Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Matemáticas

Observables asintóticos en $l^2(\mathbb{Z})$ y sus consecuencias para potenciales de corto alcance

ALUMNO:

Lya Alejandra Hurtado Guzmán

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Olivier Bourget

29 de Enero del 2020
Santiago, Chile

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Observables asintóticos en $l^2(\mathbb{Z})$ y sus consecuencias para potenciales de corto alcance

ALUMNO:

Lya Alejandra Hurtado Guzmán

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Olivier Bourget

COMISIÓN:
Claudio Fernández
Gregorio Moreno

29 de Enero del 2020
Santiago, Chile

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Observables asintóticos en $l^2(\mathbb{Z})$ y sus consecuencias para potenciales de corto alcance

ALUMNO:

Lya Alejandra Hurtado Guzmán

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Olivier Bourget

COMISIÓN:
Claudio Fernández
Gregorio Moreno

29 de Enero del 2020
Santiago, Chile

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi tutor Olivier Bourget, por su inmenso apoyo en todo este proceso, el cual fue muy difícil, pues a lo largo del Magíster tuve muchos problemas y por un momento perdí la motivación, pero el profesor Olivier se puso siempre en mi lugar, me entregó todas las herramientas y depositó toda su confianza en mí, lo que me devolvió las ganas de continuar aprendiendo y lograr nuevos enfoques, que son finalmente el resultado de esta tesis, mucho trabajo y esfuerzo, el profesor fue realmente una guía para mí, siempre con su gran disposición y voluntad, es una excelente persona, muchas gracias por todo.

Agradezco a Claudio Fernández y Gregorio Moreno por ser parte de la comisión de esta tesis.

También agradezco al proyecto FONDECYT 1161732 que me entregó financiamiento para poder continuar trabajando.

Finalmente, quiero agradecer a las pocas personas que verdaderamente me apoyaron en este proceso, y que realmente trataron de que todo esto fuera un poco más fácil de llevar, a quienes me escucharon cuando sentía que todo era cuesta arriba, ustedes saben quienes son. En especial, quiero agradecerle a mi Boni, quien siempre estuvo en los momentos que sentí que no podía con esto, gracias por tu compañía y por creer en mí.

Índice

Introducción

En 1983, Volker Enss exhibió en [1] como describir las propiedades asintóticas de los estados de scattering para tiempos grandes usando cierto tipo de observables, esencialmente demostró que para un vector $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$, la posición y el momentum se comportaban de la siguiente manera:

$$\left(m\frac{\mathbf{X}}{t} - \mathbf{p} \right) e^{-iHt}\varphi \to 0.$$

Enss trabajó en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ y consideró un potencial V con una parte de largo alcance y otra de corto alcance. Obtuvo resultados sobre los estados sin probar primero la completitud asintótica, sino que estudiando su evolución temporal. Una de las razones por las que se hace esto es debido a que, por ejemplo, en el caso de los potenciales de largo alcance puede ser difícil controlar o construir un operador de evolución temporal modificado o incluso su existencia puede ser incierta.

Por otro lado, los resultados sobre completitud asintótica en el caso continuo han sido largamente estudiados, principalmente, para potenciales de corto alcance.

La idea de esta tesis es, en primer lugar, adaptar el teorema original de Enss en el caso discreto, y para simplificar los cálculos, lo haremos en $\mathbb{Z}$. El teorema de Enss es el siguiente:

Teorema 0.1. *Sea $H = H_0 + V$, donde H_0 y V representan el Hamiltoniano libre y el potencial, respectivamente. Se tiene que $H_0 = \frac{1}{2m}p^2 = -\frac{1}{2m}\Delta$ y $V = V_l + V_s$, con V_l la parte correspondiente al potencial de largo alcance y V_s la correspondiente al potencial de corto alcance. Sea también X el operador posición y sea $A = \frac{Xp+pX}{2}$ el generador de dilataciones. Además, se satisface lo siguiente:*

i) *V_l es un operador de multiplicación en el espacio x con una función real continuamente diferenciable $V_l(\boldsymbol{X})$ que satisface $V_l(\boldsymbol{X}) \to 0$ y $\boldsymbol{X} \cdot (\nabla V_l)(\boldsymbol{X}) \to 0$.*

ii) *El potencial simétrico de corto alcance $V_s = V_1 + V_2$ cumple que $|(\Psi, V_1\Psi)| \leqq a(\Psi, H_0\Psi) + b\,\|\Psi\|^2$, $a < 1$.*

iii) *$\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V_2) \cap \mathcal{D}(X^2)$ es denso en $\mathcal{H}$.*

iv) *$(H_0 - z)^{-1/2}(1 + X^2)^{1/2}V_s(H - z)^{-1}$ es compacto.*

v) *$(H - z)^{-1/2}\{X^2V_s - V_sX^2\}(H - z)^{1/2}$ es acotado.*

Entonces, para todo $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y para todo $\varphi \in \mathcal{H}(H)$:

$$f\left(\frac{X^2(t)}{t^2}\right)\varphi \to f(2HP_c)\varphi,$$
$$f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\varphi \to f(2HP_c)\varphi$$

si $|t| \to +\infty$,

donde P_c denota la proyección sobre el subespacio espectral continuo $\mathcal{H}_c$ del operador Hamiltoniano H y si B es un operador autoadjunto cualquiera escribimos $B(t) = e^{iHt}Be^{-iHt}$.

De los cálculos de conmutadores obtenidos en [1] para la demostración del teorema anterior, obtuvimos el generador de dilataciones A, pero en el caso discreto, y a partir de este, relacionamos lo hecho por Enss para lograr adaptar el teorema 0.1 en $l^2(\mathbb{Z})$.

El teorema que se logró demostrar en esta tesis se enuncia a continuación:

Teorema 0.2. *Sea $H = H_0 + V$, donde H_0 y V representan el Hamiltoniano libre y el potencial, respectivamente. Sea X el operador posición y A el generador de dilataciones. Suponemos V y $[V, A]$ compactos y $[V, X^2]$ acotado. Para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y para todo $\varphi \in \mathcal{H}(H)$:*

(i) $f\left(\dfrac{X^2(t)}{t^2}\right)\varphi \to f(F(HP_c))\varphi,$

(ii) $f\left(\dfrac{A(t)}{t}\right)\varphi \to f(F(HP_c))\varphi$

si $|t| \to +\infty,$

donde $F(\lambda) = 4 - \lambda^2$ y si B es un operador autoadjunto cualquiera escribimos $B(t) = e^{iHt}Be^{-iHt}$.

Como consecuencia del teorema 0.1, en [1] surgen una serie de resultados los cuales se prueban en esta tesis, pero para el caso discreto, utilizando el teorema 0.2. A partir de dichos resultados, se logró demostrar que para los potenciales de corto alcance en el espacio $l^2(\mathbb{Z})$, los operadores de onda existen y son completos.

La tesis está estructurada de la siguiente forma: El primer capítulo da una introducción sencilla sobre los prerrequisitos del tema, mientras que en el segundo capítulo se explicita el contexto en el que se va a trabajar y se enuncia el teorema principal junto con sus principales consecuencias. En el capítulo 3, se exponen y demuestran una serie de resultados que se usarán de la teoría de conmutadores y además, se agregan todos los cálculos de conmutadores asociados al contexto en cuestión, junto con una serie de proposiciones, lemas y corolarios que se desprenden de lo obtenido en dichos cálculos. El capítulo 4 está dedicado completamente a la demostración del teorema 0.1, cuya demostración se divide en dos secciones empezando con la prueba del segundo resultado del teorema. En el capítulo 5, se demuestra una serie de consecuencias probadas en [1], pero adaptadas a nuestro caso. El capítulo 6 se centra en el caso cuando el potencial es de corto alcance y en este se prueba la existencia de los operadores de onda, la propiedad de “intertwining” y la completitud. Finalmente, se incluye un apéndice en donde se concentra un recuento del material básico referido en los capítulos anteriores.

1. Preliminares

En este capítulo, introduciremos las nociones básicas de la teoría de Scattering, con los resultados más relevantes que usaremos más adelante. La mayoría de ellos aparecen en el libro "Hilbert Space Methods in Quantum Mechanics"de W.O. Amrein [3] y una pequeña parte aparece en los libros "Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry"de H.L.Cycon, R.G.Froese, W.Kirsch y B.Simon [4] y "Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 3"de M.Reed y B.Simon [5].

1.1. Grupos de Evolución

Si A es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ el operador $U_t := e^{-iAt}$ es unitario y la colección $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo unitario de parámetro uno que es fuertemente continuo. Para simplificar las notaciones, diremos que es un grupo de evolución.

Proposición 1.1. *Sea H un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$ y sea U_t su grupo de evolución. Sea $\psi \in \mathcal{H}_{ac}(H)$, entonces:*

(a) $w - \lim_{t\to\pm\infty} U_t\psi = 0$

(b) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es tal que $B(H-i)^{-1}$ es compacto. Entonces $\lim_{t\to\pm\infty} \|BU_t\psi\| = 0$.

Teorema 1.2. (***RAGE***) *Sea H un operador autoadjunto definido sobre $\mathcal{H}$ y sea $\psi \in \mathcal{H}_c(H)$. Entonces:*

a) Si $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|BU_t\psi\|^2\, dt = 0.$$

b) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es tal que $B(H-i)^{-1}$ es compacto, entonces

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|BU_t\psi\|^2\, dt = 0.$$

c) Si $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces

$$\lim_{T\to+\infty} \left\| \frac{1}{T}\int_0^T U_t^* BP_cU_t\psi dt \right\| = 0.$$

1.2. Fundamentos de la teoría de Scattering

Definición 1.3. Sean A y B operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $P_{ac}(B)$ la proyección sobre el subespacio absolutamente continuo de B. Decimos que los operadores de onda $\Omega^{\pm}(A,B)$ existen si los límites fuertes:

$$\Omega^{\pm}(A,B) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B)$$

existen. Cuando $\Omega^{\pm}(A,B)$ existen, definimos:

$$\mathcal{H}_{in} = \mathrm{Ran}\Omega^{+} \text{ y } \mathcal{H}_{out} = \mathrm{Ran}\Omega^{-}.$$

Observación 1.4. Por conveniencia, a veces usamos $\mathcal{H}_+$ para $\mathcal{H}_{in}$ y $\mathcal{H}_-$ para $\mathcal{H}_{out}$.

Proposición 1.5. *Suponga que $\Omega^{\pm}(A,B)$ existen. Entonces:*

a) $\Omega^{\pm}$ son isometrías parciales con subespacio inicial $P_{ac}(B)\mathcal{H}$ y subespacio final $\mathcal{H}_{\pm}$.

b) $\mathcal{H}_\pm$ son subespacios invariantes para A y

$$\Omega^\pm[\mathcal{D}(B)] \subset \mathcal{D}(A), \quad A\Omega^\pm(A,B) = \Omega^\pm(A,B)B, \quad e^{-iAt}\Omega^\pm(A,B) = \Omega^\pm(A,B)e^{-iBt}.$$

Lo anterior se conoce como "intertwining".

c) $\mathcal{H}_\pm \subset \mathrm{Ran}P_{ac}(A)$.

Definición 1.6. Suponga que $\Omega^\pm(A,B)$ existen. Decimos que ellos son completos si y solo si

$$\mathrm{Ran}\Omega^+ = \mathrm{Ran}\Omega^- = H_{ac}(A).$$

Teorema 1.7. (***Criterio de Cook***) *Sean A y B operadores autoadjuntos y suponga que existe un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(B) \cap P_{ac}(B)\mathcal{H}$ denso en $P_{ac}(B)\mathcal{H}$ y tal que para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ existe un $t_0 \in \mathbb{R}_\pm$ que satisface:*

(1) $\forall t \in [t_0, \pm\infty)$, $e^{-iBt}\varphi \in \mathcal{D}(A)$;

(2) $\int_{t_0}^{\pm\infty} \left\|(A-B)e^{-iBt}\varphi\right\| dt < +\infty$.

Entonces $\Omega^\pm(A,B)$ existen.

Corolario 1.8. *Sea $t_0 \in \mathbb{R}_\pm$, entonces*

$$(\Omega^\pm(A,B) - \Omega^\pm(A,B)(t_0)) \leq \int_{t_0}^{\pm\infty} \left\|(A-B)e^{-iBt}\right\| dt.$$

2. Modelo y principales resultados

En este capítulo, se define el modelo a partir del cual se desarrolla esta tesis y se agregan algunas notaciones que se usarán en las demostraciones posteriores. Además, se enuncia el teorema principal de la misma junto con los resultados obtenidos a partir de él.

Los resultados que aquí se exponen se encuentran en [1] y en la sección 5.5 de [4], donde fueron demostrados para el caso continuo.

2.1. Definición del modelo y teorema principal

Considere una partícula cuántica que se mueve en $\mathbb{Z}$. El estado de una partícula es descrito por un vector en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$. Tomando la base canónica de $\ell^2(\mathbb{Z}), \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, definimos el operador Hamiltoniano discreto

$$H = H_0 + V,$$

que se obtiene como una perturbación del Hamiltoniano libre

$$H_0 = S + S^*,$$

donde S es un operador unitario definido por $Se_n = e_{n+1}$. Como S es unitario, se tiene que $[S, S^*] = 0$ y $S^* = S^{-1}$ y V es una función acotada y continua en $\mathbb{Z}$ definida por $Ve_n = V(n)e_n$.

El operador posición X se define por $Xe_n = ne_n$ y es autoadjunto en su dominio natural.

A través de la transformación de Fourier, la cual es unitaria, se tiene que $\sigma(H_0) = [-2, 2] = \sigma_{ac}(H_0)$.

Observación 2.1. Como V es acotada, H es un operador autoadjunto en $l^2(\mathbb{Z})$.

Denote por P_c la proyección sobre el subespacio espectral continuo $\mathcal{H}_c$ del operador Hamiltoniano H y P_{pp} la proyección sobre el subespacio espectral puramente puntual $\mathcal{H}_{pp}$ del operador Hamiltoniano H. Como se enunció en la introducción, si B es un operador autoadjunto arbitrario, escribimos:

$$B(t) = e^{iHt}Be^{-iHt},$$

donde t es el tiempo.

Por otro lado, A denotará al generador de dilataciones que se definirá más adelante. y $P_\pm$ corresponderá a la proyección espectral asociada a A sobre el semieje positivo (respectivamente negativo).

A continuación, se enuncia el principal resultado obtenido dentro del contexto anterior:

Teorema 2.2. *Sea $H = H_0 + V$ tal que V y $[V, A]$ son compactos y $\left[V, X^2\right]$ es acotado. Sea $F(\lambda) = 4 - \lambda^2$. Entonces para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y para todo $\varphi \in \mathcal{H}(H)$:*

(i) $f\left(\dfrac{X^2(t)}{t^2}\right)\varphi \to f(F(HP_c))\varphi$

(ii) $f\left(\dfrac{A(t)}{t}\right)\varphi \to f(F(HP_c))\varphi$

si $|t| \to +\infty$.

Observación 2.3. La función F del teorema anterior tiene relación directa con un resultado posterior que se obtuvo en la sección 3.2.

Observación 2.4. Si V es compacto entonces $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0)$ (ver sección XIII.4 en [6]).

Observación 2.5. Usando el Stone Weierstrass Gavotte en [4], el teorema 2.2 es equivalente a probar que para todo $\varphi \in \mathcal{H}(H)$ y para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\left\| \left(\frac{X^2(t)}{t^2} - z \right)^{-1} \varphi - (F(HP_c) - z)^{-1} \varphi \right\|^2 \to 0 \tag{2.1}$$

y

$$\left\| \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} \varphi - (F(HP_c) - z)^{-1} \varphi \right\|^2 \to 0 \tag{2.2}$$

si $|t| \to +\infty$.

Observación 2.6. La demostración del teorema se realizará en el capítulo 4 y consistirá en probar la reformulación hecha en la observación anterior.

2.2. Consecuencias del teorema

Del teorema 2.2 se extraen las siguientes consecuencias, las cuales se usaron en la sección 5.6 en [4] para probar la completitud de los operadores de onda en el caso continuo:

Corolario 2.7. *Para* $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$

$$\left\| P_- e^{-iHt} \varphi \right\| \to 0 \ \ si \ \ t \to +\infty \tag{2.3}$$

y

$$\left\| P_+ e^{-iHt} \varphi \right\| \to 0 \ \ si \ \ t \to -\infty. \tag{2.4}$$

Corolario 2.8. *Para* $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$

$$e^{-iHt} \varphi \to 0$$

débilmente si $|t| \to +\infty$.

Corolario 2.9. *Sea* $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$ *y* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *entonces*

$$f(H_0(t))\varphi \to f(H)\varphi \ \ si \ \ |t| \to +\infty.$$

Observación 2.10. Los corolarios anteriores se demostrarán más adelante en el capítulo 5.

3. Cálculo de conmutadores y principales resultados

Para la demostración del teorema principal, siguiendo lo hecho en [1], se necesitan una serie de cálculos de conmutadores. A partir de estos, haciendo un análogo con Enss, se logra obtener el generador de dilataciones A y posteriormente, se desprenden una serie de lemas, proposiciones y corolarios que usaremos en el capítulo 6. Previo a lo anterior, se introduce la noción de conmutador y ciertos resultados que se usarán más adelante en este mismo capítulo. Para lo relativo a conmutadores, se recurrió a [7].

3.1. Concepto de conmutador

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y sea A un operador autoadjunto definido en un conjunto denso de $\mathcal{H}$ con dominio $\mathcal{D}(A)$. Decimos que el operador B es de clase C^1 con respecto a A si la forma sesquilineal definida en $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A)$ dada por $(\varphi, \psi) \to \langle A\varphi, B\psi\rangle - \langle\varphi, BA\psi\rangle$ es continua para la topología inducida por $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, esto es, existe un $C > 0$ tal que para todo $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A)$,

$$| \langle A\varphi, B\psi\rangle - \langle\varphi, BA\psi\rangle | \leq C \|\varphi\| \|\psi\| .$$

La forma se extiende continuamente como una forma sesquilineal acotada en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. El operador lineal acotado asociado a esta extensión se denota por $\mathrm{Conm}_A(B) = [A, B]$. Escribiremos: $C^1(A) := \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | B$ es de clase C^1 con respecto a $A\}$.

Observación 3.1. Usaremos las siguientes convenciones para caracterizar las relaciones de conmutación de orden mayor a 1: $C^0(A) := \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathrm{Conm}_A^0(B) := B$.

Inductivamente para $n \in \mathbb{N}$, se tendrá que: $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de clase C^n con respecto a A si $B \in C^{n-1}(A)$ y $\mathrm{Conm}_A^{n-1}(B) \in C^1(A)$. Escribiremos también $\mathrm{Conm}_A^n(B) := \mathrm{Conm}_A(\mathrm{Conm}_A^{n-1}(B))$, $C^n(A) := \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | B$ es de clase C^n con respecto a $A\}$ y $C^\infty(A) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(A)$.

A partir de lo anterior, se tienen los siguientes resultados:

Lema 3.2. *Sea A es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces B es de clase C^1 con respecto a A si y solo si $B\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ y el operador $[A, B] = AB - BA$, que entonces se define sobre $\mathcal{D}(A)$, se extiende continuamente como un operador acotado en $\mathcal{H}$. En este caso, la identidad $AB = BA + [A, B]$ se tiene en $\mathcal{D}(A)$.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$. Como B es de clase C^1 con respecto a A, entonces existe $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\langle A\varphi, B\psi\rangle - \langle\varphi, BA\psi\rangle = \langle\varphi, Z\psi\rangle$$

lo que implica que

$$\langle A\varphi, B\psi\rangle = \langle\varphi, BA\psi\rangle - \langle\varphi, Z\psi\rangle = \langle\varphi, \psi^*\rangle$$

□

con $\psi^* = BA\psi - Z\psi \in \mathcal{H}$. Así, $B\psi \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ y $A^*B\psi = AB\psi = \psi^* = BA\psi - Z\psi$. Observe que Z es igual a la clausura del operador $AB - BA$.

En el otro sentido, por definición se tiene de inmediato lo pedido.

Proposición 3.3. *Si A es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) Si $B \in C^1(A)$ entonces $B^* \in C^1(A)$.

b) Si $B, C \in C^1(A)$ entonces $B + C \in C^1(A)$.

c) Si $B, C \in C^1(A)$ entonces $BC \in C^1(A)$.

Demostración. a) Como B pertenece a $C^1(A)$, se tiene que B pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, lo que implica que B^* también. Para tener lo pedido, debemos demostrar que B^* es de clase C^1 con respecto a A.

Sea $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} |\,\langle A\varphi, B^*\psi\rangle - \langle \varphi, B^*A\psi\rangle\,| &= |\,\langle BA\varphi, \psi\rangle - \langle B\varphi, A\psi\rangle\,| \\ &= |\overline{\langle \psi, BA\varphi\rangle} - \overline{\langle A\psi, B\varphi\rangle}| \\ &= |\overline{\langle A\psi, B\varphi\rangle} - \overline{\langle \psi, BA\varphi\rangle}| \\ &= |\overline{\langle A\psi, B\varphi\rangle - \langle \psi, BA\varphi\rangle}| \\ &\leq \bar{C}\,\|\psi\|\,\|\varphi\|\,, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que B es de clase C^1 con respecto a A, con $\bar{C} > 0$.

Concluimos que $B^* \in C^1(A)$.

b) Como B y C pertenecen a $C^1(A)$, se tiene que B y C pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, por lo que es claro que $B + C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nos queda probar que $B + C$ es de clase C^1 con respecto A.

Sea $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A)$ luego

$$\begin{aligned} |\,\langle A\varphi, (B+C)\psi\rangle - \langle \varphi, (B+C)A\psi\rangle\,| &= |\,\langle A\varphi, B\psi\rangle + \langle A\varphi, C\psi\rangle - \langle \varphi, BA\psi\rangle - \langle \varphi, CA\psi\rangle\,| \\ &\leq |\,\langle A\varphi, B\psi\rangle - \langle \varphi, BA\psi\rangle\,| + |\,\langle A\varphi, C\psi\rangle - \langle \varphi, CA\psi\rangle\,| \\ &\leq C_1\,\|\varphi\|\,\|\psi\| + C_2\,\|\varphi\|\,\|\psi\| \\ &= C\,\|\varphi\|\,\|\psi\|\,, \end{aligned}$$

en donde hemos usado que tanto B y C son de clase C^1 con respecto a A, por lo que $C = C_1 + C_2 > 0$ existe, pues C_1 y C_2 existen y son positivas.

Así, $B + C \in C^1(A)$.

c) Como B y C pertenecen a $C^1(A)$, se tiene que B y C pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, por lo que BC también. Veamos ahora que BC es de clase C^1 con respecto A.

Sea $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A)$ luego

$$\begin{aligned} |\,\langle A\varphi, BC\psi\rangle - \langle \varphi, BCA\psi\rangle\,| &= |\,\langle A\varphi, BC\psi\rangle - \langle \varphi, BAC\psi\rangle + \langle \varphi, BAC\psi\rangle - \langle \varphi, BCA\psi\rangle\,| \\ &\leq |\,\langle A\varphi, BC\psi\rangle - \langle \varphi, BAC\psi\rangle\,| + |\,\langle \varphi, BAC\psi\rangle - \langle \varphi, BCA\psi\rangle\,| \\ &= |\,\langle A\varphi, BC\psi\rangle - \langle \varphi, BAC\psi\rangle\,| + |\,\langle AB^*\varphi, C\psi\rangle - \langle B^*\varphi, CA\psi\rangle\,|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ahora, considere $\psi_1 = C\psi$, donde $\psi_1 \in \mathcal{D}(A)$ por lema (3.2), pues $C \in C^1(A)$. Así, como B es de clase C^1 con respecto a A, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\,\langle A\varphi, BC\psi\rangle - \langle \varphi, BAC\psi\rangle\,| &= |\,\langle A\varphi, B\psi_1\rangle - \langle \varphi, BA\psi_1\rangle\,| \\ &\leq C_1\,\|\varphi\|\,\|\psi_1\|\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Análogamente, considere $\varphi_1 = B^*\varphi$, donde $\varphi_1 \in \mathcal{D}(A)$ por lema (3.2), pues $B^* \in C^1(A)$ por a). Luego, como C es de clase C^1 con respecto a A, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\,\langle AB^*\varphi, C\psi\rangle - \langle B^*\varphi, CA\psi\rangle\,| &= |\,\langle A\varphi_1, C\psi\rangle - \langle \varphi_1, CA\psi\rangle\,| \\ &\leq C_2\,\|\varphi_1\|\,\|\psi\|\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Finalmente, usando (3.6) y (3.7) en (3.5) de la misma forma que lo hecho en b), se obtiene que $BC \in C^1(A)$.

□

3.2. Cálculo de conmutadores útiles y resultados asociados

Lo que viene a continuación tiene como finalidad hallar las relaciones de conmutación necesarias para la demostración del teorema 2.2 de la misma forma que se hizo en [1].

Usaremos las definiciones y propiedades de los operadores X, S, V, H_0 y H que se enunciaron en el capítulo anterior.

Lema 3.4. *Se tiene lo siguiente:*

a) $S \in C^1(X)$ *y* $[X, S] = S$.

b) $S^* \in C^1(X)$ *y* $[X, S^*] = -S^*$.

c) $H_0 \in C^1(X)$ *y* $[X, H_0] = 2i\,\mathrm{Im}(S)$.

Demostración. Para a), sea $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, luego

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(n+1)\varphi_{n+1}|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |j\varphi_j|^2 < +\infty. \tag{3.8}$$

Lo anterior se tiene, pues hemos usado que $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ tomando $j = n+1$. Así, por definición de $\mathcal{D}(X)$, (3.8) implica que $S\varphi \in \mathcal{D}(X)$, y por ende, $S\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
[X, S]\,\varphi_n &= XS\varphi_n - SX\varphi_n \\
&= X\varphi_{n+1} - nS\varphi_n \\
&= (n+1)\varphi_{n+1} - n\varphi_{n+1} \\
&= \varphi_{n+1} \\
&= S\varphi_n
\end{aligned}$$

lo que implica que $[X, S] = S$, y como S es acotado por definición, se obtiene que $[X, S]$ es un operador acotado.

Por lema 3.2, $S \in C^1(X)$.

Para b), como $S \in C^1(X)$, por proposición 3.3 a) se tiene que $S^* \in C^1(X)$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Observe que

$$\begin{aligned}
[X, S^*]\,\varphi_n &= XS^*\varphi_n - S^*X\varphi_n \\
&= X\varphi_{n-1} - nS^*\varphi_n \\
&= (n-1)\varphi_{n-1} - n\varphi_{n-1} \\
&= -\varphi_{n-1} \\
&= -S^*\varphi_n
\end{aligned}$$

lo que nos dice que $[X, S^*] = -S^*$.

Finalmente para c), como S y $S^* \in C^1(X)$ por a) y b), usando proposición 3.3 b) y la definición de H_0 se cumple que $H_0 \in C^1(X)$.

Usando lo obtenido en a) y b), se tiene que

$$\begin{aligned}
[X, H_0] &= [X, S + S^*] \\
&= [X, S] + [X, S^*] \\
&= S - S^* \\
&= 2i\,\mathrm{Im}(S),
\end{aligned}$$

por lo cual $[X, H_0] = 2i\,\mathrm{Im}(S)$. □

Lema 3.5. *Para todo $t > 0$, $e^{\pm iHt} \in C^1(X)$, $\mathcal{D}(X(t)) = \mathcal{D}(X)$ y $X(t)$ autoadjunto sobre $\mathcal{D}(X)$ si $V \in C^1(X)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ y sea $t > 0$. Observe que

$$e^{\pm iHt} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\pm it)^n}{n!} H^n. \tag{3.9}$$

Tenemos que $V \in C^1(X)$. Además, por parte anterior, $H_0 \in C^1(X)$. Así, $H \in C^1(X)$ por proposición 3.3 b). Por un argumento de inducción sobre n, usando proposición 3.3 c), se tiene que $H^n \in C^1(X)$. Así, por lema 3.2, $H^n\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Como $\mathcal{D}(X)$ es un subespacio vectorial, lo anterior implica que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(\pm it)^n}{n!} H^n \varphi \in \mathcal{D}(X). \tag{3.10}$$

$C^1(X)$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver [11]), por ende, por (3.10) y (3.9) se tiene que $e^{\pm iHt} \in C^1(X)$.

Ahora, por lo anterior, y por lema 3.2, $e^{\pm iHt}\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X)$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Por teorema fundamental del cálculo

$$X(t)\varphi = X\varphi + \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X(s)\varphi\right] ds = X\varphi + \int_0^t e^{iHs} i\,[H, X]\, e^{-iHs} ds\varphi. \tag{3.11}$$

Como $H \in C^1(X)$, se tiene que $\int_0^t e^{iHs} i\,[H, X]\, e^{-iHs} ds \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, sabemos que X es autoadjunto, luego, por teorema 4.3 en [10], $X(t)$ es un operador autoadjunto. Más aún, (3.11) implica que $\mathcal{D}(X(t)) = \mathcal{D}(X)$.

□

Observación 3.6. Haciendo la analogía al caso continuo visto por Enss en [1], formalmente, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\left[H_0, X^2\right] &= \frac{i}{2}\left\{[H_0, X]\, X + X\,[H_0, X]\right\} \\
&= \frac{i}{2}\left\{-2i\,\mathrm{Im}(S)X - 2iX\,\mathrm{Im}(S)\right\} \\
&= \mathrm{Im}(S)X + X\,\mathrm{Im}(S),
\end{aligned}$$

en donde hemos usado el lema 3.4 . Como se probó en la parte a) del mismo lema, se tiene que $S\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X)$, por lo que definimos $\mathrm{Im}(S)X + X\,\mathrm{Im}(S)$ sobre $\mathcal{D}(X)$.

Así, definimos el generador de dilataciones A como la extensión autoadjunta del operador $\mathrm{Im}(S)X + X\,\mathrm{Im}(S)$, que es esencialmente autoadjunto sobre $\mathcal{D}(X)$ (ver lema 2.1 en [9]). Lo anterior nos dice que $\mathcal{D}(X)$ es un dominio esencial de $\mathcal{D}(A)$.

Observación 3.7. Para los siguientes resultados, A corresponderá al operador autoadjunto definido en la observación anterior.

Lema 3.8. *$H_0 \in C^1(A)$ e $i[H_0, A] = F(H_0)$ con $F(\lambda) = 4 - \lambda^2$.*

Demostración. Primero, por definición

$$\begin{aligned}
H_0^2 &= (S + S^*)^2 \\
&= (S + S^*)(S + S^*) \\
&= SS + SS^* + S^*S + S^*S^* \\
&= SS + S^*S^* + 2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(S)^2 &= \frac{1}{(2i)^2}(S-S^*)^2 \\
&= \frac{-1}{4}(S-S^*)(S-S^*) \\
&= \frac{-1}{4}(SS-SS^*-S^*S+S^*S^*) \\
&= \frac{-1}{4}(SS+S^*S^*-2) \\
&= \frac{-1}{4}(SS+S^*S^*+2-4) \\
&= \frac{-1}{4}(H_0^2-4),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

donde hemos usado (3.12).

Ahora, sea $(\varphi,\psi)\in\mathcal{D}(X)\times\mathcal{D}(X)$. Por lema 3.4, $H_0\in C^1(X)$, por lo que existen $C_1>0$ y $C_2>0$ tales que

$$
\begin{aligned}
|\langle A\varphi, H_0\psi\rangle - \langle\varphi, H_0A\psi\rangle| &= |\langle(\operatorname{Im}(S)X+X\operatorname{Im}(S))\varphi, H_0\psi\rangle - \langle\varphi, H_0(\operatorname{Im}(S)X+X\operatorname{Im}(S))\psi\rangle| \\
&\leq |\langle\operatorname{Im}(S)X\varphi, H_0\psi\rangle - \langle\varphi, H_0X\operatorname{Im}(S)\psi\rangle| + |\langle X\operatorname{Im}(S)\varphi, H_0\psi\rangle - \langle\varphi, H_0\operatorname{Im}(S)X\psi\rangle| \\
&\leq C_1\|\varphi\|\,\|\operatorname{Im}(S)\psi\| + C_2\|\operatorname{Im}(S)\varphi\|\,\|\psi\| \\
&\leq C_3\|\varphi\|\,\|\psi\|,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

donde $C_3=(C_1+C_2)\|\operatorname{Im}(S)\|>0$.

Como $\mathcal{D}(X)$ es un dominio esencial de $\mathcal{D}(A)$, (3.14) se cumple para todo $\varphi,\psi\in\mathcal{D}(A)$ y esto significa que H_0 es C^1 con respecto a A. Como $H_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $H_0\in C^1(A)$.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
i\,[H_0,A] &= i\,[S+S^*, \operatorname{Im}(S)X+X\operatorname{Im}(S)] \\
&= i\,\{[S,\operatorname{Im}(S)]\,X + \operatorname{Im}(S)\,[S,X] + [S,X]\operatorname{Im}(S) + X\,[S,\operatorname{Im}(S)] \\
&\quad + [S^*,\operatorname{Im}(S)]\,X + \operatorname{Im}(S)\,[S^*,X] + [S^*,X]\operatorname{Im}(S) + X\,[S^*,\operatorname{Im}(S)]\} \\
&= i\,\{\operatorname{Im}(S)(-S) + (-S)\operatorname{Im}(S) + \operatorname{Im}(S)(S^*) + (S^*)\operatorname{Im}(S)\} \\
&= i\,\{-2S\operatorname{Im}(S) + 2S^*\operatorname{Im}(S)\} \\
&= 2i\,\{(S-S^*)\operatorname{Im}(S)\} \\
&= 2i\,\{-2i\operatorname{Im}(S)\operatorname{Im}(S)\} \\
&= 4(\operatorname{Im}(S))^2 \\
&= 4(\frac{-1}{4}(H_0^2-4)) \\
&= 4-H_0^2.
\end{aligned}
$$

Para lo anterior hemos usado (3.13), lema 3.4 a) y lema 3.4 b).

Se ha probado así lo pedido.

□

A partir de lo anterior, se obtienen algunos resultados que se usarán en el capítulo 6 para probar la existencia y completitud de los operadores de onda cuando la perturbación es de corto alcance.

Para la demostración del lema que viene a continuación, recordamos las siguientes definiciones.

Definición 3.9. Dados dos operadores acotados C_1 y C_2 en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, uno escribe $C_1 \geq C_2$ si

$$\langle \varphi, C_1 \varphi \rangle \geq \langle \varphi, C_2 \varphi \rangle, \tag{3.15}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.

Definición 3.10. Si H es un operador autoadjunto y J es un intervalo abierto, decimos que A es conjugado a H en J si existe un número $a > 0$ y un operador compacto autoadjunto K tal que

$$\mu^H(J)\,[H, iA]\,\mu^H(J) \geq a\mu^H(J) + K.$$

Esto se conoce como desigualdad de Mourre.

Lema 3.11. *A es conjugado a H_0.*

Demostración. Sea $\mu^{H_0}(\cdot)$ medida espectral de H_0 (ver Apéndice). Sea J un intervalo abierto tal que la distancia entre $\bar{J}$ y $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ es positiva. Luego, y notando que todo conmuta

$$\mu^{H_0}(J) i[H_0, A]\mu^{H_0}(J) = \mu^{H_0}(J)F(H_0)\mu^{H_0}(J) = \left(\mu^{H_0}(J)\right)^2 F(H_0) = \mu^{H_0}(J)F(H_0), \tag{3.16}$$

en donde hemos usado lema 3.8 y la definición de μ^{H_0}.
Definamos ahora el siguiente mapeo:

$$[-2, 2] \to \mathbb{R} : \lambda \to \mu^{\lambda}(J)F(\lambda) = \begin{cases} 4 - \lambda^2 & \text{si } \lambda \in J \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \tag{3.17}$$

Sea $a = \min\limits_{\lambda \in J} F(\lambda)$ con $a > 0$. Lo último se tiene por definición de J y de F.
Así, si $\lambda \in [-2, 2]$, usando (3.17) obtenemos que

$$\mu^{\lambda}(J)F(\lambda) \geq a\mu^{\lambda}(J). \tag{3.18}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{H}$. Luego, usando (3.16) y (3.18)

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi, \mu^{H_0}(J) i[H_0, A]\mu^{H_0}(J)\varphi \right\rangle &= \left\langle \varphi, \mu^{H_0}(J)F(H_0)\varphi \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu^{\lambda}(J)F(\lambda) \left\langle \varphi, d\mu^{H_0}(\lambda)\varphi \right\rangle \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} a\mu^{\lambda}(J) \left\langle \varphi, d\mu^{H_0}(\lambda)\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, a\mu^{H_0}(J)\varphi \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Finalmente, por definición anterior, usando (3.15) y lo obtenido en (3.19), A es conjugado a H_0.

□

Observación 3.12. Para todo $(j, k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, con $j \leq k$ se tiene que $\mathcal{D}(X^k) \subset \mathcal{D}(X^j)$.

Lema 3.13. *$H_0 \in C^\infty(A)$.*

Demostración. Para demostrar que $H_0 \in C^\infty(A)$, vamos a probar por inducción fuerte que $\forall k \in \mathbb{N}$:

i) $H_0 \in C^k(A)$;

ii) $\mathrm{Conm}_A^k(H_0) = P_{k+1}(H_0)$, donde $P_{k+1}(H_0)$ es un polinomio cualquiera de grado $k+1$ en H_0 con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Sea $k = 1$. Debemos mostrar que $H_0 \in C^1(A)$ y que $\mathrm{Conm}_A(H_0) = [A, H_0] = P_2(H_0)$.
Por lema 3.8, se tiene que $H_0 \in C^1(A)$ y que $[A, H_0] = iH_0^2 - 4i$, el cual es un polinomio de grado 2 en H_0.
Hemos probado así el caso base del proceso inductivo.

Sea n un numero natural cualquiera con $n > 1$ y asuma, por hipótesis inductiva, que para todo natural $m \in (1, n]$, $H_0 \in C^m(A)$ y que $\mathrm{Conm}_A^m(H_0) = P_{m+1}(H_0)$. Vamos a probar que lo anterior también se cumple para $n + 1$.

Según sección 3.1, para ver que $H_0 \in C^{n+1}(A)$ se debe tener que $H_0 \in C^n(A)$ y $\mathrm{Conm}_A^n(H_0) \in C^1(A)$.

Por hipótesis, para todo $m \in (1, n]$, $H_0 \in C^m(A)$ y $\mathrm{Conm}_A^m(H_0) = P_{m+1}(H_0)$, esto es

$$\mathrm{Conm}_A^m(H_0) = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j H_0^j \tag{3.20}$$

con $\alpha_j \in \mathbb{C}$ y $j \in \{0, .., m + 1\}$.

Observe que lo anterior significa que podemos escribir $[A, Q_m(H_0)] = L_{m+1}(H_0)$, donde Q y L son dos polinomios cualquiera en H_0.

Usando la proposición 3.3 b) y 3.3 c) sobre (3.20), pues $H_0 \in C^1(A)$, se obtiene que $\mathrm{Conm}_A^m(H_0) \in C^1(A)$ para todo $m \in (1, n]$.

Finalmente, usando (3.20) note que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Conm}_A^{n+1}(H_0) &= \mathrm{Conm}_A(\mathrm{Conm}_A^n(H_0)) \\
&= \mathrm{Conm}_A\left(\sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j H_0^j\right) \\
&= \left[A, \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j H_0^j\right] \\
&= \left[A, \sum_{j=0}^{n} \alpha_j H_0^j\right] + \left[A, \alpha_{n+1} H_0^{n+1}\right] \\
&= [A, P_n(H_0)] + [A, \alpha_{n+1} H_0^n H_0] \\
&= L_{n+1}(H_0) + [A, \alpha_{n+1} H_0^n]\, H_0 + H_0\, [A, \alpha_{n+1} H_0^n] \\
&= L_{n+1}(H_0) + M_{n+1}(H_0) H_0 + H_0 M_{n+1}(H_0) \\
&= L_{n+1}(H_0) + N_{n+2}(H_0) \\
&= R_{n+2}(H_0),
\end{aligned}$$

donde L, M, N y R son polinomios en H_0.

Con esto hemos demostrado lo pedido para $n+1$ y por principio de inducción fuerte, lo hemos probado para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, se tiene que $H_0 \in C^k(A)$ y como $C^\infty(A) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A)$, entonces $H_0 \in C^\infty(A)$.

$\square$

Lema 3.14. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que*

i) $\mathcal{D}(X^m) \subset \mathcal{D}(A^m)$

ii) $A^m = \sum_{j=0}^{m} P_{m,j}(S, S^*) X^j$ *en* $\mathcal{D}(X^m)$*, donde* $P_{m,j}(S, S^*)$ *es un polinomio de grado m en dos variables (*S *y* S^**).*

Demostración. Lo haremos por inducción sobre m.

Sea $m = 1$. Por observación 3.6, $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(A)$.

Por otro lado, note que

$$A = \mathrm{Im}(S)X + X\,\mathrm{Im}(S) = 2\,\mathrm{Im}(S)X + [X, \mathrm{Im}(S)]$$

y

$$[X, \mathrm{Im}(S)] = \left[X, \frac{S - S^*}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left([X, S] - [X, S^*]\right) = \frac{1}{2i}\left(S + S^*\right) = -i\,\mathrm{Re}(S),$$

donde en la segunda ecuación usamos el lema 3.4 a) y lema 3.4 b).

Juntando lo anterior, podemos reescribir A como

$$A = 2\,\mathrm{Im}(S)X - i\,\mathrm{Re}(S) \tag{3.21}$$

Así

$$A = 2\,\mathrm{Im}(S)X - i\,\mathrm{Re}(S) = \frac{(S-S^*)X}{i} - i\frac{S+S^*}{2} = (iS^* - iS)X^1 + \left(\frac{-i}{2}S - \frac{i}{2}S^*\right)X^0$$

en donde $iS^* - iS$ y $\frac{-i}{2}S - \frac{i}{2}S^*$ son polinomios de grado 1 en S y S^*. Por ende, se tiene ii) para $m = 1$ y así se cumple lo pedido para $m = 1$.

Supongamos ahora que se tiene i) y ii) para un m fijo. Veamos que es cierto para $m + 1$.

Tenemos que $A^m = \sum_{j=0}^{m} P_{m,j}(S, S^*)X^j$ en $\mathcal{D}(X^m)$. Luego

$$\begin{aligned} A^{m+1} = AA^m &= \{2\,\mathrm{Im}(S)X - i\,\mathrm{Re}(S)\} \sum_{j=0}^{m} P_{m,j}(S,S^*)X^j \\ &= \sum_{j=0}^{m} \{2\,\mathrm{Im}(S)[X, P_{m,j}(S,S^*)] - i\,\mathrm{Re}(S)P_{m,j}(S,S^*)\}\, X^j \\ &+ \sum_{j=0}^{m} 2\,\mathrm{Im}(S)P_{m,j}(S,S^*)X^{j+1}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por lema 3.4, podemos escribir $[X, P_{m,j}(S, S^*)] = Q_{m,j}(S, S^*)$, donde Q es otro polinomio de grado m en S y S^*. Usando esto, se tiene que $2\,\mathrm{Im}(S)Q_{m,j}(S, S^*) - i\,\mathrm{Re}(S)P_{m,j}(S, S^*) = R_{m+1,j}(S, S^*)$ con R un polinomio de grado $m + 1$ en S y S^*. Por otro lado, escribiremos $2\,\mathrm{Im}(S)P_{m,j}(S, S^*) = M_{m+1,j}(S, S^*)$ con M polinomio de grado $m + 1$.

Reescribiendo (3.22), este queda

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= \sum_{j=0}^{m} R_{m+1,j}(S,S^*)X^j + \sum_{j=0}^{m+1} M_{m+1,j}(S,S^*)X^j \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{m} R_{m+1,j}(S,S^*) + \sum_{j=0}^{m+1} M_{m+1,j}(S,S^*) \right\} X^j \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} L_{m+1,j}(S,S^*)X^j \end{aligned} \tag{3.23}$$

con $L_{m+1,j}(S, S^*) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} R_{m+1,j}(S, S^*) + \sum_{j=0}^{m+1} M_{m+1,j}(S, S^*)$ otro polinomio de grado $m + 1$ en S y S^*.

Hemos probado entonces que ii) se tiene para $m + 1$.

Finalmente, sea $\varphi \in \mathcal{D}(X^{m+1})$. Por observación 3.12, esto implica que $\varphi \in \mathcal{D}(X^j)$ con $j \in \{0, .., m\}$, por ende, usando (3.23) y el hecho que $S, S^* \in C^1(X)$ por lema 3.4, se tiene que $\varphi \in \mathcal{D}(A^{m+1})$.

Así, se cumple i) para $m + 1$. Por principio de inducción, se tiene i) y ii) para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Recordamos la siguiente definición.

Definición 3.15. Sean A y B dos operadores lineales densamente definidos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Decimos que B es relativamente acotado con respecto a A si $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ y si existen constantes no negativas α y β tal que

$$\|A\varphi\| \leq \alpha \|\varphi\| + \beta \|X\varphi\|$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(A)$.

Proposición 3.16. *Para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, A^m es relativamente acotado con respecto a X^m.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{Z}_+$y sea $\varphi \in \mathcal{D}(X^m)$. Según definición 3.15 y por lema anterior, solo nos resta probar que existen constantes $\alpha_m > 0$ y $\beta_m > 0$ tal que

$$\|A^m\varphi\| \leq \alpha_m \|\varphi\| + \beta_m \|X^m\varphi\| .$$

Note que $\forall\ (j,k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con $j \leq k$ y $\forall \varphi \in \mathcal{D}(X^k)$ se tiene que $\left\|X^j\varphi\right\| \leq \left\|X^k\varphi\right\|$. Usando esto y el lema 3.14 ii), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|A^m\varphi\| &= \left\|\sum_{j=0}^{m} P_{m,j}(S,S^*)X^j\varphi\right\| \\
&= \left\|P_{m,0}(S,S^*)\varphi + P_{m,1}(S,S^*)X^1\varphi + ... + P_{m,m}(S,S^*)X^m\varphi\right\| \\
&\leq \|P_{m,0}(S,S^*)\varphi\| + \left\|P_{m,1}(S,S^*)X^1\varphi\right\| + ... + \|P_{m,m}(S,S^*)X^m\varphi\| \\
&\leq \|P_{m,0}(S,S^*)\| \|\varphi\| + \|P_{m,1}(S,S^*)\| \|X^m\varphi\| + ... + \|P_{m,m}(S,S^*)\| \|X^m\varphi\| \\
&\leq \alpha_m \|\varphi\| + \beta_{m,1} \|X^m\varphi\| + ... + \beta_{m,m} \|X^m\varphi\| \\
&= \alpha_m \|\varphi\| + \{\beta_{m,1} + ... + \beta_{m,m}\} \|X^m\varphi\| \\
&= \alpha_m \|\varphi\| + \beta_m \|X^m\varphi\| ,
\end{aligned}$$

donde α_m y $\beta_{m,j}$ son constantes positivas para todo $j \in \{1,...,m\}$, pues S y S^* son unitarios. Aquí escribimos $\beta_m = \sum_{j=1}^{m} \beta_{m,j}$, que es claramente una constante positiva.

Por lo tanto, A^m es relativamente acotado con respecto a X^m.

□

Observación 3.17. En este capítulo y los que siguen, para cualquier operador autoadjunto B se usará la notación $< B >= \sqrt{(B^2+1)}$.

Proposición 3.18. *Para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, $A^m < X >^{-m}$ es acotado.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{Z}_+$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(< X >^m)$.

Note que $X^{2m} \leq (X^2+1)^m$ en el sentido de la definición 3.9. Luego, $\mathcal{D}(< X >^m) \subset \mathcal{D}(X^m)$ y

$$\|X^m\varphi\| \leq \|< X >^m \varphi\| . \tag{3.24}$$

De lo anterior y por lema 3.14 i), se tiene que $\mathcal{D}(< X >^m) \subset \mathcal{D}(A^m)$.

Así, aplicando la proposición anterior, existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ constantes tal que

$$\begin{aligned}
\left\|A^m < X >^{-m} \varphi\right\| &\leq \alpha \left\|< X >^{-m} \varphi\right\| + \beta \left\|X^m < X >^{-m} \varphi\right\| \\
&\leq \alpha \left\|< X >^{-m}\right\| \|\varphi\| + \beta \left\|X^m < X >^{-m}\right\| \|\varphi\| \\
&\leq C \|\varphi\| ,
\end{aligned}$$

en donde hemos usado que $< X >^{-m}$ es acotado por el cálculo funcional (ver definición B.5 en Apéndice) y que $\|X^m < X >^{-m}\|$ también lo es por (3.24), por lo que escribimos $C = \alpha \|< X >^{-m}\| + \beta \|X^m < X >^{-m}\|$ constante mayor a 0.

Con esto hemos probado lo pedido para todo $m \in \mathbb{Z}_+$. □

Corolario 3.19. *Para todo $t \in \mathbb{Z}_+$, $< X >^{-t}< A >^t$ es acotado.*

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
\left\|< X >^{-t}< A >^t\right\| &= \left\|\left(< X >^{-t}< A >^t\right)^*\right\| \\
&= \left\|< A >^t< X >^{-t}\right\| ,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

en donde hemos usado la proposición B.3 d) (ver Apéndice) sobre $< A >^t$ y $< X >^{-t}$ para utilizar el hecho que ambos son autoadjuntos.

Sea entonces $t \in \mathbb{Z}_+$ y $\varphi \in \mathcal{D}(< X >^{-t})$, luego

$$\begin{aligned}
\left\| < A >^t < X >^{-t} \varphi \right\|^2 &= \left\langle < A >^t < X >^{-t} \varphi, < A >^t < X >^{-t} \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle < X >^{-t} \varphi, < A >^{2t} < X >^{-t} \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle < X >^{-t} \varphi, (A^2+1)^t < X >^{-t} \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle < X >^{-t} \varphi, \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} A^{2k} < X >^{-t} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \left\langle < X >^{-t} \varphi, A^{2k} < X >^{-t} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \left\langle A^k < X >^{-t} \varphi, A^k < X >^{-t} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \left\| A^k < X >^{-t} \varphi \right\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \left\| A^k < X >^{-k} < X >^{k-t} \varphi \right\|^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \left\| A^k < X >^{-k} \right\|^2 \left\| \varphi \right\|^2 .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Por proposición anterior, para todo $t \in \mathbb{Z}_+$, y en particular para $k < t$, se tiene que $A^k < X >^{-k}$ es acotado. Finalmente, como $< X >^{k-t}$ es acotado por 1, pues $k - t < 0$, de (3.26) se obtiene que $< A >^t < X >^{-t}$ es acotado $\forall t \in \mathbb{Z}_+$ y por (3.25), $< X >^{-t} < A >^t$ también lo es.

□

Proposición 3.20. *Para todo $t \in [0, +\infty)$, $< X >^{-t} < A >^t$ es acotado.*

Demostración. Primero, vamos a probar lo pedido para un $t \in [0, 1]$.

Sea $\psi \in \mathcal{D}(< A >)$. Como $< X >^{-1} < A >$ es un operador positivo, autoadjunto e invertible, por lema 6.28 en [3] la función $z \to < X >^{-z} < A >^z \psi$ es fuertemente holomorfa en $\mathcal{O}$ con $\mathcal{O} = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

Sea $\varphi \in \mathcal{H}$. Definimos

$$F(z) = \left\langle \varphi, < X >^{-z} < A >^z \psi \right\rangle$$

Como $< X >$ y $< A >$ son operadores positivos, podemos escribir $< X >^{-z} = e^{-\mathrm{zlog}<X>}$ y $< A >^z = e^{\mathrm{zlog}<A>}$.

Ahora, tome $z \in \mathbb{C}$ con $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned}
|F(z)| &= \left| \left\langle \varphi, e^{-\mathrm{iylog}<X>} e^{\mathrm{iylog}<A>} \psi \right\rangle \right| \\
&\leq \|\varphi\| \, \|\psi\| ,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

pues $e^{-\mathrm{iylog}<X>}$ y $e^{\mathrm{iylog}<A>}$ son operadores unitarios.

Por otro lado, considere $z \in \mathbb{C}$ con $z = 1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned}
|F(z)| &= \left| \left\langle \varphi, e^{(\text{-}1+\mathrm{iy})\log<X>} e^{(1+\mathrm{iy})\log<A>} \psi \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \varphi, e^{-\mathrm{iylog}<X>} e^{-\log<X>} e^{\log<A>} e^{\mathrm{iylog}<A>} \psi \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \varphi, e^{-\mathrm{iylog}<X>} < X >^{-1} < A > e^{\mathrm{iylog}<A>} \psi \right\rangle \right| \\
&\leq \left\| < X >^{-1} < A > \right\| \|\varphi\| \, \|\psi\|
\end{aligned} \tag{3.28}$$

lo que implica que $F(z)$ es acotado en este caso, pues $< X >^{-1}< A >$ lo es por corolario 3.19.
Así, por (3.27) y (3.28), F tiene una extensión continua y acotada en $\bar{\mathcal{O}}$.
De lo anterior, se tiene que

$$M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |F(iy)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$$

y

$$M_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |F(1+iy)| \leq \left\|< X >^{-1}< A >\right\| \|\varphi\| \, \|\psi\| .$$

Usando lema 6.27 en [3],

$$|F(z)| = |F(x+iy)| \leq C_x \|\varphi\| \, \|\psi\| \tag{3.29}$$

con $C_x = \left\|< X >^{-1}< A >\right\|^x$.
Así, usando (3.29) con $x = t$ e $y = 0$

$$\left\|< X >^{-t}< A >^t\right\| = \sup_{\varphi\in\mathcal{H},\|\varphi\|=1} \; \sup_{\psi\in\mathcal{D}(<A>),\|\psi\|=1} |\left\langle \varphi, < X >^{-t}< A >^t \psi \right\rangle| \leq C_t$$

Por lo tanto, hemos probado que $< X >^{-t}< A >^t$ es acotado para $t \in [0,1]$.
Sea ahora $t \in [m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, $m \geq 1$. Escribiremos t como $t = m + t'$ con $t' \in [0,1]$.
Así

$$\begin{aligned}
\left\|< X >^{-t}< A >^t\right\| &= \left\|< X >^{-t}< X >^m< X >^{-m}< A >^m< A >^{-m}< A >^t\right\| \\
&= \left\|< X >^{-t+m}< X >^{-m}< A >^m< A >^{t-m}\right\| \\
&= \left\|< X >^{-t'}< X >^{-m}< A >^m< A >^{t'}\right\| .
\end{aligned}$$

Note que $< X >^{-1}$ y $< A >$ son operadores autoadjuntos, invertibles y positivos con $< X >^{-1}$ acotado. Además, como m es un natural mayor o igual a 1, por corolario 3.19, $< X >^{-m}< A >^m$ es acotado. Finalmente, $< X >^{-1}< X >^{-m}< A >^m< A >$ es acotado, pues $< X >^{-(m+1)}< A >^{m+1}$ es acotado por corolario 3.19. Así, por proposición 6.17 en [3], $< X >^{-t'}< X >^{-m}< A >^m< A >^{t'}$ es acotado para todo $t' \in [0,1]$.

Como m es arbitrario, y anteriormente probamos que $< X >^{-t}< A >^t$ es acotado para $t \in [0,1]$, se tiene que $< X >^{-t}< A >^t$ es acotado para todo $t \geq 0$. □

4. Demostración del teorema

En este capítulo, se probará el teorema más importante de esta tesis. Para este propósito, se utilizaron algunas estrategias de la demostración del teorema 0.1 que se encuentran en [1] y [4]. Fue necesario rehacer algunos resultados utilizados en la demostración del caso continuo con el fin de poder usarlos en nuestro caso. También se usaron los resultados de la teoría de conmutadores del capítulo anterior.

La demostración se dividirá en dos partes y se reducirá a probar (2.2) en la sección 4.1 y (2.1) en la sección 4.2, según la equivalencia enunciada en la observación 2.5.

4.1. Demostración (2.2)

Sean $\varphi \in \mathcal{H}(H)$ y $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Llame $F_0 = F(HP_c)$. Para comenzar la demostración, considere los siguientes lemas:

Lema 4.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}$ y sean M y N dos operadores arbitrarios acotados. Entonces*

$$\|(M-N)\varphi\|^2 = -\langle N\varphi, (M-N)\varphi\rangle - \langle (M-N)\varphi, N\varphi\rangle + \langle \varphi, (M^*M - N^*N)\varphi\rangle . \tag{4.30}$$

Lema 4.2. *Sea C un operador cualquiera autoadjunto y sea $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Entonces*

$$((C-z)^{-1})^*(C-z)^{-1} = \frac{-1}{2i\operatorname{Im}(z)}\{((C-z)^{-1})^* - (C-z)^{-1}\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
((C-z)^{-1})^* - (C-z)^{-1} &= (C^* - \bar{z})^{-1} - (C-z)^{-1} \\
&= (C-\bar{z})^{-1} - (C-z)^{-1} \\
&= (C-\bar{z})^{-1}(C - z - (C-\bar{z}))(C-z)^{-1} \\
&= (-z+\bar{z})(C-\bar{z})^{-1}(C-z)^{-1} \\
&= -2i\operatorname{Im}(z)(C-\bar{z})^{-1}(C-z)^{-1} \\
&= -2i\operatorname{Im}(z)((C-z)^{-1})^*(C-z)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Para continuar, tome

$$M = \left(\frac{A(t)}{t} - z\right)^{-1} \text{ y } N = (F_0 - z)^{-1}$$

como en lema 4.1 y aplicando el resultado del lema 4.2 sobre el último término de la suma en (4.30) para $C = M$, $C = N$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \varphi, \left\{ \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} \right)^* \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - \left((F_0 - z)^{-1} \right)^* (F_0 - z)^{-1} \right\} \varphi \right\rangle \\
&\qquad = \left\langle \varphi, \frac{-1}{2i\operatorname{Im}(z)} \left\{ \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} \right)^* - \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - \left((F_0 - z)^{-1} \right)^* + (F_0 - z)^{-1} \right\} \varphi \right\rangle \\
&= \frac{1}{2i\operatorname{Im}(z)} \left\{ \left\langle \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi, \varphi \right\rangle - \left\langle \varphi, \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi \right\rangle \right\}. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Así, (4.31) y la ecuación (4.30) nos dicen que, para probar (2.2), como $(F_0 - z)^{-1}$ es fijo para todo t, solo debemos mostrar que

$$\left\langle \eta, \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi \right\rangle \to 0 \quad \text{si} \quad |t| \to +\infty, \tag{4.32}$$

para todo $\eta, \varphi \in \mathcal{H}$.

Observación 4.3. Note que aquí, la convergencia débil de la resolvente implica la convergencia fuerte de la resolvente.

Antes de probar (4.32), necesitamos los siguientes lemas y el siguiente teorema:

Lema 4.4. *Sean H, A, V, H_0 y X los operadores definidos en el capítulo 3. Entonces:*

a) $\mathcal{D}(X^2) \subset \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} = \mathcal{D}(H)$.

b) Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$, se tiene que $H_0\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$ y

$$A\varphi = \frac{i}{2}(H_0X^2 - X^2H_0)\varphi. \tag{4.33}$$

c) Si $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$ y $V \in C^1(X^2)$ se obtiene que $H\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$.

d) $\mathcal{D}(X^2(t)) = \mathcal{D}(X^2)$, para todo $t > 0$.

e) Si $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$ y $V \in C^1(X)$ se cumple que $e^{\pm iHt}\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$.

Demostración. a) Se sabe que $\mathcal{D}(X^2) \subset \mathcal{D}(X)$ y por construcción del operador A, se tiene que $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(A)$. Naturalmente, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$.

b) Lo haremos por definición. Se sabe que

$$\mathcal{D}(X^2) = \{\varphi \in \mathcal{H} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^2\varphi_n|^2 < +\infty\}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^2(H_0\varphi_n)|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \{n^2(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1})\}^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \{(n+1)^2\varphi_{n+1} + (n^2 - (n+1)^2)\varphi_{n+1} + (n-1)^2\varphi_{n-1} + (n^2 - (n-1)^2)\varphi_{n-1}\}^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \{(n+1)^2\varphi_{n+1} + (n-1)^2\varphi_{n-1} - 2(n+1)\varphi_{n+1} + \varphi_{n+1} + 2(n-1)\varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\}^2 \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4(n+1)^4\varphi_{n+1}^2 + 4(n-1)^4\varphi_{n-1}^2 + 8(n-1)^2\varphi_{n-1}^2 + 8(n+1)^2\varphi_{n+1}^2 + 8\varphi_{n+1}^2 + 8\varphi_{n-1}^2 \\
&\leq 4\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n+1)^4\varphi_{n+1}^2 + 4\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-1)^4\varphi_{n-1}^2 + 8\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-1)^4\varphi_{n-1}^2 + 8\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n+1)^4\varphi_{n+1}^2 \\
&+ 8\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_{n+1}^2 + 8\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_{n-1}^2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Lo anterior se tiene, pues cada término de la penúltima desigualdad es finito. Los cuatro primeros lo son, ya que si hacemos una traslación del índice de la suma, usamos que $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$. Los últimos dos términos de la misma son finitos, debido a que, en particular, $\varphi \in \mathcal{H}$.

Así, $H_0\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$. Finalmente, por observación 3.6, se tiene (4.33).

c) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$. Como

$$H\varphi = H_0\varphi + V\varphi$$

se tiene que $H\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$, pues por b), $H_0\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$, y por hipótesis, $V\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$.

d) Sea $t > 0$. Usando lema 3.5, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(X^2) &= \{\varphi \in \mathcal{D}(X) : X\varphi \in \mathcal{D}(X)\} \\
&= \{\varphi \in \mathcal{D}(X(t)) : X\varphi \in \mathcal{D}(X(t))\} \\
&= \{\varphi \in \mathcal{D}(X(t)) : (X(t) - (X(t) - X))\varphi \in \mathcal{D}(X(t))\} \\
&= \{\varphi \in \mathcal{D}(X(t)) : X(t)\varphi \in \mathcal{D}(X(t))\} \\
&= \mathcal{D}(X^2(t)).
\end{aligned}$$

Para llegar a la penúltima igualdad, por teorema fundamental del cálculo y los resultados anteriores, se tiene que X(t)-X es acotado, por ende, $(X(t) - X)\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y así $X(t)\varphi \in \mathcal{D}(X(t))$.

Hemos probado lo pedido.

e) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Considere

$$\varphi = (X^2 - z)^{-1}\psi$$

con $\psi \in \mathcal{H}$.

Luego

$$\begin{aligned}
e^{\pm iHt}(X^2 - z)^{-1}\psi &= e^{\pm iHt}(X^2 - z)^{-1}e^{\mp iHt}e^{\pm iHt}\psi \\
&= (X^2(t) - z)^{-1}e^{\pm iHt}\psi \in \mathcal{D}(X^2(t)).
\end{aligned}$$

Usando el resultado obtenido en d), lo anterior implica que $e^{\pm iHt}\varphi \in \mathcal{D}(X^2)$. □

Lema 4.5. *Sea $\psi \in \mathcal{H}$. Para todo $t \neq 0$, defina $\psi_t := \left(1 + \frac{X^2}{t}\right)^{-1} \psi$ una regularización de ψ. Entonces:*

a) $\forall t \neq 0$, $\psi_t \in \mathcal{D}(X^2)$.

b) $\psi_t \to \psi$ *si* $|t| \to +\infty$.

c) $H\psi_t \to H\psi$ *si* $|t| \to +\infty$.

d) $\|A\psi_t\| \leq C_1(\psi)\sqrt{|t|}$, $\|X\psi_t\| \leq C_2(\psi)\sqrt{|t|}$ *y* $\left\|X^2\psi_t\right\| \leq C_3(\psi)|t|$.

Demostración. a) Sea $t \neq 0$. Note que

$$\operatorname{Ran}\left(\left(1 + \frac{X^2}{t}\right)^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(\frac{X^2}{t}\right) = \mathcal{D}(X^2).$$

Así, $\psi_t \in \mathcal{D}(X^2)$.

b) Calculemos la siguiente diferencia en norma

$$\begin{aligned}
\|\psi_t - \psi\|^2 &= \left\|\left(\left(1 + \frac{X^2}{t}\right)^{-1} - 1\right)\psi\right\|^2 \\
&= \left\langle \psi, \left(\left(1 + \frac{X^2}{t}\right)^{-1} - 1\right)^2 \psi \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\lambda^2}{t}\right)^{-1} - 1\right)^2 d\left\langle \psi, \mu^{X^2}(\lambda)\psi \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-\lambda^2}{t + \lambda^2}\right)^2 d\left\langle \psi, \mu^{X^2}(\lambda)\psi \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ahora,

$$\left| \frac{-\lambda^2}{t+\lambda^2} \right| \leq 1$$

y para todo λ fijo

$$\frac{-\lambda^2}{t+\lambda^2} \to 0$$

si $|t| \to +\infty$.

Así, utilizando lo anterior, por teorema de convergencia dominada, la última igualdad de (4.34) converge a 0 si $|t| \to \infty$, es decir

$$\psi_t \to \psi$$

si $|t| \to +\infty$.

c) Sabemos que H es acotado, luego

$$\|H\psi_t - H\psi\| \leq \|H\| \, \|\psi_t - \psi\| \to 0$$

si $|t| \to +\infty$ por parte b) del lema.

d) Analicemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|X\psi_t\|^2 &= \left\| X \left(1 + \frac{X^2}{t}\right)^{-1} \psi \right\|^2 \\ &= |t| \left\| \left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right) \left(1 + \left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right)^2\right)^{-1} \psi \right\|^2 . \end{aligned} \tag{4.35}$$

Llamemos

$$G_1\left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right) = \left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right) \left(1 + \left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right)^2\right)^{-1},$$

donde $G_1(\lambda) = \lambda(1+\lambda^2)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Por el cálculo funcional, el operador $G_1\left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right)$ es acotado.

Así, reemplazando en (4.35)

$$\|X\psi_t\|^2 = |t| \left\| G_1\left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right) \psi \right\|^2 \leq |t| \, \|G_1\|_\infty^2 \, \|\psi\|^2$$

lo que implica que

$$\|X\psi_t\| \leq \sqrt{|t|} C_2(\psi) \tag{4.36}$$

con $C_2(\psi) = \|G_1\|_\infty \|\psi\|$.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\left\|X^2\psi_t\right\| &= \left\|X^2\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}\psi\right\| \\
&= \left\|t\frac{X^2}{t}\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}\psi\right\| \\
&= |t|\left\|\frac{X^2}{t}\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}\psi\right\|
\end{aligned}
$$

y el operador $G_2\left(\frac{X^2}{t}\right)=\frac{X^2}{t}\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}$ es acotado por el cálculo funcional, pues $G_2(\lambda)=\frac{\lambda}{1+\lambda}\in L^\infty(\mathbb{R})$.

Así

$$
\left\|X^2\psi_t\right\| = |t|\left\|\frac{X^2}{t}\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}\psi\right\| \leq |t|\left\|G_2\right\|_\infty\|\psi\|
$$

con $C_3(\psi)=\|G_2\|_\infty\|\psi\|$.

Por otro lado, usando

$$
\begin{aligned}
\|A\psi_t\| &= \|2\operatorname{Im}(S)X\psi_t - i\operatorname{Re}(S)\psi_t\| \\
&\leq 2\|\operatorname{Im}(S)\|\|X\psi_t\| + \|\operatorname{Re}(S)\|\|\psi_t\|
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

y

$$
\|\psi_t\| = \left\|\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}\psi\right\| \leq \|G_3\|_\infty\|\psi\|, \tag{4.38}
$$

donde $G_3\left(\frac{X}{\sqrt{|t|}}\right)=\left(1+\frac{X^2}{t}\right)^{-1}$ es acotado por el cálculo funcional, pues $G_3(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda}\in L^\infty(\mathbb{R})$.

Usando (4.36), (4.38) y el hecho de que $\operatorname{Im}(S)$ y $\operatorname{Re}(S)$ son acotados, obtenemos, a partir de (4.37), que

$$
\begin{aligned}
\|A\psi_t\| &\leq \sqrt{|t|}C_4(\psi)+C_5(\psi) \\
&= \sqrt{|t|}C_4(\psi)\left(1+\frac{C_5(\psi)}{C_4(\psi)}\right) \\
&= \sqrt{|t|}C_1(\psi),
\end{aligned}
$$

donde $C_4(\psi)=2\|\operatorname{Im}(S)\|C_2(\psi)$, $C_5(\psi)=\|\operatorname{Re}(S)\|\|G_3\|_\infty\|\psi\|$ y $C_1(\psi)=C_4(\psi)\left(1+\frac{C_5(\psi)}{C_4(\psi)}\right)$.

Hemos probado así lo pedido.

□

Teorema 4.6. *Sea N un operador autoadjunto. Entonces para $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*

$$
\left\|(z-N)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}.
$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{H}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned}\langle (z-N)\varphi, \varphi\rangle &= \langle (\operatorname{Re}(z) - N + i\operatorname{Im}(z))\varphi, \varphi\rangle \\ &= \langle (\operatorname{Re}(z) - N)\varphi, \varphi\rangle + i\operatorname{Im}(z)\langle \varphi, \varphi\rangle\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\|(z-N)\varphi\| \, \|\varphi\| \geq |\operatorname{Im}(z)| \, \|\varphi\|^2$$

y, por ende,

$$\frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \|\varphi\| \geq \left\|(z-N)^{-1}\varphi\right\|.$$

De lo anterior, se obtiene lo pedido.

□

Retomando (4.32),

$$\left\| \left\langle \eta, \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi \right\rangle \right\| \leq \|\eta\| \left\| \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi \right\|,$$

por lo que de aquí en adelante, lo que haremos será probar que

$$\left\| \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi \right\| \to 0$$

si $|t| \to +\infty$.
Entonces

$$\begin{aligned}\left\| \left(\left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} - (F_0 - z)^{-1} \right) \varphi \right\| &= \left\| \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} \left((F_0 - z) - \left(\frac{A(t)}{t} - z \right) \right) (F_0 - z)^{-1} \varphi \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} \left(F_0 - \frac{A(t)}{t} \right) (F_0 - z)^{-1} \varphi \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) (F_0 - z)^{-1} \varphi \right\|\end{aligned} \tag{4.39}$$

y considere las siguientes notaciones (que se mantendrán durante todo el capítulo):

$$R_{\frac{A(t)}{t}} = \left(\frac{A(t)}{t} - z \right)^{-1},$$

$$R_{F_0} = (F_0 - z)^{-1}.$$

Por otro lado, llame $\psi = R_{F_0}\varphi$ y sea $\psi_t := \left(1 + \frac{X^2}{t}\right)^{-1} \psi$ la regularización de ψ como en el lema 4.5.

Reescribiendo el lado derecho de (4.39), nos queda

$$\begin{aligned}\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) \psi \right\| &= \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) (\psi_t - \psi_t + \psi) \right\| \\ &\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) (\psi_t - \psi) \right\| + \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) \psi_t \right\|.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Analizaremos el límite de cada sumando en la última desigualdad.

Para el primer sumando

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) (\psi_t - \psi) \right\| &\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{A(t)}{t} \right\| \|(\psi_t - \psi)\| + \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - z + z \right) \right\| \|(\psi_t - \psi)\| + \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&= \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - z \right) + R_{\frac{A(t)}{t}} z \right\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&+ \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&\leq \left\| 1 + R_{\frac{A(t)}{t}} z \right\| \|(\psi_t - \psi)\| + \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Sabemos que $R_{\frac{A(t)}{t}}$ y $1 + R_{\frac{A(t)}{t}}$ son acotados por teorema 4.6 y F_0 también lo es por definición de F, pues H es acotado. Así, aplicando el lema 4.5 b) sobre la última desigualdad de (4.41),

$$\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) (\psi_t - \psi) \right\| \to 0 \tag{4.42}$$

si $|t| \to +\infty$.

Para el segundo sumando de (4.40)

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{A(t)}{t} - F_0 \right) \psi_t \right\| &= \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left(\frac{1}{t}(A(t) - A(0) + A(0)) - F_0 \right) \psi_t \right\| \\
&\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left\{ \frac{1}{t}(A(t) - A(0)) \right\} \psi_t - R_{\frac{A(t)}{t}} F_0 \psi_t \right\| + \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} A\psi_t \right\|
\end{aligned} \tag{4.43}$$

y usando el lema 4.5 d) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} A\psi_t \right\| &= \frac{1}{|t|} \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \|A\psi_t\| \\
&\leq \frac{1}{|t|} \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| C(\psi) \sqrt{|t|} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

si $|t| \to +\infty$, pues $R_{\frac{A(t)}{t}}$ es acotado por teorema 4.6.

Ahora, por lema 4.4, podemos usar el teorema fundamental del cálculo para $\psi_t \in \mathcal{D}(X^2)$, donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
A(t)\psi_t - A(0)\psi_t &= \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A(s)\psi_t \right] ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} i \,[H, A]\, e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} (i\,[H_0, A] + i\,[V, A]) e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} \psi_t ds.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Así, aplicando esto en (4.43)

$$\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \left\{ \frac{1}{t}(A(t) - A(0)) \right\} \psi_t - R_{\frac{A(t)}{t}} F_0 \psi_t \right\| = \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} \psi_t ds - R_{\frac{A(t)}{t}} F_0 \psi_t \right\|.$$

Para analizar la convergencia de lo anterior cuando $|t| \to +\infty$, vamos a descomponer el vector ψ_t. Se tiene entonces

$$\psi_t = P_c \psi_t + P_{pp} \psi_t.$$

Así

$$\begin{aligned} \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} \psi_t ds - R_{\frac{A(t)}{t}} F_0 \psi_t \right\| \leq & \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_c \psi_t ds \right. \\ & \left. - R_{\frac{A(t)}{t}} F_0 P_c \psi_t \right\| \\ & + \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + [V, A]) e^{-iHs} P_{pp} \psi_t ds \right\|, \end{aligned} \tag{4.45}$$

en donde hemos usado que $F_0 P_{pp} = F(HP_c) P_{pp} = 0$, pues $P_c^{\perp} = P_{pp}$.

Para concluir la demostración de (2.2), nos falta probar que (4.45) converge a 0 si $|t| \to +\infty$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_c \psi_t ds - R_{\frac{A(t)}{t}} F_0 P_c \psi_t \right\| &= \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A] \right. \\ & \left. - F_0) e^{-iHs} P_c \psi_t ds \right\| \\ &= \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W e^{-iHs} P_c \psi_t ds \right\| \end{aligned} \tag{4.46}$$

con $W = F(H_0) + i\,[V, A] - F_0$ compacto, pues supusimos V y $[V, A]$ compactos. Note que en (4.46) F_0 entra a la integral, pues conmuta con H por definición.

Así

$$\begin{aligned} \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W e^{-iHs} P_c \psi_t ds \right\| &\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W e^{-iHs} P_c \psi_t ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W e^{-iHs} P_c (\psi_t - \psi + \psi) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\{ \frac{1}{|t|} \|W\| \, \|P_c(\psi_t - \psi)\| \int_0^t ds \right. \\ & \left. + \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W P_c e^{-iHs} \psi ds \right\| \right\} \\ &\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\{ \|W\| \, \|\psi_t - \psi\| \right. \\ & \left. + \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W P_c e^{-iHs} \psi ds \right\| \right\}, \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde hemos usado el teorema 4.6 para la cota de $R_{\frac{A(t)}{t}}$, que $\|P_c\| = 1$ y que P_c conmuta con H.

Finalmente, (4.47) converge a 0 si $|t| \to +\infty$, pues

$$\|W\| \, \|\psi_t - \psi\| \to 0$$

por lema 4.5 b) y debido a que W es compacto y puesto que

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} W P_c e^{-iHs} \psi ds \right\| \to 0$$

por el teorema RAGE (teorema 1.2 c)).

Retomando (4.45)

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_{pp} \psi_t ds \right\| &= \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_{pp} (\psi_t - \psi + \psi) ds \right\| \\
&\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_{pp} (\psi_t - \psi) ds \right\| \\
&+ \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_{pp} \psi ds \right\|.
\end{aligned}$$

Note que $F(H_0) + i\,[V, A]$ es acotado, pues cada término lo es, el primero por definición y el segundo, pues $[V, A]$ es compacto por hipótesis. Además, $\|P_{pp}\| = 1$. Usando esto, si $|t| \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_{pp} (\psi_t - \psi) ds \right\| &\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \frac{1}{|t|} \int_0^t \|(F(H_0) + i\,[V, A]) P_{pp} (\psi_t - \psi)\| \, ds \\
&\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \frac{1}{|t|} \|F(H_0) + i\,[V, A]\| \, \|P_{pp}\| \, \|\psi_t - \psi\| \int_0^t ds \\
&\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \|F(H_0) + i\,[V, A]\| \, \|\psi_t - \psi\| \\
&\to 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

por lema 4.5 b).

Por otro lado, como $P_{pp}\psi \in \mathcal{H}_{pp}(H)$, por observación B.8 (ver Apéndice), existe $N \in \mathbb{N}$ fijo tal que

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} P_{pp} \psi ds \right\| &= \Bigg\| R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} \left(P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^N P_{E_k} \psi \right) ds \\
&+ R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iHs} \sum_{k=1}^N P_{E_k} \psi ds \Bigg\| \\
&\leq \left\| R_{\frac{A(t)}{t}} \right\| \frac{1}{|t|} \|F(H_0) + i\,[V, A]\| \left\| P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^N P_{E_k} \psi \right\| \int_0^t ds \\
&+ \left\| \sum_{k=1}^N R_{\frac{A(t)}{t}} \frac{1}{t} \int_0^t e^{iHs} (F(H_0) + i\,[V, A]) e^{-iE_k s} P_{E_k} \psi ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \|F(H_0) + i\,[V, A]\| \left\| P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^N P_{E_k} \psi \right\| \\
&+ \left\| \sum_{k=1}^N R_{\frac{A(t)}{t}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{i(H - E_k)s} ds \right\} (F(H_0) + i\,[V, A]) P_{E_k} \psi \right\|
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Luego, si $N \to +\infty$, como $F(H_0) + i\,[V, A]$ es acotado se tiene que

$$\frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \|F(H_0) + i\,[V, A]\| \left\| P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^N P_{E_k} \psi \right\| \to 0 \tag{4.50}$$

Observación 4.7. Sea E un valor propio asociado al operador H. Entonces

$$s-\lim_{|t|\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{i(H-E)s}ds = P_E.$$

Para el segundo sumando de la última desigualdad en (4.49), y recordando que $F(H_0)+i\,[V,A]=i[H,A]$, si $|t|\to+\infty$, por observación anterior nos queda

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} R_{\frac{A(t)}{t}}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t e^{i(H-E_k)s}ds\right\} i[H,A]P_{E_k}\psi\right\| \to \left\|\sum_{k=1}^{N} R_{\frac{A(t)}{t}} P_{E_k} i[H,A]P_{E_k}\psi\right\| = 0, \tag{4.51}$$

donde en la última igualdad hemos usado que la suma es finita y el teorema del virial (ver [8]), ya que $H\in C^1(A)$, pues $H_0\in C^1(A)$, por lema 3.8 y $V\in C^1(A)$, debido a que $[V,A]$ es compacto, luego la suma de ambos operadores está en $C^1(A)$ por lema 3.3 b).

Así, por (4.50) y (4.51), si $|t|\to+\infty$, (4.49) converge a 0 y juntando el resultado en (4.48) se tiene que

$$\left\|R_{\frac{A(t)}{t}}\frac{1}{t}\int_0^t e^{iHs}(F(H_0)+i\,[V,A])e^{-iHs}P_{pp}\psi_t ds\right\|\to 0.$$

Con esto hemos probado (2.2).

4.2. Demostración (2.1)

Observación 4.8. Todas las notaciones usadas en la sección anterior se mantendrán.

Del mismo análisis realizado sobre (2.2), mostrar (2.1) se reduce a probar que, para todo $\varphi\in\mathcal{H}(H)$ y para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\left\|\left(\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)^{-1}-(F_0-z)^{-1}\right)\varphi\right\|\to 0 \tag{4.52}$$

si $|t|\to+\infty$.

Reescribiendo la norma anterior

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)^{-1}-(F_0-z)^{-1}\right)\varphi\right\| &= \left\|\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)^{-1}\left((F_0-z)-\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)\right)(F_0-z)^{-1}\varphi\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)^{-1}\left(F_0-\frac{X^2(t)}{t^2}\right)(F_0-z)^{-1}\varphi\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)^{-1}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)(F_0-z)^{-1}\varphi\right\|.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Llamando $R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}=\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-z\right)^{-1}$ y utilizando las notaciones de la sección anterior, la última igualdad de (4.53) queda

$$\begin{aligned}
\left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)R_{F_0}\varphi\right\| &= \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)\psi\right\| \\
&= \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)(\psi_t-\psi_t+\psi)\right\| \\
&\le \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)(\psi_t-\psi)\right\|+\left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)\psi_t\right\|.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Vamos a analizar los dos sumandos de la última desigualdad en (4.54) cuando $|t| \to +\infty$.

Para el primer sumando

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \left(\frac{X^2(t)}{t^2} - F_0 \right) (\psi_t - \psi) \right\| &\leq \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{X^2(t)}{t^2} \right\| \|(\psi_t - \psi)\| + \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2)} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&\leq \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \left(\frac{X^2(t)}{t^2} - z + z \right) \right\| \|(\psi_t - \psi)\| + \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&= \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \left(\frac{X^2(t)}{t^2} - z \right) + R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} z \right\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&+ \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| \\
&\leq \left\| 1 + R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} z \right\| \|(\psi_t - \psi)\| + \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \right\| \|F_0\| \|(\psi_t - \psi)\| .
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Sabemos que $R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}$ y $1 + R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}$ son acotados por teorema 4.6 y F_0 también lo es por definición de F. Así, aplicando el lema 4.5 b) sobre la última desigualdad de (4.55), si $|t| \to +\infty$

$$\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \left(\frac{X^2(t)}{t^2} - F_0 \right) (\psi_t - \psi) \right\| \to 0.$$

De lo anterior, para concluir que se tiene (4.52), nos falta probar que

$$\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \left(\frac{X^2(t)}{t^2} - F_0 \right) \psi_t \right\| \to 0 \tag{4.56}$$

si $|t| \to +\infty$.

Por lema 4.4, podemos ocupar el teorema fundamental del cálculo para $\psi_t \in \mathcal{D}(X^2)$. Con esto y (4.33), se obtiene

$$\begin{aligned}
X^2(t)\psi_t - X^2(0)\psi_t &= \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X^2(s)\psi_t \right] ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} i \left[H, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} i \left[H_0, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds + \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} 2 \frac{i}{2} \left[H_0, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds + \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= \int_0^t e^{iHs} 2A e^{-iHs} \psi_t ds + \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds. \\
&= 2 \int_0^t A(s) \psi_t ds + \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= 2 \int_0^t (A(s) - A(0) + A(0)) \psi_t ds + \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= 2 \int_0^t (A(s) - A(0)) \psi_t ds + 2At\psi_t + \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds \\
&= 2 \int_0^t \int_0^s e^{iHu} (F(H_0) + i \left[V, A \right]) e^{-iHu} du \psi_t ds + 2At\psi_t \\
&+ \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2 \right] e^{-iHs} \psi_t ds,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

donde hemos usado (4.44).

Por otro lado,

$$F(H_0)+i[V,A]=F_0+(F(H_0)+i[V,A]-F_0)=F_0+W. \tag{4.58}$$

Reescribimos así la última igualdad de (4.57) usando (4.58). Nos queda entonces

$$\begin{aligned} 2\int_0^t\int_0^s e^{iHu}(F_0+W)e^{-iHu}du\psi_t ds+2At+\int_0^t e^{iHs}i\left[V,X^2\right]e^{-iHs}\psi_t ds &= 2F_0\int_0^t\int_0^s du\psi_t ds+2At\psi_t \\ &+2\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}du\psi_t ds \\ &+\int_0^t e^{iHs}i\left[V,X^2\right]e^{-iHs}\psi_t ds \\ &= F_0t^2\psi_t+2At\psi_t \\ &+2\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}du\psi_t ds \\ &+\int_0^t e^{iHs}i\left[V,X^2\right]e^{-iHs}\psi_t ds. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Si juntamos los resultados obtenidos en (4.57) y (4.59), obtenemos finalmente

$$X^2(t)\psi_t-X^2(0)\psi_t=F_0t^2\psi_t+2At\psi_t+2\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}du\psi_t ds+\int_0^t e^{iHs}i\left[V,X^2\right]e^{-iHs}\psi_t ds.$$

Dividiendo lo anterior por t^2, se tiene que

$$\frac{X^2(t)}{t^2}\psi_t-F_0\psi_t=\frac{X^2}{t^2}\psi_t+\frac{2A}{t}\psi_t+\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}du\psi_t ds+\frac{1}{t^2}\int_0^t e^{iHs}i\left[V,X^2\right]e^{-iHs}\psi_t ds. \tag{4.60}$$

Volviendo a (4.56), usamos (4.60) para reformular lo que queremos probar.
Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}-F_0\right)\psi_t\right\| \leq \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2}{t^2}+\frac{2A}{t}\right)\psi_t\right\|+\left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}duds\psi_t\right\| \\ +\left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\frac{1}{t^2}\int_0^t e^{iHs}i\left[V,X^2\right]e^{-iHs}ds\psi_t\right\|. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Para demostrar (4.56), probaremos que cada uno de los 3 sumandos del lado derecho de (4.61) converge a 0 cuando $|t|\to+\infty$.
Para el primer sumando de (4.61)

$$\begin{aligned} \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\left(\frac{X^2}{t^2}+\frac{2A}{t}\right)\psi_t\right\| &\leq \left\|R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2}\right\|\left\{\left\|\left(\frac{X^2}{t^2}\right)\psi_t\right\|+\left\|\left(\frac{2A}{t}\right)\psi_t\right\|\right\} \\ &\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}\left\{\frac{1}{t^2}\left\|X^2\psi_t\right\|+\frac{2}{|t|}\left\|A\psi_t\right\|\right\} \\ &\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}\left\{\frac{1}{t^2}|t|C_3(\psi)+\frac{2}{|t|}\sqrt{|t|}C_1(\psi)\right\} \\ &= \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}\left\{\frac{1}{|t|}C_3(\psi)+\frac{2}{\sqrt{|t|}}C_1(\psi)\right\}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Para las cotas de (4.62), hemos usado lema 4.5 d) y el teorema 4.6.

De esta forma, si $|t| \to +\infty$

$$\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \left(\frac{X^2}{t^2} + \frac{2A}{t} \right) \psi_t \right\| \to 0. \tag{4.63}$$

Para el tercer sumando de (4.61)

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{1}{t^2} \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2\right] e^{-iHs} ds \psi_t \right\| &\leq \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \right\| \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2\right] e^{-iHs} ds \right\| \|\psi_t\| \\
&\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \frac{1}{t^2} \int_0^t \left\| \left[V, X^2\right] \right\| ds \, \|\psi_t\| \\
&= \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \frac{1}{t} \left\| \left[V, X^2\right] \right\| \|\psi_t\| .
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Usando (4.38) y como asumimos $[V, X^2]$ acotado, si $|t| \to +\infty$ entonces la última desigualdad en (4.64) converge a 0.

Por lo tanto,

$$\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{1}{t^2} \int_0^t e^{iHs} i \left[V, X^2\right] e^{-iHs} ds \psi_t \right\| \to 0 \tag{4.65}$$

si $|t| \to +\infty$.

Finalmente, para el segundo sumando en (4.61)

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} duds \psi_t \right\| &= \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} duds (\psi_t - \psi + \psi) \right\| \\
&\leq \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} (\psi_t - \psi) duds \right\| \\
&+ \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} \psi duds \right\|
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} (\psi_t - \psi) duds \right\| &\leq \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \right\| \left\| \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} (\psi_t - \psi) duds \right\| \\
&\leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \frac{2}{t^2} \|W\| \|(\psi_t - \psi)\| \int_0^t \int_0^s duds \\
&= \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \|W\| \|(\psi_t - \psi)\|
\end{aligned}$$

y W es compacto, por lo que si $|t| \to +\infty$, por lema 4.5 b), lo anterior converge a 0.

Así

$$\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} (\psi_t - \psi) duds \right\| \to 0 \tag{4.66}$$

si $|t| \to +\infty$.

Considere la descomposición de ψ de la forma $\psi = P_c \psi + P_{pp} \psi$, luego

$$\begin{aligned}\left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}\psi duds\right\| &= \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}(P_c\psi+P_{pp}\psi)duds\right\| \\ &\leq \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}P_c\psi duds\right\| \\ &+ \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}P_{pp}\psi duds\right\|\end{aligned} \tag{4.67}$$

Para finalizar la demostración de (2.1), veamos los dos sumandos del lado derecho de (4.67). Para el primero tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}P_c\psi duds\right\| &\leq \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\right\|\left\|\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}P_c\psi duds\right\| \\ &\leq \frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_0^t\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\|ds.\end{aligned} \tag{4.68}$$

Por el teorema RAGE (teorema 1.2 c)), como W es compacto

$$\left\|\frac{1}{s}\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\| \to 0 \ \text{ si } \ s\to+\infty,$$

es decir, $\forall\epsilon>0, \exists N_0>0$ fijo tal que $\forall s\geq N_0$

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{1}{s}\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\| \leq \epsilon|\operatorname{Im}(z)| \\ \Leftrightarrow \quad &\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\| \leq s\epsilon|\operatorname{Im}(z)|.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Reescribamos ahora la última parte de (4.68) para usar (4.69). Así

$$\begin{aligned}\frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_0^t\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\|ds &= \frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_0^{N_0}\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\|ds \\ &+ \frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_{N_0}^t\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\|ds,\end{aligned} \tag{4.70}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_{N_0}^t\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_ce^{-iHu}\psi du\right\|ds &\leq \frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_{N_0}^t s\epsilon|\operatorname{Im}(z)|ds \\ &= \frac{2\epsilon}{t^2}\left\{\frac{t^2}{2}-\frac{N_0^2}{2}\right\} \\ &= \epsilon\left\{1-\frac{N_0^2}{t^2}\right\} \\ &\leq \epsilon,\end{aligned}$$

para todo $t\geq N_0$.

Lo anterior implica que si $|t| \to +\infty$

$$\frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_{N_0}^{t}\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_c e^{-iHu}\psi du\right\| ds \to 0. \tag{4.71}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_{0}^{N_0}\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_c e^{-iHu}\psi du\right\| ds &\leq \frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_0^{N_0}\int_0^{N_0}\left\|e^{iHu}WP_c e^{-iHu}\psi\right\| duds\\ &= \frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_0^{N_0}\int_0^{N_0}\|W\psi\|\, duds\\ &= \frac{2\,\|W\psi\|}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{N_0^2}{t^2}.\end{aligned}$$

Como N_0 fijo y W compacto, si $|t| \to +\infty$ entonces

$$\frac{2}{|\operatorname{Im}(z)|}\frac{1}{t^2}\int_{0}^{N_0}\left\|\int_0^s e^{iHu}WP_c e^{-iHu}\psi du\right\| ds \to 0. \tag{4.72}$$

Usando (4.71) y (4.72), se tiene que (4.70) converge a 0 cuando $|t| \to +\infty$ lo que a su vez implica que

$$\left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}P_c\psi duds\right\| \to 0 \tag{4.73}$$

si $|t| \to +\infty$.
Para el segundo sumando de (4.67), sea $N \in \mathbb{N}$ el de la observación B.8

$$\begin{aligned}\left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}P_{pp}\psi duds\right\| &\leq \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}\left(P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^{N}P_{E_k}\psi\right) duds\right\|\\ &+ \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}\sum_{k=1}^{N}P_{E_k}\psi duds\right\|.\end{aligned} \tag{4.74}$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s e^{iHu}We^{-iHu}\left(P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^{N}P_{E_k}\psi\right) duds\right\| &\leq \left\|R_{(\frac{X(t)}{t})^2}\right\|\left\|W\left(P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^{N}P_{E_k}\psi\right)\right\|\\ &\leq \frac{\|W\|}{|\operatorname{Im}(z)|}\left\|P_{pp}\psi - \sum_{k=1}^{N}P_{E_k}\psi\right\|\\ &\to 0\end{aligned} \tag{4.75}$$

si $N \to +\infty$ por observación B.8.
Por otro lado, y recordando que $W = i[H, A] - F_0$

$$
\begin{aligned}
\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} \sum_{k=1}^{N} P_{E_k} \psi duds \right\| &\leq \sum_{k=1}^{N} \left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} (i[H,A] - F_0) e^{-iHu} P_{E_k} \psi duds \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\| \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} i[H,A] e^{-iHu} P_{E_k} \psi duds \right. \\
&\left. - \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} F_0 e^{-iHu} P_{E_k} \psi duds \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\| \frac{2P_{E_k} i[H,A]}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{i(H-E_k)u} duds\psi \right. \\
&\left. - \frac{2F_0 P_{E_k}}{t^2} \int_0^t \int_0^s duds\psi \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\| \frac{2P_{E_k} i[H,A]}{t^2} \int_0^t \left(\frac{e^{i(H-E_k)s}}{i(H-E_k)} - \frac{1}{i(H-E_k)} \right) ds\psi \right. \\
&\left. - F_0 P_{E_k} \psi \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \left\| \frac{2P_{E_k} [H,A]}{t(H-E_k)} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{i(H-E_k)s} ds - 1 \right\} \psi \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\|K\|}{|t|} \left\| \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{i(H-E_k)s} ds \right\} \psi - P_{E_k}\psi + P_{E_k}\psi - \psi \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{\|K\|}{|t|} \left\| \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{i(H-E_k)s} ds \right\} \psi - P_{E_k}\psi \right\| + \sum_{k=1}^{N} \frac{\|K\|}{|t|} \left\| (P_{E_k} - 1)\psi \right\|,
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

donde hemos usado que $F_0 P_{E_k} = F(HP_c)P_{E_k} = F(H)P_c P_{E_k} = 0$, pues $P_c^{\perp} = P_{pp}$ y llamamos $K = \dfrac{2P_{E_k}[H,A]}{Im(z)(H-E_k)}$, el cual es acotado, ya que cada término lo es.

Finalmente, si analizamos por separado cada sumando de la última desigualdad de (4.76) se tiene que

$$
\sum_{k=1}^{N} \frac{\|K\|}{|t|} \left\| (P_{E_k} - 1)\psi \right\| \to 0 \tag{4.77}
$$

si $|t| \to +\infty$, pues K y $(P_{E_k} - 1)$ son acotados y la suma es finita.
Ahora, sea $\epsilon > 0$, por observación 4.7, existe un $L \in \mathbb{N}$ tal que $\forall |t| \geq L$

$$
\left\| \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{i(H-E_k)s} ds \right\} \psi - P_{E_k}\psi \right\| \leq \frac{\epsilon L}{N \|K\|}.
$$

Luego, para todo $|t| \geq L$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \frac{\|K\|}{|t|} \left\| \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{i(H-E_k)s} ds \right\} \psi - P_{E_k}\psi \right\| &\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{\|K\|}{|t|} \frac{\epsilon L}{N \|K\|} \\
&= \frac{\epsilon L}{|t|} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Así, por (4.77) y (4.78), si $|t| \to +\infty$, (4.76) converge a 0. Usando esto, y el resultado en (4.75) se tiene que (4.74) también converge a 0 y juntándolo con (4.73) obtenemos que ambos sumandos en (4.67) tienden a 0 si $|t| \to +\infty$.

Finalmente, usando (4.66) concluimos que

$$\left\| R_{\left(\frac{X(t)}{t}\right)^2} \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s e^{iHu} W e^{-iHu} duds \psi_t \right\| \to 0 \tag{4.79}$$

si $|t| \to +\infty$.

Así, gracias a (4.63), (4.65) y (4.79) se tiene que (4.61) converge a 0 si $|t| \to +\infty$, por lo que hemos probado (2.1).

5. Demostración de las consecuencias del teorema

En este capítulo, se demuestran las consecuencias del teorema anterior, las cuales se probaron para el caso continuo en [1] y [4], por lo que se logra probar que en el caso discreto se siguen teniendo.

5.1. Demostración corolario 2.7

Se tiene que

$$P_- = \chi_{(-\infty,0)}(A) \ \text{ y } \ P_+ = \chi_{[0,+\infty)}(A). \tag{5.80}$$

Sabemos que $\sigma_{ess}(H) = [-2,2]$. Sea $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$ con $\varphi = \chi_{[-2,2]}(H)\varphi$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $\psi \in \mathcal{H}_c(H)$ con $\|\psi\| = 1$ y una función g tal que $\psi = g(H)\psi$ y

$$\|\varphi - \psi\| < \epsilon,$$

donde g cumple que:

i) $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

ii) $0 \leq g \leq 1$,

iii) $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2 - \delta$ y $g(x) = 1$ si $|x| < 2 - 2\delta$ para algún $\delta > 0$.

Es así que por un argumento de densidad, es suficiente probar el resultado para vectores ψ como el descrito arriba.

Por otro lado, sea f otra función tal que:

i) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

ii) $0 \leq f \leq 1$,

iii) $f(x) = 0$ si $x \geq \gamma$ y $f(x) = 1$ si $x < \frac{\gamma}{2}$ para algún $\gamma > 0$, donde $F(2-\delta) = F(-2+\delta) = \gamma$.

Observación 5.1. La función F de la definición de f es la misma función del teorema 2.2.

Comenzaremos probando (2.3). Sea $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \left\|P_- e^{-iHt}\psi\right\| &= \left\|e^{iHt}P_- e^{-iHt}\psi\right\| \\ &= \|P_-(t)\psi\| \\ &= \left\|\chi_{(-\infty,0)}(A(t))\psi\right\| \\ &= \left\|\chi_{(-\infty,0)}\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi\right\|, \end{aligned} \tag{5.81}$$

donde la última igualdad en (5.81) se debe a que si $x \in (-\infty, 0)$ entonces $\frac{x}{t} \in (-\infty, 0)$, pues $t \geq 0$.

Así, usando la definición de la función f

$$\left\|\chi_{(-\infty,0)}\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi\right\| \leq \left\|f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi\right\|.$$

Por otro lado, como g es simétrica, existe una función h continua y de soporte compacto en $[0,4]$ tal que $g = h \circ F$ y $h(x) = g(\sqrt{4-x})$.

Sea $\psi \in \mathcal{H}_c(H)$, luego podemos escribir $\psi = P_c\psi$. Se tiene entonces lo siguiente

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A(t)}{t}\right)g(H)\psi - f(F(HP_c))g(H)\psi &= f\left(\frac{A(t)}{t}\right)h(F(HP_c))\psi - f(F(HP_c))h(F(HP_c))\psi \\ &= -f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\left\{h\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - h(F(HP_c))\psi\right\} \\ &+ (fh)\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - (fh)(F(HP_c))\psi. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Como $\psi = g(H)\psi$, podemos reescribir (5.82). Así

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - f(F(HP_c))\psi = -f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\left\{h\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - h(F(HP_c))\psi\right\} \\ + (fh)\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - (fh)(F(HP_c))\psi. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Usando que $fh \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pues $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, por teorema 2.2 ii) se obtiene que

$$\left\|(fh)\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - (fh)(F(HP_c))\psi\right\| \to 0 \tag{5.84}$$

si $|t| \to +\infty$.
Además, nuevamente por teorema 2.2 ii) y el hecho que $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \left\|f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\left\{h\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - h(F(HP_c))\psi\right\}\right\| &\leq \left\|f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\right\|\left\|h\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - h(F(HP_c))\psi\right\| \\ &\leq \left\|h\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi - h(F(HP_c))\psi\right\| \to 0 \end{aligned} \tag{5.85}$$

si $|t| \to +\infty$.
Así, por (5.84) y (5.85), (5.83) converge a 0, es decir,

$$\left\|f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi\right\| \to \|f(F(HP_c))\psi\|. \tag{5.86}$$

Juntando los resultados anteriores, si $t \to +\infty$

$$\left\|P_- e^{-iHt}\psi\right\| \leq \left\|f\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi\right\| \to \|f(F(HP_c))\psi\|.$$

Escribiendo $P_c\psi = \psi$ y utilizando otra vez que $\psi = g(H)\psi$

$$\begin{aligned} \|f(F(HP_c))\psi\| &= \|f(F(H))P_c\psi\| \\ &= \|f(F(H))\psi\| \\ &= \|(f \circ F)(H)\psi\| \\ &= \|(f \circ F)(H)g(H)\psi\|. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Si probamos que la última igualdad de (5.87) es igual a 0, entonces se tendrá (2.3).
Tenemos dos casos:

a) Si $|x| \geq 2 - \delta \;\Rightarrow\; g(x) = 0 \;\Rightarrow\; (f \circ F)(x) \cdot g(x) = 0$.

b) Si $|x| < 2 - \delta \;\Rightarrow\; F(x) > \gamma \;\Rightarrow\; (f \circ F)(x) = 0 \;\Rightarrow\; (f \circ F)(x) \cdot g(x) = 0$

Así, $(f \circ F)(H)g(H)\psi = 0$ y, por ende, (5.87) vale 0.
Para (2.4), sea $t < 0$. Así

$$\begin{aligned} \left\|P_+ e^{-iHt}\psi\right\| &= \left\|e^{iHt}P_+ e^{-iHt}\psi\right\| \\ &= \|P_+(t)\psi\| \\ &= \left\|\chi_{[0,+\infty)}(A(t))\psi\right\| \\ &= \left\|\chi_{(-\infty,0)}\left(\frac{A(t)}{t}\right)\psi\right\|, \end{aligned} \tag{5.88}$$

donde la última igualdad en (5.88) se debe a que $\frac{x}{t} \in (-\infty, 0)$ si $x \in [0, +\infty)$, pues $t < 0$.
Como se puede observar, obtenemos un resultado análogo a lo realizado para $P_- e^{-iHt}$, por lo que si procedemos de la misma forma que en el caso anterior entonces si $t \to -\infty$ se tendrá que (5.88) converge a 0.

5.2. Demostración corolario 2.8

Sea $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$ con $\varphi = \chi_{[-2,2]}(H)\varphi$, donde $\sigma_{ess}(H) = [-2,2]$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $\psi \in \mathcal{H}_c(H)$ con $\|\psi\| = 1$ y una función g tal que $\psi = g(H)\psi$ y

$$\|\varphi - \psi\| < \epsilon,$$

donde g cumple que:

i) $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

ii) $0 \leq g \leq 1$,

iii) $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2-\delta$ y $g(x) = 1$ si $|x| < 2 - 2\delta$ para algún $\delta > 0$.

Por un argumento de densidad, probaremos el resultado para vectores ψ como el descrito arriba.
Por otro lado, sea f otra función tal que:

i) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

ii) $0 \leq f \leq 1$,

iii) $f(x) = 0$ si $x \geq \gamma$ y $f(x) = 1$ si $x < \frac{\gamma}{2}$ para algún $\gamma > 0$, donde $F(2-\delta) = F(-2+\delta) = \gamma$.

Observación 5.2. La función F de la definición de f es la misma función del teorema 2.2.

Sea $\gamma > 0$ como en la definición de f y sea $a > 0$ lo suficientemente grande tal que existe un $t_a > 0$ con

$$\frac{a^2}{t^2} \leq \frac{\gamma}{2}, \tag{5.89}$$

para todo $|t| \geq t_a$.
Queremos probar que $e^{-iHt}\psi$ converge débilmente a 0, es decir, que para todo $\eta \in \mathcal{H}$

$$\left\langle \eta, e^{-iHt}\psi \right\rangle \to 0 \tag{5.90}$$

si $|t| \to +\infty$.
Sean $E(|X| > a) = \chi_{(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)}(X)$ y $E(|X| \leq a) = \chi_{[-a,a]}(X)$, donde

$$E(|X| > a) + E(|X| \leq a) = 1.$$

Ahora

$$\begin{aligned} |\left\langle \eta, e^{-iHt}\psi \right\rangle| &= |\left\langle \eta, \{E(|X| > a) + E(|X| \leq a)\}\, e^{-iHt}\psi \right\rangle| \\ &= |\left\langle \eta, E(|X| > a)e^{-iHt}\eta \right\rangle + \left\langle \psi, E(|X| \leq a)e^{-iHt}\psi \right\rangle| \\ &= |\left\langle E(|X| > a)\eta, e^{-iHt}\psi \right\rangle + \left\langle \eta, E(|X| \leq a)e^{-iHt}\psi \right\rangle| \\ &\leq \|E(|X| > a)\eta\| \, \|\psi\| + \|\eta\| \left\|E(|X| \leq a)e^{-iHt}\psi\right\|. \end{aligned} \tag{5.91}$$

Para el primer sumando del lado derecho de (5.91)

$$\|E(|X| > a)\eta\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)}(\lambda) d\left\langle \eta, \mu^X(\lambda)\eta \right\rangle.$$

Si $a \to +\infty$ entonces $\chi_{(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)}(\lambda) \to 0$ para todo λ fijo. Además, $|\chi| \leq 1$. Por teorema de convergencia dominada,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)}(\lambda) d\left\langle \eta, \mu^X(\lambda)\eta \right\rangle \to 0$$

y así

$$\|E(|X| > a)\eta\|^2 \to 0. \tag{5.92}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left\|E(|X| \leq a)e^{-iHt}\psi\right\| &= \left\|\chi_{[-a,a]}(X)e^{-iHt}\psi\right\| \\
&= \left\|e^{iHt}\chi_{[-a,a]}(X)e^{-iHt}\psi\right\| \\
&= \left\|\chi_{[-a,a]}(X(t))\psi\right\| \\
&= \left\|\chi_{[0,a^2]}(X^2(t))\psi\right\|,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe al hecho que $x^2 \in [0, a^2]$ si $x \in [-a, a]$, pues $a > 0$.

Usando la definición de f y (5.89) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{[0,a^2]}(X^2(t))\psi\right\| &= \left\|\chi_{[0,\frac{a^2}{t^2}]}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}\right)\psi\right\| \\
&\leq \left\|\chi_{[0,\frac{\gamma}{2}]}\left(\frac{X^2(t)}{t^2}\right)\psi\right\| \\
&\leq \left\|f\left(\frac{X^2(t)}{t^2}\right)\psi\right\|.
\end{aligned}$$

Por teorema 2.2 i), realizando un procedimiento análogo al que se hizo en la demostración del corolario 2.7 para obtener (5.86), pero en este caso con $\dfrac{X^2(t)}{t^2}$, se obtiene que si $|t| \to +\infty$

$$\left\|f\left(\frac{X^2(t)}{t^2}\right)\psi\right\| \to \|f(FHP_c)\psi\| = 0.$$

El límite vale 0 haciendo nuevamente un análisis idéntico al que se realizó en la demostración del corolario 2.7.

De lo anterior, concluimos que si $|t| \to +\infty$

$$\left\|E(|X| \leq a)e^{-iHt}\psi\right\| \to 0. \tag{5.93}$$

Finalmente, aplicando los resultados obtenidos en (5.92) y (5.93) sobre el cálculo en (5.91), se tiene que (5.90) se cumple y, por ende, se tiene lo pedido.

5.3. Demostración corolario 2.9

Sea $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$. Por el Stone-Weierstrass gavotte en [4], es suficiente probar lo pedido para funciones resolventes. Así, vamos a mostrar que

$$(H_0(t) - z)^{-1}\varphi \to (H - z)^{-1}\varphi \text{ si } |t| \to +\infty,$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, o análogamente,

$$\left\|((H_0(t) - z)^{-1} - (H - z)^{-1})\varphi\right\| \to 0$$

si $|t| \to +\infty$.

Analicemos el término dentro de la norma. Nos queda entonces

$$\begin{aligned}
((H_0(t) - z)^{-1} - (H - z)^{-1})\varphi &= (e^{iHt}(H_0 - z)^{-1}e^{-iHt} - e^{iHt}(H - z)^{-1}e^{-iHt})\varphi \\
&= (e^{iHt}\left\{(H_0 - z)^{-1} - (H - z)^{-1}\right\}e^{-iHt})\varphi \\
&= (e^{iHt}\left\{(H_0 - z)^{-1}((H - z) - (H_0 - z))(H - z)^{-1}\right\}e^{-iHt})\varphi \qquad (5.94) \\
&= (e^{iHt}(H_0 - z)^{-1}(H - H_0)(H - z)^{-1}e^{-iHt})\varphi \\
&= (e^{iHt}(H_0 - z)^{-1}V(H - z)^{-1}e^{-iHt})\varphi.
\end{aligned}$$

Aplicando norma a ambos lados de (5.94)

$$\begin{aligned}\left\|((H_0(t)-z)^{-1}-(H-z)^{-1})\varphi\right\| &= \left\|(e^{iHt}(H_0-z)^{-1}V(H-z)^{-1}e^{-iHt})\varphi\right\| \\ &= \left\|(H_0-z)^{-1}V(H-z)^{-1}e^{-iHt}\varphi\right\|.\end{aligned}$$

Por corolario 2.8, como $\varphi \in \mathcal{H}_c(H)$

$$e^{-iHt}\varphi \rightharpoonup 0$$

si $|t| \to +\infty$.

Finalmente, usando esto y el hecho que $(H_0-z)^{-1}V(H-z)^{-1}$ es compacto, pues $(H_0-z)^{-1}$ y $(H-z)^{-1}$ son acotados y V es compacto, obtenemos que

$$\left\|\left\{(H_0-z)^{-1}V(H-z)^{-1}\right\}e^{-iHt}\varphi\right\| \to 0$$

si $|t| \to +\infty$.

6. Caso potencial de corto alcance

En este capítulo, asumiendo que el potencial V es de corto alcance, vamos a usar los resultados de los capítulos anteriores para probar que los operadores de onda $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ existen, cumplen $e^{-iHt}\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}e^{-iH_0t}$ y $H\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}H_0$, lo que se conoce como "intertwining", y lo más importante, probaremos que son completos. Para esto, nos basamos en el capítulo 5 de [4], en donde se demostró lo anterior para el caso continuo.

Sea entonces V el potencial dado en el capítulo 2 con V compacto. Vamos a suponer que V cumple lo siguiente

$$|V(n)| \leq C(1 + |n|)^{-\epsilon}, \tag{6.95}$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, C es una constante positiva y $\epsilon > 1$.
Por el término "potencial de corto alcance" siempre nos referiremos a una función V que satisface (6.95).

Antes de enunciar el teorema que viene a continuación, recordamos la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Defina el operador de multiplicación T_a en $l^2(\mathbb{Z})$ dado por:*

$$(T_a x)_n = a_n x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$T_a \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z})) \Leftrightarrow a \in l^{\infty}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \|a\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty.$$

En este caso, $\|T_a\| = \|a\|_{\infty}$.

Teorema 6.2. *Sea $t_0 \in \mathbb{R}_{\pm}$ y sea V un potencial de corto alcance entonces*

$$\int_{t_0}^{\pm\infty} \left\|V e^{-iH_0t}\varphi\right\| dt < +\infty,$$

para $\varphi \in D_0$, un conjunto denso en $l^2(\mathbb{Z})$. En consecuencia, los operadores de onda $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ existen.

Demostración. Sea A el generador de dilataciones definido en la observación 3.6 y sea $s > 1$ arbitrario. Sea $\mathcal{G} = \{g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}) |\ 0 \leq g \leq 1, g(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 2 - \delta \text{ y } g(x) = 1 \text{ si } |x| < 2 - 2\delta, \text{ algún } \delta > 0\}$.

Definamos $D_0 = \{g(H_0) < A >^{-s} \psi \mid g \in \mathcal{G},\ \psi \in l^2(\mathbb{Z})\}$. D_0 es denso en $l^2(\mathbb{Z})$, pues $\mathrm{Ran}(< A >^{-s})$ es denso y $\|g(H_0) - 1\| \to 0$ si $\delta \to 0$, además, H_0 es un operador puramente absolutamente continuo, luego $\mathcal{H}_c(H_0) = l^2(\mathbb{Z})$.

Luego, sea $\varphi \in D_0$, esto es $\varphi = g(H_0) < A >^{-s} \psi$. Así

$$\begin{aligned} \left\|V e^{-iH_0t}\varphi\right\| &= \left\|V < A >^{s} < A >^{-s} e^{-iH_0t}\varphi\right\| \\ &\leq \|V < A >^{s}\| \left\|< A >^{-s} e^{-iH_0t} g(H_0) < A >^{-s} \psi\right\|. \end{aligned} \tag{6.96}$$

Por lema 3.11 y lema 3.13, podemos usar el teorema 4.2 en [2] obteniendo que

$$\left\|< A >^{-s} e^{-iH_0t} g(H_0) < A >^{-s} \psi\right\| \leq C(1 + |t|)^{-s'}, \tag{6.97}$$

para toda s' con $0 < s' < s$ y $C > 0$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|V < A >^{s}\| &= \left\|V < X >^{s} < X >^{-s} < A >^{s}\right\| \\ &\leq \|V < X >^{s}\| \left\|< X >^{-s} < A >^{s}\right\|. \end{aligned} \tag{6.98}$$

De la definición del operador X en el capítulo 2, podemos escribir $< X >^{s} e_n =< n >^{s} e_n$, con e_n un elemento de la base canónica de $l^2(\mathbb{Z})$. Luego

$$V < X >^{s} e_n = V(n) < n >^{s} e_n. \tag{6.99}$$

Como V es un potencial de corto alcance, entonces cumple (6.95). Por ende, existe $C > 0$ constante y $\epsilon > 1$ tal que

$$|V(n) < n >^s| \leq C(1+|n|)^{-\epsilon}(1+n^2)^{s/2}. \tag{6.100}$$

Tomando $s = \epsilon$, a partir de (6.100) se obtiene que

$$\begin{aligned} |V(n) < n >^\epsilon| &\leq C(1+|n|)^{-\epsilon}(1+n^2)^{\epsilon/2} \\ &= \frac{C\sqrt{(1+n^2)}^\epsilon}{(1+|n|)^\epsilon} \\ &= C\left(\frac{\sqrt{(1+n^2)}}{(1+|n|)}\right)^\epsilon \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |V(n) < n >^s| < +\infty$. Así, usando proposición 6.1 sobre (6.99), se tiene que $\|V < X >^s\| < +\infty$.

Por proposición 3.20 sobre s, se tiene que $< X >^{-s}< A >^s$ es acotado.

Así, (6.98) es acotado y por (6.97), (6.96) es acotado por una función integrable.

Por teorema 1.7, los operadores de onda $\Omega^\pm(H, H_0)$ existen.

□

Observación 6.3. Para los resultados que siguen, $\Omega^\pm$ denotará el operador de onda $\Omega^\pm(H, H_0)$.

Proposición 6.4. *Sea φ_n una secuencia de vectores que convergen débilmente a 0, con $\|\varphi_n\| = 1$. Entonces*

$$\left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_+\varphi_n\right\| \to 0,$$

$g \in \mathcal{G}$, con $\mathcal{G} = \{g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) |\ 0 \leq g \leq 1, g(x) = 0$ si $|x| \geq 2-\delta$ y $g(x) = 1$ si $|x| < 2-2\delta$, algún $\delta > 0\}$.

Demostración. Por corolario 1.8, se tiene que

$$\left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_+\varphi_n\right\| \leq \int_0^\infty \left\|Ve^{-itH_0}g(H_0)P_+\varphi_n\right\| dt. \tag{6.101}$$

Siguiendo las notaciones realizadas en la demostración del teorema anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|Ve^{-iH_0t}g(H_0)P_+\varphi_n\right\| &= \left\|V < A >^s< A >^{-s} e^{-iH_0t}g(H_0)P_+\varphi_n\right\| \\ &\leq \|V < A >^s\| \left\|< A >^{-s} e^{-iH_0t}g(H_0)P_+\varphi_n\right\| \end{aligned} \tag{6.102}$$

con $s > 1$ cualquiera.

Usando el teorema 4.2 en [2], pues por lema 3.11 y 3.13 se cumplen las hipótesis, se obtiene que

$$\left\|< A >^{-s} e^{-itH_0}g(H_0)P_+\psi\right\| \leq C(1+|t|)^{-l}, \tag{6.103}$$

para toda l con $0 < l < s$ y $C > 0$.

Por otro lado, en el teorema anterior probamos que $V < A >^s$ es acotado, y juntando esto con lo obtenido en (6.103), se tiene que (6.102) es acotado por una función integrable.

Finalmente, como V es compacto y φ_n converge débilmente a 0, entonces $\left\|Ve^{-itH_0}g(H_0)P_+\varphi_n\right\|$ converge fuertemente a 0. Por teorema de convergencia dominada, se tiene que la integral en (6.101) converge a 0 y así se tiene lo pedido.

□

Proposición 6.5. *Se tienen las siguientes relaciones:*

a) $e^{-iHt}\Omega^\pm = \Omega^\pm e^{-iH_0t}, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

b) $H\Omega^\pm = \Omega^\pm H_0$.

Demostración. a) Sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
e^{-iHt}\Omega^{+} &= e^{-iHt}\{s-\lim_{s\to+\infty} e^{iHs}e^{-iH_0 s}P_{ac}(H_0)\} \\
&= s-\lim_{s\to+\infty} e^{-iHt}e^{iHs}e^{-iH_0 s}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{s\to+\infty} e^{iH(s-t)}e^{-iH_0 s}P_{ac}(H_0).
\end{aligned}$$

Tomando $w = s-t$, lo anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
e^{-iHt}\Omega^{+} &= s-\lim_{w\to+\infty} e^{iHw}e^{-iH_0(w+t)}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{w\to+\infty} e^{iHw}e^{-iH_0 w}e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{w\to+\infty} e^{iHw}e^{-iH_0 w}P_{ac}(H_0)e^{-iH_0 t} \\
&= \Omega^{+}e^{-iH_0 t},
\end{aligned}$$

donde usamos que $e^{-iH_0 t}$ conmuta con $P_{ac}(H_0)$.

Para Ω^{-} es análogo.

b) Sea $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
H\Omega^{+} &= H\{s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0)\} \\
&= s-\lim_{t\to+\infty} He^{iHt}e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}He^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}(H_0+V)e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}H_0e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) + s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) \\
&= s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0)H_0 + s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0),
\end{aligned} \tag{6.104}$$

donde hemos usado que H conmuta con e^{iHt} y que H_0 conmuta con $e^{-iH_0 t}$ y con $P_{ac}(H_0)$.

Finalmente, sea $\varphi \in \mathcal{H}$, luego, $P_{ac}(H_0)\varphi \in \mathcal{H}_{ac}(H_0)$. Usando proposición 1.1 a) y el hecho que V es compacto, obtenemos que

$$\left\| Ve^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0)\varphi \right\| \to 0$$

si $t \to \pm\infty$.

Lo anterior implica que $s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0) = 0$ y así, de lo hecho en (6.104), concluimos que

$$H\Omega^{+} = s-\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}e^{-iH_0 t}P_{ac}(H_0)H_0 = \Omega^{+}H_0.$$

y, por lo tanto, se tiene la propiedad.

Para Ω^{-} el desarrollo es análogo. □

Teorema 6.6. *El operador de onda $\Omega^{\pm}$ es completo.*

Demostración. Por proposición 1.5, la existencia de los operadores de onda implica que $\mathrm{Ran}\Omega^{\pm} \subset \mathcal{H}_{ac}$, por lo que por definición 1.6, solo nos resta probar que $\mathcal{H}_{ac} \subset \mathrm{Ran}\Omega^{\pm}$.

Considere $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ tal que $g(H)\varphi = \varphi$, $g \in \mathcal{G}$ con $\mathcal{G} = \{g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) |\ 0 \le g \le 1, g(x) = 0 \text{ si } |x| \ge 2-\delta \text{ y } g(x) = 1 \text{ si } |x| < 2-2\delta, \text{ algún } \delta > 0\}$.

Sea $\varphi_s := e^{-iHs}\varphi$, $s \in \mathbb{R}$. Para probar lo pedido, vamos a mostrar que

$$\left\| (\Omega^{+}-1)\varphi_s \right\| \to 0$$

si $s \to +\infty$.

Se tiene entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|(\Omega^+ - 1)\varphi_s\right\| &= \left\|(\Omega^+ - 1)g(H)\varphi_s\right\| \\
&= \left\|(\Omega^+ - 1)(g(H) - g(H_0) + g(H_0))\varphi_s\right\| \\
&\leq \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)\varphi_s)\right\| + \left\|(\Omega^+ - 1)(g(H_0) - g(H))\varphi_s\right\| \\
&= \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)(P_+\varphi_s + P_-\varphi_s)\right\| + \left\|(\Omega^+ - 1)(g(H_0) - g(H))\varphi_s\right\| \\
&\leq \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_+\varphi_s\right\| + \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_-\varphi_s\right\| + 2\left\|(g(H_0) - g(H))\varphi_s\right\| \\
&= \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_+\varphi_s\right\| + \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_-\varphi_s\right\| + 2\left\|e^{iHs}(g(H_0) - g(H))e^{-iHs}\varphi\right\| \\
&\leq \left\|(\Omega^+ - 1)g(H_0)P_+\varphi_s\right\| + 2\left\|g(H_0)P_-\varphi_s\right\| + 2\left\|(g(H_0(s)) - g(H))\varphi\right\|.
\end{aligned}
\tag{6.105}
$$

Analicemos la convergencia de cada uno de los 3 términos de la desigualdad en (6.105).

El primer término converge a 0 si $s \to +\infty$ por proposición 6.4, ya que φ_s converge débilmente a 0 por corolario 2.8. Por corolario 2.7, el segundo término también converge a 0, ya que $\varphi_s = e^{-iHs}\varphi$. Finalmente, el último tiende a 0 si $s \to +\infty$ por corolario 2.9, pues $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Así, (6.105) converge a 0 si $s \to +\infty$ y podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \lim_{s\to+\infty} e^{iHs}\Omega^+ e^{-iHs}\varphi \\
&= \lim_{s\to+\infty} \Omega^+ e^{iH_0 s} e^{-iHs}\varphi,
\end{aligned}
\tag{6.106}
$$

en donde hemos usado la proposición 6.5 para la última igualdad.

Como $\Omega^+ e^{iH_0 s}e^{-iHs}\varphi \in \mathrm{Ran}\Omega^+$, por (6.106) se tiene que $\varphi \in \overline{\mathrm{Ran}\Omega^+}$ y usando el hecho que $\mathrm{Ran}\Omega^+$ es un subespacio cerrado, se obtiene que $\varphi \in \mathrm{Ran}\Omega^+$.

Se concluye así que Ω^+ es completo. Para Ω^- se realiza el mismo procedimiento. Con esto hemos demostrado finalmente que $\Omega^\pm$ son completos.

$\square$

A. Nociones sobre isometría

Definición A.1. Un operador $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice isometría si:

$$\Omega^*\Omega = I.$$

Proposición A.2. *Sea Ω una isometría. Entonces:*

(a) *Ω preserva el producto escalar:*

$$\langle \Omega\psi, \Omega\varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle, \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}.$$

En particular:

$$\|\Omega\psi\| = \|\psi\|, \quad \forall \in \mathcal{H}.$$

(b) *Si $dim(\mathcal{H}) \neq \{0\}$ entonces $\|\Omega\| = 1$.*

(c) *$\Omega\Omega^*$ es una proyección ortogonal y $Ran(\Omega\Omega^*) = Ran(\Omega)$.*

(d) *Ω es inyectiva.*

(e) *$\Omega^*\psi = \Omega^{-1}\psi$ si $\psi \in Ran(\Omega)$ y $\Omega^*\psi = 0$ si $\psi \in (Ran(\Omega))^\perp$.*

(f) *Si $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisface $\|W\psi\| = \|\psi\|$, $\forall \psi \in \mathcal{H}$ entonces W es una isometría.*

Observación A.3. Ω es unitario si Ω es una isometría y $Ran(\Omega\Omega^*) = \mathcal{H}$, es decir, $\Omega\Omega^* = I = \Omega^*\Omega$.

Definición A.4. Un operador $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice isometría parcial si:

$$\Omega^*\Omega = E,$$

donde E es una proyección ortogonal.

Proposición A.5. *Sea Ω una isometría parcial.*

(a) *$\Omega E = \Omega$.*

(b) *$\langle \Omega\psi, \Omega\varphi \rangle = \langle E\psi, E\varphi \rangle$, $\quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$.*

(c) *$\|\Omega\| = 1$, excepto cuando $E = O$.*

(d) *$\Omega\Omega^*$ es una proyección ortogonal y $Ran(\Omega\Omega^*) = Ran(\Omega)$.*

(e) *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado y W lineal con $W : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ tal que $\|W\psi\| = \|\psi\|$, $\forall \psi \in \mathcal{M}$. Si uno define un operador Ω por $\Omega\psi = W\psi$ si $\psi \in \mathcal{M}$ y $\|W\psi\| = 0$ si $\psi \in \mathcal{M}^\perp$ entonces Ω es una isometría parcial con $\Omega^*\Omega$ proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$.*

Definición A.6. Un operador $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice isometría parcial si:

$$\Omega^*\Omega = E,$$

donde E es una proyección ortogonal.

Definición A.7. Si Ω es una isometría parcial, definimos los siguientes conjuntos:

1. Espacio/conjunto inicial de Ω:

$$RanE = Ran(\Omega^*\Omega).$$

2. Espacio/conjunto final de Ω:

$$RanF = Ran(\Omega\Omega^*).$$

B. Teoría espectral de operadores autoadjuntos

Definición B.1. Sea X un conjunto y Ω una σ-álgebra en X. El mapeo $\mu : \Omega \to B(\mathcal{H})$ es llamado una **medida de proyección** si las siguientes propiedades se cumplen:

a) Para cada $E \in \Omega$, $\mu(E)$ es una proyección ortogonal.

b) $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = I$.

c) Si $E_1, E_2, E_3, ... \in \Omega$ son disjuntos entonces, $\forall \psi \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\psi,$$

donde la convergencia de la suma es en la topologiía de la norma en $\mathcal{H}$.

d) Para todo $E_1, E_2 \in \Omega$ tenemos que $\mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1)\mu(E_2)$.

Observación B.2. Se asociará una medida de proyección μ^B con cada operador autoadjunto acotado B. En ese caso, la proyección $\mu^B(E)$ será pensada como la proyección sobre el subespacio espectral correspondiente a E. Observe que para toda medida de proyección μ y $\psi \in \mathcal{H}$, podemos formar una medida real positiva μ_ψ si consideramos:

$$\mu_\psi(E) = \langle \psi, \mu(E)\psi \rangle\,,$$

para todo $E \in \Omega$.

Proposición B.3. (***Operador de Integración***) *Sea Ω una σ-álgebra en un conjunto X y sea $\mu : \Omega \to B(\mathcal{H})$ una medida de proyección. Entonces existe un único mapeo lineal $\psi \to \int_\Omega \psi d\mu$ de las funciones complejas, medibles, acotadas en Ω a $B(\mathcal{H})$ con la propiedad*

$$\left\langle \psi, \left(\int_X \varphi\, d\mu\right)\psi \right\rangle = \int_X \varphi\, d\mu_\psi,$$

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$, donde μ_ψ está dado como antes. Se tienen, además, las siguientes propiedades:

a) Para todo $E \in \Omega$, tenemos

$$\int_X 1_E\, d\mu = \mu(E).$$

En particular, la integral de la función constante 1 es I.

b) Para todo φ, tenemos

$$\left\|\int_X \varphi\, d\mu\right\| \leq \sup_{\lambda\in X} |\varphi(\lambda)|.$$

c) La integración es multiplicativa: $\forall\ \varphi_1, \varphi_2$, tenemos

$$\int_X \varphi_1\varphi_2\, d\mu = \left(\int_X \varphi_1\, d\mu\right)\left(\int_X \varphi_2\, d\mu\right).$$

d) Para todo φ, tenemos

$$\int_X \bar{\varphi}_1\, d\mu = \left(\int_X \varphi_1\, d\mu\right)^*.$$

En particular, si φ es una función real, entonces $\int_X \varphi\, d\mu$ es autoadjunto.

Teorema B.4. (***Teorema Espectral, Primera Forma***) *Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto entonces existe una única medida de proyección μ^B sobre la σ-álgebra de Borel en $\sigma(B)$, con valores en proyecciones sobre $\mathcal{H}$, tal que*

$$\int_{\sigma(B)} \lambda \, d\mu^B(\lambda) = B.$$

Como el espectro $\sigma(B)$ de B es acotado, la función $f(\lambda) := \lambda$ es acotada en $\sigma(B)$.

Definición B.5. (**Cálculo Funcional**) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto y $f : \sigma(B) \to \mathbb{C}$ es una función acotada y medible, se define un operador $f(B)$ de la siguiente forma

$$f(B) = \int_{\sigma(B)} f(\lambda) \, d\mu^B(\lambda),$$

donde μ^B es la medida de proyección en teorema (B.4).

Proposición B.6. *Suponga que $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto y $\psi \in \mathcal{H}$ es un vector unitario. Entonces existe una única medida de probabilidad μ_ψ^B sobre $\mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^m d\mu_\psi^B(\lambda) = \langle \psi, B^m \psi \rangle \,,$$

para todo entero m no negativo.

Definición B.7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea B un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. Se tienen los siguientes conjuntos:

i) $\mathcal{H}_{pp}(B) := \{\psi \in \mathcal{H} | \ \mu_\psi \text{ es puramente puntual}\}$
$:= \overline{\bigoplus_{i \in I} \operatorname{Ker}(H - \lambda_i)}$, con $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ valores propios de H.

ii) $\mathcal{H}_{ac}(B) := \{\psi \in \mathcal{H} | \ \mu_\psi \text{ es absolutamente continua}\}$

iii) $\mathcal{H}_{c}(B) := \{\psi \in \mathcal{H} | \ \mu_\psi \text{ es continua}\}$

iv) $\mathcal{H}_{sc}(B) := \{\psi \in \mathcal{H} | \ \mu_\psi \text{ es singular continua}\}$

Observación B.8. Sea B un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. Si $\psi \in \mathcal{H}_{pp}(B)$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \psi - \sum_{k=1}^{N} P_{E_k} \psi \right\|^2 \to 0 \ \text{ si } \ N \to +\infty,$$

donde P_{E_k} es la proyección sobre el valor propio E_k asociado al vector propio ψ.

Referencias

[1] V. Enss, *Asymptotic Observables on Scattering States*, Commun. Math. Phys. **89** (1983), pp.245-268.

[2] A. Jensen, E. Mourre, and P. Perry, *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory*, Ann. Inst. H. Poincaré. **41** (1984), no. 2, pp.207-225.

[3] W.O. Amrein, *Hilbert spaces methods in quantum mechanics*: *Fundamental Sciences*, EPFL Press, 2009.

[4] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, 1987.

[5] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.III. Scattering Theory*, Academic Press, 1979.

[6] ———, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.IV. Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

[7] M.A. Astaburuaga, O. Bourget, and V. Cortés, *Commutation relations for unitary operator I*, J. Func. Anal. **268** (2015), no. 8, pp.2188-2230.

[8] V. Georgescu and C. Gérard, *On the virial theorem in quantum mechanics*, Commun. Math. Phys. **208** (1999), pp.275-281.

[9] M.A. Astaburuaga, O. Bourget, and V. Cortés, *Commutation relations for unitary operator II*, J. Approx. Theory **199** (2015), no. 1, pp.63-94.

[10] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980.

[11] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, and V. Georgescu, *C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-body Hamiltonians*, Birkhäuser, 1996.