R}$ de (2,1) tal que en $t = 0$ pasa por $\xi \neq 0$. Luego, notemos que:

$$x^*(t) \quad = X(t)\xi = X(t)P\xi + X(t)(I-P)\xi.$$

Posteriormente, tenemos los siguientes casos:
Caso 1: $P\xi = \xi$, entonces:

$$x^*(t) = X(t)\xi = X(t)P\xi.$$

Pero, como (2,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, de la expresión (2,6) se sigue que:

$$|X(t)P\xi| \leq Ke^{-\alpha t}|P\xi|, \quad \forall t > 0.$$

lo cual implica que:

$$\lim_{t\to+\infty} |X(t)P\xi| = 0.$$

Por otro lado, notemos que de la desigualdad (2,6) se tiene:

$$\frac{1}{K}e^{-\alpha s}|P\xi| \leq |X(s)P\xi|.$$

Por ende, se sigue que $s \mapsto |X(s)P\xi|$ es no acotado en $\mathbb{R}^-$. Por lo tanto, tenemos que $t \mapsto x^*(t)$ es una solución no acotada en $\mathbb{R}^-$ lo cual contradice el hecho de ser acotada en $\mathbb{R}$.
Caso 2: $P\xi = 0$, entonces:

$$x^*(t) = X(t)\xi = X(t)(I-P)\xi.$$

Luego, como (2,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, de (2,7) se sigue que:

$$|X(t)(I-P)\xi| \leq K^{\alpha t}|(I-P)\xi|, \quad \forall t < 0.$$

Es decir:

$$\lim_{t\to-\infty} |X(t)(I-P)\xi| = 0.$$

Pero, de igual forma, tenemos que:

$$\frac{1}{K}e^{\alpha s}|(I-P)\xi| \leq |X(s)(I-P)\xi|, \quad \forall 0 < s,$$

lo cual implica que $t \mapsto |X(t)(I-P)\xi|$ no es acotada en $\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, tenemos que $t \mapsto x^*(t)$ no es acotada en $\mathbb{R}^-$ obteniendo así una contradicción.

Finalmente, notemos que para todo $\xi \neq 0$, se cumple:

$$x^*(t) - X(t)P\xi = X(t)(I-P)\xi.$$

Pero, como $t \mapsto x^*(t)$ es acotada en $\mathbb{R}$, el lado izquierdo de la igualdad anterior es acotada en $\mathbb{R}^+$, lo cual contradice el hecho que el lado derecho de la igualdad es no acotado en $\mathbb{R}^+$.

Por lo tanto, la única solución acotada de (2,1) es la identicamente nula. □

Si bien el siguiente resultado es demostrado por X. Chen y Y.H. Xia en [**17**], agregaremos más detalles para mejorar su comprensión:

LEMA 2.3. *Si el sistema (2.1) tiene Dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}$ *con proyector* P *y constantes* $K \geq 1$, $\alpha > 0$. *Entonces, para toda* $g \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *el sistema:*

$$x' = A(t)x + g(t), \tag{2.8}$$

tiene una única solución acotada.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que la función $t \mapsto x^*(t)$ definida por

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)g(s)\, ds. \tag{2.9}$$

es la única solución acotada de (2,8). En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x^*(t) &= A(t)\int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)\,ds + X(t)PX^{-1}(t)g(t) \\
&\quad -A(t)\int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}g(s)\,ds + X(t)(I-P)X^{-1}(t)g(t), \\
&= A(t)x^*(t) + X(t)\{P+(I-P)\}X^{-1}(t)g(t), \\
&= A(t)x^*(t) + g(t).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como g es acotada y el sistema (2,1) tiene Dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
||x^*(t)|| &\leq \int_{-\infty}^{t} ||X(t)PX^{-1}(s)||\,||g||_\infty\,ds \\
&\quad + \int_{t}^{+\infty} ||X(t)(I-P)X^{-1}(s)||\,||g||_\infty\,ds, \\
&\leq K||g||_\infty \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\,ds + K||g||_\infty \int_{t}^{+\infty} e^{-\alpha(s-t)}\,ds, \\
&\leq \frac{2K}{\alpha}||g||_\infty,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto implica que $t \mapsto x^*(t)$ es una solución acotada de (2,8).

Ahora veamos la unicidad de la solución, para ello, supongamos que existe otra solución acotada $t \mapsto x(t)$ en $\mathbb{R}$ de la ecuación (2,8), por ende, la función $t \mapsto x^*(t) - x(t)$ es acotada en $\mathbb{R}$ y además:

$$\frac{d}{dt}\{x^*(t) - x(t)\} = A(t)\{x^*(t) - x(t)\}.$$

Por ende, $t \mapsto x^*(t) - x(t)$ es una solución acotada en $\mathbb{R}$ de (2,1), pero como esta última ecuación tiene Dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, el Lema 2,2 implica que $x^*(t) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, la ecuación (2,8) tiene una única solución acotada, la cual está dada por la expresión (2,9). □

2.3. Una definición más general de la dicotomía exponencial

En la literatura también existe una definición mas general de dicotomía exponencial la cual trabaja con un proyector mas general (el proyector invariante) y sus propiedades.

Definición 2.6. *La función matricial* $P\colon J \subseteq \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ *es conocida como proyector invariante respecto a* (2.1) *si* $P^2(s) = P(s)$ *para todo* $s \in J$ *y además*

$$P(t)X(t,s) = X(t,s)P(s) \quad \text{para todo } t,s \in J. \tag{2.10}$$

Definición 2.7. *El sistema* (2,1) *tiene dicotomía exponencial en* $J \subseteq \mathbb{R}$ *si existen números positivos* $K \geq 1$, $\alpha > 0$ *y un proyector invariante tal que para todo* $t, s \in J$ *se satisface:*

$$\begin{cases} ||X(t,s)P(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s, \quad \text{donde } t,s \in J, \\ ||X(t,s)[I-P(s)]|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{si} \quad t < s, \quad \text{donde } t,s \in J, \end{cases} \tag{2.11}$$

donde K *y* α *se conocen como las constantes de la dicotomía.*

Una consecuencia muy importante de la condición (2.10) es que la dimensión del $\mathbb{R}$–subespacio vectorial $\ker P(t)$ es invariante[1] para todo $t \in J$, lo cual es consecuencia del siguiente resultado:

LEMA 2.4. *Sea $P : J \subseteq \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ un proyector invariante con respecto a* (2.1). *Si $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d\}$ es una base de* $\ker P(s)$ *entonces $\{X(t,s)\xi_i\}_{i=1}^{d}$ es una base de* $\ker P(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $s \in J$ fijo y considere $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 X(t,s)\xi_1 + \alpha_2 X(t,s)\xi_2 + \ldots + \alpha_d X(t,s)\xi_d &= 0, \\ X(t,s)\{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_d\xi_d\} &= 0. \end{aligned}$$

Luego, como $X(t,s)$ es invertible para todo $t, s \in J$, la igualdad anterior es equivalente a:

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_d\xi_d = 0,$$

pero, como $\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ es una base de ker $P(s)$ tenemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$. Ahora veremos que si $v \in \ker P(t)$, entonces este puede escribirse como combinación lineal de $\{X(t,s)\xi_i\}_{i=1}^{d}$.

En efecto, dados $s, t \in J$ si

$$\begin{aligned} v \in \ker P(t) &\Rightarrow P(t)v = 0 \\ &\Rightarrow X(s,t)P(t)v = 0 \\ &\Rightarrow P(s)X(s,t)v = 0 \\ &\Rightarrow X(s,t)v \in \ker P(s) \end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene que

$$X(s,t)v = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_d\xi_d,$$

y usando la identidad $X(s,t)^{-1} = X(t,s)$ se tiene que

$$v = \alpha_1 X(t,s)\xi_1 + \alpha_2 X(t,s)\xi_2 + \ldots + \alpha_d X(t,s)\xi_d,$$

por lo que se concluye que $\{X(t,s)\xi_i\}_{i=1}^{d}$ es una base de $\ker P(t)$. $\square$

Dado un proyector invariante $P(\cdot)$ consideramos el conjunto

$$\ker P = \{(t,x) \in J \times \mathbb{R}^n \colon x \in \ker P(t)\}$$

y las fibras de $t \in J$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in \ker P(t)\},$$

en efecto, una consecuencia interesante del resultado precedente es que las fibras de $\ker P$ son subespacios vectoriales de igual dimensión.

El siguiente resultado, el cual presentamos sin demostración, relaciona las dos definciones de dicotomía exponencial presentadas en este trabajo

LEMA 2.5 (Lema 2.2 [**18**]). *Si el sistema* (2,1) *tiene dicotomía exponencial en $J \subseteq \mathbb{R}$ en el sentido de la Definición* 2.7*, entonces existe un proyector*

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I_{N_1} & 0 \\ 0 & 0_{N_2} \end{bmatrix}$$

con $Dim \ker \tilde{P} = N_2$, tal que (2.1) *tiene una dicotomía exponencial en el sentido de la Definición* 2.5.

[1]Ese es el origen del nombre *Proyector Invariante*.

2.4. Espectro de Sacker y Sell

Consideremos ahora la familia de sistemas lineales para cada $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x' = [A(t) - \lambda I]x. \tag{2.12}$$

Notemos que la matriz fundamental del sistema anterior está dada por:

$$X_\lambda(t) = X(t)e^{-\lambda t}.$$

A partir de esto, junto con la Definición 2,4 tenemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema (2,12) tiene dicotomía exponencial en $J \subseteq \mathbb{R}$ si y solo si existe un proyector $P_\lambda^2 = P_\lambda$ y constantes $K \geq 1$, $\alpha > 0$ tales que:

$$\begin{cases} ||X(t)e^{-\lambda t}P_\lambda X^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s, \quad \text{donde } t,s \in J \\ ||X(t)e^{-\lambda t}(I - P_\lambda)X^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{si} \quad t < s, \quad \text{donde } t,s \in J. \end{cases}$$

Lo cual es equivalente a:

$$\begin{cases} ||X(t)P_\lambda X^{-1}(s)|| \leq Ke^{\lambda(t-s)}e^{-\alpha(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s \quad \text{donde } t,s \in J \\ ||X(t)(I - P_\lambda)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{\lambda(t-s)}e^{-\alpha(s-t)} & \text{si} \quad t < s \quad \text{donde } t,s \in J. \end{cases}$$

A partir de lo hecho anteriormente, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.8. *El Espectro de Sacker y Sell de* (2,1) *es el conjunto:*

$\Sigma_J(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \, : \, (2{,}12) \text{ no tiene Dicotomía exponencial en } J \subseteq \mathbb{R}\}$.

Además, si $J = \mathbb{R}$, entonces diremos que $\Sigma_{\mathbb{R}}(A) = \Sigma(A)$. De igual forma, definimos: $\Sigma_{\mathbb{R}^+}(A) = \Sigma_+(A)$ y $\Sigma_{\mathbb{R}^-}(A) = \Sigma_-(A)$.

Definición 2.9. *El resolvente asociado a* (2,1) *en un intervalo J es el conjunto:*

$$\rho_J(A) = \mathbb{R} \backslash \Sigma_J(A).$$

Las propiedades de dictotomía exponencial y casi periodicidad juegan un papel importante en la Teoría de Favard que veremos a continuación.

Observación 2.4.1. Notemos que de la definición de Dicotomía exponencial, se sigue directamente que si el sistema (2,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ entonces también cumple esta propiedad para todo intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, en particular, para $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$. De esto, se sigue que:

$$\Sigma(A) \subseteq \Sigma_+(A) \quad \text{y} \quad \Sigma(A) \subseteq \Sigma_-(A).$$

Pero por contraparte, el recíproco de la afirmación anterior, el cual es equivalente a la contención:

$$\Sigma_+(A) \cup \Sigma_-(A) \subseteq \Sigma(A),$$

no siempre es verdadero. De hecho, recientemente F. Batelli y K. J. Palmer [**4**] establecieron condiciones para obtener igualdad entre los conjuntos $\Sigma_{\mathbb{R}^+}(A) \cup \Sigma_{\mathbb{R}^-}(A)$ y $\Sigma(A)$, todo esto en el marco de sistemas lineales triangulares.

Por otro lado, Coppel en [**15**, p.70] prueba el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Si A es una matriz casi periódica, entonces:*

$$\Sigma_+(A) = \Sigma(A) = \Sigma_-(A).$$

2.5. Caracterización del espectro de Sacker y Sell

El siguiente resultado es clásico en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias y nos será útil para identificar algunas propiedades del espectro $\Sigma(A)$.

LEMA 2.6. *Si existe $L > 0$ tal que:*

$$||A(t)|| \leq L, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces:

$$||X(t,s)|| \leq e^{L|t-s|}, \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, si $t \geq s$, notemos que del hecho que:

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau, s) = A(\tau)X(\tau, s),$$

junto con que $X(s,s) = I$, se sigue que:

$$X(t,s) = I + \int_s^t A(\tau)X(\tau,s)\, d\tau,$$

lo cual implica que:

$$||X(t,s)|| \leq 1 + \int_s^t L||X(\tau,s)||\, d\tau.$$

Por ende, del Lema de Gronwall[2], se tiene:

$$||X(t,s)|| \leq e^{\int_s^t L} = e^{L(t-s)}.$$

De igual forma, si $s \geq t$, entonces:

$$\frac{d}{d\tau} X(t,\tau) = -X(t,\tau)A(\tau),$$

de esto, se sigue que:

$$X(t,s) = I - \int_t^s X(t,\tau)A(\tau)\, d\tau.$$

Así:

$$||X(t,s)|| \leq 1 + \int_t^s L||X(t,\tau)||\, d\tau.$$

Por lo tanto, del Lema de Gronwall, tenemos que:

$$||X(t,s)|| \leq e^{\int_t^s L} = e^{L(s-t)},$$

lo que implica que $||X(t,s)|| \leq e^{L|t-s|}$ para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. □

PROPOSICIÓN 2.1. *El conjunto $\rho(A)$ es abierto en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, notemos que si $\rho(A) = \varnothing$ o $\rho(A) = \mathbb{R}$ entonces el resultado se obtiene inmediatamete. Supongamos ahora que $\rho(A) \subsetneq \mathbb{R}$ y considere $\lambda \in \rho(A)$, de esto se sigue que la ecuación (2,12) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ lo cual implica que:

$$\begin{cases} ||X(t)P_\lambda X^{-1}(s)|| \leq Ke^{\lambda(t-s)}e^{-\alpha(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s \quad \text{donde } t,s \in J \\ ||X(t)(I-P_\lambda)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{\lambda(t-s)}e^{-\alpha(s-t)} & \text{si} \quad t < s \quad \text{donde } t,s \in J. \end{cases}$$

[2]Ver apéndice al final de la sección

Así:

$$\begin{cases} \quad ||X(t)P_\lambda X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-(\alpha-\lambda)(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s \quad \text{donde } t,s \in J \\ ||X(t)(I-P_\lambda)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-(\alpha+\lambda)(s-t)} & \text{si} \quad t < s \quad \text{donde } t,s \in J. \end{cases}$$

Ahora, si $\mu \in (\lambda - \alpha, \lambda + \alpha)$, de las desigualdades anteriores tenemos que:

$$\begin{cases} \quad ||X(t)P_\lambda X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-(\alpha-\lambda+\mu)(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s \quad \text{donde } t,s \in J \\ ||X(t)(I-P_\lambda)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-(\alpha+\lambda-\mu)(s-t)} & \text{si} \quad t < s \quad \text{donde } t,s \in J. \end{cases}$$

Luego, si consideramos $\beta = \text{mín}\{\alpha - \lambda + \mu, \alpha + \lambda - \mu\} > 0$, entonces:

$$\begin{cases} \quad ||X(t)P_\lambda X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\beta(t-s)} & \text{si} \quad t \geq s \quad \text{donde } t,s \in J \\ ||X(t)(I-P_\lambda)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\beta(s-t)} & \text{si} \quad t < s \quad \text{donde } t,s \in J, \end{cases}$$

lo que implica que $\mu \in \rho(A)$ y así $(\lambda - \alpha, \lambda + \alpha) \subset \rho(A)$. Por lo tanto, el conjunto $\rho(A)$ es abierto en $\mathbb{R}$. □

Corolario 2.1. *El espectro de Sacker y Sell $\Sigma(A)$ es cerrado en $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.2. *Si existe $L > 0$ tal que $||A(t)|| \leq L$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\Sigma(A)$ es compacto y además:*

$$\Sigma(A) \subseteq [\text{mín}\,\Sigma(A), \text{máx}\,\Sigma(A)] \subseteq [-L, L]$$

Demostración. Primero, si $t \geq s$, del Lema 2,6, se sigue que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisface que:

$$||X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}|| = e^{-\lambda(t-s)}||X(t,s)|| \leq e^{-\lambda(t-s)}e^{L(t-s)} = e^{(L-\lambda)(t-s)}.$$

Luego, si $\lambda = L + \delta$ para algún $\delta > 0$, entonces:

$$||X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \leq e^{-\delta(t-s)},$$

lo cual implica que para todo $\lambda \geq L$ el sistema (2,12) tiene discotomía exponencial en $\mathbb{R}$ con proyector $P = I$, por ende $(L, +\infty) \subseteq \rho(A)$. De igual forma, si $s \geq t$, del Lema 2,6 tenemos que:

$$||X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \leq e^{(L+\lambda)(s-t)},$$

así, si $\lambda = -(L + \delta)$, para alguún $\delta > 0$, entonces:

$$||X(t)e^{-\lambda t}X^{-1}(s)e^{\lambda s}|| \leq e^{-\delta(s-t)},$$

por ende, si $\lambda < -L$, entonces el sistema (2,12) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ con proyector $P = 0$, es decir, $(-\infty, L) \subseteq \rho(A)$.

Finalmente, dado que $(L, +\infty) \subseteq \rho(A)$ y $(-\infty, L) \subseteq \rho(A)$, tenemos que $\Sigma(A) \subset [-L, L]$

□

Lema 2.7. *Si el sistema* (2,1) *es cinemáticamente similar a* (2,2), *entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisface que el sistema* (2,12) *es cinemáticamente similar al sistema:*

$$y' = [B(t) - \lambda I]y. \tag{2.13}$$

Demostración. Como (2,1) es cinemáticamente similar a (2,2), existe una función matricial $Q(t)$ invertible y derivable, tal que:

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B(t),$$

lo cual es equivalente a:

$$\dot{Q}(t) = \{A(t) - \lambda I\}Q(t) - Q(t)\{B - \lambda I\}.$$

Finalmente, de lo anterior se sigue que el cambio de variable $y = Q^{-1}(t)x$ transforma la ecuación (2,12) en el sistema (2,13). Así, el sistema (2,12) es cinemáticamente similar a (2,13). $\square$

Teorema 2.3. *Si la ecuación* (2,1) *es cinematicamente similar a* (2,2) *entonces* $\Sigma(A) = \Sigma(B)$.

Demostración. Primero, como (2,1) es cinematicamente similar a (2,2) del Lema 2,7 tenemos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema (2,12) es cinemáticamente similar a (2,13). Además del punto b) de la observación 2,2,1, se sigue que $\lambda \in \rho(A)$ si y solo si $\lambda \in \rho(B)$. Por lo tanto, se concluye que $\Sigma(A) = \Sigma(B)$. $\square$

Además de estos resultados, tenemos el siguiente Teorema en relación al espectro de Sacker y Sell que enunciaremos sin demostración pero que el lector puede encontrar en [**29**]:

Teorema 2.4. *El espectro de Sacker y Sell* $\Sigma(A)$ *es la unión de* ℓ *intervalos cerrados, donde* $0 \leq \ell \leq n$, *los cuales pueden estar dados por las alguna de las siguientes formas:*

(*a*) $\Sigma(A) = \varnothing$,
(*b*) $\Sigma(A) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \cup [a_\ell, b_\ell]$,
(*c*) $\Sigma(A) = (-\infty, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \cup [a_\ell, b_\ell]$,
(*d*) $\Sigma(A) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \cup [a_\ell, +\infty)$,
(*e*) $\Sigma(A) = (-\infty, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \cup [a_\ell, +\infty)$.

2.6. Apéndice: Desigualdad de Gronwall

La desigualdad de Gronwall [**25**] es una herramienta muy útil para la demostración de la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Lema 2.8. **(Desigualdad de Gronwall)** *Sean* $u : [t_0, +\infty] \to (0, +\infty)$ *y* $P : [t_0, +\infty) \to [0, +\infty]$. *Si:*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds, \quad \text{para algún } c > 0. \tag{2.14}$$

Entonces:

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right).$$

Demostración. Primero, notemos que la desigualdad (2,14) es equivalente a:

$$\frac{u(t)}{c + \displaystyle\int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds} \leq 1.$$

De lo anterior, se sigue que:

$$\frac{P(t)u(t)}{c+\displaystyle\int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left\{c+\displaystyle\int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds\right\}}{c+\displaystyle\int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds} \leq P(t).$$

Por ende, si integramos la desigualdad anterior entre t_0 y t, tenemos:

$$\ln\left(c+\int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds\right) \leq \ln(c) + \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt,$$

es decir:

$$c+\int_{t_0}^{t} P(s)u(s)\,ds \leq c\exp\left(\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt\right).$$

Finalmente, de la expresión (2,14) concluimos que:

$$u(t) \leq c\exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right).$$

□

2.7. Comentarios sobre la Parte 2

Existen diversas dicotomías que generalizan la dicotomía exponencial. Por ejemplo, in 1973, R. Martin Jr. [**31**] introdujo la **dicotomía exponencial generalizada** en $\mathbb{R}$ de la manera siguiente:

(2.15)
$$\left\{\begin{array}{rcll} ||X(t)PX^{-1}(s)|| & \leq & K\exp\left(-\displaystyle\int_{s}^{t}\alpha(r)\,dr\right) & \text{para todo} \quad t\geq s, \\ ||X(t)(I-P)X^{-1}(s)|| & \leq & K\exp\left(-\displaystyle\int_{t}^{s}\alpha(r)\,dr\right) & \text{para todo} \quad s\geq t, \end{array}\right.$$

donde $r\mapsto\alpha(r)$ es una función no negativa y continua que verifica $\alpha\notin L^1(-\infty,-c]\cap L^1[c,+\infty)$ para toda constante $c>0$.

Es importante notar que (2.15) coincide con la dicotomía exponencial si y sólo si existe $\alpha_0>0$ tal que $\liminf\limits_{|t|\to+\infty}\alpha(t)>\alpha_0$.

Por ejemplo [**27**, p.487], los siguientes sistemas satisfacen (2.15) pero no la dicotomía exponencial:

$$(2.16) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & -\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{|t|+1}}x_1 \\ x_2' & = & \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{|t|+1}}x_2 \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & -\dfrac{1}{1+\sqrt{|t|}}x_1 \\ x_2' & = & \dfrac{1}{1+\sqrt{|t|}}x_2. \end{array}\right.$$

En los años 90, R. Naulin y M. Pinto [**34**] extendieron la definición precedente mediante la **dicotomía** (h,k) en $\mathbb{R}$:

$$(2.17) \qquad \left\{\begin{array}{rcll} ||X(t)PX^{-1}(s)|| & \leq & Kh(t)h^{-1}(s) & \text{para todo} \quad t\geq s, \\ ||X(t)(I-P)X^{-1}(s)|| & \leq & Kk(s)k^{-1}(t) & \text{para todo} \quad s\geq t, \end{array}\right.$$

donde h y $k^{-1}=1/k$ son funciones positivas decrecientes tales que

$$h(0)=k(0)=1, \quad \lim_{r\to+\infty}h(r)=0, \quad \text{y} \quad \lim_{r\to+\infty}k(r)=+\infty.$$

Podemos ver que (2.15) es un caso particular de (2.17) con $h(t) = k^{-1}(t) = \exp(-\int_0^t \alpha(r)\,dr)$.

Por otro lado, K. J. Palmer en [**38**] estableció condiciones para asegurar la equivalencia topológica entre las soluciones del sistema de ecuaciones lineales:

$$y' = A(t)y,$$

y las soluciones de:

$$x' = A(t)x + f(t,x),$$

donde $A(t)$ es una función matricial acotada y continua de $n \times n$ y:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

satisface algunas condiciones técnicas. Un hecho clave en la demostración de este resultado es que la ecuación diferencial ordinaria no autónoma $y' = A(t)y$ tiene dicotomía exponencial lo cual junto con otras condiciones técnias aseguran la existencia de una aplicación $H : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\nu \mapsto H(t,\nu)$ es un homeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$ fijo, el cual lleva soluciones del sistema homogéneo a soluciones del sistema no homogéneo.

Parte 3

Teoría de Favard

3.1. Preliminares

Consideremos la ecuación:

$$x' = A(t)x, \tag{3.1}$$

donde ahora $t \mapsto A(t)$ es una función matricial casi periódica, es decir, $t \mapsto a_{ij}(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo par $i, j = 1, \ldots, n$ y además consideremos la ecuación no homogenea asociada:

$$x' \;=\; A(t)x + g(t), \tag{3.2}$$

donde $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

A partir de los sistemas anteriores, definimos las siguientes familias de sistemas asociados a las envolturas respectivas:

$$\frac{dx}{dt} \;=\; A^*(t)x, \quad \text{para toda } A^* \in H(A), \tag{3.3}$$

$$\frac{dx}{dt} \;=\; A^*(t)x + g^*(t), \quad \text{para toda } A^* \in H(A) \text{ y } g^* \in H(g). \tag{3.4}$$

3.2. Primer Teorema de Favard

El siguiente resultado es presentado por Favard en [**20**].

Teorema 3.1. **(Primer Teorema de Favard)** *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

- ($\mathcal{F}_{1a}$) *El sistema no homogeneo* (3,2) *tiene una solución acotada.*
- ($\mathcal{F}_{1b}$) *La familia de sistemas* (3,3) *no tiene soluciones acotadas a excepción de la trivial,*

entonces la solución acotada de (3,2) *es casi periódica y todo sistema de la familia* (3,4) *admite una solución casi periódica.*

La demostración de este teorema será consecuencia de los siguientes resultados

Lema 3.1. *(Paso 1) Si la familia de sistemas* (3,3) *no tiene soluciones acotadas a excepción de la trivial, entonces todo sistema de* (3,4) *tiene una única solución acotada*

Demostración. Sean x_1, x_2 soluciones acotadas para un determinado sistema de la familia (3,4), entonces $x_1 - x_2$ es acotado y además:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{x_1(t) - x_2(t)\} &= A^*(t)x_1(t) + g^*(t) - A^*(t)x_2(t) - g^*(t), \\ &= A^*(t)\{x_1(t) - x_2(t)\},\end{aligned}$$

así, $t \mapsto x_1(t) - x_2(t)$ es una solución acotada de algún sistema de la familia (3,3). Pero, de la hipótesis se sigue que $x_1(t) = x_2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y por ende, cualquier sistema de la familia (3,4) tiene a lo mas, una solución acotada. □

Lema 3.2. *(Paso 2) Si* (3,2) *tiene una solución acotada* $t \mapsto u(t)$*, entonces existe una solución acotada* $t \mapsto u^*(t)$ *de la familia de sistemas* (3,4) *y una sucesión* $\{h_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ *tal que* $u(t + h_\nu)$ *converge uniformemente a* $u^*(t)$ *sobre compactos y además:*

$$||u^*||_\infty \leq ||u||_\infty$$

Demostración. Como A es casi periódica, existe una sucesión $\{h_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $A(t+h_\nu)$ converge uniformemente a la matriz $A^*(t)$ en $\mathbb{R}$. Además, sin pérdida de generalidad, tenemos que:

$$\lim_{\nu\to\infty} u(h_\nu) = u^*(0). \tag{3.5}$$

Luego, sea $u^*(t)$ una solución de (3,4) con condición inicial dada por el límite (3,5), entonces:

$$\frac{d}{dt}\{u(t+h_\nu)-u^*(t)\} = A(t+h_\nu)u(t+h_\nu)+g(t+h_\nu)-A^*(t)u^*(t)-g^*(t).$$

De lo anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned}
|u(t+h_\nu)-u^*(t)| &\le |u(h_\nu)-u^*(0)| + \left|\int_0^t g(t+h_\nu)-g^*(s)ds\right| \\
&\quad + \left|\int_0^t A(s+h_\nu)u(s+h_\nu)-A^*(s)u^*(s)ds\right|, \\
&\le |u(h_\nu)-u^*(0)| + \\
&\quad \int_0^t |\{A(s+h_\nu)-A^*(s)\}u(s+h_\nu)| + |A^*(s)\{u(s+h_\nu)-u^*(s)\}|ds, \\
&\le |u(h_\nu)-u^*(0)| + ||u||_\infty \int_0^t |A(s+h_\nu)-A^*(s)|ds \\
&\quad + ||A^*||_\infty \int_0^t |u(s+h_\nu)-u^*(s)|ds.
\end{aligned}$$

Luego, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el compacto $[-L, L]$, donde $L > 0$. Por otro lado, de (3,5) junto con el hecho que $A(t+h_\nu)$ converge uniformemente a $A(t)$ en $\mathbb{R}$, se sigue que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tales que:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+h_\nu)-A^*(t)| &< \frac{\varepsilon}{2L||u||_\infty e^{L||A||_\infty}}, \quad \forall\nu > N_1. \\
|u(h_\nu)-u^*(0)| &< \frac{\varepsilon}{2e^{L||A||_\infty}}, \quad \forall\nu > N_2.
\end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores, se sigue que si $t \in [-L, L]$ y $\nu > N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
|u(t+h_\nu)-u^*(t)| &< \frac{\varepsilon}{2e^{L||A||_\infty}} + \frac{||u||_\infty t\varepsilon}{2L||u||_\infty e^{L||A||_\infty}} + ||A^*||_\infty \int_0^t |u(s+h_\nu)-u^*(s)|ds, \\
&\le \frac{\varepsilon}{2e^{L||A||_\infty}} + \frac{L||u||_\infty \varepsilon}{2L||u||_\infty e^{L||A||_\infty}} + ||A^*||_\infty \int_0^t |u(s+h_\nu)-u^*(s)|ds, \\
&= \frac{\varepsilon}{e^{L||A||_\infty}} + ||A^*||_\infty \int_0^t |u(s+h_\nu)-u^*(s)|ds.
\end{aligned}$$

Posteriormente, del Lema de Gronwall (ver apéndice) tenemos que para todo $t \in [-L, L]$ y $\nu > N$, se cumple que:

$$|u(t+h_\nu)-u^*(t)| < \frac{\varepsilon}{e^{L||A||_\infty}} e^{t||A^*||_\infty} \le \frac{\varepsilon}{e^{L||A||_\infty}} e^{L||A^*||_\infty} = \varepsilon.$$

Por ende, $u(t+h_\nu)$ converge uniformemente sobre compactos a $u^*(t)$. Ahora, notemos que si $t \in \mathbb{R}$, existe $T > 0$, tal que $t \in [-T, T]$ y así, dado $\varepsilon > 0$ existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{-T<t<T} |u(t+h_\nu) - u^*(t)| < \varepsilon, \quad \forall\, \nu > N$$

Recordando que $t \mapsto u(t)$ es acotada, tenemos que para cada $t \in [-T, T]$ y $\nu > N$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |u^*(t)| - |u(t+h_\nu)| &< \varepsilon, \\ |u^*(t)| &< |u(t+h_\nu)| + \varepsilon, \\ |u^*(t)| &< ||u||_\infty + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pero, como la parte izquierda de la desigualdad anterior no depende de t, se sigue que:

$$||u^*||_\infty < ||u||_\infty + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

lo cual implica que $||u^*||_\infty \leq ||u||_\infty$. □

Siguiendo las ideas y métodos del Lema anterior se obtiene fácilmente el siguiente resultado:

COROLARIO 3.1. *Si* (3,4) *tiene una solución acotada* $t \mapsto u^*(t)$, *entonces existe una solución acotada* $t \mapsto \tilde{u}(t)$ *de la familia de sistemas* (3,2) *y una sucesión* $\{h_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u^*(t+h_\nu)$ *converge uniformemente a* $\tilde{u}(t)$ *sobre compactos y además:*

$$||\tilde{u}||_\infty \leq ||u^*||_\infty.$$

Demostración del Primer Teorema de Favard. Primero, de la condición $(\mathcal{F}_{1b})$ junto con el Lema 3,1, se sigue que cualquier sistema de la familia (3.4) tiene a lo mas, una solución acotada. Además, del Lema 3,2 tenemos que para cada solución acotada $t \mapsto u(t)$ de (3.2), cuya existencia está dada por la hipótesis $(\mathcal{F}_{1a})$, existe una solución acotada $t \mapsto u^*(t)$ de la familia de sistemas (3.4) tal que $u(t+h_\nu)$ converge uniformemente a $u^*(t)$ sobre conjuntos compactos.

Veamos ahora que $u(t+h_\nu)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a u^*, la prueba la haremos por contradicción imitando las ideas de la demostración del Teorema 1.11. Si $u(t+h_\nu)$ no converge uniformemente a $u^*(t)$, entonces la sucesión $\{u(t+h_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\overline{\exists N \in \mathbb{N} \ \text{ t.q } \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t+h_m) - u(t+h_n)| < \alpha.}$$

Así, existen sucesiones $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t+h_{\nu_n}) - u(t+h_{\pi_n})| \geq \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Como $u(t)$ converge uniformemente a $u^*(t)$ sobre conjuntos compactos, existe una sucesión divergente $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$|u(t_n+h_{\nu_n}) - u(t_n+h_{\pi_n})| \geq \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, como $u(t)$ es acotada, sin pérdida de generalidad, supongamos que:

$$\lim_{n\to\infty} u(t_n+h_{\nu_n}) = \eta_1, \tag{3.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} u(t_n+h_{\pi_n}) = \eta_2. \tag{3.8}$$

Además, considere los siguientes sistemas pertenecientes a la familia (3,4):

$$\begin{aligned} S^{(1)}: \quad \frac{dx}{dt} &= A_1^*(t)x + g_1^*(t), \\ S^{(2)}: \quad \frac{dx}{dt} &= A_2^*(t)x + g_2^*(t), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A(t+t_n+h_{\nu_n}) &\xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} A_1^*(t), \qquad g(t+t_n+h_{\nu_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} g_1^*(t), \\ A(t+t_n+h_{\pi_n}) &\xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} A_2^*(t), \qquad g(t+t_n+h_{\pi_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} g_2^*(t). \end{aligned}$$

Sean $t \mapsto u_1(t)$ y $t \mapsto u_2(t)$ soluciones para los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ con condiciones iniciales dadas por (3,7) y (3,8) respectivamente. Por otro lado, del Lema 3,2, se sigue que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son soluciones acotadas.

Ahora veremos que los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ son equivalentes. En efecto, notemos que $\{A(t+h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por ende, existe $N_1 > 0$, tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+h_{\nu_n}) - A(t+h_{\pi_n})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N_1,$$

lo cual implica que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+t_n+h_{\nu_n}) - A(t+t_n+h_{\pi_n})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N_1.$$

Por otro lado, existen $N_2, N_3 > 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+t_n+h_{\nu_n}) - A_1^*(t)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N_2, \\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+t_n+h_{\pi_n}) - A_2^*(t)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N_3. \end{aligned}$$

Por ende, si $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$, entonces:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A_1^*(t) - A_2^*(t)| < \varepsilon$$

De esta forma, concluímos que $A_1^*(t) = A_2^*(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, aplicando un proceso análogo al anterior, se sigue que $g_1^*(t) = g_2^*(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto, tenemos que $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ son equivalentes, por otro lado, como probamos en el Lema 3,1 tenemos que $S^{(1)}$ tiene una única solución acotada, junto con esto, tenemos que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son soluciones acotadas de $S^{(1)}$, por ende, se sigue que $u_1(t) = u_2(t)$, lo cual contradice la expresión (3,6) pues $\eta_1 = \eta_2$.

Por ende, $u(t+h_\nu)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $u^*(t)$ y así, $u(t)$ es una función casi periódica.

Finalmente, tenemos que $u^*(t)$ es solución de un sistema de la familia (3,4). Además:

$$u(t+h_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} u^*(t).$$

Y como el conjunto de las funciones casi periódicas es un espacio de Banach, concluímos que u^* es casi periódica. □

Observación 3.2.1. Es interesante destacar lo restrictivo de las condiciones $(\mathcal{F}_{1a})$ y $(\mathcal{F}_{1b})$. Esto es incluso señalado en el trabajo original de Favard [**20**]. Sin embargo, cuando el sistema lineal (2,1) verifica la propiedad de dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ es posible verificar las hipótesis $(\mathcal{F}_{1a})$ y $(\mathcal{F}_{1b})$ en algunos casos como veremos a continuación

Lema 3.3. *Si el sistema casi periodico* (3,1) *tiene una dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}$*, entonces para toda matriz* $A^* \in H(A)$*, se verifica que el sistema*

$$x' = A^*(t)x \tag{3.9}$$

tambien tiene una dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ *y por lo tanto, verifica la propiedad* $(\mathcal{F}_{1b})$.

Demostración. Sea $A^* \in H(A)$, entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A(t+h_n)$ converge uniformemente a $A^*(t)$ en $\mathbb{R}$. Luego, dado que toda sucesión tiene una subsucesión monótona, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente (en caso de ser monótona decreciente el desarrollo es análogo). Ahora, del hecho que (3,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, se sigue que existen números $K \geq 1$, $\alpha > 0$ y un proyector $P^2 = P$ tal que para todo par de números $t, s \in \mathbb{R}$ se satisface (2,5). Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el sistema:

$$x' = A(t + h_n)x. \tag{3.10}$$

Notemos que si $X(t)$ es matriz fundamental de (3,1), entonces:

$$X_n(t) = X(t + h_n)X^{-1}(h_n),$$

es matriz fundamental de (3,10), además es importante notar que $X_n(0) = I$ y que además es invertible para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, recordemos que $\det X_n(t) = \det X(t + h_n) \det X^{-1}(h_n)$ y además las columnas de $X(\cdot)$ forman un conjunto linealmente independiente.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el proyector $P_n^2 = P_n$:

$$P_n = X(h_n)PX^{-1}(h_n).$$

Como (3,1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, en particular, tiene dicotomía exponencial en $[0, +\infty)$, de esto, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ el sistema (3,10) tiene dicotomía exponencial con las constantes K y α asociadas a (2,5) y el proyector P_n, es decir:

$$\begin{cases} ||X_n(t)P_nX_n^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{si} \quad -h_n \leq s \leq t, \\ ||X_n(t)(I - P_n)X_n^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{si} \quad -h_n \leq t < s. \end{cases}$$

De lo anterior, se sigue que $||P_n|| = ||X(h_n)PX^{-1}(h_n)|| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, sin pérdida de generalidad, supongamos que P_n converge a Q, donde Q es otro proyector, en efecto:

$$Q^2 = \lim_{n\to+\infty} P_n^2 = \lim_{n\to+\infty} P_n = Q.$$

Ahora, si $Y(t)$ es matriz fundamental del sistema (3,9) tal que $Y(0) = I$, entonces:

$$\frac{d}{dt}\{X_n(t) - Y(t)\} = A(t + h_n)X_n(t) - A^*(t)Y(t),$$

y además, sea $|t| \leq T$ para algún $T > 0$, de lo anterior, tenemos que:

$$|X_n(t) - Y(t)| \leq \int_0^t |A(s+h_n)X_n(s) - A^*(s)Y(s)|\, ds.$$

Por otro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||A(s+h_n) - A^*(s)||_\infty < \frac{\varepsilon}{TM_1 e^{T||A||_\infty}}, \quad \forall n > N,$$

donde $M_1 = \sup_{-T \leq t \leq T} ||Y(t)||$. De esta forma, si $G(t) = X_n(t) - Y(t)$ y $n > N$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |G(t)| &\leq \int_0^t |A(s+h_n)X_n(s) - A^*(s)Y(s)|\, ds, \\ &\leq \int_0^t |A(s+h_n)G(s)|\, ds + \int_0^t |\{A(s+h_n) - A^*(s)\}Y(s)|\, ds. \end{aligned}$$

Posteriormente, como $|t| < T$, tenemos que:

$$|G(t)| \leq \int_0^t |A(s+h_n)G(s)|\, ds + ||A(s+h_n) - A^*(s)||_\infty\, M_1 T,$$

lo cual implica que:

$$|G(t)| \leq \frac{\varepsilon}{e^{T||A||_\infty}} + \int_0^t |A(s+h_n)|\, |G(s)|\, ds$$

Así, por lema de Gronwall, tenemos que:

$$|X_n(t) - Y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{e^{T||A||_\infty}} \exp\left(\int_0^t |A(s+h_n)|\, ds\right) \leq \frac{\varepsilon}{e^{T||A||_\infty}} e^{T||A||_\infty} = \varepsilon,$$

para todo $n > N$ y $t \in [-T, T]$, por ende, $X_n(t)$ converge uniformemente sobre compactos a $Y(t)$. Por otro lado, notemos que $X_n(t)$ es invertible para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, donde además $X_n^{-1}(t)$ está dada por:

$$X_n^{-1}(t) = \frac{1}{\det X_n(t)} \mathrm{Adj} X_n(t).$$

Luego, dado que $\det X_n(t)$ y $\mathrm{Adj} X_n(t)$ son resultados de sumas y productos de las entradas de la matriz $X_n(t)$ junto con el hecho de que $X_n(t)$ converge uniformemente sobre compactos a $Y(t)$, se sigue que $\det X_n(t)$ y $\mathrm{Adj}\, X_n(t)$ convergen uniformemente sobre compactos, lo que a su vez implica que:

$$X_n^{-1}(t) = \frac{1}{\det X_n(t)} \mathrm{Adj} X_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{||\cdot||_\infty} \frac{1}{\det Y(t)} \mathrm{Adj} Y(t) = Y^{-1}(t),$$

para todo t en algún compacto. Finalmente, sean $t \geq s$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$t \geq s \geq -h_{n_k} \geq -h_{n_{k+j}}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Así, para estos valores de t y s se tiene que:

$$||X_{n_{k+j}}(t) P_{n_{k+j}} X_{n_{k+j}}^{-1}(s)|| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Pero, como t y s son fijos, aplicando el límite cuando n tiende a infinito a la desigualdad anterior concluímos que:

$$||Y(t) Q Y^{-1}(s)|| \leq K e^{-\alpha(t-s)}.$$

De igual forma, si $s \geq t$, tenemos que:

$$||Y(t)(I-Q)Y^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}.$$

Por lo tanto, el sistema (3,9) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ y del Lema 2,2 se concluye que (3,9) verifica la condición $(\mathcal{F}_{1b})$. □

EJEMPLO 3.2.1. Consideremos las ecuaciones diferenciales escalares:

$$x' = ax, \tag{3.11}$$

$$x' = ax + g(t), \tag{3.12}$$

donde $a < 0$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es casi periódica.

Por otro lado, dado que a es constante, se sigue que $H(a) = \{a\}$. Por lo tanto, la familia de ecuaciones asociadas a las envolturas de a y g están dados respectivamente por la misma (3.11) y

$$x' = ax + g^*(t), \quad \text{para todo } g^* \in H(g). \tag{3.13}$$

Ahora,veamos que la función $x \mapsto x(t)$ dada por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a(t-s)} g(s) ds, \tag{3.14}$$

es una solución acotada de (3.12). En efecto, es fácil verificar que

$$|x(t)| \leq \frac{||g||_\infty}{|a|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, como la única solución acotada de (3,11) es la idénticamente nula, el primer Teorema de Favard afirma que que la función dada por (3,14) es casi periódica y para cada $g^* \in H(g)$, la ecuación (3,13) admite una solución casi periódica. En efecto, siguiendo las ideas desarrolladas por Zhang en [**46**, Th.2.1] se puede demostrar que la única solución casi periódica de (3.13) es

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a(t-s)} g^*(s) ds.$$

Finalmente, es útil notar que la casi periodicidad de $t \mapsto x^*(t)$ y $t \mapsto x(t)$ puede demostrarse usando directamente las definiciones de Bohr y Bochner.

3.3. Segundo Teorema de Favard

En esta sección trabajaremos con los mismos sistemas casi periódicos de la sección anterior:

$$x' = A(t)x + g(t), \tag{3.15}$$

$$\frac{dx}{dt} = A^*(t)x, \quad \text{para toda } A^* \in H(A), \tag{3.16}$$

$$\frac{dx}{dt} = A^*(t)x + g^*(t), \quad \text{para toda } A^* \in H(A) \text{ y } g^* \in H(g). \tag{3.17}$$

DEFINICIÓN 3.1. *Se dice que un sistema lineal*

$$u' = A(t)u \tag{3.18}$$

verifica la condición de separación si ninguna solución $t \mapsto u(t)$ distinta de la trivial verifica la propiedad

$$\inf_{-\infty<t<+\infty} ||u(t)|| = 0.$$

Esta propiedad es introducida por Favard en [**20**] y denominada como condición de separación a partir del trabajo de Amerio [**2**].

Ejemplo 3.3.1. Consideremos la ecuación (3,18) con $A(t)$ una matriz continua y antisimétrica para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir:

$$A^T(t) = -A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, si $t \mapsto x(t)$ es una solución no nula de (3,18), entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}||x(t)|| &= \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle, \\ &= \langle x'(t), x(t)\rangle + \langle x(t), x'(t)\rangle, \\ &= \langle A(t)x(t), x(t)\rangle + \langle x(t), A(t)x(t)\rangle, \\ &= x^T(t)A(t)x(t) - x^T(t)A(t)x(t) = 0, \end{aligned}$$

de esto, se sigue que existe $c > 0$ tal que $||x(t)|| = c$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Así:

$$\inf_{-\infty<t<+\infty} ||x(t)|| > 0.$$

Por lo tanto, el sistema (3,18) verifica la condición de separación.

Teorema 3.2. *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

($\mathcal{F}_{2a}$) *Toda solución acotada de un sistema lineal homogéneo de la familia* (3,16) *verifica la condición de separación.*

($\mathcal{F}_{2b}$) *El sistema* (3,15) *tiene soluciones acotadas,*

entonces alguna solución acotada de (3.15) *es casi periodica y lo mismo se cumple para los sistemas de la familia* (3,17).

Demostración. Al igual como se hizo en el primer Teorema de Favard, dividiremos la demostración en pasos:

Paso 1: Preliminares. Veamos que existe una sucesión de soluciones $\{x_{p_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de (3,15) que converge uniformemente en compactos a una función $t \mapsto \xi(t)$. En efecto, sea $t \mapsto x(t)$ una solución acotada del sistema (3,15), la cual existe por ($\mathcal{F}_{2b}$), por ende, existe una constante $k > 0$ tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||x(t)|| = k.$$

Ahora, consideremos el conjunto:

$$\Lambda = \{k > 0 \mid \exists\, t \mapsto u(t) \text{ solución de (3,15) tal que } \sup_{t\in\mathbb{R}} ||u(t)|| = k\}.$$

Notemos que $\Lambda \neq \varnothing$ por ($\mathcal{F}_{2b}$). Por otro lado, es fácil observar que es acotado inferiormente. Por ende, existe $g > 0$ tal que:

$$g = \inf(\Lambda), \quad \text{es decir} \quad \forall p \in \mathbb{N}\ \exists\, k_p \in \Lambda \text{ tal que } g < k_p < g + \frac{1}{p} \tag{3.19}$$

y así existen una sucesión $\{k_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ y una solución $t \mapsto x_p(t)$ de (3.15) tales que:

$$\lim_{p\to+\infty} k_p = g, \quad \text{donde} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} ||x_p(t)|| = k_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

En particular, tenemos que $\{x_p(0)\}_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, por lo tanto, existe una subsucesión $\{x_{p_j}(0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{j\to+\infty} x_{p_j}(0) = \xi(0). \tag{3.21}$$

Además, como cada $t \mapsto x_{p_j}(t)$ es solución de (3,15), se sigue que:

$$x_{p_j}(t) = X(t,0)x_{p_j}(0) + \int_0^t X(t,s)g(s)ds.$$

Usando el límite (3.21), consideremos:

$$\xi(t) = X(t,0)\xi(0) + \int_0^t X(t,s)g(s)ds.$$

y notemos que $t \mapsto \xi(t)$ es solución de (3,15), por otro lado tenemos que:

$$||x_{p_j}(t) - \xi(t)|| \leq ||X(t,0)||\,||x_{p_j}(0) - \xi(0)||.$$

Por ende, como $||X(t,0)||$ es acotado sobre conjuntos compactos, del límite (3,21) se sigue que $t \mapsto x_{p_j}(t)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos a $t \mapsto \xi(t)$.

Paso 2: $g \in \Lambda$. Demostremos ahora que la solución precedente $t \mapsto \xi(t)$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi(t)|| = g.$$

En primer lugar, como $t \mapsto x_{p_j}(t)$ converge uniformemente sobre compactos a $t \mapsto \xi(t)$, veremos que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi(t)|| \leq g, \tag{3.22}$$

en efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{p_j} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j > N_1. \tag{3.23}$$

Luego, como $t \mapsto x_{p_j}(t)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos a $\xi(t)$, para todo $T > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{t\in[-T,T]} ||x_{p_j}(t) - \xi(t)|| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j > N_2. \tag{3.24}$$

Luego, si $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, de las expresiones (3,19) y (3,24) se sigue que:

$$||x_{p_j}(t)|| - \frac{\varepsilon}{2} < ||\xi(t)|| < ||x_{p_j}(t)|| + \frac{\varepsilon}{2} = k_{p_j} + \frac{\varepsilon}{2} < g + \frac{1}{p_j} + \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $t \in [-T,T]$ y $j > N$.

Además, de (3,23) tenemos que:

$$\sup_{t\in[-T,T]} ||\xi(t)|| < g + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sin embargo, notemos que el lado derecho de la desigualdad anterior no depende de t, por lo tanto se tiene que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi(t)|| < g + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

obteniendo así la expresión (3,22).

A continuación, demostraremos que la desigualdad

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi(t)|| > g,$$

no es posible. Para esto, supongamos que para $t = L$ existe $l > 0$ tal que:

$$||\xi(L)|| = g + l. \tag{3.25}$$

Así, de la expresión (3,20), junto con el hecho que $x_{p_j}(t)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos, se sigue que existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > J$ y $t \in [-L, L]$, se tiene que:

$$||x_{p_j}(t)|| < g + \frac{l}{2} \quad \text{y} \quad ||\xi(t) - x_{p_j}(t)|| < \frac{l}{2}.$$

Por ende, tenemos:

$$||\xi(L)|| \leq ||x_{p_j}(L)|| + ||\xi(L) - x_{p_j}(L)|| < g + l,$$

pero esto contradice la expresión (3,25), por lo tanto:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi(t)|| = g$$

y de esta forma tenemos que $g \in \Lambda$.

Paso 3: Cada sistema de la familia (3,17), *tiene una solución con norma g.*

En efecto, como se hizo en la demostración del primer Teorema de Favard, se puede demostrar que el sistema (3,17) tiene una solución $t \mapsto \xi^*(t)$, tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi^*(t)|| \leq g.$$

Ahora, si $g > \sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi^*(t)||$, entonces aplicando el proceso inverso, tenemos que existe una solución $t \mapsto \xi_0(t)$, de (3,15) tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi_0(t)|| < g,$$

lo cual contradice la condición de ínfimo de g. Por lo tanto, a cada sistema de la familia (3,17), le corresponde una solución con norma igual a g.

Paso 4: A continuación veremos que existe una única solución de (3,15) con norma igual a g, para ello, supongamos que la ecuación (3,15) posee dos soluciones dadas por $t \mapsto \xi^{(1)}(t)$ y $t \mapsto \xi^{(2)}(t)$, tales que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi^{(1)}(t)|| = g = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||\xi^{(2)}(t)||. \tag{3.26}$$

Luego, notemos que $t \mapsto \dfrac{\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)}{2}$ y $t \mapsto \dfrac{\xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t)}{2}$ son respectivamente soluciones de (3,15) y del sistema lineal

$$x' = A(t)x.$$

Por otro lado, si:

$$\xi^{(1)}(t) = (\xi_1^{(1)}(t), \ldots, \xi_n^{(1)}(t)) \quad \text{y} \quad \xi^{(2)}(t) = (\xi_1^{(2)}(t), \ldots, \xi_n^{(2)}(t)),$$

entonces, de la igualdad (3,26) se sigue que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\xi_j^{(1)}(t) + \xi_j^{(2)}(t)}{2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\xi_j^{(1)}(t) - \xi_j^{(2)}(t)}{2} \right)^2 &= \frac{||\xi^{(1)}(t)||^2 + ||\xi^{(2)}(t)||^2}{2} \\ &\leq g^2, \end{aligned}$$

donde $|| \cdot ||$ denota la norma euclidiana.

Pero, como $A \in H(A)$, por $(\mathcal{F}_{2a})$ tenemos la existencia de $l > 0$ tal que:

$$\left(\frac{\xi_1^{(1)}(t) - \xi_1^{(2)}(t)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2^{(1)}(t) - \xi_2^{(2)}(t)}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\xi_n^{(1)}(t) - \xi_n^{(2)}(t)}{2}\right)^2 \geq l^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (condición de separación).

Por ende, de las desigualdades anteriores, se sigue que:

$$\left(\frac{\xi_1^{(1)}(t) + \xi_1^{(2)}(t)}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\xi_n^{(1)}(t) + \xi_n^{(2)}(t)}{2}\right)^2 \leq g^2 - l^2 < g^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es decir:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)}{2} \right\| < g$$

Pero recordemos que $t \mapsto \dfrac{\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)}{2}$ es solución de (3,15) y la desigualdad anterior contradice la condición de ínfimo de g y por lo tanto, existe una única solución $t \mapsto \xi(t)$ de (3,15) con norma igual a g.

Paso 5: La función $t \mapsto \xi(t)$ es casi periódica. Sea $\{h_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria y recordemos que $t \mapsto \xi(t)$ es acotada, sin pérdida de generalidad, existe $\xi^*(0) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\lim_{p\to+\infty} \xi(h_p) = \xi^*(0). \tag{3.27}$$

Posteriormente, sea $t \mapsto \xi^*(t)$ una solución de (3,17) con condición inicial dada por la expresión (3,27). Siguiendo un proceso análogo a lo hecho en el primer teorema de Favard, tenemos que $\xi(t + h_p)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos a $\xi^*(t)$.

Ahora, supongamos que $\xi(t + h_p)$ no converge uniformemente a $\xi^*(t)$ en todo $\mathbb{R}$, entonces existen:

a) Un número $\alpha > 0$,
b) dos sucesiones $\{\nu_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\{\pi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$,
c) una sucesión divergente $\{t_p\}_{p\in\mathbb{N}}$,

Tales que:

$$|\xi(t_p + h_{\nu_p}) - \xi(t_p + h_{\pi_p})| \geq \alpha, \ \ \forall p \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Ahora, como $\xi(t)$ es acotada, sin pérdida de generalidad, supongamos que:

$$\lim_{p\to\infty} \xi(t_p + h_{\nu_p}) = \beta_1, \tag{3.29}$$

$$\lim_{p\to\infty} \xi(t_p + h_{\pi_p}) = \beta_2. \tag{3.30}$$

Además, considere los siguientes sistemas pertenecientes a la familia (3,17):

$$\begin{aligned} S^{(1)}: \quad \frac{dx}{dt} &= A_1^*(t)x + g_1^*(t), \\ S^{(2)}: \quad \frac{dx}{dt} &= A_2^*(t)x + g_2^*(t), \end{aligned}$$

donde:

$$A(t+t_p+h_{\nu_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||} A_1^*(t), \qquad g(t+t_p+h_{\nu_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||} g_1^*(t),$$

$$A(t+t_p+h_{\pi_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||} A_2^*(t), \qquad g(t+t_p+h_{\pi_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||} g_2^*(t).$$

Por lo hecho en el *Paso 3,* los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ poseen soluciones $t \mapsto u_1(t)$ y $t \mapsto u_2(t)$ con condiciones iniciales en $t = 0$ dadas por (3,29) y (3,30) respectivamente, tales que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||u_1(t)|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||u_2(t)|| = g.$$

Veamos ahora que $S^{(1)} = S^{(2)}$. En efecto, como A es casi periódica, sin pérdida de generalidad, tenemos que $\{A(t+h_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por ende, existe $N_1 > 0$, tal que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+h_{\nu_p}) - A(t+h_{\pi_p})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p > N_1,$$

lo cual implica que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+t_p+h_{\nu_p}) - A(t+t_p+h_{\pi_p})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p > N_1.$$

Por otro lado, existen $N_2, N_3 > 0$ tales que:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+t_p+h_{\nu_p}) - A_1^*(t)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p > N_2,\\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |A(t+t_p+h_{\pi_p}) - A_2^*(t)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p > N_3.\end{aligned}$$

Por ende, si $p > \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$, entonces:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A_1^*(t) - A_2^*(t)| < \varepsilon$$

y de esta forma, conclúimos que $A_1^*(t) = A_2^*(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Aplicando un proceso análogo al anterior, se puede demostrar que $g_1^*(t) = g_2^*(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos que $S^{(1)} = S^{(2)}$, de esto, se sigue que el sistema $S^{(1)}$ tiene dos soluciones (a saber, $t \mapsto u_i(t)$ con $i = 1, 2$) con norma igual a g. Por otro lado, a partir de estas soluciones se pueden obtener[3] dos soluciones de (3,15) con norma igual g, lo cual contradice contradice el *Paso 4* e implica las identidas $u_1 = u_2$ y $\beta_1 = \beta_2$ lo que a su vez contradice la expresión (3,28) y por lo tanto, la función $t \mapsto \xi(t)$ es casi periódica.

Paso final: Cualquier systema en la familia (3.17) *con soluciones acotadas, tiene una solución casi periódica.*

En efecto, sea $t \mapsto x^*(t)$ una solución acotada de algún sistema pertenciente a la familia (3.17). El proceso de demostración es totalmente análogo a los pasos anteriores y notemos que en el paso 4 se utiliza de manera general la hipótesis $(\mathcal{F}_{2a})$. □

Observación 3.3.1. Originalmente, Favard en su texto [**20**] trabajó utilizando la siguiente hipótesis en reemplazo de la condición $(\mathcal{F}_{2a})$:

[3] Replicando todos los pasos anteriores con $t \mapsto u_i(t)$ en lugar $t \mapsto x(t)$ y considerando la pareja de sistemas S^i y (3.4) en vez de (3.4) y (3.17).

($\mathcal{F}'_{2a}$) Todos los sistemas lineales homogéneos de la familia (3,16) verifican la condición de separación.

Es preciso enfatizar que en la literatura actual no se trabaja con esta hipótesis debido a que la condición ($\mathcal{F}'_{2a}$) solo es utilizada en el paso 4, en el cual las soluciones lineales del sistema (3.16) son acotadas.

En general, no es una tarea sencilla determinar sistemas que verifiquen las condiciones del segundo Teorema de Favard. El siguiente resultado es útil para ejemplificar la condición ($\mathcal{F}_{2a}$)

Lema 3.4. *Dada una matriz $A(t)$ casi periódica y antisimétrica para todo $t \in \mathbb{R}$, el sistema*

$$x' = A(t)x \tag{3.31}$$

verifica la condición ($\mathcal{F}_{2a}$)

Demostración. Si $A^* \in H(A)$, entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A(t+h_n)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $A^*(t)$. Además, del hecho que $A(t)$ es antisimétrica, se sigue que:

$$\{A^*(t)\}^T = \lim_{n\to+\infty} A^T(t+h_n) = -\lim_{n\to+\infty} A(t+h_n) = -A^*(t), \tag{3.32}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, $A^*(t)$ es una matriz antisimétrica para todo $t \in \mathbb{R}$.

Luego, se sigue que para cada $A^* \in H(A)$, la ecuación (3,16) verifica la condición de separación y por ende satisface la hipótesis ($\mathcal{F}_{2a}$) del segundo Teorema de Favard. □

Con respecto a la condición ($\mathcal{F}_{2b}$) notemos que cuando hay dicotomía exponencial en el sistema homogéneo (3.1), el Lema 2,3 nos asegura la existencia (y unicidad) de una solución acotada del sistema no homógeneo (3.15).

3.3.1. Demostración alternativa del Teorema 1.11. Sea $t \mapsto f(t)$ una función en $\mathbb{R}$ casi periodica, y considere los sistemas:

$$x' = 0, \tag{3.33}$$
$$x' = f(t). \tag{3.34}$$

Notemos que los sistemas en la envoltura son respectivamente el mismo (3,33) y:

$$x' = f^*(t). \tag{3.35}$$

Luego, por definición, tenemos que (3,33) satisface la condición de separación, por otro lado, toda solución $t \mapsto x(t)$ de (3,34) es de la forma:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\, ds.$$

Por lo tanto, del segundo Teorema de Favard se sigue que si $t \mapsto x(t)$ es acotada (especificamente, la integral entre 0 y t de $f(s)$ es acotada) entonces es una función casi periódica. De igual forma, dado que toda solución $t \mapsto x^*(t)$ de (3,35) es de la forma:

$$x^*(t) = x_0^* + \int_0^t f^*(s)\, ds,$$

se tiene que $t \mapsto x^*(t)$ es casi periódica siempre y cuando la integral:

$$\int_0^t f^*(s)\, ds,$$

sea acotada.

Observación 3.3.2. Por lo hecho en el caso anterior y gracias al segundo Teorema de Favard, notemos que el resultado mostrado en el Teorema 1,11 se demuestra directamente, esto da pie para pensar que cuando Favard comenzó a investigar acerca de estos tópicos, empezó con el Teorema 1,11 para luego generalizarlo a través de sus Teoremas, especificamente el segundo Teorema.

Ejemplo 3.3.2. Consideremos el oscilador armónico:

$$x' = Ax, \tag{3.36}$$

y su perturbación:

$$y' = Ay + \phi(t), \tag{3.37}$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix},$$

con $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2k\pi\}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Dado que A es constante, se sigue que $H(A) = \{A\}$, lo cual implica que la ecuación homogénea en la envoltura asociada a (3,36) es esta misma ecuación. Del igual forma, el sistema no homogéneo en la envoltura asociado a (3,37) es:

$$y' = Ay + \phi^*(t), \quad \text{para todo } \phi^* \in H(\phi) \tag{3.38}$$

Por otro lado, ya que la matriz A es antisimétrica, el Lema probado anteriormente nos dice que el sistema (3,36) satisface la condición de separabilidad lo que a su vez implica que cumple con la condición $(\mathcal{F}_{2a})$.

Además, notemos que toda solución $t \mapsto y(t)$ de (3,37) con condición inicial $y(0) = y_0$ es de la forma:

$$y(t) = X(t)y_0 + \int_0^t X(t,s)\phi(s)\, ds,$$

donde $X(t,s)$ recordemos es la matriz de transición de (3,36), la cual en este caso, está dada por:

$$X(t,s) = X(t)X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix},$$

por ende, si reemplazamos en $y(t)$, tenemos que:

$$y(t) = X(t)y_0 + X(t)\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\beta s) \end{pmatrix} ds.$$

Lo cual es equivalente a:

$$y(t) = X(t)y_0 + X(t)\int_0^t \begin{pmatrix} \sin(s)\sin(\beta s) \\ \cos(s)\sin(\beta s) \end{pmatrix} ds.$$

Por ende:

$$y(t) = X(t)y_0 + X(t)\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin((\beta-1)t)}{\beta-1} - \frac{\sin((\beta+1)t)}{\beta+1}\right\},\\ \varphi_2(t) &= -\frac{\cos(t)\cos(\beta t)}{\beta+1} - \frac{\beta\cos((\beta-1)t)}{\beta^2-1}.\end{aligned}$$

Luego, dado que las funciones $X(t), \varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son acotadas en todo $\mathbb{R}$, del segundo Teorema de Favard se sigue que la solución:

$$y(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\{y_0^1 + \varphi_1(t)\} - \sin(t)\{y_0^2 + \varphi_2(t)\}\\ \sin(t)\{y_0^1 + \varphi_1(t)\} + \cos(t)\{y_0^2 + \varphi_2(t)\}\end{pmatrix},$$

es casi periódica considerando $y_0 = (y_0^1, y_0^2)$. Es importante notar que del hecho que el conjunto de las funciones casi periódicas es un álgebra de Banach se sigue directamente que $y \mapsto y(t)$ es casi periódica por el hecho de ser igual a sumas y productos de funciones $\sin(t)$ y $\cos(t)$ (las cuales son periódicas y por ende, casi periódicas)

Ahora, sea $\phi^* \in H(\phi)$, por lo hecho en el ejemplo 1,5,1, se sigue que $\phi^*(t)$ es de la forma:

$$\phi^*(t) = \begin{pmatrix}0\\ a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)\end{pmatrix},$$

donde $a^2 + b^2 = 1$. Así, la solución $t \mapsto y^*(t)$ de (3,38) con condición inicial $y^*(0) = y_0^*$ es:

$$y^*(t) = X(t)y_0^* + X(t)\int_0^t \begin{pmatrix}\cos(s) & \sin(s)\\ -\sin(s) & \cos(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ a\cos(\beta s) + b\sin(\beta s)\end{pmatrix} ds.$$

Por ende:

$$y^*(t) = X(t)y_0^* + X(t)\int_0^t \begin{pmatrix}a\sin(s)\cos(\beta s) + b\sin(s)\sin(\beta s)\\ a\cos(s)\cos(\beta s) + b\cos(s)\sin(\beta s)\end{pmatrix} ds,$$

lo cual implica que:

$$y^*(t) = X(t)y_0^* + X(t)\begin{pmatrix}\varphi_1^*(t)\\ \varphi_2^*(t)\end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned}\varphi_1^*(t) &= \frac{-a + \cos(\beta t)\{a\cos(t) - b\beta\sin(t)\} + \sin(\beta t)\{b\cos(t) + a\beta\sin(t)\}}{\beta^2-1},\\ \varphi_2^*(t) &= \frac{b\beta - \cos(\beta t)\{b\beta\cos(t) + a\sin(t)\} + \sin(\beta t)\{a\beta\cos(t) - b\sin(t)\}}{\beta^2-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que las funciones $X(t)$, $\varphi_1^*(t)$ y $\varphi_2^*(t)$ son acotadas, del segundo Teorema de Favard concluimos que la solución:

$$y^*(t) = \begin{pmatrix}\cos(s)\{y_{0,1}^* + \varphi_1^*(t)\} + \sin(s)\{y_{0,2}^* + \varphi_2^*(t)\}\\ -\sin(s)\{y_{0,1}^* + \varphi_1^*(t)\} + \cos\{y_{0,2}^* + \varphi_2^*(t)\}\end{pmatrix},$$

es casi periódica considerando $y_0^* = (y_{0,1}^*, y_{0,2}^*)$. Finalmente, notemos que también podemos concluir que $y^*(t)$ es casi periódica a partir del hecho que el conjunto $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ son un álgebra de banach sumado a que $y^*(t)$ es resultado de sumas y productos de funciones $\sin(t)$ y $\cos(t)$.

3.4. Comentarios sobre la parte 3

El segundo Teorema de Favard ha sido revisitado y extendido en diversas direcciones. En primer lugar, algunos comentarios de su autor se plantearon en [**22**], los cuales fueron desarrollados posteriormente por Coppel en [**14**]. Asimismo, una versión de este Teorema para diferenciales con retardo fué obtenida por Hino en [**26**].

La condición de separación de Favard es revisitada por Bylov [**11**], Palmer [**37**] y Tarallo [**43**]. Finalmente, existen extensiones de este Teorema cuando la condición de separación no se verifica y los sistemas son casi periodicos y/o casi automórficos [**12, 13, 36**].

Asimismo, es importante destacar que durante los 60's y 70's se desarrolló la teoría de los *skew–product semiflows*, lo cual permitió visualizar las soluciones de sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias como sistemás dinámicos en dimensión infinita. En ese contexto, en [**41**] existe una demostración alternativa de los teoremas de Favard.

Finalmente, Zhikov y Levitan [**50**] generalizan la teoría de Favard a las funciones casi periódicas en el sentido de Stepanov, las cuales no son equivalentes a las estudiadas en este trabajo.

Bibliografía

[1] L.Y. Adrianova. Introduction to linear systems of differential equations. *American Mathematical Society,* Providence RI, 1995.

[2] L. Amerio. Funzioni quasi–periodiche ed equazioni differentiali. Atti VI congr. Unione Mathematiche Italiana. Napoli 1958, pp.119–144.

[3] V. Arnold. Équations Différentielles Ordinaires. Mir – Librairie du Globe, Paris, 1996.

[4] F. Battelli, K.J. Palmer. Criteria for exponential dichotomy for triangular systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 428:525–543, 2015.

[5] A.S. Besicovitch. Almost Periodic Functions. Dover, New York, 1954.

[6] S. Bochner. Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 52:907–910, 1964.

[7] H. Bohr. Zur theorie der fast periodischen funktionen I. Eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen. *Acta Math.*, 45: 29-127, 1925.

[8] H. Bohr. Almost Periodic Functions. Chelsea Publishing, New York, NY,USA, 1947.

[9] P. Bohl. ber die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportianalen Argumenten, Magisterdissertation, Dorpat, 1893.

[10] A. Böttcher, Y. Karlovich, I. Spitkovsky. Convolutions Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. (Vol. 131). Springer Basel AG, 2002

[11] B.F. Bylov, R.E. Vinograd. Separability and ε–splitting of almost periodic systems. *Differential Equations.* 13:1366–1374, 1976.

[12] J. Campos, M. Tarallo. Almost automorphic linear dynamics by Favard theory. *J. Differential Equations.* 256:1350–1367, 2014.

[13] T. Caraballo, D. Cheban. Almost periodic and almost automorphic solutions of linear differential/difference equations without Favard's separation condition I. *J. Differential Equations.* 246:108–128, 2009.

[14] W.A. Coppel. Almost periodic properties of ordinary differential equations. *Annali di Matematica Pura e Applicata.*

[15] W.A. Coppel. Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics 629, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1978.

[16] A. Chávez. Soluciones Casi Automórficas de Ecuaciones Diferenciales con Argumento constante a Trozos. Tesis de Magister, Universidad de Chile, 2013.

[17] X. Chen, Y. Xia. Topological Conjugacy between Two Kinds of Nonlinear Differential Equations via Generalized Exponential Dichotomy. *Int. J. Differ. Equ.*. Volume 2011 (2011), Article ID 871574, 11 pages.

[18] J. Chu, F-F. Liao, S. Siegmund, W. Zhang. Nonuniform dichotomy spectrum and reducibility for nonautonomous systems. *Bull. Sci. Math.* 139: 538–557, 2015.

[19] C. Corduneanu. Almost Periodic Functions, Chelsea Publishing, New York, NY, USA, 2nd edition, 1989.

[20] J. Favard. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques. *Acta Math.* 51:31–81, 1928.

[21] J. Favard. Lecons sur les fonctions presque–périodiques. Gauthier–Villars Editeurs, Paris, 1933.

[22] J. Favard. Sur certains systèmes différentiels scalaires linéaires et homogénes à coefficients presque–périodiques. *Annali di Matematica Pura e Applicata.* 61: 297–316, 1963.

[23] A.M. Fink. Almost Periodic Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 377, Springer–Verlag, Berlin, 1970.

[24] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 12:47–88, 1883.
[25] T.H. Gronwall. Note on derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Ann. of Math.* 20: 292–296, 1919.
[26] Y. Hino. Favard's separation theorem in functional differential equations with infinite retardations. *Tohoku Math. Journ.* 30: 1–12, 1978.
[27] L. Jiang. Generalized exponential dichotomy and global linearization. *J. Math. Anal. Appl.*, 315:474–490, 2006.
[28] T. Kailath. Linear systems. Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.
[29] P. E. Kloeden, M. Rasmussen. Nonautonomous Dynamical Systems. Mathematical Surveys and Monographs, Volume 176, AMS, 2011.
[30] L. Markus. Continuous matrices and the stability of differential systems. *Math. Z.* 62: 310–319, 1955.
[31] R.H. Martin. Conditional stabiliy and separation of solutions to differential equations. *J. Differential Equations*, 13:81–105, 1973.
[32] C. Maulén. Sobre el Método del Parámetro Pequeño en Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos y Soluciones Remotamente Casi Periódicas. Tesis de Magister, Universidad de Chile, 2013.
[33] J. Moser. On the theory of quasiperiodic motions. *SIAM Rev.* 1966.
[34] R. Naulin, M. Pint. Roughness of (h,k)-dichotomies. *J. Differential Equations*, 118:20-35, 1995.
[35] G.M. N'Guérékata. Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. Springer, New York, 2001.
[36] R. Ortega, M. Tarallo. Almost periodic linear differential equations with non–separated solutions. *J. Functional Analysis.* 237:402–426, 2006.
[37] K.J. Palmer. On bounded solutions of almost periodic linear differential systems *J. Math. Anal. Appl.* 103: 16-25, 1984.
[38] K.J. Palmer, A generalization of Hartmans linearization Theorem. *J. Math. Anal. Appl.* 41 (1973) 753758.
[39] G. Sell. Almost periodic linear differential systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 103:16–25, 1984.
[40] D. Sarason. Remotely almost periodic functions. *Contemp. Math.*, 32:237–342, 1984.
[41] R.J. Sacker, G. Sell. Lifting properties in skew-product flows with applications to differential equations. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1977).
[42] F. D. Suárez. The algebra of almost periodic functions has infinite topological stable rank. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1996
[43] M. Tarallo. The Favard condition for almost periodic linear systems. *J. Dynam. Differential Equations* 25:291–304, 2013.
[44] W.A. Veech. Almost automorphic functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 49:462–464, 1964.
[45] C. Zhang. Integration of vector–valued pseudo–almost periodic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121: 167–174, 1994.
[46] C. Zhang. Pseudo-almost-periodic solutions of some differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 181: 62–76, 1994.
[47] C. Zhang. Pseudo-almost-periodic solutions of some differential equations II. *J. Math. Anal. Appl.*, 192: 543–561, 1995.
[48] C. Zhang. Almost periodic type functions and ergodicity. Science Press Beijing, Beijing; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
[49] Z–M Zheng, H–D Ding, G.M. N'Guérékata. The space of continuous periodic functions is a set of first category in $AP(X)$ *J. Funct. Spaces. Appl.* 2013.
[50] V.V. Zhikov, B.M. Levitan. Favard Theory. *Russian Math. Surveys.* 32:129–180, 1977.