



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

P-RESOLUCIONES EXTREMALES Y AGUJEROS DE  
GUSANO EN ESPACIOS DE MODULI DE SUPERFICIES

por

NICOLÁS IGNACIO VILCHES REYES

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas  
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,  
como un requisito para optar al grado  
académico de Magíster en Matemática.

Profesor guía: Giancarlo Urzúa

Comisión informante:

Jan Kiwi (Pontificia Universidad Católica de Chile)  
Álvaro Liendo (Universidad de Talca)  
Jenia Tevelev (University of Massachusetts Amherst)

Julio, 2020

Santiago, Chile.

# Agradecimientos

Quisiera partir agradeciendo a mi familia: a Claudia, a Sebastián, y a Ernesto. Su apoyo constante e incondicional ha sido fundamental en estos años, y es por ellos que he podido llegar a este punto.

En segundo lugar, agradezo el constante apoyo académico y no-académico de Giancarlo Urzúa, mi profesor guía. Aprecio mucho haber tenido la oportunidad de formarme bajo su supervisión como matemático.

En la misma línea, aprecio poder presentar este documento a los profesores Jan Kiwi, Álvaro Liendo y Jenia Tevelev. Agradezco cada comentario recibido y toda la formación que recibí de ellos.

Doy las gracias también a todos los profesores que tuve en mi formación de licenciatura y magíster. Destaco entre ellos a Duvan Henao, Alejandro Ramírez, Milton Jara, Sukhendu Mehrotra, Mariel Saez, Jairo Bochi, Pilar Herreros, Natalia García. Aprecio haber tenido la oportunidad de hablar con ellos de matemática, y aún más conversar de temas no-matemáticos.

Gracias a Fernando, por todo su apoyo desde hace ya siete años. Ha sido un ejemplo para mí en cómo ser mejor estudiante, mejor ayudante, y mejor persona.

Debo destacar a Seba Thon, Ángela, Sebita, Luciano, Javier, Bruna, Fer y Ariel. De ellos pude aprender mucha matemática como compañeros, y pasar el día a día como amigos. Agradezco en la misma línea a Rojo, Cata, Vanesa, Daniel, Burgos, Paula y Daniela, por el día a día en la facultad.

Gracias a Sergio y Diana. Con ellos no sólo compartí varios años; tuve la oportunidad también de aprender mucha geometría e interactuar en cursos y seminarios.

Destaco también a los amigos que tuve la oportunidad de hacer en todos estos años: a Sandra, Fran, Fonchi, Caín, Natalia y Agustina. Hicieron mucho más divertido este periodo.

Mis estudios de postgrado fueron financiados por ANID (ex CONICYT), bajo ANID-PFCHA / Magíster Nacional / 2019 - 22190759.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Fracciones continuas</b>	<b>7</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	7
1.2. Expansión de números racionales . . . . .	8
1.3. Fracciones duales . . . . .	10
1.4. Admisibilidad . . . . .	11
1.5. Cálculos con matrices . . . . .	14
1.6. Blow-up y blow-down . . . . .	16
1.7. Fracciones que representan cero . . . . .	19
1.8. Sucesiones de Wahl . . . . .	22
<b>2. Preliminares geométricos</b>	<b>28</b>
2.1. Números de intersección . . . . .	28
2.2. Definiciones básicas . . . . .	28
2.3. Singularidades de cociente cíclico . . . . .	30
2.4. Discrepancias . . . . .	31
<b>3. P-resoluciones extremales</b>	<b>36</b>
3.1. Definiciones básicas . . . . .	36
3.2. Autointersección de la curva excepcional . . . . .	38
3.3. Sucesiones WW . . . . .	40
3.4. Sucesiones indicadoras . . . . .	42
3.5. Índices cruzados . . . . .	43
3.6. A lo más dos pares . . . . .	44
3.7. Iguales numeradores . . . . .	45
<b>4. MMP para familias de superficies</b>	<b>48</b>
4.1. La compactificación KSBA . . . . .	48
4.2. Vecindades extremales . . . . .	49
4.2.1. Vecindades mk1A . . . . .	49
4.2.2. Vecindades mk2A . . . . .	50
4.3. P-resoluciones extremales . . . . .	51
4.4. Modificación en vecindades extremales . . . . .	52

4.5. Corriendo el MMP . . . . .	53
4.6. El algoritmo de Mori . . . . .	54
<b>5. Agujeros de gusano</b>	<b>62</b>
5.1. Introducción . . . . .	62
5.2. Sin curvas negativas . . . . .	64
5.3. Sólo flips . . . . .	79
5.4. Preguntas a futuro . . . . .	85
5.4.1. Acotar flips . . . . .	85
5.4.2. Estudiar casos de autointersección menor . . . . .	85
<b>A. Implementaciones computacionales</b>	<b>88</b>
A.1. El algoritmo de Mori . . . . .	88
A.2. Familias de vecindades mk1A/mk2A . . . . .	92

# Introducción

Dados dos números  $K^2, \chi$ , el espacio de Moduli de superficies de tipo general  $\mathcal{M}_{K^2, \chi}$  es un objeto geométrico cuyos puntos parametrizan superficies de tipo general con dichos invariantes. Su construcción es debida a David Gieseker (en [Gie77]), y juega un papel análogo al espacio de Moduli de curvas  $\mathcal{M}_g$  con género  $g \geq 2$ .

De manera análoga a la compactificación de Deligne-Mumford  $\overline{\mathcal{M}}_g$  de  $\mathcal{M}_g$  (por Pierre Deligne y David Mumford en [DM69]), es interesante buscar compactificaciones de  $\mathcal{M}_{K^2, \chi}$ . Este trabajo fue llevado a cabo por János Kollár, Nicholas Shepherd-Barron y Valery Alexeev (en [KSB88] y [Ale94]), dando lugar al *espacio de Moduli de superficies estables o compactificación KSBA*.

Una pregunta interesante es poder entender las superficies nuevas que aparecen en  $\mathcal{M}_{K^2, \chi}$  como límite de superficies suaves. Más precisamente, dada una familia de superficies parametrizada por el germen pinchado de una curva suave  $\mathbb{D}^\times \rightarrow \mathcal{M}_{K^2, \chi}$ , buscamos completar la familia a  $\mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{K^2, \chi}$ . El proceso análogo para curvas es bien entendido en la compactificación de Deligne-Mumford (por ejemplo, ver [HM98, §3C]). Idealmente, uno debería tener un algoritmo explícito para aplicar a ejemplos concretos.

En [HTU17, Ch.5], Paul Hacking, Jenia Tevelev y Giancarlo Urzúa construyen algoritmos explícitos para identificar este límite. El proceso se basa en geometría birracional de 3-folds, al estudiar el espacio total  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$  de la familia (cf. Sección 4.2). Centrando la atención en la fibra  $X$  sobre  $(0 \in \mathbb{D})$  (y bajo ciertas hipótesis técnicas en el espacio total), se demuestra que se requiere realizar contracciones divisoriales y flips en vecindades mk1A y mk2A para obtener una superficie estable (cf. Proposición 4.9). Al realizar flips, aparecen las *P-resoluciones extremales*, descritas por  $(C^+ \subseteq X^+) \rightarrow (Q \in Y)$ , donde  $C^+$  tiene una o dos singularidades de Wahl, y  $(Q \in Y) = \frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  es una singularidad de cociente cíclico (cf. Capítulo 3, Sección 4.3, y el Apéndice A para implementaciones de estos algoritmos).

Con respecto a las P-resoluciones extremales, es posible probar que para una singularidad de cociente cíclico  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  hay a lo más dos, y además comparten invariantes numéricos (cf. [HTU17, Thm 4.3, Thm 4.4]). En la tesis se estudian ambos teoremas, obteniendo dos demostraciones nuevas (cf. Teoremas 3.21 y 3.22). La primera reescribe la demostración original en *sucesiones indicadoras* (cf. Definición 3.12), que clarifica el argumento; la segunda es completamente nueva y reduce el resultado a un cálculo de trazas de matrices.

Con lo anterior, dada una familia de superficies suaves que degenera a una superficie estable  $(X_1 \subseteq \mathcal{X}_1) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$ , si se identifica una curva  $C_1 \subseteq X_1$  que produce una P-resolución extremal de una singularidad, podemos preguntarnos si la singularidad  $(Q \in Y)$  asociada tiene una segunda P-resolución extremal. De ser así, podemos pasar a ella obteniendo  $(C_2 \subseteq X_2) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$ . Ahora bien, nada asegura que  $X_2$  sea una superficie estable, y quizá es necesario realizar nuevos flips y contracciones divisoriales. En caso de no requerir contracciones divisoriales, la familia  $\mathcal{X}_2$  cae en el mismo espacio de Moduli que  $\mathcal{X}_1$ , y nos encontraríamos con el *wormhole phenomenon* descrito en [Urz16a, Rmk 5.8]: dos suavizaciones de superficies estables en el mismo espacio de Moduli, relacionadas por la misma singularidad  $(Q \in Y)$ .

**Conjetura 1** (Wormhole conjecture). *Dada una superficie estable  $X_1$  sólo con singularidades de Wahl y  $(X_1 \subseteq \mathcal{X}_1) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  una suavización  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein, supongamos que existe una curva  $C_1$  tal que  $(C_1 \subseteq X_1) \rightarrow (Q \in Y)$  es una P-resolución extremal. Si  $(C_2 \subseteq X_2) \rightarrow (Q \in Y)$  es una segunda P-resolución extremal, y  $(X_2 \subseteq \mathcal{X}_2) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  una suavización  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein, entonces sólo se necesitan flips para volver a  $X_2$  una superficie estable. En particular, ambas familias de superficies pertenecen al mismo espacio de Moduli.*

El objetivo principal de esta tesis es probar los siguientes dos teoremas, que dan una respuesta afirmativa a la Conjetura 1, cuando  $(Q \in Y)$  es el único punto singular, y las P-resoluciones extremales tienen una curva de autointersección -1 (Teorema A), o una curva de autointersección -2 y sólo una singularidad (Teorema B).

**Teorema A** (Teorema 5.2). *Sea  $Y$  una superficie proyectiva cuya resolución minimal no es reglada. Sea  $Q \in Y$  una singularidad de cociente cíclico, siendo el único punto singular en  $Y$ . Supongamos que  $Q$  admite dos P-resoluciones extremales  $f_i^+ : (C_i \subseteq X_i) \rightarrow (Q \in Y), i = 1, 2$ , de modo que se cumplen las siguientes propiedades.*

- *La curva excepcional  $C_1$  de la P-resolución  $X_1$  tiene autointersección  $-1$  (en la resolución minimal de  $X_1$ ).*
- *$K_{X_2}$  es nef.*
- *Las dos P-resoluciones extremales y la superficie  $Y$  son fibras de suavizaciones  $F_i : (X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (Y \subseteq \mathcal{Y})$ , con  $(X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  deformación  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein sobre  $\mathbb{D}$ .*

*Luego, se tiene que  $K_{X_1}$  es nef.*

**Teorema B** (Teorema 5.12). *Sea  $Y$  una superficie proyectiva cuya resolución minimal no es reglada. Sea  $Q \in Y$  una singularidad de cociente cíclico, siendo el único punto singular en  $Y$ . Supongamos que  $Q$  admite dos P-resoluciones extremales  $f_i^+ : (C_i \subseteq X_i) \rightarrow (Q \in Y), i = 1, 2$ , de modo que se cumplen las siguientes propiedades.*

- La curva excepcional  $C_1$  de la  $P$ -resolución  $X_1$  tiene autointersección  $-2$  (en la resolución minimal de  $X_1$ ), y tiene sólo una singularidad.
- $K_{X_2}$  es nef.
- Las dos  $P$ -resoluciones extremales y la superficie  $Y$  son fibras de suavizaciones  $F_i : (X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (Y \subseteq \mathcal{Y})$ , con  $(X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$   $\mathbb{Q}$ -Gorenstein.

Luego, al correr el MMP en  $\mathcal{X}_1$ , se necesitan sólo flips para obtener un divisor canónico nef.

Los métodos utilizados son esencialmente combinatoriales, controlando las discrepancias de las singularidades (cf. Lema 5.6) y utilizando la existencia del modelo minimal para descartar los casos restantes (cf. Lemas 5.9, 5.10 y 5.11).

El documento se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo veremos propiedades de las fracciones continuas de Hirzebruch-Jung desde un punto de vista puramente combinatorial, recopilando resultados clásicos de distintas fuentes. El Capítulo 2 estará dedicado a propiedades geométricas de superficies proyectivas y singularidades de cociente cíclico, donde las fracciones continuas juegan un rol fundamental.

El tercer capítulo se dedica a estudiar las  $P$ -resoluciones extremales desde un enfoque combinatorial, siguiendo [HTU17, Ch. 4]. Una novedad importante son nuevas demostraciones de [HTU17, Thm 4.3, Thm 4.4] (cf. Teoremas 3.21 y 3.22), más simples que las originales. El cuarto capítulo hace una exposición del método de MMP para familias de superficies explicado en [HTU17, Ch. 5] y [Urz16a, Ch. 2].

El quinto y último capítulo está enfocado en los *wormholes* o agujeros de gusano. Además de resolver los casos con dos singularidades con una curva  $-1$ , y una singularidad con una curva  $-2$ , se incluye un ejemplo que muestra la necesidad de hacer flips en el segundo caso. Al final, se discuten posibles extensiones de estos resultados.

Por último, se incluye un apéndice con implementaciones computacionales de los algoritmos del cuarto capítulo. Los códigos ahí presentes permiten calcular flips y contracciones divisoriales de vecindades mk1A/mk2A (cf. Sección A.1). Además, se incluye un código para obtener vecindades flips asociadas a una  $P$ -resolución extremal dada (cf. Sección A.2).

# Capítulo 1

## Fracciones continuas

Las *fracciones continuas de Hirzebruch-Jung* son un objeto introducido por Heinrich W. E. Jung (en [Jun08]) y redescubiertas por Friederich Hirzebruch (en [Hir53]). Su aparición es natural al estudiar resoluciones minimales de *singularidades de cociente cíclico*.

En este capítulo estudiaremos fracciones continuas desde un punto de vista combinatorial, dejando la conexión con singularidades para el Capítulo 2. Seguimos principalmente [OW77], [Ste91] y [Rie74].

### 1.1. Definiciones básicas

**Definición 1.1.** Sean  $a_1, \dots, a_r$  enteros positivos. Definimos la *fracción continua de Hirzebruch-Jung* de manera recursiva. Si  $r = 1$ , definimos

$$[a_1] := a_1.$$

Si  $r \geq 2$ , definimos

$$[a_1, \dots, a_r] := a_1 - \frac{1}{[a_2, \dots, a_r]},$$

siempre que  $[a_2, \dots, a_r]$  esté definido y sea distinto de cero.

Tradicionalmente esta definición exige  $a_i \geq 2$  para todo  $i$ ; nosotros permitimos que las entradas puedan valer 1.

**Ejemplo 1.2.** Tenemos

$$[2, 2, 2, 2] = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Al contrario de las fracciones continuas positivas, acá no es claro que cualquier secuencia de números enteros positivos produzca una fracción, en cuanto pueden producirse denominadores cero. Por ejemplo,

$$[1, 2, 1] = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1}} = 1 - \frac{1}{1} = 0;$$

de esta manera, cualquier lista  $[a_1, \dots, a_{r-3}, 1, 2, 1]$  no va a dar origen a una fracción continua de Hirzebruch-Jung. Tenemos así una pregunta natural: ¿cuándo podemos asegurar que  $a_1, \dots, a_r$  dan lugar a una fracción continua?

Pospondremos una respuesta completa a esa pregunta. Por ahora, nos contentaremos con el siguiente resultado.

**Lema 1.3** ([OW77, Lemma A2]). *Sean  $a_1, \dots, a_r$  naturales mayores o iguales a dos. Luego, la fracción  $[a_1, \dots, a_r]$  está bien definida, y es además mayor a 1.*

*Demostración.* Lo probaremos por inducción en el largo  $r$  de la sucesión. Para  $r = 1$  ambas afirmaciones son evidentes:  $[a_1] = a_1$  está bien definida y es mayor a 1 (de hecho, mayor o igual a dos).

Supongamos que ya probamos ambas afirmaciones para toda secuencia de números naturales de largo  $r - 1$ , y veamos qué pasa con  $[a_1, \dots, a_r]$ . Tenemos

$$[a_1, \dots, a_r] = a_1 - \frac{1}{[a_2, \dots, a_r]};$$

que muestra que está bien definida, en cuanto  $[a_2, \dots, a_r]$  lo estaba y es no-cero. Además, como  $[a_2, \dots, a_r] > 1$ , su recíproco es menor a uno, y como  $a_1 \geq 2$  se sigue que toda la fracción es mayor a 1.  $\square$

## 1.2. Expansión de números racionales

En esta sección nos centraremos en entender fracciones continuas asociadas a números racionales mayores que 1. Acá, denotaremos siempre  $x = \frac{n}{q}$  nuestro número racional a estudiar, donde  $n > q$  son números naturales coprimos.

**Proposición 1.4.** *Existe único  $r \geq 1$  y números naturales  $b_1, \dots, b_r$  mayores o iguales a 2 tales que*

$$\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_r].$$

*Demostración.* Probaremos tanto existencia como unicidad por inducción en  $n$ . Primero que todo, cuando  $n = 2$  la única fracción posible es

$$\frac{2}{1} = [2].$$

En efecto, supongamos que  $2 = [a_1, \dots, a_r]$ , con  $r \geq 2$ . Tenemos que

$$\frac{1}{[a_2, \dots, a_r]} = 2 - a_1 \leq 0,$$

pues  $a_1 \geq 2$ . Esto es un absurdo, y así necesariamente  $r = 1$  (de donde es directo  $a_1 = 2$ ). Con ello, tenemos tanto la existencia y unicidad para todas las fracciones con  $n = 2$ .

Supongamos ahora que sabemos existencia y unicidad de todas las fracciones con numerador menor que  $n$ , y veamos qué ocurre con  $\frac{n}{q}$ . Llamando  $a_1 = \lceil \frac{n}{q} \rceil$ , tenemos que o bien  $\frac{n}{q} = a_1$ , o bien

$$\frac{1}{a_1 - \frac{n}{q}} = \frac{q}{a_1 q - n}$$

es una fracción mayor que 1 (pues  $a_1$  es el techo de  $\frac{n}{q}$ ) con numerador  $q < n$ . En el primer caso, tomamos  $[a_1]$ ; en el segundo, usamos la hipótesis de inducción para escribir

$$\frac{q}{a_1 q - n} = [a_2, \dots, a_r],$$

y con ello  $\frac{n}{q} = [a_1, \dots, a_r]$ .

Para la unicidad, supongamos que  $\frac{n}{q}$  admite dos de dichas fracciones. En primer lugar, supongamos que  $\frac{n}{q}$  es entero; esto es,  $q = 1$ . Si

$$n = \frac{n}{q} = [a_1, \dots, a_r]$$

para algún  $r > 1$ , tenemos que

$$\frac{1}{[a_2, \dots, a_r]} = a_1 - n.$$

Ahora bien, tenemos que  $a_1 > n$  por la positividad del lado izquierdo, pero así  $[a_2, \dots, a_r]$  es menor o igual a 1. Esto contradice el Lema 1.3. Con ello, tenemos  $r = 1$ , y así la unicidad es clara.

Si  $\frac{n}{q}$  no es entero y  $\frac{n}{q} = [a_1, \dots, a_r]$ , afirmo que  $a_1$  debe ser  $\lceil \frac{n}{q} \rceil$ . En efecto, tenemos que

$$\frac{1}{[a_2, \dots, a_r]} = a_1 - \frac{n}{q}.$$

Como  $[a_2, \dots, a_r]$  es mayor estricto que 1, el lado izquierdo está entre 0 y 1. Como  $a_1$  es entero, tenemos que es un entero mayor que  $\frac{n}{q}$  y a distancia menor que 1; esto es,  $a_1 = \lceil \frac{n}{q} \rceil$ . De acá, aplicamos la unicidad para

$$\frac{1}{a_1 - \frac{n}{q}} = \frac{q}{a_1 q - n},$$

y obtenemos así la unicidad de  $[a_2, \dots, a_r]$  por la hipótesis inductiva.

Esto cierra el proceso inductivo, y tenemos así la existencia y unicidad de la fracción continua.  $\square$

**Ejemplo 1.5.** Si tomamos  $n = 7, q = 3$ , tenemos

$$\frac{7}{3} = 3 - \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{3/2} = 3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}},$$

y así  $\frac{7}{3} = [3, 2, 2]$ .

**Ejemplo 1.6.** Inductivamente, tenemos que

$$\frac{n}{n-1} = [2, \dots, 2],$$

donde utilizamos  $n - 1$  números 2. El caso  $n = 2$  es evidente, y

$$\frac{n}{n-1} = 2 - \frac{n-2}{n-1} = 2 - \frac{1}{\frac{n-1}{n-2}}.$$

Veremos luego otra derivación de este resultado.

### 1.3. Fracciones duales

Al igual que en la sección anterior, durante esta sección  $n > q$  serán dos naturales coprimos.

**Proposición 1.7** ([Rie74, Lemma 3]). *Sea  $[a_1, \dots, a_r], a_i \geq 2$  la fracción continua asociada a  $\frac{n}{q}$ . Sean  $n_1, q_1$  números coprimos,  $b_1, \dots, b_s \geq 2$  tales que*

$$\frac{n_1}{q_1} = [a_2, \dots, a_r], \quad \frac{n_1}{n_1 - q_1} = [b_1, \dots, b_s].$$

Luego, la fracción continua de  $\frac{n}{n-q}$  es

$$\frac{n}{n-q} = [2, \dots, 2, (b_1 + 1), b_2, \dots, b_s],$$

donde hay  $a_1 - 2$  números 2 al inicio.

*Demostración.* Haremos inducción en  $a_1$ , el primer término de la sucesión. Si  $a_1 = 2$ , tenemos que

$$\frac{n}{q} = 2 - \frac{1}{n_1/q_1} = \frac{2n_1 - q_1}{q_1},$$

y así

$$\frac{n}{n-q} = \frac{2n_1 - q_1}{n_1 - q_1} = 1 + \frac{n_1}{n_1 - q_1} = 1 + [b_1, \dots, b_s]$$

por la hipótesis inductiva. Pero el lado derecho es exactamente  $[(b_1 + 1), \dots, b_s]$ , y así tenemos completo el caso base.

Para el paso inductivo, supongamos que ya probamos esto para  $a_1 - 1$ . Así,

$$\frac{n-q}{q} = [(a_1 - 1), \dots, a_r].$$

Así, como numerador y denominador siguen siendo coprimos, y al truncar obtenemos  $\frac{n_1}{q_1}$ , tenemos que

$$\frac{n-q}{(n-q)-q} = [2, \dots, 2, b_1 + 1, b_2, \dots, b_s]$$

por la hipótesis inductiva, donde hay  $(a_1 - 3)$  números 2 al inicio. Ahora, basta usar que

$$\frac{n}{n-q} = 2 - \frac{1}{\frac{n-q}{n-2q}},$$

de donde agregamos un 2 extra. Esto demuestra lo pedido.  $\square$

La manera de sacar provecho de este resultado se basa en los *diagramas de puntos de Riemenschneider* ([Rie74], cf. [Ste91, 1.2]). Si nuestra fracción es  $[a_1, \dots, a_r]$ , comenzamos colocando  $a_1 - 1$  puntos en horizontal. Debajo del punto más a la derecha, colocamos  $a_2 - 1$  puntos en horizontal, y así hasta el final. El lema de arriba esencialmente permite calcular la expansión de  $\frac{n}{n-q}$  intercambiando el rol de filas y columnas. Equivalentemente, los diagramas para  $\frac{n}{q}$  y  $\frac{n}{n-q}$  son simétricos respecto a la diagonal.

**Ejemplo 1.8.** La fracción  $\frac{19}{11} = [2, 4, 3]$  produce el siguiente diagrama de Riemenschneider.

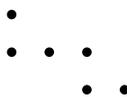


Figura 1.1: Diagrama de  $\frac{19}{11}$ .

Leyendo las columnas en vez de las filas, obtenemos

$$[3, 2, 3, 2] = \frac{19}{8}.$$

**Ejemplo 1.9.** La fracción continua de  $\frac{n}{1}$  es  $[n]$  simplemente. Usando un diagrama de puntos, obtenemos

$$\frac{n}{n-1} = \underbrace{[2, \dots, 2]}_{n-1}.$$

Esto da otra manera de calcular el Ejemplo 1.6.

## 1.4. Admisibilidad

En esta sección buscaremos dar condiciones de existencia de la fracción continua  $[a_1, \dots, a_r]$ , un poco menos restrictivas que el Lema 1.3. En particular, nos interesa poder trabajar con fracciones donde alguna de las entradas es 1.

**Definición 1.10.** [OW77, p. 76] Sea  $a_1, \dots, a_r$  una secuencia de números naturales. Definimos  $p_0 = 1, p_1 = a_1, q_0 = 0, q_1 = 1$ , junto con las recursiones

$$p_i = a_i p_{i-1} - p_{i-2}, \quad q_i = a_i q_{i-1} - q_{i-2}, \quad i \geq 2.$$

Diremos que secuencia es *admisibile* si  $p_i > 0$  para  $i = 0, \dots, r-1$ .

**Proposición 1.11** ([OW77, p.77]). *La secuencia  $a_1, \dots, a_r$  es admisible si y sólo si la matriz*

$$\begin{bmatrix} a_1 & -1 & & & \\ -1 & a_2 & -1 & & \\ & -1 & a_3 & & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & -1 & a_r \end{bmatrix}$$

*es semipositiva definida de rango  $\geq r - 1$ .*

*Demostración.* Llamemos  $M$  a la matriz, y supongamos en primer lugar que la matriz es semipositiva definida de rango mayor o igual a  $r - 1$ . En primer lugar, tenemos que la esquina superior izquierda debe ser no-cero si  $r > 1$ . En otro caso, la submatriz  $2 \times 2$  de la esquina superior izquierda tendría determinante  $-1$ , en contradicción con el hecho que  $M$  es semipositiva definida.

Notemos que si  $P$  es una matriz invertible, entonces  $P^t M P$  es semipositiva definida. De esta manera, tomando

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 - \frac{1}{a_1} & -1 & & \\ & -1 & a_3 & & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & -1 & a_r \end{bmatrix}$$

Nuevamente, si  $r \geq 3$ , la entrada  $a_2 - \frac{1}{a_1}$  debe ser no-cero. Ahora bien, las dos primeras casillas de la diagonal son  $a_1 = \frac{p_1}{p_0}$  y  $a_2 - \frac{1}{a_1} = \frac{p_2}{p_1}$ ; repitiendo este procedimiento, obtenemos que existe una matriz  $Q$  invertible tal que  $Q^t M Q$  es

$$\begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_0} & & & & \\ & \frac{p_2}{p_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{p_r}{p_{r-1}} \end{bmatrix},$$

donde solamente la última entrada puede ser cero. Ahora, la matriz es diagonal y semipositiva definida. Como  $p_0 = 1 > 0$ , obtenemos inductivamente que  $p_2, p_3, \dots, p_{r-1} > 0$ . Con ello,  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es admisible.

Recíprocamente, si  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es admisible, podemos llevarla a la forma de arriba, y ahí es evidente que es semipositiva definida de rango mayor o igual a  $r - 1$ .  $\square$



De esta manera, convendrá siempre trabajar con sucesiones admisibles, en cuanto no hay riesgo de que las fracciones puedan indefinirse, incluso tomando subfracciones o invirtiendo el orden.

## 1.5. Cálculos con matrices

Dada  $\{a_1, \dots, a_r\}$  una sucesión admisible, le asociaremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto será útil para demostrar algunas propiedades básicas de fracciones continuas.

**Proposición 1.14.** *Si  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{n}{q}$  con  $n, q$  coprimos, entonces*

$$M = \begin{pmatrix} n & * \\ q & * \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Notemos que si  $M = [m_{ij}]$ , entonces  $\det M = 1$  (al ser producto de matrices de determinante 1). Con ello, es claro que  $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$ , con lo que  $m_{11}$  y  $m_{21}$  son coprimos. Basta probar entonces que  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{m_{11}}{m_{21}}$ , lo que demostraremos por inducción en el largo  $r$ .

Para  $r = 1$  no hay nada que probar, en cuando

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y  $[a_1] = \frac{a_1}{1}$ . Inductivamente, si sabemos que la afirmación es verdad para cualquier fracción de largo  $r - 1$  y  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es una sucesión admisible de largo  $r$ , entonces su matriz asociada se escribe como

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x - y & * \\ x & * \end{pmatrix},$$

donde  $[a_2, \dots, a_r] = \frac{x}{y}$ . Pero

$$[a_1, \dots, a_r] = a_1 - \frac{1}{[a_2, \dots, a_r]} = a_1 - \frac{1}{x/y} = \frac{a_1x - y}{x},$$

que muestra el paso inductivo. Esto prueba lo pedido.  $\square$

Recordemos que en la Definición 1.10 armamos las secuencias  $p_i$  y  $q_i$  para definir qué significaba ser admisible. Podemos además utilizarlas para calcular algunas fracciones intermedias. Por comodidad, llamaremos

$$M_i = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 1.15.** Para todo  $1 \leq i \leq r$ , tenemos que

$$M_i = \begin{pmatrix} p_i & -p_{i-1} \\ q_i & -q_{i-1} \end{pmatrix}.$$

En particular, tenemos que  $[a_1, \dots, a_i] = \frac{p_i}{q_i}$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción, donde el caso  $i = 1$  es evidente. Inductivamente, tenemos que

$$M_{i+1} = M_i \begin{pmatrix} a_{i+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i+1}p_i - p_{i-1} & -p_i \\ a_{i+1}q_i - q_{i-1} & -q_i \end{pmatrix}.$$

Pero esto se sigue de que  $p_{i+1} = a_{i+1}p_i - p_{i-1}$  y  $q_{i+1} = a_{i+1}q_i - q_{i-1}$  por construcción. Esto cierra el paso inductivo, y concluimos con la Proposición 1.14.  $\square$

**Corolario 1.16** ([OW77, Lemma A1]). Para todo  $1 \leq i \leq n$ , se tiene que  $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = -1$ .

*Demostración.* Se sigue de que  $\det M_i = 1$ , en cuanto cada matriz que la forma tiene determinante 1.  $\square$

En particular, este corolario permite ver que  $p_i$  y  $q_i$  son coprimos, con lo que  $\frac{p_i}{q_i}$  está en su forma reducida.

**Corolario 1.17.** Dada una sucesión  $\{a_1, \dots, a_r\}$ , se tiene que es admisible si y sólo si para todo  $1 \leq i \leq r - 1$ , la matriz

$$M_i = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(i)} & m_{12}^{(i)} \\ * & * \end{pmatrix}$$

cumple  $m_{11}^{(i)} > 0, m_{12}^{(i)} < 0$ .

En los siguientes resultados vamos a analizar qué ocurre con fracciones formadas por los  $a_i$  de manera inversa, a saber,  $[a_i, \dots, a_1]$ . Para ello, llamaremos

$$N_i = \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a la matriz asociada.

**Corolario 1.18** ([OW77, Lemma A4]). Si  $1 \leq i \leq n$ , tenemos que  $[a_i, \dots, a_1] = \frac{p_i}{p_{i-1}}$ .

*Demostración.* Notemos que

$$N_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M_i^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, la matriz que multiplica a  $M_i^t$  es su propia inversa (por lo que en verdad estamos conjugado por ella), y concluimos pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, con esto y la Proposición 1.15, tenemos que

$$N_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i & q_i \\ -p_{i-1} & -q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i & -q_i \\ p_{i-1} & -q_{i-1} \end{pmatrix}.$$

El resultado se sigue aplicando la Proposición 1.14.  $\square$

**Corolario 1.19.** *Las fracciones  $[a_1, \dots, a_r]$  y  $[a_r, \dots, a_1]$  tienen igual numerador  $n$ , y sus denominadores son inversos módulo  $n$ .*

*Demostración.* Los corolarios anteriores dicen que

$$[a_1, \dots, a_r] = \frac{p_r}{q_r} \quad [a_r, \dots, a_1] = \frac{p_r}{p_{r-1}}.$$

Tenemos así que  $n = p_r$  es el denominador común. Ahora bien, como

$$p_r q_{r-1} - p_{r-1} q_r = -1,$$

se sigue tomando módulo  $p_r$  que  $p_{r-1} q_r \equiv 1 \pmod{n}$ . Esto demuestra lo pedido.  $\square$

## 1.6. Blow-up y blow-down

**Definición 1.20** ([Ste91, 1.1]). Dada una secuencia  $\{a_1, \dots, a_r\}$ , a cualquiera de las secuencias

$$\begin{aligned} &\{1, a_1 + 1, a_2, \dots, a_r\}; \\ &\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + 1, 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_r\}, \quad 1 \leq i \leq r-1; \\ &\{a_1, \dots, a_{r-1}, a_r + 1, 1\}. \end{aligned}$$

la denominaremos un *blow-up* de  $\{a_1, \dots, a_r\}$ . Al proceso inverso lo llamamos *blow-down*.

**Proposición 1.21.** *Una secuencia  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es admisible si y sólo si la secuencia obtenida por un blow-up de ella es admisible. Más aún, si es admisible y  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{n}{q}$  con  $\text{mcd}(n, q) = 1$ , entonces el valor de la fracción luego del blow-up es  $\frac{n}{q'}$ , con  $q' \equiv q \pmod{n}$ .*

*Demostración.* Gracias al Corolario 1.17, basta entender qué ocurre con las matrices  $M_i$  como fueron definidas antes.

- Veamos qué pasa con el segundo tipo de blow-up. Para la secuencia

$$\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + 1, 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_r\},$$

las correspondientes matrices  $M'_j$  son

$$M'_1 = M_1, M'_2 = M_2, \dots, M'_{i-1} = M_{i-1}.$$

Luego, tenemos que

$$M'_i = \begin{pmatrix} p_{i-1} & -p_{i-2} \\ q_{i-1} & -q_{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i + 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i + p_{i-1} & -p_{i-1} \\ q_i + q_{i-1} & -q_{i-1} \end{pmatrix}.$$

La siguiente matriz sería

$$M'_{i+1} = \begin{pmatrix} p_i + p_{i-1} & -p_{i-1} \\ q_i + q_{i-1} & -q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i & -(p_i + p_{i-1}) \\ q_i & -(q_i + q_{i-1}) \end{pmatrix},$$

y

$$M'_{i+2} = \begin{pmatrix} p_i & -(p_i + p_{i-1}) \\ q_i & -(q_i + q_{i-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} + 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i+1} & -p_i \\ q_{i+1} & -q_i \end{pmatrix} = M_{i+1}.$$

Luego, se verifica que

$$M'_{i+3} = M_{i+2}, \dots, M'_{r+1} = M_r.$$

Mirando las filas superiores así obtenidas, se sigue que  $\{a_1, \dots, a_r\}$  satisface la condición del Corolario 1.17 si y sólo si la secuencia obtenida al hacer blow-up lo cumple.

Por último, como la matriz final es igual, se sigue que las dos fracciones resultantes son iguales, gracias a la Proposición 1.14.

- Para el tercer tipo de blow-up, tenemos  $M'_1 = M_1, \dots, M'_{r-1} = M_{r-1}$ . Luego,

$$M'_r = \begin{pmatrix} p_{r-1} & -p_{r-2} \\ q_{r-1} & -q_{r-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r + 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r + p_{r-1} & -p_r \\ q_r + q_{r-1} & -q_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Así, nuevamente el Corolario 1.17 da la equivalencia de admisibilidad. Tenemos además que

$$M' = M'_{r+1} = \begin{pmatrix} p_r + p_{r-1} & -p_r \\ q_r + q_{r-1} & -q_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r & -p_r - p_{r-1} \\ q_r & -q_r - q_{r-1} \end{pmatrix},$$

de donde es claro que

$$[a_1, \dots, a_r] = [a_1, \dots, a_r + 1, 1],$$

por la Proposición 1.14.

- Por último, si consideramos la sucesión blow-up  $\{1, a_1 + 1, \dots, a_r\}$ , utilizando la Proposición 1.13 esto se reduce al caso 3. Un cálculo análogo muestra que la matriz asociada a  $\{1, a_1 + 1, \dots, a_r\}$  es

$$\begin{pmatrix} p_r & -p_{r-1} \\ p_r + q_r & -q_{r-1} - p_{r-1} \end{pmatrix}.$$

De este modo, si  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{n}{q}$ , entonces  $[1, a_1 + 1, \dots, a_r] = \frac{n}{n+q}$ , que muestra la congruencia del enunciado.

Esto demuestra lo pedido.  $\square$

*Observación 1.22.* Notemos que si  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es admisible, entonces no puede haber dos valores 1 consecutivos, salvo el caso  $[1, 1]$ . En caso contrario, tendríamos que

$$p_{i+2} = p_{i+1} - p_i = (p_i - p_{i-1}) - p_i = -p_{i-1} < 0,$$

que contradeciría el hecho que  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es admisible. Pero aplicando el mismo análisis a  $\{a_r, \dots, a_1\}$ , se sigue que la única manera de que haya dos 1 consecutivos es que  $r = 2$ .

De esta manera, al hacer un blow-down de una secuencia admisible no aparecen números 0.

Como consecuencia de esta proposición, podemos obtener explícitamente los valores de  $p_i$  asociados a una secuencia y a la correspondiente vía blow-up (cf. [OW77, Lemma A6]).

**Definición 1.23** ([OW77, p.79]). Dadas dos secuencias admisibles

$$\{a_1, \dots, a_r\}, \quad \{b_1, \dots, b_s\},$$

diremos que son *equivalentes* si es posible obtener una a partir de la otra por medio de blow-ups y blow-downs.

Es claro que esto es una relación de equivalencia entre las sucesiones admisibles. Más aún, de la Proposición 1.21, resulta que dos sucesiones equivalentes producen fracciones con igual numerador y denominadores congruentes. El converso también es cierto, tal y como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 1.24** ([OW77, Lemma A7]). *Dos secuencias admisibles son equivalentes si y sólo si las fracciones asociadas  $\frac{n}{q}, \frac{n'}{q'}$  cumplen  $n = n'$  y  $q \equiv q' \pmod{n}$ .*

*Demostración.* La Proposición 1.21 muestra que si son equivalentes se cumple la igualdad de las fracciones. Para la otra implicancia, si tenemos dos secuencias admisibles, haciendo blow-down a cada número 1, podemos llevar ambas sucesiones a expresiones sólo con entradas mayores o iguales a 2, o bien a  $\{1, 1\}$ . Como  $[1, 1] = 0$  y  $[a_1, \dots, a_r] > 0$  si  $a_i \geq 2$ , concluimos por la unicidad de estas fracciones (Proposición 1.4) y la Proposición 1.21.  $\square$

*Observación 1.25.* De la demostración, tenemos que si  $[a_1, \dots, a_r] = 0$ , entonces  $a_i = 1$  para algún  $i$ .

## 1.7. Fracciones que representan cero

**Definición 1.26** ([Ste91, 1.3.1]). Diremos que una sucesión  $\{a_1, \dots, a_r\}$  admisible *representa a cero* si  $[a_1, \dots, a_r] = 0$ . Denotamos  $K_r$  al conjunto de secuencias que representan a cero de largo  $r$ .

Por nuestra elección de nomenclatura (en donde  $a_i \geq 1$ ), el primer momento donde  $K_r$  tiene sentido es para  $r = 2$ , con el único elemento  $[1, 1]$ .

Vamos a demostrar una relación inesperada pero conocida entre fracciones que representan a cero y triangulaciones de polígonos. Para ello, será necesario dar una definiciones previas.

**Definición 1.27.** Sea  $r \geq 2$  un número natural. Una *triangulación* de  $r + 1$  lados corresponde a dibujar algunas diagonales sobre un polígono convexo de  $r + 1$  lados (de vértices  $P_0, \dots, P_r$ ), de modo que

- Las diagonales no se corten entre sí (salvo quizá en los extremos).
- El polígono quede dividido en triángulos.

**Ejemplo 1.28.** La siguiente figura muestra una triangulación de 8 lados.

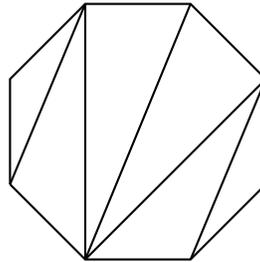


Figura 1.2: Una triangulación de 8 lados

**Definición 1.29.** Dada una triangulación de  $r + 1$  lados, a cada vértice  $P_i$  (donde  $0 \leq i \leq r$ ) asociaremos un número natural  $v_i$ , correspondiente a la cantidad de diagonales incidentes más uno. Equivalentemente,  $v_i$  es la cantidad de triángulos que tienen a  $P_i$  como uno de sus vértices.

**Ejemplo 1.30.** En el ejemplo anterior, hemos agregado los valores de  $v_i$  para los vértices.

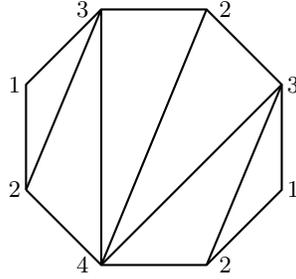


Figura 1.3: Una triangulación de 8 lados con los valores de  $v_i$ .

**Proposición 1.31.** *Dada una triangulación de  $r + 1$  lados, al menos dos de los  $v_i$  deben ser 1. Además, para  $r \geq 3$  los valores de 1 no pueden estar en posiciones consecutivas*

*Demostración.* Probaremos esto por inducción en  $r$ . Para  $r = 2$ , la única triangulación es la trivial, con  $v_0 = v_1 = v_2 = 1$ . Para  $r = 3$ , hay dos maneras de triangular:  $v_0 = v_2 = 2, v_1 = v_3 = 1$ , o viceversa. Esto da los casos base.

Para el paso inductivo, elijamos una diagonal dibujada cualquiera; sin pérdida de generalidad va de  $P_0$  a  $P_i$ . Esto corta al polígono en dos, a saber  $P_0P_1 \dots P_i$  y  $P_i \dots P_rP_0$ .

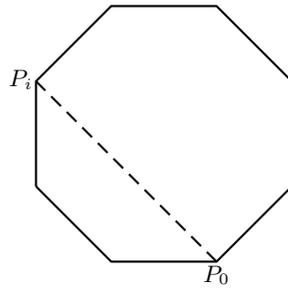


Figura 1.4: Posición de los vértices

Centremos nuestra atención en el polígono  $P_0P_1 \dots P_i$ . Si  $i = 2$ , entonces el vértice  $P_1$  no está adyacente a la diagonal escogida, y con ello la cantidad de triángulos que llegan a dicho vértice no cambia al volver a pegar los polígonos. Si  $i \geq 3$ , la hipótesis inductiva garantiza que debe haber al menos dos vértices con un 1, y no pueden estar ambos sobre la diagonal escogida. De esta manera, siempre aparece un vértice con 1 lejos de la diagonal.

Haciendo el mismo análisis en la otra mitad se sigue que hay al menos un número 1 a cada lado de la diagonal. Y para finalizar, de haber dos números 1 consecutivos, podemos suponer que están en  $v_0$  y  $v_1$ . De esta manera debe

haber un triángulo con vértices en  $v_r, v_0, v_1, v_2$ , lo que es un absurdo a menos que  $r = 2$ . Esto muestra lo pedido.  $\square$

**Proposición 1.32.** Sean  $v_0, \dots, v_r$  números naturales que provienen de una triangulación de  $r + 1$  lados. Luego, existe una única manera de triangular el polígono que produce dichos números.

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción, donde el caso base  $r = 2$  es directo. Para el paso inductivo, supongamos que  $a_i = 1$  (que podemos por la Observación 1.31). Así, al vértice  $P_i$  no llegan diagonales, o de manera equivalente, participa sólo un triángulo. Esto muestra que  $\overline{P_{i-1}P_i}$  y  $\overline{P_iP_{i+1}}$  son dos de los lados de dicho triángulo, y por ello es obligatorio trazar la diagonal  $\overline{P_{i-1}P_{i+1}}$ . Aplica así la hipótesis inductiva al cortar vía esa diagonal, lo que concluye lo pedido.  $\square$

*Observación 1.33.* Si  $v_0, \dots, v_r$  son números que corresponden a una triangulación, entonces  $v_0 + \dots + v_r = 3(r - 1)$ .

El gran resultado de esta sección da una relación entre fracciones continuas que representan cero y triangulaciones de polígonos.

**Proposición 1.34.** Dada  $\{a_1, \dots, a_r\}$  una sucesión que representa a cero, existe un único  $a_0$  tal que  $\{a_0, \dots, a_r\}$  son los números que provienen de una triangulación.

Recíprocamente, si  $\{v_0, \dots, v_r\}$  son los números correspondiente a una triangulación, entonces  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es admisible, y  $[v_1, \dots, v_r] = 0$ .

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción en  $r$ , donde el caso base  $r = 2$  es directo.

Para la primera afirmación, si  $[a_1, \dots, a_r] = 0$ , existe un  $i$  tal que  $a_i = 1$ . Supondremos que  $i \neq 1, r$ ; los otros dos casos son análogos. Haciendo un blowdown, la hipótesis inductiva nos permite triangular

$$\{a_1, \dots, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, \dots, a_r\}.$$

Si  $\overline{P_0 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_r}$  es el polígono respectivo, agregamos un triángulo en  $\overline{P_{i-1} P_{i+1}}$ , con vértice nuevo  $P_i$ . Es directo verificar que los números  $v_i$  que aparecen corresponden exactamente con los  $a_i$  respectivos.

Para la segunda afirmación, si  $\{v_0, \dots, v_r\}$  son los números provenientes de una triangulación, existe un  $i$  distinto de 0 tal que  $v_i = 1$ , por la Observación 1.31. Igual que antes, supondremos que  $i \neq 1, r$ . Cortamos el triángulo que pasa por  $P_i$ ; de esta manera, la hipótesis inductiva nos dice que

$$\{v_1, \dots, v_{i-1} - 1, v_{i-1} + 1, \dots, v_r\}$$

es admisible y representa a cero. Pero ahora la secuencia que estamos estudiando es un blow-up de ésta, por lo que es admisible y representa a cero. Esto demuestra lo pedido.  $\square$

Como consecuencia de esta correspondencia podemos calcular la cardinalidad de  $K_r$ , en términos de los números de Catalan.

**Proposición 1.35** ([Sta15]). *Para un  $r \geq 2$ , la cantidad de triangulaciones de un  $(r + 1)$ -ágono es  $C_{r-1}$ , donde*

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

son los números de Catalan.

**Corolario 1.36** ([Ste91, Thm 1.3.4]). *Tenemos que*

$$\#K_r = C_{r-1} = \frac{1}{r} \binom{2(r-1)}{r-1}.$$

*Demostración.* De la Proposición 1.34 tenemos que la cantidad de fracciones de largo  $r$  que representan a cero es igual a la cantidad de triangulaciones de un  $(r + 1)$ -ágono. Reemplazando en la fórmula explícita de los números de Catalan se sigue lo pedido.  $\square$

## 1.8. Sucesiones de Wahl

**Definición 1.37.** Diremos que una sucesión  $\{a_1, \dots, a_r\}$  con  $a_i \geq 2$  es de *Wahl* si

$$[a_1, \dots, a_r] = \frac{m^2}{ma - 1},$$

para algunos  $m > a$  coprimos.

Estas fracciones llevan su nombre por Jonathan Wahl, quien las estudió al mirar suavizaciones de singularidades de cociente cíclico (cf. Definición 2.8). En [Wah81, 5.9.1], se muestra que todas las singularidades  $\frac{1}{n^2}(1, nq - 1)$  poseen suavizaciones con *número de Milnor* igual a cero. De hecho, por [LW86, Rmk. 5.10], estas son las únicas singularidades de cociente cíclico con dicha propiedad.

**Ejemplo 1.38.** El ejemplo más pequeño es [4], con  $m = 2, a = 1$ . Los dos ejemplos con  $m = 3$  son

$$\frac{3^2}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{9}{2} = [5, 2]$$

y

$$\frac{3^2}{3 \cdot 2 - 1} = \frac{9}{5} = [2, 5].$$

*Observación 1.39.* Si  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{m^2}{ma-1}$ , entonces  $[a_r, \dots, a_1] = \frac{m^2}{m(m-a)-1}$ , pues

$$(ma - 1)(m(m - a) - 1) = m^2a(m - a) - m^2 + 1 \equiv 1 \pmod{m^2},$$

y gracias al Corolario 1.19 y al Lema 1.3. De esta manera, la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & -m(m-a)+1 \\ ma-1 & 1-a(m-a) \end{pmatrix},$$

puesto que la matriz debe tener determinante 1.

**Proposición 1.40.** [KSB88, Prop 3.11] *Toda sucesión de Wahl se obtiene a partir de  $\{4\}$ , aplicando las operaciones*

- $\{a_1, \dots, a_r\} \mapsto \{2, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r + 1\}$
- $\{a_1, \dots, a_r\} \mapsto \{a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, 2\}$

*Demostración.* Lo haremos por inducción fuerte en  $m$ . Para  $m = 2$ , el único valor posible es  $a = 1$ , y  $\frac{2^2}{2 \cdot 1 - 1} = 4$ .

Inductivamente, supongamos que el resultado es válido para toda sucesión de Wahl con numerador menor que  $m^2$ . Si  $m > 2a$ , notemos que

$$\frac{(m-a)^2}{(m-a)a-1}$$

es de Wahl (pues  $m-a > a$  y  $(m-a, a) = (m, a) = 1$ ). De esta manera, la matriz asociada a dicha fracción es

$$M = \begin{pmatrix} (m-a)^2 & -(m-a)(m-2a)+1 \\ (m-a)a-1 & 1-a(m-2a) \end{pmatrix}.$$

Ahora, una cuenta rápida muestra que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & -m(m-a)+1 \\ ma-1 & 1-a(m-a) \end{pmatrix}$$

Obtenemos así la matriz que representa a  $\frac{m^2}{ma-1}$ . Ahora bien, si  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{(m-a)^2}{(m-a)a-1}$ , entonces usamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde, comparando la matriz resulta que

$$[a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, 2] = \frac{m^2}{ma-1}.$$

Esto muestra que la sucesión asociada a  $\frac{m^2}{ma-1}$  se obtiene aplicando las operaciones descritas. Para el otro caso, como  $m \neq 2a$  (por la coprimalidad, y pues  $a > 1$ ), necesariamente  $m < 2a$ . De esta manera, aplicamos el análisis a la fracción inversa  $\frac{m^2}{m(m-a)-1}$ , donde ahora  $m > 2(m-a)$ . De esta manera, si

$$[a_r, \dots, a_1] = \frac{a^2}{a(m-a)-1},$$

aplicando el análisis a la fracción reversa se sigue que

$$[a_r + 1, a_{r-1}, \dots, a_1, 2] = \frac{m^2}{m(m-a) - 1} \Rightarrow [2, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r + 1] = \frac{m^2}{ma - 1}.$$

Nuevamente así, por hipótesis inductiva se sigue que la sucesión asociada a  $\frac{m^2}{ma-1}$  se obtiene con los pasos de arriba. Esto demuestra lo pedido.  $\square$

*Observación 1.41.* De la demostración, tenemos que si  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{m^2}{ma-1}$ , entonces

$$[a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, 2] = \frac{(m+a)^2}{(m+a)a - 1}$$

y

$$[2, a_1, a_2, \dots, a_r + 1] = \frac{(2m-a)^2}{(2m-a)m - 1}$$

Nuestra siguiente meta será comprender bien las fracciones duales. Hay algunas observaciones directas que uno puede hacer.

*Observación 1.42.* Notemos que si  $[a_1, \dots, a_r] = \frac{m^2}{ma-1}$  es una fracción de Wahl, su dual es  $\frac{m^2}{m(m-a)+1}$ ; acá,  $(m-a, m) = (a, m) = 1$ , y  $0 < m-a < m$ . Recíprocamente, si  $\frac{m^2}{ma+1}$  es una fracción con  $\text{mcd}(m, a) = 1$  y  $a < m$ , entonces su dual es  $\frac{m^2}{m(m-a)-1}$ .

**Corolario 1.43.** *Toda sucesión dual a una de Wahl se obtiene a partir de  $\{2, 2, 2\}$ , aplicando las operaciones*

- $\{a_1, \dots, a_r\} \mapsto \{2, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r + 1\}$
- $\{a_1, \dots, a_r\} \mapsto \{a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, 2\}$

*Demostración.* Se sigue directamente por la Proposición 1.40, y usando diagramas de Riemenschneider; acá es importante notar que el paso

$$\{a_1, \dots, a_r\} \mapsto \{2, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r + 1\}$$

pasa a ser

$$\{b_1, \dots, b_s\} \mapsto \{b_1 + 1, b_2, \dots, b_s, 2\}$$

en la dual.  $\square$

Esta proposición nos permite definir un índice marcado  $1 \leq k \leq r$  asociado al 2 central de  $\{2, 2, 2\}$ , y según descienda usando las operaciones. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.44.** Sea  $\{a_1, \dots, a_r\}$  una sucesión dual a una de Wahl. Definimos su *centro* como un índice  $1 \leq i \leq r$  elegido de la siguiente manera.

- El centro de  $\{2, 2, 2\}$  es  $i = 2$ .

- Si  $\{a_1, \dots, a_r\}$  tiene centro  $i$ , el centro de  $\{2, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r + 1\}$  es  $i + 1$  y el de  $\{a_1 + 1, a_2, \dots, a_r, 2\}$  es  $i$ .

Esta definición es exhaustiva gracias al Corolario 1.43. Por ejemplo, para

$$\{2, 2, 2\} \mapsto \{2, 2, 2, 3\} \mapsto \{2, 2, 2, 2, 4\},$$

el índice  $k = 4$  marca el centro de  $\{2, 2, 2, 2, 4\}$ . Típicamente subrayaremos la posición marcada por claridad; así, escribimos

$$\{2, 2, 2, \underline{2}, 4\}.$$

De la construcción además es claro que si  $\{a_1, \dots, a_r\}$  tiene índice  $i$  marcado, entonces  $a_i = 2$ .

**Proposición 1.45.** Sea  $\frac{m^2}{ma+1} = [a_1, \dots, a_r]$  y  $k$  su centro. Luego, si

$$\frac{n}{q} = [a_1, \dots, a_{k-1}];$$

entonces

$$\frac{n}{n-q} = [a_r, \dots, a_{k+1}],$$

más aún, tenemos que  $m = n$  y  $a = q$ .

*Demostración.* Utilizaremos el Corolario 1.43. Para  $\{2, 2, 2\}$  no hay nada que probar, y las dos sucesiones consideradas son  $\{2\}$  y  $\{2\}$ .

El procedimiento inductivo agrega un 2 a una de las dos sucesiones y suma un 1 en la última posición de la otra. En diagramas de Riemenschneider, obtenemos dos diagramas simétricos respecto a la diagonal, y así se sigue lo pedido.

Para la otra parte, notemos que si  $q'$  es el inverso multiplicativo de  $q$  módulo  $n$  (elegido de modo que  $1 \leq q \leq n-1$ ), entonces

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{k-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & -q' \\ q & \frac{1-qq'}{n} \end{pmatrix},$$

puesto que la matriz debe tener determinante 1. Así, usando que  $n - q'$  es el inverso multiplicativo de  $n - q$ , podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{k+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & -(n-q') \\ n-q & \frac{1-(n-q)(n-q')}{n} \end{pmatrix}.$$

Podemos así calcular la matriz de  $\{a_1, \dots, a_r\}$  de manera explícita.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & -q' \\ q & \frac{1-qq'}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & -(n-q) \\ n-q' & \frac{1-(n-q)(n-q')}{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n-q' & -n \\ 2q + \frac{1-qq'}{n} & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & -(n-q) \\ n-q' & \frac{1-(n-q)(n-q')}{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n^2 & -(n(n-q)+1) \\ nq+1 & -q(n-q)-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comparando términos, obtenemos  $m = n$  y  $a = q$ , lo que demuestra lo pedido.  $\square$

Por ejemplo, tomando  $m = 7, a = 3$ , podemos calcular

$$\frac{m}{a} = \frac{7}{3} = [3, 2, 2], \quad \frac{m}{m-a} = \frac{7}{4} = [2, 4].$$

Obtenemos así

$$\frac{m^2}{ma+1} = \frac{7^2}{7 \cdot 3 + 1} = [3, 2, 2, \bar{2}, 4, 2],$$

como es posible verificar directamente.

Una de las propiedades más interesantes del índice central definido arriba es que al restar 1 en esa posición obtenemos una fracción que representa a cero. En nuestro ejemplo de arriba,

$$[3, 2, 2, 1, 4, 2] = [3, 2, 1, 3, 2] = [3, 1, 2, 2] = [2, 1, 2] = [1, 1] = 0.$$

**Proposición 1.46.** *Sea  $\{a_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, a_r\}$  una sucesión dual-Wahl. Luego,*

$$[a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_r] = 0.$$

*Demostración.* Utilizaremos fuertemente la Proposición 1.34 para probar que la fracción da cero. Para ello, probaremos algo más fuerte de manera inductiva: con  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_r$  podemos triangular un  $r + 1$ -ágono, agregando 1 en el vértice  $v_0$ .

En primer lugar, es claro que  $[2, 1, 2] = 0$ . Más aún, podemos triangular un cuadrilátero colocando un 1 en el vértice 0.

Supongamos que ya probamos

$$[a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_r] = 0,$$

con 1 en el vértice  $v_0$ . Tenemos así una triangulación de un  $(r + 1)$ -ágono con

$$v_0 = 1, v_1 = a_1, \dots, v_{i-1} = a_{i-1}, v_i = a_i - 1, v_{i+1} = a_{i+1}, \dots, v_r = a_r.$$

Podemos ahora triangular un  $(r+2)$ -ágono de vértices  $P_0, \dots, P_{r+1}$  de la siguiente manera: trazamos un triángulo en  $P_0, P_{r+1}, P_r$ , y el polígono  $P_0 P_1 \dots P_r$  lo triangulamos como el anterior. Esto da una triangulación con  $w_{r+1} = 1$  y

$$w_0 = 2, w_1 = a_1, \dots, w_{i-1} = a_{i-1}, w_i = a_i - 1, w_{i+1} = a_{i+1}, \dots, w_r = a_r + 1.$$

Por la Proposición 1.34, obtenemos que

$$[2, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_{r-1}, a_r + 1] = 0.$$

Ahora bien, gracias al Corolario 1.43, esto demuestra lo pedido.  $\square$

De hecho, esta propiedad caracteriza a las sucesiones dual-Wahl, en el siguiente sentido.

**Proposición 1.47.** Sean  $a_1, \dots, a_r$  mayores o iguales a 2, con  $r \geq 2$ . Supongamos que

$$[a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_r] = 0.$$

Luego, tenemos que  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es dual-Wahl.

*Demostración.* En primer lugar, notemos que  $a_i = 2$ . En otro caso, la fracción  $[a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_r]$  tendría todos sus términos mayores o iguales a 2, lo que contradeciría al Lema 1.3.

Notemos ahora que  $i \neq 1, r$ . En efecto, si  $i = 1$ , tendríamos por lo de arriba que

$$[1, a_2, \dots, a_r] = 0 \Rightarrow 1 = [a_2, \dots, a_r].$$

Pero esto contradice el Lema 1.3. El caso  $i = r$  es análogo; tenemos así que  $2 \leq i \leq r - 1$ .

Si  $[a_1, \dots, a_{i-1}] = \frac{m}{a}$ ,  $[a_r, \dots, a_{i+1}] = \frac{n}{b}$ , podemos hacer el cálculo para la fracción que da cero. Si  $a', b'$  son los inversos de  $a, b$  módulo  $m, n$ , resulta

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{i-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i - 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & -a' \\ a & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & -b \\ b' & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & -a' \\ a & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n - b' & * \\ n & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mn - mb' - a'n & * \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pero la casilla superior izquierda debe ser cero, pues la fracción representa a cero. De este modo,  $mn - mb' - a'n = 0$ . Obtenemos con ello que  $m \mid n$  y  $n \mid m$ , pues  $\text{mcd}(m, a') = \text{mcd}(n, b') = 1$ . De este modo,  $m = n$  y  $a' + b' = m$ . Con ello también  $a + b = m$ , y de este modo

$$[a_1, \dots, a_{i-1}] = \frac{m}{a}, \quad [a_r, \dots, a_{i+1}] = \frac{m}{m - a}.$$

Como  $a_i = 2$ , la Proposición 1.45 demuestra lo pedido.  $\square$

## Capítulo 2

# Preliminares geométricos

Durante todo el capítulo estaremos interesados en superficies normales proyectivas sobre los números complejos. Nuestro mayor interés será comprender singularidades de cociente cíclico sobre superficies; por ello es que no nos restringimos al caso suave.

### 2.1. Números de intersección

**Definición 2.1** ([Bea96, Def I.2]). Sean  $C, D$  dos curvas irreducibles distintas en una superficie suave  $S$ ,  $x \in C \cap D$  un punto,  $\mathcal{O}_x$  el anillo local de  $S$ . Si  $f$  y  $g$  son dos ecuaciones en  $\mathcal{O}_x$  para  $C$  y  $D$  respectivamente, definimos la multiplicidad de intersección de  $C$  y  $D$  en  $x$  como

$$m_x(C \cap D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_x / (f, g).$$

**Definición 2.2** ([Bea96, Def I.3]). Si  $C$  y  $D$  son dos curvas irreducibles distintas en una superficie suave  $S$ , definimos su número de intersección  $C \cdot D$  como

$$C \cdot D := \sum_{x \in C \cap D} m_x(C \cap D).$$

Esta definición puede extenderse para definir un número de intersección entre divisores de  $S$ , módulo equivalencia lineal (cf. [Bea96, Thm I.4]). Podemos hablar así de la *autointersección*  $C^2 = C \cdot C$  de una curva.

Para superficies normales la construcción es debida a Mumford (en [Mum61, §II.(b)]). El cálculo de  $m_x(C \cap D)$  se hace fijando una resolución de singularidades  $S' \rightarrow S$  y definiendo preimágenes de  $C$  y  $D$  en  $S'$  (cf. [Mum61, II.(b).(a, b)]).

### 2.2. Definiciones básicas

**Definición 2.3** ([Bea96, Def III.1]). Una superficie suave  $S$  se dice *reglada* si es birracional a  $\mathbb{P}^1 \times C$ , con  $C$  una curva;  $S$  es *racional* si es birracional a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

**Definición 2.4** ([Bea96, p.20]). Una curva  $C \subseteq S$  se dice una *(-1)-curva* si es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  y cumple  $C^2 = -1$ .

Por la fórmula de adjunción, en tal caso se tiene que  $K \cdot C = -1$ .

Para superficies suaves, este tipo de curvas son claves para obtener un *modelo minimal*. Informalmente, cada vez que aparece una curva de ese estilo proviene del blow-up de un punto suave. Podemos tomar el blow-down y repetir. Este proceso eventualmente termina, pues el número de Picard de la superficie disminuye en 1 por cada blow-down, y es un número positivo (cf. [Bea96, Prop. II.3]). Esto produce una superficie en cierto sentido “más simple” que la original.

Las dos piezas claves del párrafo anterior son las siguientes.

**Teorema 2.5** ([Bea96, Thm. II.17]). *Sea  $S$  una superficie suave,  $C \subseteq S$  una (-1)-curva. Luego, existe una superficie suave  $S'$  y un punto  $P \in S'$  tal que  $S$  es isomorfa al blow-up de  $S'$  en  $P$ , con  $C$  la curva excepcional del blow-up.*

El Teorema 2.5 es conocido como el *criterio de Castelnuovo*. Llamamos al morfismo  $S \rightarrow S'$  que aparece el *blow-down* de la curva  $C$ .

**Teorema 2.6** ([KM98, Thm. 1.29]). *Sea  $S$  una superficie suave. Existe una secuencia de blow-downs  $S \rightarrow S_1 \rightarrow \dots \rightarrow S_n = S'$  tales que  $S'$  satisface exactamente una de las siguientes opciones.*

- (i)  $K_{S'}$  es nef; esto es,  $K_{S'} \cdot C \geq 0$  para toda curva  $C$ .
- (ii)  $S'$  admite un morfismo suave  $S' \rightarrow C$  hacia una curva, cuyas fibras son isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ , y todo morfismo birracional desde  $S'$  es un isomorfismo.
- (iii)  $S'$  es isomorfa a  $\mathbb{P}^2$ .

En el caso (i) decimos que la superficie  $S'$  es un *modelo minimal* para  $S$ . En (ii), las propiedades sobre  $S'$  es que es una superficie *minimal y geoméricamente reglada* (cf. [Bea96, Def. II.15, Def. III.3]).

Para superficies que admiten un modelo minimal tenemos el siguiente resultado, que será clave durante el Capítulo 5.

**Proposición 2.7.** *Sea  $S$  una superficie suave proyectiva tal que  $S$  admite modelo minimal. Si  $C \subseteq S$  es una curva, entonces  $K_S \cdot C \geq -1$ . En particular, si  $C \subseteq S$  es una curva suave proyectiva isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ , necesariamente  $C^2 \leq -1$ .*

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que  $K_S \cdot C \leq -2$ . Consideremos

$$S = S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_n,$$

donde  $S_n$  es minimal y cada  $\sigma_i : S_i \rightarrow S_{i+1}$  es el blow-down de una curva  $E_i \subseteq S_i$ .

Por comodidad, llamemos  $C_1 := C$ . Notemos que  $C_1 \neq E_1$ , en cuanto  $K_{S_1} \cdot C_1 \neq -1$ . Por ello,  $C_2 := \sigma_1(C_1)$  no es un punto, y

$$K_{S_2} \cdot C_2 = K_{S_1} \cdot C_1 - m \leq K_{S_1} \cdot C_1 \leq -2,$$

donde  $m$  es la multiplicidad de  $C_2$  sobre el punto del blow-down. Inductivamente,  $C_{i+1} := \sigma_i(C_i)$  no se contrae, y  $K_{S_i} \cdot C_i < 0$ . Esto contradice que  $K_{S_n}$  es nef, por lo que  $K_S \cdot C \geq -1$ .

En el caso particular de que  $C$  sea suave e isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ , tenemos que

$$K_S \cdot C = -2 - C^2 \leq -2,$$

gracias a la fórmula de adjunción, en cuanto  $g(C) = 0$ . Aplica así la demostración anterior. Esto prueba lo pedido.  $\square$

### 2.3. Singularidades de cociente cíclico

**Definición 2.8.** [Ish18, Def. 7.4.12, Lemma 7.4.13] Una *singularidad de cociente cíclico* es el germen analítico en 0 del cociente de  $\mathbb{C}^2$  por el grupo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle g \rangle$ , con la acción

$$g \cdot (x, y) = (\zeta x, \zeta^q y),$$

para  $\zeta$  raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad y  $\text{mcd}(n, q) = 1$ . En tal caso, denotamos a la singularidad como  $\frac{1}{n}(1, q)$ .

**Definición 2.9.** [Ish18, Def 7.1.14] Una resolución de singularidades  $f : Y \rightarrow X$  de  $X$  se dice *minimal* si para toda resolución de singularidades  $g : Y' \rightarrow X$  existe un único morfismo  $\varphi : Y' \rightarrow Y$  tal que  $g = f \circ \varphi$ .

El resultado que más nos va a interesar respecto a singularidades de cociente cíclico hace referencia a su resolución minimal. Explícitamente, si  $X$  es una superficie proyectiva y  $Q \in X$  es una singularidad de cociente cíclico, podemos preguntarnos cuál es la preimagen de  $Q$  en la resolución minimal  $\tilde{X}$ .

**Proposición 2.10.** [Ish18, Thm. 7.4.16] Sea  $(Q \in X)$  una singularidad de tipo  $\frac{1}{n}(1, q)$  con  $0 < q < n$ , y escribamos  $\frac{n}{q} = [e_1, \dots, e_r]$  la única escritura con  $e_i \geq 2$ . Luego, la resolución minimal de  $X$  tiene un divisor excepcional sobre  $Q$  formado por una cadena de  $r$  curvas  $E_1, \dots, E_r$ , todas isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ , y de autointersección  $E_i^2 = -e_i$ , como se muestra en la Figura 2.1.

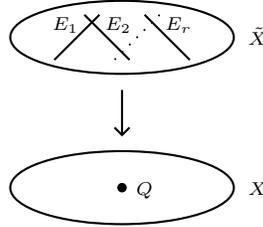


Figura 2.1: Resolución minimal de  $X$ .

**Ejemplo 2.11.** Si tomamos la singularidad  $\frac{1}{7}(1, 3)$ , podemos expandir  $\frac{7}{3} = [3, 2, 2]$ . De este modo, la resolución minimal de la singularidad viene dada por

una cadena de tres curvas racionales  $E_1, E_2, E_3$ , con  $E_1^2 = -3, E_2^2 = -2, E_3^2 = -2$ .

*Observación 2.12.* Supongamos que tenemos una cadena de  $r$  curvas racionales  $E_1, \dots, E_r$ , con autointersecciones  $E_i^2 = -e_i$ . Si hacemos un blow-up entre la curva  $i$  e  $i+1$ , tenemos una cadena  $E_1, \dots, E_i, C, E_{i+1}, \dots, E_r$  (donde identificamos cada curva con su transformada estricta) con  $E_1^2 = -e_1, \dots, E_{i-1}^2 = -e_{i-1}, E_i^2 = -e_i - 1, C^2 = -1, E_{i+1}^2 = -e_{i+1} - 1, \dots, E_r^2 = -e_r$ . De este modo, la lista de  $\{-E_j^2\}$  hizo el cambio

$$\{e_1, \dots, e_r\} \mapsto \{e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + 1, 1, e_{i+1} + 1, \dots, e_r\}.$$

Un argumento análogo aplica para blow-ups en las curvas  $E_1$  o  $E_r$ . De este modo, la definición combinatorial de blow-up coincide con el cambio sobre las autointersecciones de las curvas (cf. Definición 1.20).

Es interesante comentar esto a la luz de la Proposición 1.21. Al realizar un blow-up a la secuencia  $\{e_1, \dots, e_r\}$  es posible cambiar la fracción asociada  $\frac{n}{q}$  por otra  $\frac{n}{q'}$ , con  $q' \equiv q \pmod{n}$ . En tal caso, la acción del grupo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle g \rangle$  no cambia, en cuanto  $\zeta$  era una raíz  $n$ -ésima de la unidad.

**Definición 2.13.** Llamaremos *singularidades de Wahl* a las singularidades de la forma  $\frac{1}{m^2}(1, ma - 1)$ , donde  $0 < a < m$  son coprimos.

Esta definición es consistente con la de sucesión de Wahl, en cuanto la fracción asociada es de la forma  $\frac{m^2}{ma-1}$ .

## 2.4. Discrepancias

En esta sección, tomemos  $n > q$  coprimos, y consideremos en  $X$  la singularidad  $\frac{1}{n}(1, q)$ , junto con  $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$  su resolución minimal. Como sabemos de la Proposición 2.10, aparecen  $r$  curvas excepcionales todas isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ ,  $E_1, \dots, E_r$ , formando una cadena, y con autointersección  $E_i^2 = -b_i$ , de modo que

$$[b_1, \dots, b_r] = \frac{n}{q}.$$

Escribiremos

$$K_{\tilde{X}} \equiv \sigma^* K_X + \sum_{i=1}^r k_i E_i. \quad (2.1)$$

**Definición 2.14** ([KM98, Def. 2.22]). En las circunstancias anteriores, llamamos *discrepancias* a los números  $k_i$ .

Una pregunta obvia es cómo determinar estos valores. Haremos algunos ejemplos simples.

**Ejemplo 2.15.** Si  $q = 1$ , la singularidad es  $\frac{1}{n}(1, 1)$ , y la resolución tiene sólo una curva singular  $E_1$ , con autointersección  $-n$ . Ahora, tenemos que

$$K_{\bar{X}} \cdot E_1 = k_1 E_1^2 = -nk_1,$$

en cuanto la curva  $E_i$  es excepcional, y gracias a (2.1). Por la fórmula de adjunción, esto implica

$$-2 = E_1 \cdot (E_1 + K_{\bar{X}}) = E_1^2 + E_1 \cdot K_{\bar{X}} = -n - nk_1,$$

pues  $E_1 \cong \mathbb{P}^1$  tiene género 0. Al despejar, resulta

$$k_1 = -1 + \frac{2}{n}.$$

**Ejemplo 2.16.** Si  $\frac{n}{q} = [5, 2]$ , tenemos una resolución con dos curvas excepcionales,  $E_1^2 = -5, E_2^2 = -2$ . El mismo argumento de antes muestra que

$$K_{\bar{X}} \cdot E_1 = k_1 E_1^2 + k_2 E_1 \cdot E_2 = -5k_1 + k_2$$

y

$$K_{\bar{X}} \cdot E_2 = k_1 E_1 \cdot E_2 + k_2 E_2^2 = k_1 - 2k_2.$$

Aplicando la fórmula de adjunción en las dos ecuaciones, resulta el sistema

$$\begin{cases} -2 &= -5 - 5k_1 + k_2 \\ -2 &= -2 + k_1 - 2k_2 \end{cases}$$

Al resolver,  $k_1 = -\frac{2}{3}, k_2 = -\frac{1}{3}$ .

Como se observa en los ejemplos, una aplicación de la fórmula de adjunción permite calcular los valores de las discrepancias. En efecto, si tenemos curvas  $E_1, \dots, E_r$  con  $E_i^2 = -c_i$  (y  $r \geq 2$ ), resultan las relaciones

$$-2 = -c_i(1 + k_i) + k_{i-1} + k_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (2.2)$$

donde hemos llamado  $k_0 = k_{r+1} = 0$ . La matriz asociada al sistema es la matriz de autointersección de los  $E_i$ ,

$$\begin{pmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -c_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_n \end{pmatrix},$$

que es invertible. Esto permite resolver y despejar  $k_1, \dots, k_n$ .

Si nos restringimos a singularidades de tipo Wahl en cambio, podemos dar un procedimiento inductivo para calcular estas discrepancias.

**Lema 2.17** ([Ste91, Lemma 3.4]). Sea  $[b_1, \dots, b_r]$  singularidad de Wahl, y supongamos que  $k_i = -\frac{p_i}{q}$ . Llamemos además  $p_0 = 0$ . Luego, la singularidad de Wahl  $[2, b_1, \dots, b_{r-1}, b_r + 1]$  cumple

$$k'_i = -\frac{p_1 + p_i}{q + p_1} \quad (0 \leq i \leq r).$$

*Demostración.* Por la ecuación (2.2), tenemos que si  $1 \leq i \leq r - 1$ , entonces

$$-2 = -b_i \left(1 - \frac{p_i}{q}\right) - \frac{p_{i-1}}{q} - \frac{p_{i+1}}{q},$$

donde nuevamente hemos denotado  $p_{r+1} = 0$ . Resulta de acá

$$-2 = -b_i \left(1 - \frac{p_1 + p_i}{q + p_1}\right) - \frac{p_1 + p_{i-1}}{q + p_1} - \frac{p_1 + p_{i+1}}{q + p_1}.$$

Para  $i = r$ , el mismo argumento muestra que

$$-2 = -b_r \left(1 - \frac{p_1 + p_r}{q + p_1}\right) - \frac{p_1 + p_{r-1}}{q + p_1} - \frac{p_1}{q + p_1}$$

o, al reagrupar,

$$= -(b_r + 1) \left(1 - \frac{p_1 + p_r}{q + p_1}\right) - \frac{p_1 + p_{r-1}}{q + p_1}.$$

Por último, es claro que

$$-2 = -2 \left(1 - \frac{p_1}{q + p_1}\right) - \frac{p_1 + p_1}{q + p_1}.$$

Esto muestra que los valores  $-\frac{p_1 + p_i}{q + p_1}$  cumplen lo pedido.  $\square$

Por supuesto, hay un resultado análogo para  $[b_1 + 1, \dots, b_r, 2]$ . Para llevar esto a un resultado práctico, definiremos unos números auxiliares.

**Definición 2.18.** Dada una singularidad de Wahl  $[b_1, \dots, b_r]$ , asignaremos valores  $\delta_1, \dots, \delta_r$  inductivamente.

- Si  $r = 1$ , asignamos  $\delta_1 = 1$ .
- Si  $[b_1, \dots, b_r]$  tiene asignado  $\delta_1, \dots, \delta_r$ , a  $[2, b_1, \dots, b_r + 1]$  le asignamos  $\delta_1 + \delta_r, \delta_1, \dots, \delta_r$ , y a  $[b_1 + 1, \dots, b_r, 2]$  le asignamos  $\delta_1, \dots, \delta_r, \delta_1 + \delta_r$ .

Llamaremos a  $\delta_i$  los números  $\delta$  asociados a  $[b_1, \dots, b_r]$ .

En general, colocaremos arriba de cada número su  $\delta$  asociado. Así, tenemos por ejemplo

$$\begin{array}{c} 1 \\ [4], \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ [5, 2]. \end{array}$$

**Ejemplo 2.19.** Calcularemos los números asociados a  $[3, 6, 2, 3, 2]$ . A partir del cálculo de arriba, tenemos

$$[\overset{1}{5}, \overset{2}{2}] \rightarrow [\overset{1}{6}, \overset{2}{2}, \overset{3}{2}] \rightarrow [\overset{4}{2}, \overset{1}{6}, \overset{2}{2}, \overset{3}{3}] \rightarrow [\overset{4}{3}, \overset{1}{6}, \overset{2}{2}, \overset{3}{3}, \overset{7}{2}].$$

**Proposición 2.20.** Sea  $[b_1, \dots, b_r]$  singularidad de Wahl,  $\delta_1, \dots, \delta_r$  los  $\delta$  asociados. Luego, tenemos que

$$k_i = -1 + \frac{\delta_i}{\delta_1 + \delta_r}.$$

*Demostración.* La estrategia es utilizar la Proposición 1.40, junto con el Lema 2.17 para el paso inductivo.

Si  $r = 1$ , tenemos que  $\delta_1 = 1$ . Acá,

$$-1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_1} = -\frac{1}{2},$$

que concuerda con lo calculado en el Ejemplo 2.15.

Supongamos así que ya probamos

$$k_i = -1 + \frac{\delta_i}{\delta_1 + \delta_r}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

El Lema 2.17 nos dice que para  $[2, b_1, \dots, b_r + 1]$  tenemos

$$k'_i = -\frac{p_1 + p_i}{q + p_1}.$$

Acá  $p_0 = 0, p_i = \delta_1 + \delta_r - \delta_i$  y  $q = p_1 + p_r = \delta_1 + \delta_r$ . Así,

$$k'_0 = -\frac{p_1}{q + p_1} = -1 + \frac{q}{q + \delta_r},$$

junto con

$$k'_i = -\frac{p_1 + p_i}{q + p_1} = -1 + \frac{q - p_i}{q + \delta_r} = -1 + \frac{\delta_i}{q + \delta_r}.$$

Pero  $\delta'_i = \delta_i, \delta_0 = \delta_1 + \delta_r$  son los correspondientes números  $\delta$  asociados a  $[2, b_1, \dots, b_r + 1]$ . De este modo,

$$k'_i = -1 + \frac{\delta'_i}{\delta'_0 + \delta'_r},$$

que prueba el paso inductivo. Esto demuestra lo pedido gracias a la Proposición 1.40.  $\square$

*Observación 2.21.* Si  $[b_1, \dots, b_r]$  es singularidad de Wahl, la Proposición 2.20 muestra que

$$k_1 + k_r = -2 + \frac{\delta_1 + \delta_r}{\delta_1 + \delta_r} = -1.$$

Además, necesariamente  $-1 < k_i < 0$  para todo  $i$ , en cuanto  $\delta_1 + \delta_r > \delta_i$  para todo  $i$ .

**Ejemplo 2.22.** Continuaremos el Ejemplo 2.19, donde calculamos

$$\left[ \overset{4}{3}, \overset{1}{6}, \overset{2}{2}, \overset{3}{3}, \overset{7}{2} \right].$$

Con la proposición anterior, tenemos que

$$k_1 = -1 + \frac{4}{11}, \quad k_2 = -1 + \frac{1}{11}, \quad k_3 = -1 + \frac{2}{11}, \quad k_4 = -1 + \frac{3}{11}, \quad k_5 = -1 + \frac{7}{11}.$$

Como última aplicación de estos valores  $\delta$  veremos cómo recuperar la fracción  $\frac{m^2}{ma-1}$  a partir de ellos.

**Proposición 2.23.** *Sea  $[b_1, \dots, b_r] = \frac{m^2}{ma-1}$  una fracción de Wahl,  $\delta_1, \dots, \delta_r$  los números  $\delta$  asociados. Luego,*

$$m = \delta_1 + \delta_r, a = \delta_1.$$

*Demostración.* Utilizaremos la Proposición 1.40. En primer lugar,

$$[4] = \frac{2^2}{2 \cdot 1 - 1},$$

y acá  $\delta_1 = 1$ , donde es directo verificar lo pedido.

Supongamos que ya verificamos  $m = \delta_1 + \delta_r, a = \delta_1$  para

$$[b_1, \dots, b_r] = \frac{m^2}{ma-1}.$$

De la Observación 1.41 tenemos que

$$[2, b_1, \dots, b_r + 1] = \frac{(2m-a)^2}{(2m-a)m-1}.$$

Ahora bien, acá  $\delta'_r = \delta_r = m - a, \delta'_0 = \delta_1 + \delta_r = m$ . Así,

$$\delta'_0 + \delta'_r = 2m - a, \quad \delta'_0 = m$$

que satisface lo pedido. El otro caso es análogo.

Por la construcción recursiva de la Proposición 1.40, esto demuestra lo pedido.  $\square$

**Ejemplo 2.24.** Continuamos el Ejemplo 2.19, donde

$$\left[ \overset{4}{3}, \overset{1}{6}, \overset{2}{2}, \overset{3}{3}, \overset{7}{2} \right].$$

La proposición anterior nos dice que

$$[3, 6, 2, 3, 2] = \frac{11^2}{11 \cdot 4 - 1} = \frac{121}{43},$$

como no es difícil verificar directamente.

## Capítulo 3

# P-resoluciones extremales

Las P-resoluciones extremales son un objeto clave para construir un proceso MMP en familias de superficies. Este capítulo está dedicado a sus aspectos combinatoriales, siguiendo principalmente [HTU17, Ch. 4].

### 3.1. Definiciones básicas

**Definición 3.1** ([HTU17, p.322]). Sean  $0 < \Omega < \Delta$  con  $\text{mcd}(\Omega, \Delta) = 1$ ,  $(Q \in Y)$  la singularidad de cociente cíclico  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$ . Una *P-resolución extremal* de  $(Q \in Y)$  es una resolución parcial  $f_0^+ : (C^+ \subset X^+) \rightarrow (Q \in Y)$  tal que  $X^+$  tiene solamente singularidades de Wahl,  $C^+$  es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ , y  $K_{X^+}$  es relativamente amplio.

Siguiendo [HTU17, p.322], la superficie  $X^+$  tiene a lo más dos singularidades de Wahl  $\frac{1}{m_i^2}(1, m_i a_i - 1)$ ,  $i = 1, 2$ , con

$$\frac{m_1^2}{m_1 a_1 - 1} = [e_1, \dots, e_{r_1}], \quad \frac{m_2^2}{m_2 a_2 - 1} = [f_1, \dots, f_{r_2}]$$

y

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_{r_2}, \dots, f_1, c, e_1, \dots, e_{r_1}].$$

Acá,  $-c$  es la autointersección de la transformada estricta de la curva  $C^+$  en la resolución minimal de  $X^+$ . Si alguna de las singularidades resulta ser suave, definimos  $m_i = a_i = 1$ .

Definimos  $\delta = cm_1 m_2 - m_1 a_2 - m_2 a_1$ . Con ello,

$$K_{X^+} \cdot C^+ = \frac{\delta}{m_1 m_2} > 0, \quad C^+ \cdot C^+ = \frac{-\Delta}{m_1^2 m_2^2} < 0.$$

**Proposición 3.2** ([HTU17, Prop 4.1]). Sean  $\Delta, \Omega$  como antes y escribamos  $\frac{\Delta}{\Delta - \Omega} = [c_1, \dots, c_s]$ . Hay una correspondencia biyectiva entre resoluciones extremales y pares  $1 \leq \alpha < \beta \leq s$  tales que

$$0 = [c_1, \dots, c_{\alpha-1}, c_\alpha - 1, c_{\alpha+1}, \dots, c_{\beta-1}, c_\beta - 1, c_{\beta+1}, \dots, c_s],$$

de modo que

$$\frac{m_2}{a_2} = [c_1, \dots, c_{\alpha-1}], \quad \frac{m_1}{a_1} = [c_s, \dots, c_{\beta+1}].$$

Acá, si  $\alpha = 1$  o  $\beta = s$ , los puntos correspondientes son suaves. Además, si  $\alpha + 1 = \beta$ , tenemos que  $\delta = 1$ ; en caso contrario,

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = [c_{\alpha+1}, \dots, c_{\beta-1}]$$

para algún  $0 < \varepsilon < \delta$ .

**Ejemplo 3.3.** Tomemos  $\Delta = 36, \Omega = 13$ . Tenemos

$$\frac{\Delta}{\Delta - \Omega} = \frac{36}{23} = [2, 3, 2, 2, 4].$$

Tenemos acá dos parejas que generan cero, a saber

$$0 = [2, 2, 2, 1, 4] = [2, 3, 1, 2, 3].$$

Para la primera, tenemos  $\alpha = 2, \beta = 4$ . Con ello,

$$\frac{m_1}{a_1} = [4] = \frac{4}{1}, \quad \frac{m_2}{a_2} = [2] = \frac{2}{1}.$$

Además,  $\delta = 2$ . Con esto podemos despejar el valor de  $c$  como

$$c = \frac{\delta + m_1 a_2 + m_2 a_1}{m_1 m_2} = \frac{2 + 2 + 4}{8} = 1.$$

Como

$$\frac{m_1^2}{m_1 a_1 - 1} = \frac{16}{3} = [6, 2, 2], \quad \frac{m_2^2}{m_2 a_2 - 1} = \frac{4}{1} = [4],$$

podemos escribir

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [4, 1, 6, 2, 2],$$

que denotaremos como  $[4] - 1 - [6, 2, 2]$ . El segundo par satisface  $\alpha = 3, \beta = 1$ . Con ello,  $m_1 = a_1 = 1$  (que corresponde a un punto suave), y

$$\frac{m_2}{a_2} = [2, 3] = \frac{5}{3}.$$

Así, uno de los puntos es suave, y el otro es

$$\frac{m_2^2}{m_2 a_2 - 1} = \frac{25}{9} = [3, 5, 2].$$

Por otro lado, nuevamente  $\delta = 2$ . Así, podemos despejar nuevamente  $c$ , resultando

$$c = \frac{\delta + m_1 a_2 + m_2 a_1}{m_1 m_2} = \frac{2 + 3 + 5}{5} = 2.$$

Obtenemos con ello

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [3, 5, 2] - 2.$$

Esta proposición muestra que para entender las P-resoluciones extremales, basta entender dónde restar para obtener una fracción que representa a cero. Es este el enfoque seguido en [HTU17], que profundizaremos en las siguientes secciones. El plan así es dar demostraciones nuevas de dos resultados en [HTU17]: hay a lo más dos P-resoluciones, y en caso de haber dos comparten el valor de  $\delta$ .

## 3.2. Autointersección de la curva excepcional

En esta sección veremos que si una singularidad  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  admite dos P-resoluciones extremales, ellas deben tener valores similares de la autointersección de su curva excepcional. Más precisamente, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.** *Sea  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  una singularidad de cociente cíclico, con*

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [b_1, \dots, b_r]$$

*su resolución minimal,  $b_i \geq 2$ . Supongamos que la singularidad admite una P-resolución extremal con  $l$  singularidades (donde  $l = 1$  o  $l = 2$ ) y la autointersección de su curva excepcional (en la resolución minimal) es  $-c$ . Luego, se tiene que*

$$c = \sum_{i=1}^r b_i - 3r + 3 - l.$$

Una consecuencia directa es que de haber dos P-resoluciones extremales con igual cantidad de singularidades, la autointersección de las curvas excepcionales es la misma. El siguiente ejemplo muestra qué ocurre cuando hay una cantidad distinta de singularidades.

**Ejemplo 3.5.** Tomemos  $\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{91}{25} = [4, 3, 5, 2]$ . El teorema nos dice que de haber una P-resolución extremal con una singularidad, la autointersección de la curva excepcional es

$$(4 + 3 + 5 + 2) - 3 \cdot 4 + 3 - 1 = 14 - 12 + 2 = 4.$$

Si hubiera una con dos singularidades, en cambio, la autointersección sería

$$(4 + 3 + 5 + 2) - 3 \cdot 4 + 3 - 2 = 14 - 12 + 1 = 3.$$

De hecho, ambos casos ocurren, pues

$$[4, 3, 5, 2] = 4 - [3, 5, 2] = [4] - 3 - [5, 2].$$

Para la demostración necesitamos el siguiente resultado.

**Proposición 3.6.** *Dada una singularidad de cociente cíclico  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$ , con*

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [b_1, \dots, b_r]$$

su resolución minimal, y

$$[f_{r_2}, \dots, f_1] - c - [e_1, \dots, e_{r_1}]$$

una *P-resolución extremal*, entonces la cadena  $[f_{r_2}, \dots, f_1, c, e_1, \dots, e_{r_1}]$  se obtiene de  $[b_1, \dots, b_r]$  sin hacer blow-ups en puntos que tocan sólo a una curva (esto es, sobre las curvas  $b_1$  o  $b_r$ ).

*Demostración.* Es consecuencia directa de los Lemas 3.13 y 3.14 de [KSB88]. El primer lema construye una resolución *maximal* sobre el germen de una singularidad de cociente cíclico haciendo blow-ups solamente en intersecciones de curvas, y el segundo lema muestra que dicha resolución domina a todas las *P-resoluciones* (en particular, a las *P-resoluciones extremales*).  $\square$

*Demostración.* (del Teorema 3.4) Para una cadena  $[c_1, \dots, c_t]$ , estudiemos con atención la cantidad

$$\sum_{i=1}^t c_i - 3t.$$

Originalmente, esa cantidad es

$$\sum_{i=1}^t b_i - 3r.$$

Notemos que cada vez que hacemos un blow-up en una intersección de dos curvas, la suma aumenta en 3 (pues aparece una curva  $-1$  y la autointersección de las dos que la tocan cambia en  $-1$ ), mientras que el largo  $r$  aumenta en 1. De este modo, esa cantidad es invariante al hacer blow-ups en intersecciones de curvas.

Si

$$[f_{r_2}, \dots, f_1] - c - [e_1, \dots, e_{r_1}]$$

es una *P-resolución extremal* sobre la singularidad original, tenemos así que

$$\left( \sum_{i=1}^{r_1} e_i + c + \sum_{j=1}^{r_2} f_j \right) - 3(r_1 + r_2 + 1) = \sum_{i=1}^r b_i - 3r,$$

gracias a la discusión anterior y a la Proposición 3.6. Ahora bien, como

$$[e_1, \dots, e_{r_1}], \quad [f_1, \dots, f_{r_2}]$$

son singularidades de Wahl, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{r_1} e_i = 3r_1 + 1, \quad \sum_{j=1}^{r_2} f_j = 3r_2 + 1.$$

Reemplazando, obtenemos que

$$c - 1 = \sum_{i=1}^r b_i - 3r,$$

que es equivalente a lo pedido. El caso con una singularidad es análogo, que prueba lo solicitado.  $\square$

*Observación 3.7.* Si  $\frac{\Delta}{\Omega} = [b_1, \dots, b_r]$  cumple que  $\sum_{i=1}^r b_i \leq 3r-1$ , el Teorema 3.4 implica que no hay P-resoluciones extremales. Si  $\sum_{i=1}^r b_i = 3r$ , hay dos opciones para posibles P-resoluciones extremales: o bien tienen una singularidad con una curva de autointersección  $-2$ , o bien tienen dos singularidades con una curva de autointersección  $-1$ .

En general, si  $\sum_{i=1}^r b_i = 3r+n$  con  $n \geq 0$ , tenemos como opción que haya una singularidad con una curva de autointersección  $-(n+2)$ , o dos singularidades con una curva de autointersección  $-(n+1)$ .

### 3.3. Sucesiones WW

**Definición 3.8** ([HTU17, Def 4.5]). Una sucesión  $\{a_1, \dots, a_r\}$ ,  $a_i \geq 2$  es de *tipo WW* si existen dos posiciones  $\alpha < \beta$  tales que

$$[a_1, \dots, a_\alpha - 1, \dots, a_\beta - 1, \dots, a_r] = 0.$$

Es interesante hacer el paralelo con la Proposición 1.47. Cuando existen dos posiciones, necesariamente caemos en sucesiones dual-Wahl; más aún, la posición de la barra queda determinada automáticamente (y por ello es única). En el caso de las sucesiones WW es mucho más complicado.

**Ejemplo 3.9.** La sucesión  $\{2, 2, 3, 2, 2\}$  es de tipo WW, pues

$$[1, 2, 3, 1, 2] = 0.$$

Más aún, existe otra pareja de índices  $\alpha, \beta$  que cumplen la condición, en cuanto

$$[2, 1, 3, 2, 1] = 0$$

Típicamente, para poder distinguir estas posiciones utilizaremos subrayados; por ejemplo, anotaremos

$$\{\underline{2}, \underline{2}, 3, \underline{2}, \underline{2}\}.$$

Notemos que, luego de restar en ambas posiciones, la sucesión  $\{a_1, \dots, a_\alpha - 1, \dots, a_\beta - 1, \dots, a_r\}$  representa a cero; así, podemos asociarle una triangulación. Llamemos  $v_1, \dots, v_r$  a los valores de arriba, así, según la Observación 1.33, necesariamente el vértice faltante satisface

$$v_0 + \dots + v_r = 3(r-1) \Rightarrow v_0 = 3r - 1 - \sum_{i=1}^r a_i.$$

Esto nos dice que  $v_0 =: a_0$  depende sólo de  $a_1, \dots, a_r$ . Diremos así que la sucesión de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_r$  es *compatible* con  $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$ .

Seguindo las ideas y notación de [HTU17, p. 325], tenemos dos posibilidades

(A)  $a_0 = v_0 > 1$ .

(B)  $a_0 = v_0 = 1$ .

El caso (A) es bien entendido: ya que toda sucesión de vértices de una triangulación debe tener dos valores 1 (por la Proposición 1.31), necesariamente  $a_\alpha = a_\beta = 2$ .

Veamos qué podemos hacer en (B). Si  $a_0 = v_0 = 1$ , es claro que no podemos restar en ese vértice. Más aún, para una triangulación necesariamente debe estar trazada la diagonal  $\overline{P_1 P_r}$  (pues en otro caso  $v_0 > 1$ ). Por ello, el problema cae en entender cómo triangular

$$a_1 - 1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_r - 1.$$

Si  $a_1 - 1, a_r - 1 \geq 2$ , caemos en el caso (A). Si alguno de los dos es un 1 caemos en (B) nuevamente. Por último, si ambos son 1, la Proposición 1.31 nos muestra que  $r = 3$  y no hay nada que probar.

En los resultados de este capítulo las demostraciones comenzarán suponiendo que estamos en (A), para posteriormente ver cómo se extienden a (B).

Por completitud, veamos un ejemplo de cómo se ve el caso (B)

**Ejemplo 3.10.** La sucesión  $\{\overline{3}, 2, 2, \overline{2}, 4\}$  es de tipo WW, pues

$$[2, 2, 2, 1, 4] = 0.$$

Acá tenemos que  $a_0 = 1$ , y la triangulación se muestra en la figura siguiente.

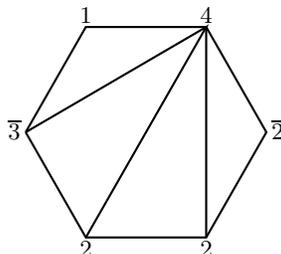


Figura 3.1: Un ejemplo WW, caso (B)

En este caso era necesario hacer sólo un corte para caer en el caso (A).

*Observación 3.11.* Supongamos que  $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$  está en el caso (B), con  $a_0 = 1$ . Supongamos adicionalmente que

$$[a_1 - 1, a_2, \dots, a_q - 1, \dots, a_r] = 0;$$

esto es, un par posible de índices es  $1, q$ . Afirmando en estas condiciones que  $a_1 > 2$  o  $r = 2$ ; en otro caso, tendríamos una triangulación de un polígono de  $r + 1 \geq 4$  con dos números 1 consecutivos. De esta manera, al cortar en el vértice asociado a  $a_0$ , el vértice marcado  $a_1$  no puede ser 1, y con ello no vamos a poder cortarlo. Esto muestra que la cantidad de parejas marcadas no cambia al realizar un corte; más aún, muestra que los lugares donde se resta no están asociadas a números donde se hizo blow-up.

### 3.4. Sucesiones indicadoras

**Definición 3.12.** Sea  $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$  una sucesión de números naturales,  $a_i \geq 2$ . Asociaremos a ella una sucesión de números cero y uno, que llamaremos *sucesión indicadora*, de la siguiente manera: colocaremos  $r + 1$  números uno; entre el  $i$ -ésimo 1 y el  $(i + 1)$ -ésimo 1 colocaremos  $a_i - 2$  ceros. Al final añadimos  $a_r - 2$  ceros.

**Ejemplo 3.13.** Si  $\{2, 3, 4, 2, 3\}$  es nuestra sucesión original, la sucesión indicadora asociada es  $\{1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0\}$ .

*Observación 3.14.* Pensaremos tanto la sucesión  $\{a_0, \dots, a_r\}$  como la sucesión indicadora asociada como indexadas cíclicamente. De esta manera, los ceros agregados al final pasan a estar entre el  $r$  ésimo y el  $(r + 1)$ -ésimo número 1.

Nuestra primera meta es entender qué significa esto para sucesiones WW. Siempre trabajaremos con sucesiones  $\{a_0, \dots, a_r\}$  de suma  $3r - 3$ ; así, conocer  $\{a_1, \dots, a_r\}$  determina  $a_0$ . Supondremos adicionalmente que estamos en el caso (A).

**Proposición 3.15** ([HTU17, p. 326]). *Sea  $\{a_1, \dots, a_r\}$  de tipo WW, con  $\alpha < \beta$  sus dos índices marcados. Sea  $a_0$  como antes, y supongamos adicionalmente que  $a_0 > 1$ . Luego,*

$$\{a_{\alpha+1}, \dots, a_r, a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}\}$$

*es dual-Wahl.*

*Demostración.* Notemos que  $\{a_{\alpha+1}, \dots, a_r, a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}\}$  tiene todas sus entradas mayores o iguales a 2, y al restar 1 en una de ellas, da cero. En efecto, esto se sigue del hecho que  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es de tipo WW, por lo que

$$a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}, \dots, a_{\beta-1}, \dots, a_r$$

son números asociados a una triangulación. Obtenemos así que

$$[a_{\alpha+1}, \dots, a_{\beta-1}, \dots, a_r, a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}] = 0$$

gracias a la Proposición 1.34. Ahora bien, la Proposición 1.47 nos dice que la sucesión pedida es dual-Wahl, lo que prueba lo pedido.  $\square$

Esta proposición muestra que tenemos un algoritmo para producir sucesiones WW (cf. [HTU17, p. 326]). Basta tomar una sucesión dual-Wahl  $\{a_1, \dots, a_r\}$  con vértice marcado  $i$ ; agregamos un 2, y eliminamos alguno de los números (que no sea  $a_i$  ni el 2). Colocando barras en  $a_i$  y en el 2 obtenemos nuestra sucesión. Por ejemplo, tomamos la sucesión

$$[3, 2, 2, \bar{2}, 4, 2].$$

Agregamos un 2 nuevo, y borramos el 2 en la segunda posición. Resulta así

$$[2, \bar{2}, 4, 2, \bar{2}, 3].$$

Esto produce una sucesión WW

Describamos ahora este procedimiento desde el punto de vista de las sucesiones indicadoras. Podemos comenzar escribiendo una sucesión  $\overline{1}, \overline{1}$ ; posteriormente, podemos agregar un 1 a un extremo y un 0 al otro extremo. Por ejemplo, vamos obteniendo

$$\{\overline{1}, \overline{1}\} \rightarrow \{0, \overline{1}, \overline{1}, 1\} \rightarrow \{1, 0, \overline{1}, \overline{1}, 1, 0\} \rightarrow \{1, 1, 0, \overline{1}, \overline{1}, 1, 0, 0\} \rightarrow \dots$$

Agregamos así  $\overline{1}, \overline{1}$  al final de la sucesión. La sucesión indicadora así obtenida corresponde a una sucesión  $a_0, \dots, a_r$  de tipo WW, donde las posiciones  $\alpha < \beta$  provienen de los pares 1, 1 con una barra arriba. Esto se justifica gracias al Corolario 1.43 y la Proposición 3.15.

La ventaja de trabajar así es que podemos traducir los problemas para sucesiones WW en problemas de sucesiones indicadoras. Por ello, será importante tener la siguiente definición.

**Definición 3.16.** Sea  $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$  una sucesión indicadora. Diremos que la sucesión es de *tipo WW* si proviene del procedimiento anterior. Llamaremos  $t, t'$  los dos índices tales que  $e_t, e_{t+1}$  y  $e_{t'}, e_{t'+1}$  son los pares de unos con una línea encima.

Estamos abusando un poco de la notación al llamar a estas sucesiones también de tipo WW; no obstante, la correspondencia de arriba hace que esto sea natural. Además, el contexto dejará claro si la sucesión es indicadora o no.

**Ejemplo 3.17.** La sucesión

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

es de tipo WW, por ejemplo, con índices  $t = 0, t' = 9$ .

*Observación 3.18.* Si una sucesión es indicadora,  $n = 2m$  es un número par, en cuanto el procedimiento de arriba siempre genera números pares. Además,  $t' = t + m$ ; así, bastará llevar registro solamente de  $t$ .

### 3.5. Índices cruzados

La última observación de la sección anterior es más interesante de lo que parece. Si  $t_1, t'_1$  y  $t_2, t'_2$  son dos pares de índices especiales para la sucesión indicadora  $\{e_0, \dots, e_{2m-1}\}$  de tipo WW, tenemos que  $t'_1 = t_1 + m$  y  $t'_2 = t_2 + m$ . Esto dice algo de las sucesiones (usuales) de tipo WW.

**Proposición 3.19.** Si  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es una sucesión de tipo WW, y  $0 \leq p_1 < q_1 \leq r - 1, 0 \leq p_2 < q_2 \leq r - 1$  son dos pares de índices que la vuelven una fracción que representa a cero, entonces los índices con 1 y 2 van intercalados; más precisamente, tenemos que  $p_1 < p_2 < q_1 < q_2$  o  $p_2 < p_1 < q_2 < q_1$ .

*Demostración.* Comenzaremos suponiendo  $a_0 > 1$ ; esto es, que estamos en el caso (A). Gracias a la correspondencia, basta demostrar esto para la sucesión indicadora  $\{e_0, \dots, e_{2m-1}\}$  asociada. Pero acá es directo: si  $t_1, t'_1, t_2, t'_2$  corresponden a  $p_1, q_1, p_2, q_2$ , entonces  $t_1 - t'_1 = m$  (quizá módulo  $2m$ ), y así son vértices opuestos.

Para el caso (B), haciendo suficientes blow-down caemos en el caso (A) (acá estamos haciendo implícitamente uso de la Observación 3.11, en cuanto la pareja que la vuelve cero no puede estar sobre los blow-up). La demostración de arriba aplica, y es claro que el orden no cambia al hacer blow-up. Esto demuestra lo pedido.  $\square$

**Corolario 3.20.** *Si una singularidad  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  admite una P-resolución extremal con  $\delta = 1$ , no hay una segunda P-resolución extremal.*

*Demostración.* Como  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  admite una P-resolución extremal, la Proposición 3.2 permite encontrar dos índices  $\alpha < \beta$  sobre la fracción dual

$$\frac{\Delta}{\Delta - \Omega} = [c_1, \dots, c_s]$$

tales que

$$[c_1, \dots, c_\alpha - 1, \dots, c_\beta - 1, \dots, c_s] = 0.$$

Ahora bien, necesariamente  $\alpha + 1 = \beta$ , pues  $\delta = 1$ . Con ello, si hubiera otra P-resolución extremal (y otro par  $\alpha', \beta'$ ), no podrían ir intercalados según la proposición anterior. Esto prueba lo pedido.  $\square$

### 3.6. A lo más dos pares

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 3.21** ([HTU17, Thm 4.3]). *Dada una secuencia  $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$  de tipo WW, existen a lo más dos pares de índices  $p < q$  tales que  $[a_1, \dots, a_p - 1, \dots, a_q - 1, \dots, a_r] = 0$ .*

*Demostración.* Para el caso (A), basta demostrar el resultado equivalente para sucesiones indicadoras. Sea  $\{e_0, \dots, e_{2m-1}\}$  una sucesión indicadora de tipo WW, y digamos que  $t, t + m$  es una posición marcada para dicha sucesión.

Supongamos primero que  $m > 2$ . El método de construcción nos dice que

$$e_t = e_{t+1} = 2, \quad e_{t-1} + e_{t+2} = e_{t-2} + e_{t+3} = \dots = 1, \quad e_{t-m} + e_{t+1+m} = 2. \quad (3.1)$$

Tenemos así la fórmula

$$e_j = \begin{cases} 2 - e_{2t+1-j}, & j = r, r+1, r+m, r+m+1; \\ 1 - e_{2t+1-j}, & j \neq r, r+1, r+m, r+m+1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Igual que en [HTU17, p. 327], intentaremos asociar una suma de Gauss a esta expresión. No obstante, será necesario trabajar con una sucesión modificada, en

cuanto para nosotros  $t$  y  $t + m$  son dos índices que definen la misma pareja. Definimos así

$$f_j = \frac{e_j + e_{j+m}}{2}.$$

Pensaremos en  $f_j$  como indexada por  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Tenemos así la relación

$$f_j = \begin{cases} 2 - f_{2t+1-j}, & j = r, r+1; \\ 1 - f_{2t+1-j}, & j \neq r, r+1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Sea  $\mu$  una raíz  $m$ -ésima primitiva de la unidad, y

$$F = \sum_{j=0}^{m-1} \mu^j f_j;$$

acá es directo notar que

$$\overline{F} = \sum_{j=0}^{m-1} \mu^{-j} f_j.$$

Multiplicando el sistema (3.3) por  $\mu^j$  y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j=0}^{m-1} \mu^j (1 - \mu^j f_{2t+1-j}) + \mu^t + \mu^{t+1} \\ &= -\mu^{2t+1} \sum_{j=0}^{m-1} \mu^{j-2t-1} f_{2t+1-j} + \mu^t(\mu + 1) \\ &= -\mu^{2t+1} \overline{F} + \mu^t(\mu + 1). \end{aligned}$$

Si llamamos  $u = \mu^t$ , tenemos así la ecuación

$$u^2 \cdot \mu \overline{F} - u(\mu + 1) + F = 0,$$

de grado al menos 1, en cuanto  $\mu \neq -1$  (al ser  $m > 2$ ). Se sigue que hay a lo más dos valores de  $t$  que cumplen lo buscado.

Falta hacer el caso  $m = 2$ . En ese caso, la sucesión indicadora es evidentemente  $\{1, 1, 1, 1\}$ , que corresponde a la sucesión de tipo WW  $\{2, 2, 2, 2\}$ . Resulta directo que hay sólo dos parejas.

Para el caso (B), podemos hacer blow-down hasta llegar al caso (A) y usar la demostración de arriba para notar que hay a lo más dos parejas en la sucesión sin números 1. Con ello, la Observación 3.11 nos garantiza que la cantidad de parejas es la misma entre ambas sucesiones, y por ello es a lo más dos.  $\square$

### 3.7. Iguales numeradores

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado

**Teorema 3.22** ([HTU17, Thm 4.4]). *Dada una secuencia  $\{a_0, \dots, a_r\}$  de tipo  $WW$ , si existen dos pares  $p_1 < q_1, p_2 < q_2$  tales que*

$$[a_1, \dots, a_{p_i} - 1, \dots, a_{q_i} - 1, \dots, a_r] = 0,$$

*entonces las fracciones*

$$[a_{p_i+1}, \dots, a_{q_i-1}] = \frac{\delta_i}{\epsilon_i}$$

*cumplen que  $\delta_1 = \delta_2$ .*

Nos restringiremos primero al caso (A). Gracias a la Proposición 3.15, necesariamente tenemos que  $a_{q_j+1}, a_{q_j+2}, \dots, a_{q_j-1}$  es dual a una sucesión de Wahl. De esta manera, la Proposición 1.45 nos asegura que

$$\frac{\delta_i^2}{\delta_i \lambda_i + 1} = [a_{q_i+1}, a_{q_i+2}, \dots, a_r, a_0, \dots, a_{q_i-1}],$$

para algún  $0 < \lambda_i < \delta_i$  con  $(\delta_i, \lambda_i) = 1$ . Más aún, notemos que

$$(\delta_i \lambda_i + 1)(\delta_i(\delta_i - \lambda_i) + 1) = \delta_i^2 \lambda_i (\delta_i - \lambda_i) + \delta_i^2 + 1 \equiv 1 \pmod{\delta_i^2},$$

y de esta manera podemos armar la matriz asociada a  $\{a_{q_i+1}, a_{q_i+2}, \dots, a_{q_i-1}\}$  como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{q_i+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{q_i+2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{q_i-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_i^2 & -\delta_i(\delta_i - \lambda_i) - 1 \\ \delta_i \lambda_i + 1 & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El hecho que la matriz deba tener determinante 1 nos asegura que la entrada faltante debe ser  $-\lambda_i(\delta_i - \lambda_i) - 1$ . Para la demostración del teorema utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 3.23.** *En las condiciones anteriores, tenemos que  $\delta_i^2 - 2$  es la traza de la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{q_i+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{q_i+2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{q_i} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Demostración.* El cálculo de arriba muestran que la matriz es

$$\begin{pmatrix} \delta_i^2 & -\delta_i(\delta_i - \lambda_i) - 1 \\ \delta_i \lambda_i + 1 & -\lambda_i(\delta_i - \lambda_i) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pues  $a_{q_i} = 2$ . Haciendo la multiplicación, resulta

$$\begin{pmatrix} \delta_i^2 + \delta_j \lambda_i - 1 & -\delta_i^2 \\ \delta_i \lambda_i + \lambda_i^2 + 1 & -\delta_i \lambda_i - 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando traza se verifica lo pedido.  $\square$

*Demostración.* (del Teorema 3.22) Por el Lema 3.23, tenemos que  $\delta_1^2 - 2$  es la traza de

$$\begin{pmatrix} a_{q_1+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{q_1+2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{q_1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y  $\delta_2^2 - 2$  es la traza de

$$\begin{pmatrix} a_{q_2+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{q_2+2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{q_2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero el producto de abajo es una permutación cíclica del producto de arriba, y así  $\delta_1^2 - 2 = \delta_2^2 - 2$ , en cuanto la traza de un producto de matrices es invariante bajo permutaciones cíclicas. Esto demuestra lo pedido en el caso (A).

Para el caso (B), basta notar que al ir cortando los vértices con 1 nunca afectamos el tramo  $a_{p_i+1}, a_{p_i+2}, \dots, a_{q_i-1}$  (que se sigue directamente de la Observación 3.11), y así podemos aplicar la demostración del caso (A). Esto demuestra lo pedido.  $\square$

## Capítulo 4

# MMP para familias de superficies

Dada una familia de superficies suaves sobre una curva pinchada, podemos pensarla como un mapeo de la curva al espacio de moduli  $\mathcal{M}_{K^2, \chi}$  de superficies canónicas de tipo general. La existencia de la compactificación KSBA  $\overline{\mathcal{M}}_{K^2, \chi}$  permite buscar una superficie estable sobre el punto faltante. Más aún, nos interesa tener un procedimiento explícito para determinar dicho límite.

La primera sección incluye un resumen de propiedades básicas de la compactificación KSBA. Posteriormente, seguimos [Urz16a] y [HTU17] para una descripción de cómo correr un MMP relativo para obtener una superficie estable.

### 4.1. La compactificación KSBA

**Definición 4.1** ([KSB88, Def. 5.4.], cf. [Ale94, 2.4.]). Una *superficie estable*  $X$  es una superficie proyectiva reducida y conexa con singularidades semi-log canónicas, y tal que existe un  $N > 0$  tal que  $(\omega_X^N)^{**}$  es amplio, donde  $\omega_X$  es el haz dualizante y  $(\cdot)^{**}$  el doble dual.

La definición de singularidad semi-log canónica puede verse en [KSB88, Def 4.17]. En nuestra situación, nos interesan solamente superficies con singularidades de Wahl, que son semi-log canónicas (ver [KSB88, Thm 4.21]).

**Teorema 4.2** ([KSB88, Ale94]). *Fijados  $K^2$ , la autointersección de la clase canónica y  $\chi$ , la característica de Euler, existe un espacio de Moduli  $\overline{\mathcal{M}}_{K^2, \chi}$  cuyos puntos corresponden a superficies estables de parámetros  $K^2$  y  $\chi$ .*

En [KSB88, 5.4] se incluye una descripción precisa del functor al que  $\overline{\mathcal{M}}_{K^2, \chi}$  representa (gruesamente).

## 4.2. Vecindades extremales

**Definición 4.3** ([Urz16a, Def. 2.4], cf. [KM92, p.536]). Una *vecindad extremal*  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  es un morfismo birracional propio entre 3-folds normales  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que

- (1) La clase canónica  $K_{\mathcal{X}}$  es  $\mathbb{Q}$ -Cartier y  $\mathcal{X}$  tiene sólo singularidades terminales.
- (2)  $F^{-1}(Q) = C$  (como conjuntos).
- (3)  $K_{\mathcal{X}} \cdot C < 0$ .

En los casos que estaremos interesados,  $C$  es una curva racional. Estudiando el morfismo  $F$ , tenemos dos opciones.

- El lugar excepcional  $\text{Exc}_F$  es  $C$ . En tal caso, se dice que  $F$  es una *contracción flip*.
- El lugar excepcional  $\text{Exc}_F$  es un divisor  $D$ , con  $f(D)$  una curva que pasa por  $Q$ . En tal caso, decimos que es una *contracción divisorial*.

Para nuestros efectos, será importante considerar dos tipos especiales de vecindades extremales.

**Definición 4.4** ([Urz16a, Def 2.5.]). Sea  $(Q \in Y)$  una singularidad de cociente cíclico,  $f : X \rightarrow Y$  una resolución parcial, con  $f^{-1}(Q)$  una curva  $C$  suave, racional, y con una o dos singularidades de Wahl. Supongamos que  $K_X \cdot C < 0$ . Consideremos  $(X \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  una suavización  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein de  $X$  sobre un germen analítico de una curva  $\mathbb{D}$ , y sea  $(Y \subseteq \mathcal{Y}) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  la deformación inducida. Llamamos a  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  una *vecindad extremal de tipo mk1A/mk2A*, dependiendo de la cantidad de singularidades sobre  $C$ .

En las dos subsecciones daremos una descripción numérica de las vecindades mk1A/mk2A (cf. [Urz16a, §2]).

### 4.2.1. Vecindades mk1A

Sea  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  vecindad mk1A, y miremos la resolución parcial  $f : (C \subseteq X) \rightarrow (Q \in Y)$ . Resolviendo la singularidad  $P$ , obtenemos  $\tilde{X}$  resolución minimal de  $X$ , con las curvas indicadas en la Figura 4.1.

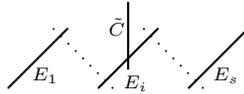


Figura 4.1: Resolución minimal de  $X$ .

En tal caso, tenemos que  $\tilde{C}^2 = -1$ . Además, si llamamos  $e_j = -E_j^2$ , necesariamente  $P$  es de tipo  $\frac{1}{m^2}(1, ma - 1)$ , con

$$\frac{m^2}{ma - 1} = [e_1, \dots, e_s].$$

Más aún, tenemos que

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [e_1, \dots, e_i - 1, \dots, e_s],$$

donde  $(Q \in Y)$  es  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$ . Denotamos así la situación como

$$[e_1, \dots, \bar{e}_i, \dots, e_s].$$

Si escribimos

$$K_{\hat{X}} \equiv \sigma^* K_X + \sum_j \left( -1 + \frac{\delta_j}{m} \right) E_j,$$

con  $\delta_j \in \mathbb{N}$ , entonces  $\delta := \delta_i$  satisface

$$K_X \cdot C = -\frac{\delta}{m}, \quad C^2 = -\frac{\Delta}{m^2}.$$

luego de hacer el cálculo.

#### 4.2.2. Vecindades mk2A

Sea  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  vecindad mk2A, y miremos la resolución parcial  $f : (C \subseteq X) \rightarrow (Q \in Y)$ . Resolviendo las singularidades  $P_1$  y  $P_2$ , obtenemos  $\hat{X}$  resolución minimal de  $X$ , con las curvas indicadas en la Figura 4.2

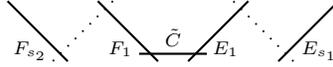


Figura 4.2: Resolución minimal de  $X$ .

En tal caso, tenemos que  $\tilde{C}^2 = -1$ . Llamando  $e_j = -E_j^2, f_j = -F_j^2$ , tenemos que  $P_i$  es de tipo  $\frac{1}{m_i^2}(1, m_i a_i - 1)$ , donde

$$[e_1, \dots, e_{s_1}] = \frac{m_1^2}{m_1 a_1 - 1}, \quad [f_1, \dots, f_{s_2}] = \frac{m_2^2}{m_2 a_2 - 1}.$$

Esta situación la anotamos como

$$[f_{s_2}, \dots, f_1] - 1 - [e_1, \dots, e_{s_1}],$$

o incluso

$$[f_{s_2}, \dots, f_1] - [e_1, \dots, e_{s_1}],$$

si no presta lugar a confusión. En tal caso,

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_{s_2}, \dots, f_1, 1, e_1, \dots, e_{s_1}]$$

cumple que  $(Q \in Y)$  es de tipo  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$ .

Definimos acá  $\delta := m_1 a_2 + m_2 a_1 - m_1 m_2$ . De este modo, tenemos

$$\Delta = m_1^2 + m_2^2 - \delta m_1 m_2, \quad \Omega = (m_2 - \delta m_1)(m_2 - a_2) + m_1 a_1 - 1,$$

y además

$$K_X \cdot C = -\frac{\delta}{m_1 m_2}, \quad C^2 = -\frac{\Delta}{m_1^2 m_2^2}.$$

### 4.3. P-resoluciones extremales

Recordamos la siguiente definición del Capítulo 3 (cf. [Urz16a, Def 2.6]).

**Definición 4.5.** Una *P-resolución extremal* de una singularidad de cociente cíclico  $(Q \in Y)$  es una resolución parcial  $f^+ : (C^+ \subseteq X^+) \rightarrow (Q \in Y)$  tal que  $C^+ \cong \mathbb{P}^1$ ,  $X^+$  tiene sólo singularidades de Wahl, y  $K_{X^+}$  es relativamente amplio.

En tal caso, necesariamente  $X^+$  tiene a lo más dos singularidades de Wahl. Igual que para vecindades mk2A, tenemos la situación de la Figura 4.3, al resolver las dos singularidades.

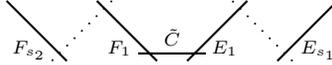


Figura 4.3: Resolución minimal de  $X^+$ .

Si llamamos  $e_j = -E_j^2$ ,  $f_j = -F_j^2$  y  $c = -\tilde{C}^2$ , tenemos que las (a lo más) dos singularidades de  $X^+$  son de tipo  $\frac{1}{m_i^2}(1, m_i' a_i' - 1)$ , donde

$$\frac{m_1'^2}{m_1' a_1' - 1} = [e_1, \dots, e_{s_1}], \quad \frac{m_2'^2}{m_2' a_2' - 1} = [f_1, \dots, f_{s_2}].$$

Acá permitimos la posibilidad de que alguna de las dos sea de hecho un punto suave; en tal caso  $m_1' = a_1' = 1$  y  $s_1 = 0$ . Además, la singularidad en  $Q$  es  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$ , donde

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_{s_2}, \dots, f_1, c, e_1, \dots, e_{s_1}],$$

y  $c$  es la autointersección de (la transformada estricta de)  $C$  en  $\tilde{X}$ .  
 En tal caso, definimos

$$\delta = cm'_1m'_2 - m'_1a'_2 - m'_2a'_1.$$

Obtenemos que  $\Delta = m_1'^2 + m_2'^2 + \delta m'_1m'_2$ , y

$$K_{X^+} \cdot C^+ = \frac{\delta}{m'_1m'_2}, \quad (C^+)^2 = -\frac{\Delta}{m_1'^2m_2'^2}$$

#### 4.4. Modificación en vecindades extremales

Vamos a ver cómo, a partir de vecindades mk1A y mk2A, es posible obtener un nuevo 3-fold con mejores propiedades. Más precisamente, la existencia de una vecindad extremal muestra una curva  $C$  que es negativa para el divisor canónico; veremos cómo se puede reemplazar por un punto o por una curva positiva para el divisor canónico. Este proceso jugará el rol análogo al criterio de Castelnuovo para superficies.

El primer caso a analizar es cuando las vecindades son de tipo flip.

**Proposición 4.6** ([Urz16a, Prop. 2.7.]). *Sea  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  una vecindad extremal flip de tipo mk1A o mk2A, donde  $(C \subseteq X) \rightarrow (Q \in Y)$  es la contracción de  $C$  al mirar las fibras especiales. Luego, existe una  $P$ -resolución extremal  $(C^+ \subseteq X^+) \rightarrow (Q \in Y)$  tal que el flip  $(C^+ \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  se obtiene de hacer blow-down a una suavización  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein de  $\mathcal{X}$ . Tenemos el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (C \subseteq \mathcal{X}) & \overset{\text{flip}}{\dashrightarrow} & (C^+ \subseteq \mathcal{X}^+) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (Q \in \mathcal{Y}) & \\ & \downarrow & \\ & (0 \in \mathbb{D}), & \end{array}$$

y en la fibra especial es

$$\begin{array}{ccc} (C \subseteq X) & \dashrightarrow & (C^+ \subseteq X^+) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (Q \in Y). & \end{array}$$

Por otro lado, para vecindades divisoriales tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 4.7** ([Urz16a, Prop. 2.8.]). *Sea  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  una vecindad extremal divisorial de tipo mk1A o mk2A, donde  $(C \subseteq X) \rightarrow (Q \in Y)$  es la contracción de  $C$  al mirar las fibras especiales. Se tiene que  $Q$  debe ser una*

*singularidad de Wahl. La contracción del divisor excepcional  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  induce el blow-down de una curva  $(-1)$  entre las fibras suaves de  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$  e  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{D}$ .*

Es importante notar que una vecindad flip se realiza un cambio sólo sobre la fibra especial, mientras que si es divisorial se contrae sobre todas las fibras.

## 4.5. Corriendo el MMP

Estamos interesados en buscar límites estables de superficies, que provienen de una degeneración sólo con singularidades de cociente cíclico. Por ello, comenzaremos nuestro proceso con una suavización de una superficie  $X$ , con algunas propiedades técnicas que están detalladas en el siguiente lema.

El primer paso es reducir el análisis al caso donde la superficie  $X$  tiene sólo singularidades de Wahl.

**Lema 4.8** ([HTU17, Lemma 5.2]). *Sea  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$  una familia flat de superficies proyectivas irreducibles reducidas tales que la fibra especial tiene singularidades cocientes (=log-terminales). Luego, existe un morfismo finito  $\mathbb{D}' \rightarrow \mathbb{D}$ , un espacio analítico  $\mathcal{X}'$  y un morfismo propio birracional  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{\mathbb{D}} \mathbb{D}'$  tal que*

- (1) *La fibra especial  $X'$  es irreducible y tiene sólo singularidades de Wahl.*
- (2)  *$\mathcal{X}'$  tiene singularidades terminales.*
- (3)  *$F$  induce una resolución minimal entre las fibras generales  $X'_s \rightarrow X_s$ .*
- (4)  *$K_{\mathcal{X}'}$  es  $F$ -nef.*

Posterior a esto, estamos en condiciones de presentar el proceso MMP. El procedimiento comienza con una familia  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$  como antes.

0. En caso de no serlo, cambiamos  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$  de modo que la fibra en 0 tenga solamente singularidades de Wahl.
1. Comenzamos con  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$  sólo con singularidades de Wahl. Si  $K_X$  es nef, paramos.
2. Si  $K_X$  no es nef, hay una curva  $C$  que interseca negativo, y toca a lo más a dos singularidades. Esto genera un entorno extremal  $(C \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (Q \in \mathcal{Y})$  de tipo mk1A/mk2A al contraer.
3. Verificamos si el entorno es flip o divisorial.
  - Si es flip, efectuamos el flip y obtenemos  $(C \subseteq X) \rightarrow (C^+ \subseteq \mathcal{X}^+)$ . Volvemos a 1. con  $\mathcal{X}^+$ .
  - Si es divisorial, volvemos a 1. con la contracción  $\mathcal{Y}$ .

Por supuesto, es necesario justificar que este procedimiento termina.

**Proposición 4.9** ([HTU17, Thm 5.3.]). *Si algún múltiplo de  $K_X$  es efectivo, este procedimiento termina luego de finitos pasos.*

Para las superficies cuyo divisor canónico no admite un múltiplo efectivo, el procedimiento requiere ser modificado para admitir que la fibra general pueda no terminar con  $K_X$  nef. Esto es análogo a la situación para superficies, donde permitíamos obtener fibraciones sobre una curva, o  $\mathbb{P}^2$ , como se muestra en el Teorema 2.6. En [Urz16b, §2] se incluye este proceso en detalle para incorporar esos casos.

## 4.6. El algoritmo de Mori

En esta sección resolveremos dos dudas naturales relacionadas al paso **3.** de la sección anterior: cómo detectar si una vecindad mk1A/mk2A es flip o divisorial, y cómo obtener explícitamente el flip. Para ello, seguimos el algoritmo de Mori (presentado en [Mor02]), según la descripción de [Urz16a, §2.4].

Para comenzar, estudiaremos el algoritmo para el caso  $\delta > 1$ , con un entorno mk2A.

**P1.** Comenzamos con  $[f_{s_2}, \dots, f_1] - [e_1, \dots, e_{s_1}]$  vecindad mk2A. Escribiendo

$$\frac{m^2}{ma-1} = [e_1, \dots, e_{s_1}], \quad \frac{n^2}{nb-1} = [f_1, \dots, f_{s_2}],$$

sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $m > n$ .

**P2.** Armamos las recursiones

$$d(1) = n, \quad d(2) = m, \quad d(i-1) + d(i+1) = \delta d(i),$$

y

$$c(1) = n - b, \quad c(2) = a, \quad c(i-1) + c(i+1) = \delta c(i),$$

para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

**P3.** Existe un menor  $i_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(i) > 0$  si  $i \geq i_0$ . Armamos la cadena infinita

$$\left[ \frac{d(i_0)^2}{d(i_0)c(i_0)-1} \right] - \left[ \frac{d(i_0+1)^2}{d(i_0+1)c(i_0+1)-1} \right] - \left[ \frac{d(i_0+2)^2}{d(i_0+2)c(i_0+2)-1} \right] - \dots$$

Tomar dos términos consecutivos induce una vecindad mk2A de las mismas características que la original (esto es, ambas son o flip o divisorial, y el flip es el mismo para las dos). Más explícitamente, tomamos las vecindades mk2A de la forma

$$\left[ \frac{d(i)^2}{d(i)c(i)-1} \right] - \left[ \frac{d(i+1)^2}{d(i+1)c(i+1)-1} \right], \quad i \geq i_0.$$

**P4.** Por definición, sabemos que  $d(i_0 - 1) \leq 0$ . Separamos en dos casos.

- Si  $d(i_0 - 1) = 0$ , estamos en el **caso divisorial**. Acá, tenemos de hecho fórmulas explícitas para  $d(i_0), c(i_0), d(i_0 + 1), c(i_0 + 1)$  en términos de  $\Delta, \delta$  y  $\Omega$

$$d(i_0) = \delta, \quad d(i_0 + 1) = \delta^2 = \Delta,$$

y

$$c(i_0) = \frac{\Omega + 1}{\delta}, \quad c(i_0 + 1) = \Omega + 2.$$

- Si  $d(i_0 - 1) < 0$ , estamos en el **caso flip**. En tal caso, el flip es

$$[f'_{t_2}, \dots, f'_1] - c - [e'_1, \dots, e'_{t_1}],$$

donde

$$[e'_1, \dots, e'_{t_1}] = \frac{m_1'^2}{m_1' a_1' - 1}, \quad [f'_1, \dots, f'_{t_2}] = \frac{m_1'^2}{m_2' a_2' - 1}$$

se calculan vía

$$m_1' = d(i_0), \quad m_2' = -d(i_0 - 1) = d(i_0 + 1) - \delta d(i_0),$$

y

$$a_1' = c(i_0), \quad a_2' \equiv c(i_0 - 1) \pmod{m_2'}.$$

Si  $m_j' = 1$ , debemos tomar  $a_j' = 1$ . Para obtener  $c$ , despejamos de la fórmula para el  $\delta$ .

Veamos en un ejemplo concreto cómo correr este algoritmo.

**Ejemplo 4.10.** Tomemos la vecindad mk2A dada por

$$[2, 2, 3, 2, 2, 7, 4] - [2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 5, 7, 4].$$

Un cálculo rápido muestra que

$$[2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 5, 7, 4] = \frac{50^2}{50 \cdot 37 - 1}$$

y

$$[4, 7, 2, 2, 3, 2, 2] = \frac{19^2}{19 \cdot 5 - 1}.$$

De este modo,

$$\delta = 19 \cdot 37 + 50 \cdot 5 - 19 \cdot 50 = 3.$$

Armamos así las recusiones

$$d(1) = 19, \quad d(2) = 50, \quad d(i - 1) + d(i + 1) = 3d(i),$$

y

$$c(1) = 14, \quad c(2) = 37, \quad c(i - 1) + c(i + 1) = 3c(i).$$

Con ello, podemos calcular los valores de  $d(i), c(i)$  para distintos valores de  $i$ .

<b>i</b>	-2	-1	0	1	2	3
<b>d(i)</b>	-1	2	7	19	50	131
<b>c(i)</b>	-2	1	5	14	37	97

Cuadro 4.1: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  del Ejemplo 4.10.

Resulta así que  $i_0 = -1$ , y como  $d(-2) < 0$ , estamos en el caso flip. Calculamos así

$$m'_1 = 2, \quad m'_2 = -(-1) = 1, \quad a'_1 = 1, \quad a'_2 = 1.$$

Despejamos así el valor de  $c$  vía

$$3 = c \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1,$$

de donde  $c = 3$ . Obtenemos así la P-resolución extremal

$$3 - [4],$$

y la cadena infinita

$$[4] - [2, 2, 5, 4] - [2, 2, 3, 2, 2, 7, 4] - [2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 5, 7, 4],$$

donde el siguiente término es  $[2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 7, 4]$ .

**Ejemplo 4.11.** Consideremos la vecindad mk2A dada por

$$[3, 2, 2, 7, 2] - [3, 2, 2, 2, 2, 5, 7, 2].$$

Tenemos que

$$[3, 2, 2, 2, 2, 5, 7, 2] = \frac{24^2}{24 \cdot 11 - 1}, \quad [2, 7, 2, 2, 3] = \frac{9^2}{9 \cdot 5 - 1}.$$

Además,

$$\delta = 9 \cdot 11 + 24 \cdot 5 - 24 \cdot 9 = 3.$$

De este modo, podemos calcular  $d(i), c(i)$  como sigue.

<b>i</b>	-1	0	1	2	3
<b>d(i)</b>	0	3	9	24	63
<b>c(i)</b>	-1	1	4	11	29

Cuadro 4.2: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  del Ejemplo 4.11.

Tenemos acá que  $i_0 = 0$ , y  $d(-1) = 0$ . De este modo, la vecindad es divisorial, y

$$\Delta = \delta^2 = 9, \Omega = c(0) \cdot \delta - 1 = 2.$$

Con ello, la singularidad obtenida al contraer el divisor excepcional es

$$\frac{9}{2} = [5, 2].$$

*Observación 4.12.* Si  $\delta = 1$ , el único cambio a tener en cuenta es en el paso **P3.**, pues ahora la secuencia  $d(i)$  no es positiva desde  $i_0$  en adelante. Lo que sí es verdad es que es positiva desde  $i_0$  hasta 2; más aún, en tal caso la vecindad debe ser flip.

**Ejemplo 4.13.** Consideremos la vecindad mk2A (cf. [Urz16a, Fig. 11])

$$[4] - [2, 7, 2, 2, 3].$$

En este caso,

$$[2, 7, 2, 2, 3] = \frac{9^2}{9 \cdot 5 - 1}, \quad [4] = \frac{2^2}{2 \cdot 1 - 1}.$$

El valor de  $\delta$  es 1 en este caso. Haciendo el cálculo, obtenemos los valores de  $d(i), c(i)$  que siguen.

<b>i</b>	0	1	2	3	4
<b>d(i)</b>	-7	2	9	7	-2
<b>c(i)</b>	-4	1	5	4	-1

Cuadro 4.3: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  del Ejemplo 4.13.

Como se observa, la sucesión  $d(i)$  ya no es positiva desde  $i_0 = 1$  en adelante. La vecindad es flip, y resulta la P-resolución extremal

$$[2, 6, 2, 3] - 1 - [4]$$

con

$$m'_1 = 2, \quad m'_2 = 7, \quad a'_1 = 1, \quad a'_2 = 3.$$

*Observación 4.14.* Dada una vecindad mk2A  $[f_{s_2}, \dots, f_1] - [e_1, \dots, e_{s_1}]$ , con

$$\frac{m^2}{ma - 1} = [e_1, \dots, e_{s_1}], \quad \frac{n^2}{nb - 1} = [f_1, \dots, f_{s_2}],$$

y  $\delta, d(i), c(i), i_0$  como en el algoritmo de Mori, entonces tenemos que

$$d(k)c(k+1) - d(k+1)c(k) = \delta, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La demostración es directa por inducción en  $k$ , donde el caso base

$$d(1)c(2) - d(2)c(1) = na - m(n - b) = na + mb - mn = \delta$$

es por definición de  $\delta$  para vecindades mk2A y por **P2.** del algoritmo de Mori. Esto permite dar una fórmula explícita para **P4.** si la vecindad es flip; si  $d(i_0) = 1$ , entonces  $c(i_0 - 1) = -\delta$  y  $c(i_0) = 0$ ; si  $d(i_0) \neq 1$ , entonces  $c(i_0 - 1) = -cm_2 + a_2$ . Esto es útil para obtener vecindades mk2A flip a partir de la P-resolución extremal.

*Observación 4.15.* Si la singularidad  $(Q \in Y)$  de tipo  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  no es de Wahl (por ejemplo, si  $\Delta$  no es cuadrado perfecto, o si su resolución minimal  $\frac{\Delta}{\Omega} = [b_1, \dots, b_r]$  cumple que  $\sum_{i=1}^r b_i \neq 3r + 1$ ), entonces la vecindad mk1A/mk2A debe ser flip (gracias a la Proposición 4.7). Además, si hay sólo una  $P$ -resolución extremal para la singularidad (por ejemplo, si  $\delta = 1$  por el Corolario 3.20), en tal caso ese es el único posible resultado del flip, y no es necesario realizar el algoritmo de Mori para decidir.

Falta estudiar el caso de vecindades mk1A. La siguiente proposición reduce su estudio al caso mk2A.

**Proposición 4.16** ([Urz16a, Prop 2.12.]). *Sea  $[e_1, \dots, \bar{e}_i, \dots, e_s]$  la información numérica de una vecindad mk1A, donde*

$$\frac{m^2}{ma - 1} = [e_1, \dots, e_s].$$

*Sean  $\Delta, \Omega, \delta$  como en la descripción numérica de una vecindad mk1A. Sea*

$$\frac{m_2}{m_2 - a_2} = [e_1, \dots, e_{i-1}], \quad \frac{m_1}{m_1 - a_1} = [e_s, \dots, e_{i+1}]$$

*cuando sea posible (i.e. el primero si  $i > 1$ , el segundo si  $i < s$ ). Luego existen vecindades mk2A con información numérica*

$$[f_{s_2}, \dots, f_1] - [e_1, \dots, e_s] \text{ y } [e_1, \dots, e_s] - [g_1, \dots, g_{s_1}],$$

*donde*

$$\frac{m_2^2}{m_2 a_2 - 1} = [f_1, \dots, f_{s_2}], \quad \frac{m_1^2}{m_1 a_1 - 1} = [g_1, \dots, g_{s_1}].$$

*Más aún, estas vecindades mk2A comparten la singularidad  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$  y el valor de  $\delta$ . Además, estos entornos comparten la propiedad de ser flip (y con igual  $(Q \in \mathcal{Y})$  de contracción) o divisoriales (con igual  $P$ -resolución extremal).*

El Apéndice A.1 incluye una implementación computacional del algoritmo de Mori para vecindades mk1A y mk2A.

**Ejemplo 4.17.** Consideremos la vecindad mk1A (cf [Urz16a, Fig. 11]) con información

$$[3, 2, 2, 2, 2, 2, \overline{10}, 2].$$

Siguiendo la notación de la Proposición 4.16, tenemos que

$$[3, 2, 2, 2, 2, 2, 10, 2] = \frac{15^2}{15 \cdot 7 - 1},$$

por lo que  $m = 15, a = 7$ . Además,

$$[3, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{13}{6},$$

de donde  $m_2 = 13, a_2 = 7$ . Obtenemos así una vecindad mk2A de la forma

$$[f_{s_2}, \dots, f_1] - [3, 2, 2, 2, 2, 2, 10, 2],$$

donde

$$[f_1, \dots, f_{s_2}] = \frac{13^2}{13 \cdot 7 - 1}.$$

Calculando,  $\delta = 1$  Apicamos acá el algoritmo de Mori, obteniendo los siguientes valores.

<b>i</b>	-1	0	1	2	3
<b>d(i)</b>	-15	-2	13	15	2
<b>c(i)</b>	-7	-1	6	7	1

Cuadro 4.4: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  del Ejemplo 4.17.

Esto da una vecindad flip con la siguiente P-resolución extremal

$$[4] - 1 - [3, 2, 2, 2, 2, 9, 2].$$

**Ejemplo 4.18.** Consideremos la singularidad  $\frac{1}{64}(1, 49)$ , cuya resolución minimal es  $[2, 2, 2, 5, 4]$ . Esta tiene dos P-resoluciones extremales, a saber,  $2 - [2, 2, 5, 4]$  y  $[2, 2, 2, 7] - 1 - [2, 5]$ . El parámetro  $\delta$  común es  $\delta = 2$ .

Utilizamos la Observación 4.14 para producir vecindades mk1A/mk2A asociadas a estos valores.

- Para la P-resolución extremal  $2 - [2, 2, 5, 4]$  tenemos la siguiente tabla de valores  $d(i), c(i)$ .

<b>i</b>	0	1	2	3	4	5
<b>d(i)</b>	-1	7	15	23	31	39
<b>c(i)</b>	-1	5	11	17	23	29

Cuadro 4.5: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  para  $2 - [2, 2, 5, 4]$ .

Esto produce la siguiente lista de singularidades

$$[2, 2, 5, 4] - [2, 2, 3, \bar{2}, 6, 4] - [2, 2, 3, 2, 2, \bar{2}, 8, 4] \\ - [2, 2, 3, 2, 2, 2, \bar{2}, 10, 4] - [2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, \bar{2}, 12, 4] - \dots$$

Tomando dos consecutivas obtenemos una vecindad mk2A; tomando una de ellas (a partir de la segunda) obtenemos una vecindad mk1A. El algoritmo de Mori garantiza que estas són las úncias vecindades mk1A/mk2A que producen a  $2 - [2, 2, 5, 4]$  y que, o bien la fracción de la derecha tiene numerador más grande (para las mk2A), o bien la fracción de la derecha del vértice marcado tiene numerador más grande (para las mk1A).

Esto se puede arreglar calculando el algoritmo de Mori para  $[4, 5, 2, 2] - 2$  y luego reflejando la cadena obtenida. En primer lugar, tenemos los siguientes valores de  $d(i)$  y  $c(i)$ .

<b>i</b>	0	1	2	3	4	5
<b>d(i)</b>	-7	1	9	17	25	33
<b>c(i)</b>	-2	0	2	4	6	8

Cuadro 4.6: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  para  $[4, 5, 2, 2] - 2$ .

Reflejando la cadena obtenida, resulta

$$\begin{aligned} \dots - [2, 2, 2, 11, \bar{2}, 2, 2, 2, 2, 2, 5] - [2, 2, 2, 9, \bar{2}, 2, 2, 2, 5] \\ - [2, 2, 2, 7, \bar{2}, 2, 5] - [2, 2, 2, 5, \bar{5}]. \end{aligned}$$

Todas las vecindades mk1A/mk2A que aparecen acá son flip y producen la P-resolución extremal  $2 - [2, 2, 5, 4]$ .

- Para la P-resolución extremal  $[2, 2, 2, 7] - 1 - [2, 5]$ , tenemos la siguiente tabla de valores  $d(i), c(i)$ .

<b>i</b>	0	1	2	3	4	5
<b>d(i)</b>	-5	3	11	17	25	31
<b>c(i)</b>	-4	2	8	14	20	26

Cuadro 4.7: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  para  $[2, 2, 2, 7] - 1 - [2, 5]$ .

Igual que antes, obtenemos la siguiente cadena

$$\begin{aligned} [2, 5] - [2, 2, \bar{3}, 5, 4] - [2, 2, 3, 2, \bar{2}, 7, 4] \\ - [2, 2, 3, 2, 2, 2, \bar{2}, 9, 4] - [2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, \bar{2}, 11, 4] - \dots \end{aligned}$$

Del mismo modo que en el caso anterior, para obtener las otras vecindades extremales corremos el algoritmo de Mori a  $[5, 2] - 1 - [7, 2, 2, 2]$  y reflejamos. Resulta la siguiente tabla de valores.

<b>i</b>	0	1	2	3	4	5
<b>d(i)</b>	-3	5	13	21	29	37
<b>c(i)</b>	-1	1	3	5	7	9

Cuadro 4.8: Valores de  $d(i)$  y  $c(i)$  para  $[5, 2] - 1 - [7, 2, 2, 2]$ .

Obtenemos con ello la siguiente cadena

$$\begin{aligned} \dots - [2, 2, 2, 12, \bar{2}, 2, 2, 2, 2, 2, 5] - [2, 2, 2, 10, \bar{2}, 2, 2, 2, 2, 5] \\ - [2, 2, 2, 8, \bar{2}, 2, 2, 5] - [2, 2, 2, 6, \bar{2}, 5] - [2, 2, 2, 7]. \end{aligned}$$

Estas listas de vecindades son todas asociadas a la singularidad  $\frac{1}{64}(1, 49)$ , en cuanto no hay vecindades divisoriales (pues no es una singularidad de Wahl).

# Capítulo 5

## Agujeros de gusano

En este capítulo veremos cómo relacionar dos P-resoluciones extremales para superficies con una singularidad. Los dos teoremas principales controlarán el caso de dos singularidades y una curva  $-1$ , y una singularidad con una curva  $-2$ .

### 5.1. Introducción

Estamos interesados en estudiar el espacio de Moduli  $\mathcal{M}_{K^2, \chi}$  de superficies de tipo general (debido a Gieseker), y su compactificación  $\overline{\mathcal{M}}_{K^2, \chi}$  de superficies estables (debida a Kollár, Shepherd-Barron y Alexeev).

Dada una familia de curvas  $\mathbb{D}^\times \rightarrow \mathcal{M}_{K^2, \chi}$  sobre el germen pinchado de una curva, la existencia de la compactificación permite buscar un límite estable  $\mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{K^2, \chi}$ , quizá luego de un cambio de base. El Capítulo 4 explicaba cómo obtener explícitamente este límite, cuando la familia era flat, con singularidades terminales, y la fibra especial tenía solamente singularidades de Wahl.

Uno de los ingredientes claves eran las P-resoluciones extremales. Por el Teorema 3.21, una singularidad de cociente cíclico ( $Q \in Y$ ) admite a lo más dos P-resoluciones extremales

$$f_i^+ : (C_i \subseteq X_i^+) \rightarrow (Q \in Y).$$

De este modo, si  $X_1^+ \subseteq \mathcal{X}_1^+$  es un límite estable, y existe una curva  $C_1 \subseteq X_1^+$  y una singularidad de cociente cíclico ( $Q \in Y$ ) como arriba, podemos cambiar  $(C_1 \subseteq X_1^+)$  por  $(C_2 \subseteq X_2)$ . Suponiendo que existe una deformación Q-Gorenstein  $X_2 \subseteq \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{D}$ , la superficie  $X_2$  no tiene por qué ser estable, pues podrían haberse producido nuevos entornos mk1A/mk2A.

**Ejemplo 5.1.** Consideremos la superficie de Enriques con las cuatro curvas racionales y de autointersección  $-2$  marcadas en la Figura 5.1. La superficie y la suavización Q-Gorenstein existen gracias a [DRU20] (ver Fig. 4 (ii)).

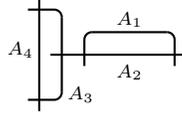


Figura 5.1: Curvas en la superficie de Enriques

Realizamos cinco blow-up para obtener la configuración de la Figura 5.2. Las curvas excepcionales  $E_1, \dots, E_5$  están numeradas según el orden en que fueron hechos los blow-ups.

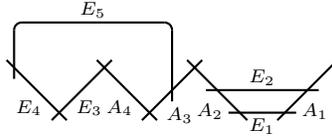


Figura 5.2: Luego de cinco blow-ups.

El divisor canónico de esta superficie es  $E_1 + E_2 + E_3 + 2E_4 + 3E_5$ , puesto que la superficie original tenía divisor canónico trivial.

Es importante notar que  $E_1^2 = E_2^2 = E_5^2 = -1$ ,  $E_3^2 = E_4^2 = -2$ ,  $A_4^2 = -3$ ,  $A_1^2 = A_2^2 = -4$ ,  $A_3^2 = -5$ . La cadena de curvas

$$E_4 - E_3 - A_4 - A_3 - A_2 - E_1 - A_1,$$

al contraer  $E_1$  corresponde a la resolución minimal de la singularidad  $\frac{1}{235}(1, 169)$ , pues

$$[2, 2, 4, 5, 3, 3] = \frac{235}{169}.$$

Esta singularidad tiene dos P-resoluciones extremales. En ambos casos, la superficie obtenida se puede deformar gracias a [DRU20, Lemma 2.4].

- Si contraemos  $A_1$  y  $A_2 - A_3 - A_4 - E_3 - E_4$  a singularidades  $P_1$  y  $P_2$ , obtenemos la superficie  $X_1$  con la P-resolución extremal

$$[2, 2, 3, 5, 4] - 1 - [4].$$

Notar que

$$\sigma^*(K_{X_1}) \equiv E_1 + E_2 + \frac{17}{11}E_3 + \frac{25}{11}E_4 + 3E_5 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{8}{11}A_2 + \frac{10}{11}A_3 + \frac{9}{11}A_4.$$

Así, se tiene que  $K_{X_1}$  es nef, en cuanto  $K \cdot E_2 = K \cdot E_1 = \frac{5}{22}$  y  $K \cdot E_5 = \frac{2}{11}$ .

- Si contraemos  $E_1$  y luego contraemos  $E_3 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1$  a un punto  $P_3$ , obtenemos la superficie  $X_2$  con la P-resolución extremal

$$2 - [2, 3, 5, 3, 3].$$

Tenemos que  $K \cdot E_2 = \frac{6}{13}$  y  $K \cdot E_5 = -\frac{1}{13}$ . La curva  $E_5$  induce una vecindad mk1A con la singularidad  $Q$ .

Viendo la información numérica de la vecindad, tenemos que

$$[2, 3, 5 - 1, 3, 3] = \frac{129}{79},$$

que no es una singularidad de Wahl. De este modo, la Observación 4.15 muestra que la vecindad es flip. Más aún, como hay sólo una P-resolución extremal,

$$[2, 3, 5, 3] - 1 - [2, 5, 3],$$

no es necesario correr el algoritmo de Mori.

Realizado el flip, en la resolución minimal obtenemos la Figura 5.3, donde hemos llamado  $F_1, F_2, F_3$  a las curvas que aparecen al hacer blow-up. Notar que ahora  $E_2^2 = E_4^2 = -1$  son las dos únicas curvas que podrían ser negativas, puesto que  $F_3$  es de la P-resolución extremal y  $F_2 - A_2 - A_1, F_1 - A_3 - A_4 - E_3$  las de las singularidades.

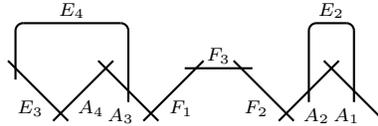


Figura 5.3: Luego del flip.

Al calcular, tenemos que  $K \cdot E_4 = \frac{1}{4}, K \cdot E_2 = \frac{3}{5}$ . Con ello, la superficie ahora es nef.

Obtenemos que las suavizaciones de  $X_1$  y  $X_3$  pertenecen al mismo espacio de Moduli (con  $K^2 = 1, \chi = 1$ ), pero que emanan de dos superficies distintas. Llamamos a este fenómeno un *agujero de gusano* en dicho espacio. Es importante destacar que eso fue posible gracias a que, al correr el MMP en  $X_2$ , no fue necesario realizar contracciones divisoriales.

Como muestra el Ejemplo 5.1, es necesario permitir la posibilidad de flips en algunos casos.

## 5.2. Sin curvas negativas

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.** *Sea  $Y$  una superficie proyectiva cuya resolución minimal no es reglada. Sea  $Q \in Y$  una singularidad de cociente cíclico, siendo el único punto singular en  $Y$ . Supongamos que  $Q$  admite dos  $P$ -resoluciones extremales  $f_i^+ : (C_i \subseteq X_i) \rightarrow (Q \in Y), i = 1, 2$ , de modo que se cumplen las siguientes propiedades.*

- *La curva excepcional  $C_1$  de la  $P$ -resolución  $X_1$  tiene autointersección  $-1$  (en la resolución minimal de  $X_1$ ).*
- *$K_{X_2}$  es nef.*
- *Las dos  $P$ -resoluciones extremales y la superficie  $Y$  son fibras de suavizaciones  $F_i : (X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (Y \subseteq \mathcal{Y})$ , con  $(X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  deformación  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein sobre  $\mathbb{D}$ .*

Luego, se tiene que  $K_{X_1}$  es nef.

Durante toda la sección seguiremos la notación del teorema. Llamaremos  $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega) = (Q \in Y)$  a los parámetros de la singularidad, y

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_s, \dots, f_1] - 1 - [e_1, \dots, e_r]$$

a la información numérica de la  $P$ -resolución extremal  $X_1 \rightarrow Y$ . Llamaremos  $\sigma : \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  a la resolución minimal,  $P_1, P_2$  a las singularidades, y  $E_i, F_j$  a las curvas nuevas (que aparecen al resolver  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente); de este modo, tenemos una situación como en la Figura 5.4.

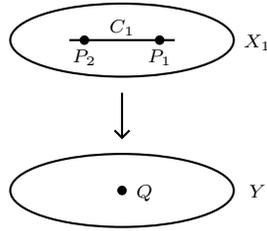


Figura 5.4:  $P$ -resolución en  $X_1$ .

En primer lugar, para que  $K_{X_1}$  no sea nef, la Proposición 4.9 muestra que debemos tener una vecindad mk1A o mk2A (pues la resolución minimal de la superficie admite modelo minimal, y ya que estamos en presencia de una suavización  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein). Con ello, debería existir una curva  $\Gamma \subseteq X_1$  suave isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ , con  $K_{X_1} \cdot \Gamma < 0$ . Necesariamente debe tocar a  $(f_1^+)^{-1}(Q)$ ; en otro caso, podemos enviar  $\Gamma$  a  $X_2$  sin cambiar su intersección con el divisor canónico, que contradeciría el hecho que  $K_{X_2}$  es nef.

Por otro lado, la curva  $\Gamma$  debe intersectar a  $C_1$  sólo en las singularidades. En caso contrario, en  $\tilde{X}_1$  podemos contraer la transformada estricta de  $C_1$ , obteniendo una curva  $\tilde{\Gamma}$  de intersección con el canónico  $\leq -2$  (pues originalmente  $K_{\tilde{X}_1} \cdot C = -1$  por la fórmula de adjunción). Esto contradice la Proposición 2.7.

Obtenemos así que  $\Gamma$  pasa por las singularidades. Más aún, como la curva debe producir una vecindad mk1A/mk2A, tenemos dos opciones: o bien toca a sólo una de las singularidades, o bien toca a dos de ellas en las curvas de los extremos (al mirarlo en la resolución minimal). Para la primera opción (que induciría una vecindad mk1A) hay dos casos.

- Al contraer  $C_1$  y las siguientes curvas  $(-1)$  que aparezcan, se toca a  $\Gamma$ . Esto provocaría que  $K \cdot \Gamma \leq -2$ , que contradice a la Proposición 2.7.
- Al contraer  $C_1$  y las siguientes curvas  $(-1)$ , la curva  $\Gamma$  no se ve afectada. En tal caso, al hacer los blow-ups para pasar a  $X_2$ , la curva  $\Gamma$  sería negativa para el divisor canónico, pues tocaría sólo a una singularidad. Esto da una nueva contradicción.

Con ello,  $\Gamma$  debe intersectar en las curvas de los extremos (esto es, en  $E_1, E_r, F_1$  o  $F_s$ ) de cada singularidad de manera transversal.

Para los siguientes resultados será importante contar con una manera explícita de calcular  $K_{X_1} \cdot \Gamma$ . Por la Ecuación (2.1) esto es

$$\left( K_{\tilde{X}_1} - \sum_i k_i E_i - \sum_l l_j F_j \right) \cdot \tilde{\Gamma},$$

donde hemos llamado  $k_i, l_j$  a las discrepancias respectivas, y  $\tilde{\Gamma}$  a la transformada estricta de  $\Gamma$ . El primer término podemos calcularlo con la fórmula de adjunción, y los otros dos utilizando la transversalidad, para obtener

$$K_{X_1} \cdot \Gamma = -1 - k_i - l_j, \quad (5.1)$$

donde  $i = 1, r$  y  $j = 1, s$ , dependiendo de dónde intersecta la curva  $\Gamma$ .

De los cuatro pares de opciones, hay dos que son fáciles de descartar.

- Si  $\Gamma$  intersecta a  $E_1$  y  $F_1$ , entonces  $K_{X_1} \cdot \Gamma = K_{X_1} \cdot C_1 > 0$ , pues ambas son curvas  $(-1)$  en la resolución minimal que intersectan a las mismas curvas excepcionales de la resolución.
- Si  $\Gamma$  intersecta a  $E_r$  y  $F_s$ , entonces  $\Gamma$  está intersectando a las dos curvas de los extremos. La Proposición 3.6 garantiza así que  $\Gamma$  intersecta a las dos curvas de los extremos en  $X_2$ . Esto implica que  $X_2$  debe tener dos singularidades (en otro caso,  $\Gamma$  tocaría sólo una singularidad y sería negativa en  $K_{X_2}$ ), y gracias a la Observación 3.7 resulta que  $C_2^2 = -1$ . Pero ahora es fácil verificar gracias a la Ecuación (5.1) y la Observación 2.21 que

$$K_{X_2} \cdot \Gamma + K_{X_2} \cdot C_2 = -2 - k_1 - k_r - l_1 - l_s = 0,$$

por lo que  $\Gamma$  sería negativa en  $K_{X_2}$ , una contradicción.

Por simetría, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\Gamma$  intersecta a  $E_1$  y  $F_s$  en la resolución minimal, situación que hemos señalado en la Figura 5.5.

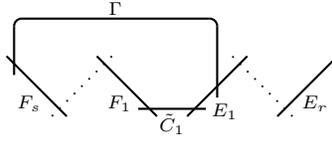


Figura 5.5: La curva  $\tilde{\Gamma}$  en  $\tilde{X}_1$ .

**Lema 5.3.** *En las condiciones anteriores, tenemos que  $r, s > 1$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $s = 1$ ; tenemos así

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [4] - 1 - [e_1, \dots, e_r].$$

Al hacer el cálculo, resulta que

$$K_{X_1} \cdot \Gamma = K_{X_1} \cdot C_1 > 0,$$

en cuanto ambas intersectan a  $\{E_i\}, \{F_j\}$  en los mismos lugares. Por otro lado, si  $r = 1$ , tenemos

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_s, \dots, f_1] - 1 - [4].$$

Ahora bien, la curva  $\Gamma$  estaría intersectando a las dos curvas de los extremos  $E_r$  y  $F_s$ , pues  $r = 1$ . Esto daría una contradicción, probando lo pedido.  $\square$

Como ahora las singularidades de  $X_1$  tienen largo al menos dos, exactamente uno de los dos valores  $e_1, e_r$  es 2, al igual que  $f_1, f_s$ .

**Lema 5.4.** *En las condiciones anteriores, se tiene que  $e_r = f_s = 2$ .*

*Demostración.* Verificaremos que los tres otros casos son imposibles.

- Si  $e_1 = f_1 = 2$ , tenemos que  $E_1, \tilde{C}_1, F_1$  generan una curva de autointersección 0 al contraer primero  $\tilde{C}_1$  y luego  $E_1$ , lo que genera una contradicción con la Proposición 2.7.
- Si  $e_1 = f_s = 2$ , el argumento es análogo con  $E_1, \tilde{\Gamma}, F_s$ .
- Si  $e_r = f_1 = 2$ , tenemos que  $K_{X_1} \cdot \Gamma = -1 - k_1 - l_s$ . Ahora bien, al calcular los valores de  $\delta$  para  $[e_1, \dots, e_r]$ , resulta que  $\delta_1 < \delta_r$  (pues la entrada  $e_1$  fue la última en ser agregada). De este modo,

$$k_1 = -1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_r} < -1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_1} = -\frac{1}{2}.$$

Un argumento análogo muestra que  $l_s < -\frac{1}{2}$ , y con ello

$$K_{X_1} \cdot \Gamma > -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

que contradice  $K_{X_1} \cdot \Gamma < 0$ .

Esto muestra que la única opción es  $e_r = f_s = 2$ . □

Con el lema anterior, necesariamente  $e_1, f_1 > 2$ . Así, en la resolución

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_s, \dots, f_1] - 1 - [e_1, \dots, e_r],$$

al contraer la curva central resulta

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_s, \dots, f_2, f_1 - 1, e_1 - 1, e_2, \dots, e_r],$$

donde  $f_1 - 1, e_1 - 1 \geq 2$ . Esto muestra que  $X_1$  proviene de un único blow-up.

La demostración del lema anterior utilizó una cota en las singularidades bastante elemental. Para refinar esa cota, será necesario separar las singularidades de Wahl en dos grupos.

**Definición 5.5.** Sea  $[b_1, \dots, b_t]$  una singularidad de Wahl, con  $t \geq 2$  y  $b_t = 2$ . Diremos que es de *tipo M* si  $b_2 = b_3 = \dots = b_t$ ; en caso contrario, diremos que es de *tipo B*.

Si  $[b_1, \dots, b_t]$  es de tipo M, es directo verificar que  $b_1 = t + 3$ . En efecto, eliminamos los  $t - 1$  números 2 para obtener  $[b_1 - (t - 1)]$ , que debe ser igual a [4]. Así, las singularidades de tipo M son

$$[5, 2], [6, 2, 2], [7, 2, 2, 2], \dots$$

Para las singularidades de tipo B, al eliminar los números 2 de la derecha nos quedamos con una singularidad

$$[b'_1, \dots, b'_s]$$

de largo mayor a uno, y con  $b'_1 = 2$ . Así, si llamamos  $p$  a la cantidad de números 2 de la derecha,

$$b_1 - p = 2 \Rightarrow b_1 = p + 2.$$

De este modo, toda singularidad de tipo B tiene la forma

$$[p + 2, b_2, \dots, b_{t-p}, \underbrace{2, \dots, 2}_p].$$

**Lema 5.6.** Sea  $[b_1, \dots, b_t]$  singularidad de Wahl,  $t \geq 2$ , y denotemos sus discrepancias por  $m_1, \dots, m_t$ . Tenemos entonces las siguientes cotas.

- Si es de tipo M,

$$m_1 = -1 + \frac{1}{b_1 - 2}, \quad m_t = -\frac{1}{b_1 - 2}.$$

- Si es de tipo B,

$$m_1 = -1 + \mu, \quad m_t = -\mu,$$

$$\text{donde } \frac{1}{b_1} < \mu < \frac{1}{b_1 - 1}.$$

*Demostración.* Calcularemos las discrepancias utilizando la Proposición 2.20.

- Toda singularidad de tipo M viene de [4], agregando números 2 al lado derecho. De este modo,

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, \dots, \delta_t = t.$$

Al calcular, las discrepancias son

$$m_1 = -1 + \frac{1}{t+1}, \quad m_t = -1 + \frac{t}{1+t}.$$

Como  $b_1 = t + 3$ , al reemplazar resulta lo pedido.

- Llamemos  $b_1 = p + 2$  por comodidad. Eliminando los números 2 de la derecha, caemos a

$$[2, b_2, \dots, b_{t-p}],$$

con  $b_{t-p} > 2$ . De este modo,  $\delta_1 > \delta_{t-p}$ , pues en la primera entrada hay un 2. Agregando las curvas 2 de la derecha de vuelta, resulta que

$$\delta_{t-p+i} = \delta_{t-p} + i\delta_1, \quad i = 0, \dots, p.$$

En particular,  $\delta_t = \delta_{t-p} + p\delta_1$ . De este modo, si llamamos  $\mu = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_t}$ , resulta que

$$m_1 = -1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_t} = -1 + \mu$$

y

$$m_t = -1 + \frac{\delta_t}{\delta_1 + \delta_t} = -\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_t} = -\mu.$$

Basta entonces saber acotar  $\mu$ . Como  $\delta_1 > \delta_{t-p}$ ,

$$\mu > \frac{\delta_1}{\delta_1 + (\delta_1 + p\delta_1)} = \frac{1}{p+2} = \frac{1}{b_1}.$$

Por otro lado, como todos los  $\delta_i$  son positivos,

$$\mu = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(p+1)\delta_1}{(p+1)\delta_1 + \delta_{t-p}} < \frac{1}{p+1} = \frac{1}{b_1 - 1}.$$

Las dos cotas dan  $\frac{1}{b_1} < \mu < \frac{1}{b_1 - 1}$ .

Esto demuestra lo pedido.  $\square$

**Lema 5.7.** *En las condiciones anteriores, necesariamente  $[e_1, \dots, e_r]$  debe ser de tipo M. Además, si  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo B, entonces  $e_1 = f_1 + 1$ ; si  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo M, entonces  $e_1 = f_1 - 1$ .*

*Demostración.* La idea básica es notar que en  $\tilde{X}_1$ , la curva  $E_1$  sufrirá las contracciones de  $\tilde{\Gamma}, \tilde{C}_1$  y luego  $F_s, \dots, F_{s'}$ . En efecto, al contraer  $\tilde{\Gamma}$ , la autointersección de  $F_s$  pasa de  $-2$  a  $-1$ , y podemos contraerla; el procedimiento se repite para las curvas  $-2$  adyacentes a  $F_s$ . Esto impondrá condiciones sobre  $e_1$  y  $f_1$ , lo que permitirá acotar las discrepancias sobre  $\tilde{\Gamma}$ .

Haremos así los cuatro casos posibles, dependiendo de si las singularidades son de tipo B o de tipo M

- Si  $[e_1, \dots, e_r]$  y  $[f_1, \dots, f_s]$  son de tipo B, entonces tenemos  $f_1 - 2$  entradas 2 a partir de  $f_s$ . Por ello, en

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_s, \dots, f_1] - 1 - [e_1, \dots, e_r],$$

la curva  $E_1$  sufrirá  $1 + 1 + (f_1 - 2) = f_1$  contracciones, por la curva  $\tilde{\Gamma}, \tilde{C}_1$  y  $\{F_s, \dots, F_{s'}\}$ . Es necesario exigir  $e_1 \geq f_1 + 1$ ; en caso contrario, obtendríamos una contradicción con la Proposición 2.7.

Ahora bien, por el Lema 5.6, tenemos que

$$k_1 < -1 + \frac{1}{e_1 - 1}, \quad l_s < -\frac{1}{f_1}.$$

Así,

$$K_{X_1} \cdot \Gamma > -1 + 1 - \frac{1}{e_1 - 1} + \frac{1}{f_1} = \frac{e_1 - 1 - f_1}{(e_1 - 1)f_1} \geq 0,$$

pues  $e_1 \geq f_1 + 1$ . Esto es una contradicción, pues  $K_{X_1} \cdot \Gamma < 0$  por hipótesis.

- Si  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo B y  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo M, tenemos  $s - 1 = f_1 - 4$  entradas 2 a la derecha. De este modo, en

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_s, \dots, f_1] - 1 - [e_1, \dots, e_r],$$

la curva  $E_1$  sufrirá  $1 + 1 + (f_1 - 4) = f_1 - 2$  contracciones, análogo a la parte anterior. Exigimos así  $e_1 \geq f_1 - 1$ . La cota de la discrepancia  $k_1$  se mantiene, mientras que

$$l_s = -\frac{1}{f_1 - 2}.$$

De este modo,

$$K_{X_1} \cdot \Gamma > -1 + 1 - \frac{1}{e_1 - 1} + \frac{1}{f_1 - 2} = \frac{e_1 - f_1 + 1}{(e_1 - 1)(f_1 - 2)} \geq 0,$$

pues  $e_1 \geq f_1 - 1$ . Nuevamente esto es una contradicción.

- Si  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo M y  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo B, entonces tenemos  $f_1 - 2$  entradas dos a partir de  $f_s$ , y con ello  $E_1$  sufrirá  $f_1$  contracciones. Igual que antes, obtenemos  $e_1 \geq f_1 + 1$ .

El Lema 5.6 permite escribir

$$k_1 = -1 + \frac{1}{e_1 - 2}, \quad l_s < -\frac{1}{f_1},$$

y así

$$K_{X_1} \cdot \Gamma > -1 + 1 - \frac{1}{e_1 - 2} + \frac{1}{f_1} = \frac{e_1 - 2 - f_1}{(e_1 - 2)f_1}.$$

Si  $e_1 \geq f_1 + 2$  esto daría una contradicción, en cuanto  $K_{X_1} \cdot \Gamma < 0$  por hipótesis. De este modo, necesariamente  $e_1 = f_1 + 1$ .

- Si  $[e_1, \dots, e_r]$  y  $[f_1, \dots, f_s]$  son de tipo M, tenemos  $f_1 - 4$  entradas 2 a la derecha, y así  $E_1$  sufrirá  $f_1 - 2$  contracciones. Obtenemos así  $e_1 \geq f_1 - 1$ .

El Lema 5.6 nos entrega

$$k_1 = -1 + \frac{1}{e_1 - 2}, \quad l_1 = -\frac{1}{f_1 - 2},$$

de donde

$$K_{X_1} \cdot \Gamma = -1 + 1 - \frac{1}{e_1 - 2} + \frac{1}{f_1 - 2} = \frac{e_1 - f_1}{(e_1 - 2)(f_1 - 2)}.$$

De este modo, si  $e_1 \geq f_1$  obtenemos una contradicción. Por ello, necesariamente  $e_1 = f_1 - 1$ .

Esto demuestra lo pedido. □

*Observación 5.8.* Supongamos que  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo M,  $[f_1, \dots, f_s]$  de tipo B, y  $e_1 = f_1 + 1$ . Usando el Lema 5.6 obtenemos

$$K_{X_1} \cdot \Gamma < -1 + 1 - \frac{1}{e_1 - 2} + \frac{1}{f_1 - 1} = \frac{e_1 - 2 - f_1 + 1}{(e_1 - 2)(f_1 - 1)} = 0.$$

Esto muestra que de hecho la curva  $\Gamma$  resulta negativa en este caso. Lo mismo se puede probar si  $[e_1, \dots, e_r], [f_1, \dots, f_s]$  son de tipo M y  $e_1 = f_1 - 1$ . Se necesita así un enfoque distinto para descartar esta posibilidad.

Para demostrar que estos dos casos tampoco van a provocar contraejemplos, el plan es centrar nuestra visión en la resolución minimal  $\tilde{X}_1$  e ir contrayendo curvas  $(-1)$ . Por hipótesis, este proceso debe terminar, obteniendo eventualmente un divisor canónico  $K$  nef. Más importante aún, si en algún paso obtenemos una curva no contractible  $C$  con  $K \cdot C < 0$ , resulta una contradicción, en cuanto futuras contracciones sólo harán disminuir  $K \cdot C$ , y así  $X_1$  no admitiría modelo minimal.

Comenzaremos estudiando el caso más simple: donde ambas singularidades son de tipo M.

**Lema 5.9.** *En las condiciones anteriores, necesariamente  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo M y  $[f_1, \dots, f_s]$  de tipo B.*

*Demostración.* Probaremos el resultado por contradicción. Por el Lema 5.7, necesariamente  $[e_1, \dots, e_r]$  y  $[f_1, \dots, f_s]$  son de tipo M, junto con  $e_1 = f_1 - 1$ . Llamando  $q = f_1 \geq 5$ , tenemos

$$\frac{\Delta}{\Omega} = \underbrace{[2, \dots, 2, q]}_{q-4} - 1 - [q-1, \underbrace{2, \dots, 2}]_{q-5}.$$

Acá necesariamente  $r = q - 4$ ,  $s = q - 3$ . En  $\tilde{X}_1$  tenemos una situación como la de la Figura 5.6, donde  $C_1^2 = \Gamma^2 = -1$ ,  $F_1^2 = -q$ ,  $E_1^2 = -(q-1)^2$ , y el resto de curvas tienen autointersección  $-2$ .

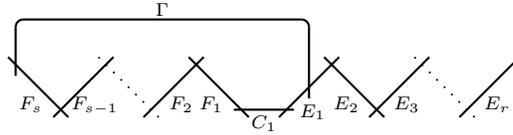


Figura 5.6: Situación en  $\tilde{X}_1$ , caso M-M.

Vigilaremos de cerca qué ocurre con la curva  $F_1$ . Por ahora, notemos que  $g(F_1) = g(\mathbb{P}^1) = 0$ , y así

$$K \cdot F_1 = -2 - F_1^2 = q - 2,$$

gracias a la fórmula de adjunción.

Como las curvas  $C_1$  y  $\Gamma$  son disjuntas, isomorfas a  $\mathbb{P}^1$  y de autointersección  $-1$ , podemos aplicar el criterio de Castelnuovo para contraerlas. Abusaremos de la notación y conservaremos los nombres de todas las curvas. La curva  $F_1$  interseca sólo a una de ellas, por lo que  $K \cdot F_1$  disminuye en 1 y  $F_1^2$  aumenta en 1. El mismo análisis puede realizarse con todas las otras curvas. Resulta una situación como la de la Figura 5.7, donde  $F_s^2 = -1$ ,  $F_1^2 = -(q-1)$ ,  $E_1^2 = -(q-3)$ , y el resto de curvas tiene autointersección  $-2$ .

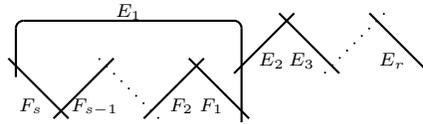


Figura 5.7: Situación luego de contraer  $\Gamma$  y  $C_1$ .

Como la curva  $F_1$  sufrió una contracción en un punto suave, la intersección con el divisor canónico disminuye en uno, obteniendo

$$K \cdot F_1 = (q - 2) - 1 = q - 3.$$

Podemos ahora aplicar el criterio de Castelnuovo para contraer la curva  $F_s$ , en cuanto sigue siendo suave e isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ . Esto disminuye en 1 la expresión  $K \cdot E_1$ , y aumenta en 1 los valores  $E_1^2$  y  $F_{s-1}^2$ . De este modo,  $F_{s-1}^2 = -1$ , y podemos contraerla. El proceso se repite para contraer  $F_{s-1}, \dots, F_2$ .

Al final, obtenemos la situación de la Figura 5.8, donde  $E_1^2 = -1$ ,  $F_1^2 = -(q-2)$ , y el resto de curvas tienen autointersección  $-2$ .

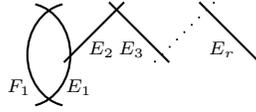


Figura 5.8: Situación luego de contraer  $F_2, \dots, F_s$ .

Como sólo la contracción de  $F_2$  afectó a  $F_1$ , obtenemos

$$K \cdot F_1 = (q-3) - 1 = q-4.$$

Podemos contraer ahora  $E_1$ . Esto convierte a la curva  $F_1$  en una curva nodal, en cuanto  $E_1$  y  $F_1$  intersectan en dos puntos. En particular,  $F_1$  es no contractible, y  $F_1^2 = -(q-2) + 4 = -(q-6)$ . Por otro lado, como la contracción de  $E_1$  genera un punto de multiplicidad 2 sobre  $F_1$ ,

$$K \cdot F_1 = (q-4) - 2 = q-6.$$

Obtenemos una situación como la de la Figura 5.9, donde  $E_2^2 = -1$ ,  $F_1^2 = -(q-6)$ , y el resto de curvas tienen autointersección  $-2$ .

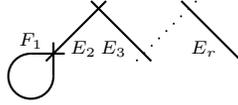


Figura 5.9: Situación luego de contraer  $E_1$

Podemos contraer  $E_2$ , luego  $E_3$ , y así hasta contraer  $E_r$ . Cada una de ellas pasa con multiplicidad 2 sobre  $F_1$ , y así

$$K \cdot F_1 = (q-6) - 2 \cdot (r-1) = (q-6) - 2(q-5) = 4-q < 0,$$

pues  $q \geq 5$ . Esto es una contradicción, lo que prueba lo pedido.  $\square$

Con el lema anterior, necesariamente la singularidad  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo M y  $[f_1, \dots, f_s]$  de tipo B. Podemos escribir así

$$[f_1, \dots, f_s] = [p, f_2, \dots, f_t, \underbrace{2, \dots, 2}_{p-2}],$$

donde  $t \geq 2$  en cuanto la singularidad era de tipo B. Eliminando los números 2 de la derecha, resulta que la singularidad

$$[2, f_2, \dots, f_t]$$

es de Wahl. Como tiene largo al menos dos, podemos preguntarnos si la reversa  $[f_t, \dots, f_2, 2]$  es de tipo M o de tipo B. Para los dos lemas siguientes, diremos que la singularidad  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo BM o BB, respectivamente.

**Lema 5.10.** *El caso donde  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo M y  $[f_1, \dots, f_s]$  de tipo BM no aporta con contraejemplos.*

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que sí hay. Llamando  $p = f_1 = e_1 - 1$  (por el Lema 5.7), podemos escribir

$$[e_1, \dots, e_r] = [p + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{p-3}]$$

y

$$[f_1, \dots, f_s] = [p, \underbrace{2, \dots, 2}_{q-5}, q, \underbrace{2, \dots, 2}_{p-2}],$$

donde  $q \geq 5$ , y hemos usado que  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo BM. Llamaremos por comodidad  $t = q - 3$  a la posición de la entrada  $q$ . Tenemos así una situación como en la Figura 5.10, donde  $E_1^2 = -(p+1)$ ,  $F_1^2 = -p$ ,  $F_t^2 = -q$ ,  $C_1^2 = \Gamma^2 = -1$ , y el resto tiene autointersección  $-2$ . Nos centraremos en estudiar  $F_t$ . Por ahora, la fórmula de adjunción nos garantiza que

$$K \cdot F_t = -2 - F_t^2 = q - 2,$$

pues  $F_t \cong \mathbb{P}^1$ .

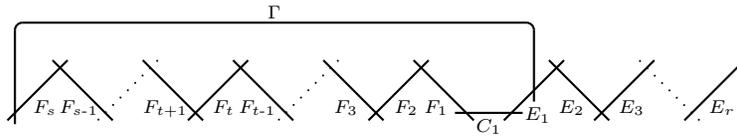


Figura 5.10: Situación inicial en  $\tilde{X}_1$ , caso M-BM.

Contraemos así las curvas  $\Gamma$  y  $C_1$ , que cambian la autointersección de  $E_1, F_1$  y  $F_s$  a  $E_1^2 = F_1^2 = -(p-1)$ ,  $F_s^2 = -1$ . El resto de curvas se mantienen igual que antes. En particular, seguimos teniendo  $K \cdot F_t = q - 2$ , y la situación es como muestra la Figura 5.11.

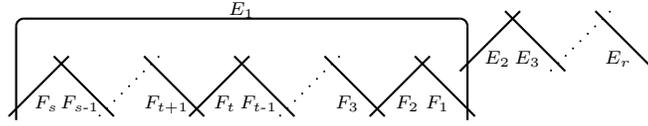


Figura 5.11: Situación al contraer  $\Gamma$  y  $C_1$ .

Podemos contraer la curva  $F_s$ , que aumenta la autointersección de  $E_1$  y de  $F_{s-1}$  en 1. De este modo  $F_{s-1}^2 = -1$ , y podemos contraerla también. Esto se repite hasta contraer  $F_{t+1}$ .

La situación actual, expresada en la Figura 5.12, tiene  $E_1^2 = -1$ ,  $F_1^2 = -(p-1)$ ,  $F_t^2 = -(q-1)$ , y el resto de curvas con autointersección  $-2$ .

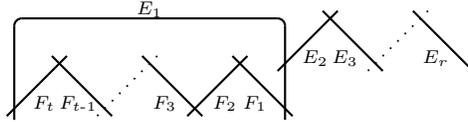


Figura 5.12: Situación al contraer  $F_t, \dots, F_{t+1}$ .

Sólo la última contracción realizada afecta a la curva  $F_t$ , a saber, el blow-down de  $F_{t+1}$ . Como fue realizada en un punto suave de manera transversal, resulta

$$K \cdot F_t = (q-2) - 1 = q-3.$$

Estamos ahora en condiciones de contraer  $E_1$ . Esto provoca un punto triple, donde concurrirán  $F_1, F_t$  y  $E_2$ . La intersección ahí sigue siendo transversal de pares, como muestra la Figura 5.13.

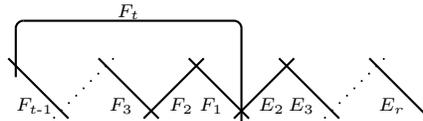


Figura 5.13: Situación al contraer  $E_1$ .

Obtenemos así  $F_1^2 = -(p-2)$ ,  $F_t^2 = -(q-2)$ ,  $E_2^2 = -1$ , y el resto de curvas tienen autointersección  $-2$ . Además, como la curva que se contrajo tocaba de manera transversal a  $F_t$  en un punto suave, resulta

$$K \cdot F_t = (q-3) - 1 = q-4.$$

Podemos ahora contraer  $E_2, E_3$ , y repetir sucesivamente hasta contraer  $E_r$ . La argumentación es análoga a cuando se contrajo  $F_s$ . No obstante, merece especial detención la situación de  $F_1$  y  $F_t$ .

Tanto  $F_1$  como  $F_t$  van a seguir siendo suaves, pues  $E_2, E_3, \dots, E_r$  serán transversales. Sin embargo, la intersección  $E_1 \cdot F_1$  aumentará en 1 por cada curva contraída. Al final, tendremos

$$F_1 \cdot F_t = 1 + (r - 1) = r = p - 2.$$

Cabe destacar que implícitamente estamos asumiendo  $q \geq 5$  para que  $F_1 \cap F_t$  consista solamente en un punto. Esto no generará problemas en el resultado final. La situación resulta como en la Figura 5.14.

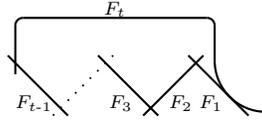


Figura 5.14: Luego de contraer  $E_2, \dots, E_r$ .

Por otro lado, tenemos  $F_1^2 = -(p - 2) + (p - 3) = -1$ , y

$$K \cdot F_t = (q - 4) - (p - 3) = q - p - 1.$$

Procedemos a contraer en orden las  $q-4$  curvas  $F_1, \dots, F_{t-1}$ . La primera produce una singularidad de multiplicidad  $p-3$  en  $F_t$ , que prohibirá su contractibilidad. Esto en particular disminuirá  $K \cdot F_t$  en  $p-3$ . El resto curvas contraídas pasan por la singularidad de manera transversal, por lo que disminuirán  $K \cdot F_t$  en la misma razón. La última pasa además de manera transversal por  $F_t$  en un segundo punto, por lo que disminuirá  $K \cdot F_t$  en  $(p-3) + 1$ . Obtenemos así

$$K \cdot F_t = (q - p - 1) - (q - 4)(p - 3) - 1.$$

Es importante explicitar que para  $q = 5$  el cálculo  $F_1 \cdot F_t$  no es correcto, pero esto se ve reflejado en el  $-1$  que aparece acá. De este modo, el argumento sigue resultando válido para  $F_t$ .

Esto provoca una contradicción, pues

$$K \cdot F_t = -(p - 4)(q - 3) - 2 < 0,$$

lo que concluye lo pedido.  $\square$

El último caso a verificar es completamente análogo al Lema 5.10, salvo que ahora  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo BB.

**Lema 5.11.** *El caso donde  $[e_1, \dots, e_r]$  es de tipo M y  $[f_1, \dots, f_s]$  de tipo BB no aporta con contraejemplos.*

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que sí lo hay. Llamando  $p = f_1 = e_1 - 1$  (por el Lema 5.7), podemos escribir

$$[e_1, \dots, e_r] = [p + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{p-3}]$$

y

$$[f_1, \dots, f_s] = [p, \underbrace{2, \dots, 2}_{q-3}, \dots, q, \underbrace{2, \dots, 2}_{p-2}],$$

donde  $q \geq 5$ , y hemos usado que  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo BB. Llamaremos por comodidad  $t = s - (p - 2)$  a la posición de la entrada  $q$ . Tenemos así una situación como en la Figura 5.15, donde  $E_1^2 = -(p + 1)$ ,  $F_1^2 = -p$ ,  $F_t^2 = -q$ ,  $C_1^2 = \Gamma^2 = -1$ . Además,  $E_i^2 = -2$  si  $i \geq 2$ ,  $F_j^2 = -2$  si  $2 \leq j \leq q - 2$  o  $j \geq t + 1$ . Las curvas  $\{F_{q-1}, \dots, F_{t-1}\}$  no serán relevantes para nuestro análisis (además de que hay al menos una, en cuanto  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo BB), y por ello no llevaremos registro de sus autointersecciones. Nos centraremos en estudiar  $F_t$ . Por ahora, la fórmula de adjunción nos garantiza que

$$K \cdot F_t = -2 - F_t^2 = q - 2,$$

pues  $F_t \cong \mathbb{P}^1$ .

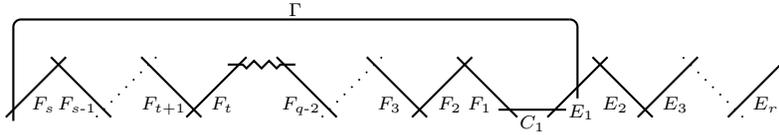


Figura 5.15: Situación inicial en  $\tilde{X}_1$ , caso M-BB.

Contraemos así las curvas  $\Gamma$  y  $C_1$ . Obtenemos la situación de la Figura 5.16, donde los únicos cambios son  $F_1^2 = E_1^2 = -(p - 1)$  y  $F_s^2 = -1$ .

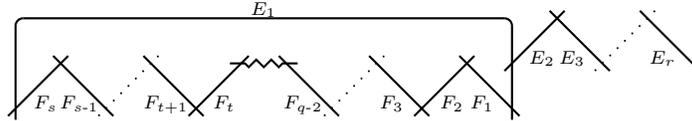


Figura 5.16: Situación luego de contraer  $\Gamma$  y  $C_1$ .

En particular, la curva  $F_t$  no fue afectada, por lo que seguimos teniendo  $K \cdot F_t = q - 2$ .

Contraemos ahora las  $p - 2$  curvas  $F_s, \dots, F_{t+1}$ . Sólo la última contracción afecta a  $F_t$ , por lo que obtenemos  $F_t^2 = -(q - 1)$  y  $K \cdot F_t = (q - 2) - 1 = q - 3$ . Además, resulta que  $E_1^2 = -1$ . La situación se muestra en la Figura 5.17

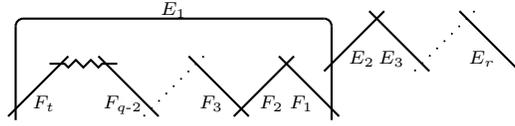


Figura 5.17: Situación al contraer  $F_s, \dots, F_{t+1}$ .

Podemos contraer ahora  $E_1$ , obteniendo la Figura 5.18, con un punto triple entre  $F_t, F_1$  y  $E_2$ . Además, ahora tenemos  $F_t^2 = -(q-2)$  y  $K \cdot F_t = (q-3) - 1 = q-4$ , junto con  $F_1^2 = -(p-2), E_2^2 = -1$ .

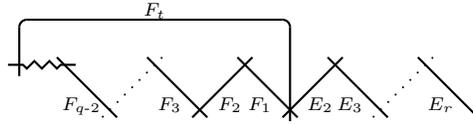


Figura 5.18: Situación al contraer  $E_1$ .

Ahora podemos contraer de a una las curvas  $E_2, E_3, \dots, E_r$ , pues  $E_3^2 = \dots = E_r^2 = -2$ . Esto genera una tangencia entre  $F_1$  y  $F_t$  a orden  $p-2$ , pues contrajimos  $p-3$  curvas transversales en la intersección. La situación se muestra en la Figura 5.19.

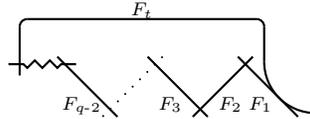


Figura 5.19: Situación al contraer  $E_2, \dots, E_r$ .

Cabe destacar que las curvas  $F_t$  y  $F_1$  siguen siendo suaves. Tenemos ahora  $F_2^2 = -1, F_3^2 = \dots = F_{q-2}^2 = -2$ , y

$$K \cdot F_t = (q-4) - (p-3) = q-p-1.$$

Contraemos ahora las curvas  $F_1, F_3, \dots, F_{q-2}$  de una en una. La primera es tangente a orden  $p-2$ , por lo que genera una singularidad de multiplicidad  $p-2$  en  $F_t$ . Las siguientes curvas pasan de manera transversal por ese punto singular. Así, cada una de las  $q-2$  curvas disminuye  $K \cdot F_t$  en  $p-2$ , obteniendo

$$K \cdot F_t = (q-p-1) - (q-2)(p-2) = -(p-3)(q-1) - 2.$$

Como  $p \geq 3, q \geq 5$ , se sigue que  $K \cdot F_t$  es negativa. Ahora bien,  $F_t$  no es contractible, en cuanto es singular. Esto demuestra lo pedido.  $\square$

### 5.3. Sólo flips

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 5.12.** *Sea  $Y$  una superficie proyectiva cuya resolución minimal no es reglada. Sea  $Q \in Y$  una singularidad de cociente cíclico, siendo el único punto singular en  $Y$ . Supongamos que  $Q$  admite dos  $P$ -resoluciones extremales  $f_i^+ : (C_i \subseteq X_i) \rightarrow (Q \in Y), i = 1, 2$ , de modo que se cumplen las siguientes propiedades.*

- *La curva excepcional  $C_1$  de la  $P$ -resolución  $X_1$  tiene autointersección  $-2$  (en la resolución minimal de  $X_1$ ), y tiene sólo una singularidad.*
- *$K_{X_2}$  es nef.*
- *Las dos  $P$ -resoluciones extremales y la superficie  $Y$  son fibras de suavizaciones  $F_i : (X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (Y \subseteq \mathcal{Y})$ , con  $(X_i \subseteq \mathcal{X}_i) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$   $\mathbb{Q}$ -Gorenstein.*

*Luego, al correr el MMP en  $\mathcal{X}_1$ , se necesitan sólo flips para obtener un divisor canónico nef.*

Antes de comenzar la demostración, vamos a extraer la mayor cantidad de información de  $P$ -resoluciones extremales con una singularidad de Wahl y una curva de autointersección  $-2$ , que no dependan de la existencia de otra  $P$ -resolución extremal. La razón fundamental de esto es que acá sí admitiremos que ocurran flips, lo que puede cambiar la situación en  $X_1$ .

**Lema 5.13.** *Sea  $X$  una superficie suave proyectiva que admite modelo minimal. Sea  $[b_1, \dots, b_r] = \frac{m^2}{ma-1}$  una singularidad de Wahl, y supongamos que  $X$  tiene una cadena de curvas racionales  $C, E_1, \dots, E_r$ , con  $C^2 = -2, E_i^2 = -b_i$ . Supongamos además que hay una  $(-1)$ -curva  $\Gamma$  que corta a  $E_i$  de manera transversal, y que corta a  $C$ . Luego,*

- (i)  $\Gamma$  debe cortar transversalmente a  $C$  en un punto;
- (ii)  $b_i \neq 2$ ;
- (iii)  $i \neq r$ .

*Demostración.* Notemos en primer lugar que podemos contraer la curva  $\Gamma$  en  $X$ , gracias al criterio de Castelnuovo. Con ello, e identificando cada curva con su imagen en el blow-down, la autointersección  $E_i^2$  aumenta en 1. Más aún, originalmente teníamos  $K \cdot C = 0$  (pues  $C$  es suave y de autointersección  $-2$ ); por el blow-down,  $K \cdot C$  disminuye en  $C \cdot \Gamma = m$ , que es al menos 1. Pero si  $m \geq 2$ , tendríamos que  $K \cdot C \leq -2$ , que sería una contradicción por la Proposición 2.7. Con ello, resulta que  $C \cdot \Gamma = 1$ , y así  $\Gamma$  interseca transversalmente a  $C$  en un único punto, lo que demuestra (i).

Para (ii), notemos que luego de contraer  $\Gamma$ , podemos contraer  $C$ , pues ahora  $C^2 = -1$ . Con ello, la autointersección de  $E_i$  debe haber aumentado en dos, y

así  $E_i^2 = b_i + 2$  a partir de ahora. Esto muestra que  $b_i \neq 2$ , pues en otro caso  $E_i^2$  sería cero, que daría una contradicción.

Por último, supongamos por contradicción que  $\Gamma$  corta a  $E_r$ . Como  $b_r \neq 2$ , tenemos tres casos.

- Si  $r = 1$ , entonces luego de contraer  $\Gamma$ , obtenemos una curva  $C$  de autointersección  $-1$  y una curva  $E_1$  de autointersección  $-3$ , que se cortan transversalmente en dos puntos. Tenemos que

$$K \cdot E_1 = -2 - E_1^2 = 1,$$

por la fórmula de adjunción. Al contraer  $C$ , la curva  $E_1$  queda con un nodo (por lo que no es contractible), y  $K \cdot E_1 = 1 - 2 = -1 < 0$ , lo que produce una contradicción.

- Si  $r \geq 1$  y  $[b_r, \dots, b_1]$  es de tipo M, el argumento es análogo al de [4], salvo que ahora la curva  $E_r$  sufre  $(r - 1) + 1 = r$  contracciones, por las curvas  $\Gamma, E_1, \dots, E_{r-1}$ .
- Si  $r \geq 1$  y  $[b_r, \dots, b_1]$  es de tipo B, la curva  $E_r$  va a sufrir  $(b_r - 1) + 1 = b_r$  contracciones, por la curva  $\Gamma$  y las curvas  $E_1, E_2, \dots, E_t$  (de manera análoga al caso anterior). Cada una de ellas aumenta  $E_r^2$  en uno, y así  $E_r^2 = 0$  luego de contraerlas todas. Esto produce una contradicción.

Esto muestra (iii), probando lo pedido.  $\square$

El siguiente lema muestra cómo una clase importante de curvas va a generar vecindades *mk1A flip*. Más aún, impone un cierto control a cómo será la *P-resolución extremal* obtenida.

**Lema 5.14.** *Sea  $X$  una superficie proyectiva no reglada con una única singularidad de Wahl  $P$ , y con una curva racional  $C$ . Supongamos que al resolver  $P$  con una cadena de curvas racionales  $E_1, \dots, E_r$ , la transformada estricta de  $C$  corta transversalmente a  $E_1$ , y  $C^2 = -2$ . Adicionalmente, consideremos una suavización  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein  $(X \subseteq \mathcal{X}) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$ .*

*Si  $\Gamma \subseteq X$  es una curva racional que corta a  $C$  e induce una vecindad *mk1A* con la singularidad  $P$ , entonces debe ser una vecindad *flip*. Más aún, la *P-resolución extremal* obtenida luego del *flip* debe tener una de las siguientes configuraciones.*

- *Dos singularidades de Wahl con una curva de autointersección  $-1$ .*
- *Una singularidad de Wahl con una curva de autointersección  $-2$ .*

*Demostración.* Denotemos a la singularidad  $(P \in X)$  por  $\frac{1}{n}(1, q)$ , donde  $\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_r]$  y  $E_i^2 = -b_i$ . En la resolución minimal de  $X$ , tenemos la situación de la Figura 5.20.

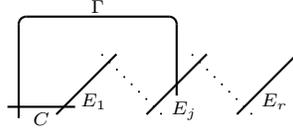


Figura 5.20: Situación en  $\tilde{X}$ .

La curva  $\Gamma$  es transversal en un punto a  $E_j$  al ser una vecindad mk1A, y gracias al Lema 5.13 ella también es transversal a  $C$  en un punto. En el entorno mk1A inducido por  $\Gamma$ , tenemos la información numérica

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [b_1, \dots, b_j - 1, \dots, b_r].$$

Ahora bien, por el Lema 5.13, tenemos que  $b_j \geq 3$ , y así esa es la resolución minimal  $\frac{\Delta}{\Omega}$ . Con ello, notemos que  $\sum_{i=1}^r b_i = 3r + 1$  al ser una singularidad de Wahl, y así

$$b_1 + b_2 + \dots + (b_i - 1) + \dots + b_r = 3r.$$

Con ello,  $\frac{\Delta}{\Omega}$  no puede ser una singularidad de Wahl, y así la Observación 4.15 nos dice que la vecindad es flip.

Para la última parte, el cálculo que hicimos arriba junto con la Observación 3.7 nos dice que la P-resolución obtenida debe tener dos singularidades de Wahl con una curva  $-1$ , o bien una singularidad de Wahl con una curva  $-2$ . Esto demuestra lo pedido.  $\square$

Estamos en condiciones de comenzar con la demostración del teorema. Llamaremos  $Z_1 := X_1$  a nuestra superficie original, y  $E_1, \dots, E_r$  a las curvas de la resolución minimal de  $X_1$  de modo que  $B_1 := C_1$  interseque a  $E_1$ .

Si  $K_{Z_1}$  es nef, no hay nada que probar. En caso contrario, debe haber un entorno mk1A/mk2A  $(\Gamma_1 \subseteq Z_1) \rightarrow (Q \in Y)$ . La curva  $\Gamma_1$  es negativa para  $K_{Z_1}$ , pero es positiva para  $K_{X_2}$ , pues  $K_{X_2}$  es nef por hipótesis. Con ello,  $\Gamma_1$  debe intersectar al menos a dos curvas provenientes de la P-resolución extremal en la resolución minimal de  $X_2$ .

Ahora bien, las curvas de la P-resolución extremal de  $X_2$  son  $B_1, E_1, \dots, E_r$  y quizá algunos blow-ups. Como  $\Gamma_1$  no puede estar tocando a las curvas excepcionales de los blow-ups (pues al contraer la curva  $\Gamma_1$  tocaría a alguno de los  $E_i$  en una intersección), necesariamente debe tocar al menos a dos de las curvas  $B_1, E_1, \dots, E_r$  (contando multiplicidad). Pero como  $\Gamma_1$  forma una vecindad mk1A, sólo puede tocar una vez a las curvas  $E_1, \dots, E_r$ . Resulta así que  $\Gamma_1$  debe intersectar a  $B_1$ , que por el Lema 5.13 debe intersectar de manera transversal. Tenemos una situación como en la Figura 5.21 en  $\tilde{Z}_1$ .

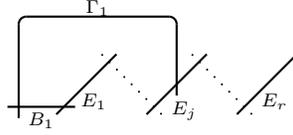


Figura 5.21: Situación en  $\tilde{Z}_1$ .

Aplica así el Lema 5.14, por lo que la vecindad es flip. Llamemos  $(B_2 \subseteq Z_2)$  al resultado del flip. En las resoluciones minimales, para pasar de  $\tilde{Z}_1$  a  $\tilde{Z}_2$ , es necesario contraer  $\Gamma$  y luego se hacen blow-ups (de ser requerido) para obtener las curvas de la nueva P-resolución extremal. En particular, obtenemos que la curva  $B_1$  pasa a tener autointersección  $-1$  en  $Z_2$ , y está cortando  $E_1$  y  $E_j$ .

Como consecuencia del Lema 5.14, tenemos tres posibles opciones.

- Las curvas  $[E_2, \dots, E_{i-1}, \dots, E_r]$  se contraen para formar una singularidad de Wahl, y  $E_1^2 = -2$  es la curva excepcional.
- Las curvas  $[E_1, \dots, E_{i-1}, \dots, E_{r-1}]$  se contraen para formar una singularidad de Wahl, y  $E_r^2 = -2$  es la curva excepcional.
- Luego de algunos blow-ups, obtenemos las curvas

$$G_t, \dots, G_1, B_2, F_1, \dots, F_s.$$

Las curvas  $[G_t, \dots, G_1]$  y  $[F_1, \dots, F_s]$  se contraen para formar singularidades de Wahl, y  $B_2^2 = -1$  es la curva excepcional.

Prestemos atención al primer caso. Si  $K_{Z_2}$  no fuera nef, tendríamos una vecindad  $(\Gamma_2 \subseteq Z_2)$  de tipo mk1A, pues  $Z_2$  tiene sólo una singularidad. En particular,  $\Gamma_2$  debe estar tocando sólo a una de las curvas  $E_2, \dots, E_r$  en la resolución minimal.

Ahora bien,  $\Gamma_2$  debe ser positiva en  $X_2$  para el divisor canónico. Igual que antes,  $\Gamma_2$  debe intersectar a dos curvas entre  $B_1, E_1, \dots, E_r$ . Pero ahora  $B_1^2 = -1$  en  $Z_2$ , por lo que  $\Gamma_2$  no puede intersectarla (a menos que sean la misma); en otro caso, luego de contraer  $\Gamma_2$  obtendríamos una  $B_1$  de autointersección no-negativa.

La situación así es análoga a la del inicio, y podemos repetir este procedimiento. Más aún, en este caso es posible chequear que  $\Gamma_2 = B_1$  (pues o si no  $E_1^2 = 0$  luego de contraer  $\Gamma_2$  y  $B_1$ ).

El segundo caso se trata igual que el primero, salvo que el comentario anterior ya no es válido. Al menos combinatorialmente es posible que la curva  $\Gamma_2$  esté tocando  $E_r$  y un  $E_k$  con  $2 \leq k \leq r-1$ .

Repitiendo esto, podemos llegar a una superficie  $Z_n$  con canónico nef, o podemos caer en el tercer caso. Por simplicidad notacional, supondremos que esta es la situación en  $Z_2$ , y conservaremos los nombres de las curvas de arriba. Tenemos una situación como en la Figura 5.22. Es importante recalcar que la

curva  $B_1$  está intersectando a alguna otra curva de la P-resolución extremal (la que correspondería a  $E_j$ ), pero no lo hemos señalado en la figura.

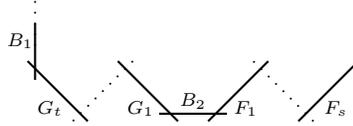


Figura 5.22: Situación del caso tres en  $\tilde{Z}_2$ .

Si  $K_{Z_2}$  no es nef, debe haber una curva  $\Gamma_2$  que induce un entorno mk1A o mk2A. Ahora bien,  $\Gamma_2$  debe ser positiva en  $X_2$ , por lo que debe estar tocando al menos a dos de las curvas  $B_1, E_1, \dots, E_r$ . Todas salvo  $B_1$  forman parte de las singularidades de  $Z_2$ , y como  $B_1^2 = -1$ , la curva  $\Gamma_2$  no puede intersectarla. Con ello,  $\Gamma_2$  toca a dos curvas de las singularidades, y debe estar induciendo un entorno mk2A.

Igual que en la sección anterior, a priori la curva  $\Gamma_2$  tiene cuatro opciones para intersectar: a la primera singularidad puede cortarla en  $F_1$  o  $F_s$ , y a la segunda en  $G_1$  o  $G_t$ . Para descartar estos casos, no tenemos el argumento de “pasar a la otra P-resolución extremal” que realizábamos en la sección anterior, pues no sabemos si hay dos para  $[g_t, \dots, g_1, 1, f_1, \dots, f_s]$  (e incluso si hubiese, no sabemos si la superficie obtenida tiene canónico positivo). El argumento es más complicado pero sigue funcionando. Es clave la existencia de  $B_1$  (o de  $B_{n-1}$  si estamos aplicando este argumento para  $Z_n$ ).

**Lema 5.15.** *En las condiciones anteriores,  $\Gamma_2$  no puede estar intersectando a  $F_s$  y  $G_t$ .*

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que sí está intersectando a  $F_s$  y  $G_t$ . La curva  $B_1$  no puede estar tocando  $F_s$  (pues  $\Gamma_1$  no lo hacía, gracias al Lema 5.13. De este modo, las dos curvas  $B_1$  y  $\Gamma_2$  son distintas. Tenemos así una situación como en la Figura 5.23.

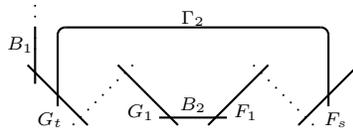


Figura 5.23: Situación del caso tres en  $\tilde{Z}_2$ .

Notemos que  $g_t \geq 3$ , pues en otro caso podríamos contraer  $B_1$  y  $\Gamma_2$  para obtener una curva de autointersección no-negativa. Con ello, necesariamente  $f_s = 2$ , pues en otro caso la curva  $\Gamma_2$  sería positiva (pues estaría tocando a las

dos curvas de los extremos de las singularidades con autointersección  $\neq -2$ ). En particular, esto muestra que  $s \geq 2$ .

Veamos ahora que si  $t = 1$  (y con ello  $g_t = 4$  al ser de Wahl), al contraer  $B_1, B_2, \Gamma_2$  la curva  $G_t$  pasa a tener autointersección  $-1$ , al igual que  $F_s$ . Como ahora ambas se intersectan, esto genera una contradicción. Necesariamente así  $t \geq 2$ , y con ello  $g_1 = 2$ .

Llamando  $p = f_1, q = g_t$ , y  $\{k_1, \dots, k_s\}, \{l_1, \dots, l_t\}$  a las discrepancias respectivas, tenemos los siguientes cuatro casos.

- Si  $[f_1, \dots, f_s]$  y  $[g_t, \dots, g_1]$  son de tipo B, entonces hay  $p - 1$  curvas  $-2$  a partir de  $F_s$ . Con ello, la curva  $G_t$  sufrirá  $p - 1 + 2 = p + 1$  contracciones, gracias a  $B_1, \Gamma_2$ , y todas las curvas  $-2$  que vienen de  $F_s$ . De esta manera, necesariamente  $q \geq p + 2$  para no producir una curva de autointersección no-negativa.

Utilizando el Lema 5.6, obtenemos que

$$K \cdot \Gamma_2 = -1 - k_s - l_t > -1 + \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q-1} = \frac{q-p-1}{p(q-1)}.$$

Como  $q \geq p + 2$ , esto es positivo, que contradice  $K \cdot \Gamma_2 < 0$ .

- Si  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo B y  $[g_t, \dots, g_1]$  es de tipo M, seguimos teniendo  $p - 1$  curvas  $-2$  a partir de  $F_s$ , y con ello  $q \geq p + 2$  de la misma manera que en el caso anterior. El Lema 5.6 nos da en este caso

$$K \cdot \Gamma_2 = -1 - k_s - l_t > -1 + \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q-2} = \frac{q-p-2}{p(q-2)} \geq 0,$$

pues  $q \geq p + 2$ . Nuevamente, esto contradice que  $K \cdot \Gamma_2 < 0$ .

- Si  $[f_1, \dots, f_s]$  es de tipo M y  $[g_t, \dots, g_1]$  es de tipo B, tenemos  $p - 4$  curvas  $-1$  a partir de  $F_s$ . Con ello,  $q > p - 4 + 2 = p - 2$ , igual que antes. Esto implica  $q \geq p - 1$ . Obtenemos

$$K \cdot \Gamma_2 = -1 - k_s - l_t > -1 + \frac{1}{p-2} + 1 - \frac{1}{q-1} = \frac{q+1-p}{(p-2)(q-1)} \geq 0,$$

gracias a que  $q \geq p - 1$ . Esto contradice  $K \cdot \Gamma_2 < 0$ .

- Si  $[f_1, \dots, f_s]$  y  $[g_t, \dots, g_1]$  son de tipo M, tenemos igual que en el caso anterior  $q \geq p - 1$ . Calculando

$$K \cdot B_2 = -1 + k_1 + l_1 = -\frac{1}{p-2} + \frac{1}{q-2} = \frac{p-q}{(p-2)(q-2)}.$$

Como  $K \cdot B_2 > 0$ , necesariamente  $p > q$ .

Ahora bien, en este caso la curva  $G_t$  de hecho recibe al menos  $p - 4 + 3 = p - 1$  contracciones, pues al contraer  $B_2$ , y sucesivamente  $G_1, \dots, G_{t-1}$ , esta última toca a  $G_t$ . De este modo, tenemos  $q > p - 1$ , lo que implica  $q \geq p$ . Esto da una contradicción con lo anterior.

En todos los casos llegamos a una contradicción, lo que demuestra lo pedido.  $\square$

Como la curva  $\Gamma_2$  tampoco puede estar intersectando en  $F_1$  y  $G_1$  (pues  $K \cdot \Gamma_2 = K \cdot B_2 > 0$  en ese caso), tenemos que  $\Gamma_2$  debe intersectar a  $F_1$  y  $G_t$ , o a  $F_s$  y  $G_1$ . Podemos continuar la demostración de la sección anterior desde el Lema 5.4, pues desde ese punto ya no se utiliza la existencia de una segunda P-resolución extremal. Esto muestra que no existe una curva  $\Gamma_2$  que induzca una vecindad mk2A.

En resumen, probamos que a partir de la situación original, sólo pueden ocurrir flips en vecindades mk1A. Si en algún momento llegamos a una P-resolución extremal con dos singularidades, la superficie no tiene curvas negativas y obtenemos un divisor canónico nef. De otra forma, repetimos hasta que no haya curvas negativas. Esto prueba lo buscado.

## 5.4. Preguntas a futuro

En esta sección dejamos detalladas algunas preguntas sin responder, que pueden ser abordadas en futuros trabajos.

### 5.4.1. Acotar flips

Una primera pregunta que dejamos abierta es acotar la cantidad de flips que requiere el Teorema 5.12. De la demostración puede extraerse que se requieren a lo más  $r - 1$  flips, donde  $r$  es el largo de la resolución minimal de la singularidad. La demostración es inductiva, donde el caso base  $r = 1$  corresponde a la P-resolución extremal 2 - [4], que no admite flips.

El Ejemplo 5.1 muestra que hay situaciones donde se requiere un flip. Es interesante estudiar si hay una cota de la cantidad de flips independiente de  $r$ , o si hay cotas mejores que  $r - 1$ .

### 5.4.2. Estudiar casos de autointersección menor

La siguiente pregunta a resolver es mirar las otras P-resoluciones extremales, con curvas de autointersección menor. Gracias a la Observación 3.7, el primer caso no resuelto son P-resoluciones de las dos siguientes formas.

- Una singularidad de Wahl con una curva de autointersección  $-3$ .
- Dos singularidades de Wahl con una curva de autointersección  $-2$ .

No obstante, en estos casos es posible dar contraejemplos combinatoriales; esto es, desconocemos si son realizables en una superficie.

**Ejemplo 5.16.** Consideremos la cadena de nueve curvas racionales  $E_1, \dots, E_9$ , donde  $E_i^2 = -e_i$  en  $Z$ , y

$$[e_1, \dots, e_9] = [5, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 5].$$

Supongamos además que hay una curva racional  $\Gamma$  de autointersección  $-1$  que interseca a  $E_1$  en dos puntos de manera transversal.

Veamos primero que la superficie no esconde una contradicción. Notar que, luego de contraer  $\Gamma$ , las curvas  $E_2, \dots, E_9$  son positivas para el divisor canónico, por la fórmula de adjunción (y gracias a que son suaves y  $E_i^2 \leq -2$ ). La curva  $E_1$  satisface

$$K' \cdot E_1 = K \cdot E_1 - 2 = (-2 + 5) - 2 = 1 > 0.$$

Esto muestra que la superficie  $Z'$  obtenida al contraer  $\Gamma$  tiene divisor canónico nef.

Volviendo a  $Z$ , la cadena  $E_1, \dots, E_9$  admite dos P-resoluciones extremales posibles.

- Podemos contraer  $E_8, \dots, E_1$  a un punto  $P_1$ , obteniendo la superficie  $X_1$ . La curva  $\Gamma$  satisface ahora

$$K \cdot \Gamma = -1 - \left(-1 + \frac{5}{23}\right) \cdot 2 = 1 - \frac{10}{23} = \frac{13}{23} > 0,$$

por lo que es positiva. Ya que estamos suponiendo que son las únicas curvas, resulta una superficie con  $K_{X_1}$  nef.

- Podemos contraer  $E_2, \dots, E_9$  a un punto  $P_2$ , obteniendo la superficie  $X_2$ . La curva  $\Gamma$  es ahora contractible, y produce una curva  $E_1$  con una singularidad nodal al contraer. En esta nueva superficie  $X_3$ ,

$$K_{X_3} \cdot E_1 = K_{\tilde{X}_3} \cdot E_1 - \left(-1 + \frac{18}{23}\right) = \frac{28}{23},$$

pues de hecho  $Z' = \tilde{X}_3$ . Tuvimos así que hacer una contracción divisorial (al contraer  $\Gamma$ )

Con ello, obtenemos una contradicción.

*Observación 5.17.* Si  $n \geq 3$ , tenemos un contraejemplo similar considerando

$$[n + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_n, n + 5, \underbrace{2, \dots, 2}_n, n + 2],$$

y una curva  $\Gamma$  de autointersección  $-1$  que corte a la primera con multiplicidad  $n - 1$ .

De este modo, hay dos posibles cursos de acción.

- Lograr realizar estos contraejemplos en superficies que puedan suavizarse. La pregunta interesante entonces es intentar clasificar estos contraejemplos, o ver para qué tipo de P-resoluciones extremales no hay contraejemplos. Para el caso de dos singularidades de Wahl con una curva  $-2$ , o una singularidad de Wahl con una curva  $-3$  no tenemos ejemplos combinatoriales, por lo que sería el primer caso a analizar.

- Probar que estos contraejemplos no son realizables en superficies que puedan suavizarse. Las técnicas que se utilicen para descartar esos contraejemplos podrían intentar adaptarse para imponer más restricciones en las superficies. Esto podría utilizarse para probar la existencia de agujeros de gusano en total generalidad.

# Apéndice A

## Implementaciones computacionales

Las siguientes secciones incluyen algunos códigos en Python relativos a distintas secciones del documento. Todos los códigos están verificados para funcionar con Python 3.6, y pueden obtenerse en <https://colab.research.google.com/drive/1LAVmY0shb1d6PxD6ncHH4I0pjEEJ0k1g>.

### A.1. El algoritmo de Mori

En la Sección 4.6 se presentó el algoritmo de Mori, con el que es posible identificar y realizar el flip o contracción divisorial asociado a una vecindad  $mk1A/mk2A$ .

El siguiente programa permite obtener el flip/contracción divisorial asociado a una vecindad  $mk2A$ . Más precisamente, comenzamos con una configuración

$$[f_{s_2}, \dots, f_1] - 1 - [e_1, \dots, e_{s_1}],$$

donde

$$[e_1, \dots, e_{s_1}] = \frac{m_1^2}{m_1 a_1 - 1}, \quad [f_1, \dots, f_{s_2}] = \frac{m_2^2}{m_2 a_2 - 1}$$

Asumiremos que  $m_1 > m_2$ , sin pérdida de generalidad. El Programa A.1 permite recuperar el flip o contracción divisorial asociado.

```
1 def expandir(n, q):
2     if n%q == 0:
3         return [n//q]
4     else:
5         a = n//q +1
6         return [a]+expandir(q, a*q-n)
7
8 m1 = int(input("Inserte m1: "))
9 a1 = int(input("Inserte a1: "))
10 m2 = int(input("Inserte m2: "))
```

```

11 a2 = int(input("Inserte a2: "))
12
13 delta = m1*a2+m2*a1-m1*m2
14
15 ladoizq = ""
16 ladoder = ""
17
18 if m1 != 1:
19     ladoder = "-" + str(expandir(m1**2, m1*a1-1))
20 if m2 != 1:
21     ladoizq = str(expandir(m2**2, m2*(m2-a2)-1)) + "-"
22
23 print("La vecindad mk2A es", ladoizq+"1"+ladoder)
24
25 print("El valor de delta asociado es", delta)
26
27
28
29 d = {1: m1, 2: m2}
30 c = {1: a1, 2: m2-a2}
31
32 i = 2
33 while True:
34     if d[i] <= 0:
35         break
36     i += 1
37     d[i] = delta*d[i-1] - d[i-2]
38     c[i] = delta*c[i-1] - c[i-2]
39
40 if d[i] == 0:
41     print("Estamos en la situacion divisorial")
42     print("La singularidad asociada es 1/" + str(delta**2) + "(1, " + str(
43         c[i-1]-2) + ")")
44 else:
45     print("Estamos en la situacion flip")
46     m1prima = d[i-1]
47     m2prima = -d[i]
48     a1prima = c[i-1]
49     a2prima = c[i]%m2prima
50     if m1prima == 1:
51         a1prima = 1
52     if m2prima == 1:
53         a2prima = 1
54     ladoizq = ""
55     ladoder = ""
56     if m1prima != 1:
57         ladoder = "-" + str(expandir(m1prima**2, m1prima*a1prima-1))
58     if m2prima != 1:
59         ladoizq = str(expandir(m2prima**2, m2prima*(m2prima-a2prima)
60             -1)) + "-"
61     print("Los valores de m1', a1' son", m1prima, a1prima)
62     print("mientras que m2', a2' son", m2prima, a2prima)
63     c = (delta+m1prima*a2prima+m2prima*a1prima)/(m1prima*m2prima)
64     print("La autointerseccion de la curva asociada es -" + str(c))
65     print("La situacion es", ladoizq+str(c)+ladoder)

```

Programa A.1: El algoritmo de Mori mk2A

Para vecindades mk1A la situación es similar. Comenzamos con

$$[e_1, \dots, e_{i-1}, \overline{e_i}, e_{i+1}, \dots, e_s] = \frac{m^2}{m \cdot a - 1},$$

donde la barra indica una curva  $-1$  cortando transversalmente a la curva  $e_i$  en un punto. El programa determina la situación de flip o contracción divisorial, e indica el resultado correspondiente.

```

1 def expandir(n, q):
2     if n%q == 0:
3         return [n//q]
4     else:
5         a = n//q +1
6         return [a]+expandir(q, a*q-n)
7
8 def sumar(lista):
9     if lista == None:
10        return 1, 1
11    if len(lista) == 0:
12        return 1, 1
13    if len(lista) == 1:
14        return lista[0], 1
15    else:
16        a, b = sumar(lista[1:])
17        if a<=0:
18            return -1, 0
19        else:
20            return lista[0]*a-b, a
21
22 m = int(input("Inserte m: "))
23 a = int(input("Inserte a: "))
24
25 sing = expandir(m**2, m*a-1)
26
27 print("La singularidad original es", sing)
28 posi = int(input("Inserte la posicion de la curva -1: "))-1
29
30 if posi == 0:
31     mitadizq = []
32 else:
33     mitadizq = sing[:posi]
34 if posi == len(sing)-1:
35     mitadder = []
36 else:
37     mitadder = sing[(posi+1):]
38     mitadder.reverse()
39
40 m1, a1 = sumar(mitadder)
41 m2, a2 = sumar(mitadizq)
42
43 if m1 == 1:
44     a1 = 1
45 else:
46     a1 = m1-a1
47 if m2 == 1:
48     a2 = 1

```

```

49 else:
50     a2 = m2-a2
51
52 if m1>m:
53     delta = -m1*a+m*a1
54     print("El valor de delta es", delta)
55     d = {1: m1, 2: m}
56     c = {1: a1, 2: a}
57
58     i = 2
59     while True:
60         if d[i] <= 0:
61             break
62         i += 1
63         d[i] = delta*d[i-1] - d[i-2]
64         c[i] = delta*c[i-1] - c[i-2]
65
66     if d[i] == 0:
67         print("Estamos en la situacion divisorial")
68         print("La singularidad asociada es 1/"+str(delta**2)+"(1, "
+str(c[i-2]-2)+")")
69     else:
70         print("Estamos en la situacion flip")
71         m1prima = d[i-1]
72         m2prima = -d[i]
73         a1prima = c[i-1]
74         a2prima = c[i]%m2prima
75         if m1prima == 1:
76             a1prima = 1
77         if m2prima == 1:
78             a2prima = 1
79         ladoizq = ""
80         ladoder = ""
81         if m1prima != 1:
82             ladoder = "-" +str(expandir(m1prima**2, m1prima*a1prima-1)
)
83         if m2prima != 1:
84             ladoizq = str(expandir(m2prima**2, m2prima*(m2prima-
a2prima)-1))+ "-"
85         print("Los valores de m1', a1' son", m1prima, a1prima)
86         print("mientras que m2', a2' son", m2prima, a2prima)
87         c = (delta+m1prima*a2prima+m2prima*a1prima)/(m1prima*
m2prima)
88         print("La autointerseccion de la curva asociada es -"+str(c
))
89         print("La situacion es", ladoizq+str(c)+ladoder)
90 if m2>m:
91     delta = m2*a+m*a2-m*m2
92     print("El valor de delta es", delta)
93     d = {1: m2, 2: m}
94     c = {1: a2, 2: m-a}
95
96     i = 2
97     while True:
98         if d[i] <= 0:
99             break
100        i += 1

```

```

101     d[i] = delta*d[i-1] - d[i-2]
102     c[i] = delta*c[i-1] - c[i-2]
103
104     if d[i] == 0:
105         print("Estamos en la situacion divisorial")
106         print("La singularidad asociada es 1/"+str(delta**2)+"(1, "
+str(delta*(delta-c[i-1])-1)+")")
107     else:
108         print("Estamos en la situacion flip")
109         m2prima = d[i-1]
110         m1prima = -d[i]
111         a2prima = c[i-1]
112         a1prima = c[i]%m1prima
113         if m2prima == 1:
114             a2prima = 1
115         if m1prima == 1:
116             a1prima = 1
117         ladoizq = ""
118         ladoder = ""
119         if m1prima != 1:
120             ladoder = "-" + str(expandir(m1prima**2, m1prima*a1prima-1)
)
121         if m2prima != 1:
122             ladoizq = str(expandir(m2prima**2, m2prima*(m2prima-
a2prima)-1))+ "-"
123         print("Los valores de m1', a1' son", m1prima, a1prima)
124         print("mientras que m2', a2' son", m2prima, a2prima)
125         c = (delta+m1prima*a2prima+m2prima*a1prima)/(m1prima*
m2prima)
126         print("La autointerseccion de la curva asociada es -"+str(c
))
127         print("La situacion es", ladoizq+str(c)+ladoder)

```

Programa A.2: El algoritmo de Mori mk1A

## A.2. Familias de vecindades mk1A/mk2A

Dada una P-resolución extremal

$$[f_{s_2}, \dots, f_1] - c - [e_1, \dots, e_s],$$

con

$$\frac{m_1^2}{m_1 a_1 - 1} = [e_1, \dots, e_{s_1}], \quad \frac{m_2^2}{m_2 a_1 - 1} = [f_1, \dots, f_{s_2}],$$

el siguiente código encuentra todas las vecindades mk1A/mk2A flip que producen dicha P-resolución extremal,

$$[c_{r_2}, \dots, c_1] - [b_1, \dots, b_{r_1}], \quad [a_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, a_s],$$

que cumplen además que el numerador de la mitad derecha es más grande que la de la izquierda.

El código pide los valores de  $m_1, m_2, a_1, a_2$ , y un largo  $n$ . Devuelve  $n$  singularidades distintas; tomando dos de ellas consecutivas obtenemos una vecindad

mk2A. Además, desde la segunda singularidad en adelante obtenemos un número extra, que representa la posición marcada de una vecindad mk1A.

```

1 def expandir(n, q):
2     if n%q == 0:
3         return [n//q]
4     else:
5         a = n//q +1
6         return [a]+expandir(q, a*q-n)
7
8 m1 = int(input("Inserte m1: "))
9 a1 = int(input("Inserte a1: "))
10 m2 = int(input("Inserte m2: "))
11 a2 = int(input("Inserte a2: "))
12 autocurva = int(input("Inserte c: "))
13
14 delta = autocurva*m1*m2-m1*a2-m2*a1
15
16 ladoizq = ""
17 ladoder = ""
18
19 if m1 != 1:
20     ladoder = "-" +str(expandir(m1**2, m1*a1-1))
21 if m2 != 1:
22     ladoizq = str(expandir(m2**2, m2*(m2-a2)-1))+"-"
23
24 print("La P-resolucion extremal es", ladoizq+str(autocurva)+ladoder
25 )
26
27 print("El valor de delta asociado es", delta)
28
29 k = int(input("Inserte cantidad de singularidades a producir: "))
30
31 if m1==1:
32     d = {1: -m2, 2:1}
33     c = {1: -delta, 2:0}
34 else:
35     d = {1: -m2, 2:m1}
36     c = {1: -autocurva*m2+a2, 2:a1}
37
38 for i in range(0, k):
39     d[i+3] = delta*d[i+2]-d[i+1]
40     c[i+3] = delta*c[i+2]-c[i+1]
41
42 if m1 == 1:
43     pos = 1
44 else:
45     print(expandir(d[2]**2, d[2]*c[2]-1))
46     pos = len(expandir(d[2], c[2]))+1
47
48 for i in range(0, k-1):
49     print(expandir(d[i+3]**2, d[i+3]*c[i+3]-1), pos)
50     pos = len(expandir(d[i+3], c[i+3]))+1

```

Programa A.3: Familias de vecindades mk1A/mk2A

# Bibliografía

- [Ale94] Valery Alexeev, *Boundedness and  $K^2$  for log surfaces*, *Internat. J. Math.* **5** (1994), no. 6, 779–810, DOI 10.1142/S0129167X94000395. MR1298994
- [Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. MR1406314
- [DM69] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **36** (1969), 75–109. MR262240
- [DRU20] Eduardo Diaz, Carlos Rito, and Giancarlo Urzúa, *On degenerations of  $\mathbb{Z}/2$ -Godeaux surfaces* (2020), preprint, available at arXiv:2002.08836.
- [Jun08] H. W. E. Jung, *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen  $x, y$  in der Umgebung einer Stelle  $x = a, y = b$* , *J. Reine Angew. Math* **133** (1908), 289–314, DOI 10.1515/crll.1908.133.289 (German). MR1580742
- [HTU17] Paul Hacking, Jenia Tevelev, and Giancarlo Urzúa, *Flipping surfaces*, *J. Algebraic Geom.* **26** (2017), no. 2, 279–345, DOI 10.1090/jag/682. MR3606997
- [Gie77] D. Gieseker, *Global moduli for surfaces of general type*, *Invent. Math.* **43** (1977), no. 3, 233–282, DOI 10.1007/BF01390081. MR498596
- [Hir53] Friedrich Hirzebruch, *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen*, *Math. Ann.* **126** (1953), 1–22, DOI 10.1007/BF01343146 (German). MR62842
- [HM98] Joe Harris and Ian Morrison, *Moduli of curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 187, Springer-Verlag, New York, 1998. MR1631825
- [Ish18] Shihoko Ishii, *Introduction to singularities*, Springer, Tokyo, 2018. Second edition of [MR3288750]. MR3838338
- [KM92] János Kollár and Shigefumi Mori, *Classification of three-dimensional flips*, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 3, 533–703, DOI 10.2307/2152704. MR1149195
- [KM98] ———, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959
- [KSB88] J. Kollár and N. I. Shepherd-Barron, *Threefolds and deformations of surface singularities*, *Invent. Math.* **91** (1988), no. 2, 299–338, DOI 10.1007/BF01389370. MR922803
- [LW86] Eduard Looijenga and Jonathan Wahl, *Quadratic functions and smoothing surface singularities*, *Topology* **25** (1986), no. 3, 261–291, DOI 10.1016/0040-9383(86)90044-3. MR842425

- [Mor02] Shigefumi Mori, *On semistable extremal neighborhoods*, Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997), Adv. Stud. Pure Math., vol. 35, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 157–184, DOI 10.2969/aspm/03510157. MR1929794
- [Mum61] David Mumford, *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **9** (1961), 5–22. MR153682
- [OW77] P. Orlik and P. Wagreich, *Algebraic surfaces with  $k^*$ -action*, Acta Math. **138** (1977), no. 1-2, 43–81, DOI 10.1007/BF02392313. MR0460342
- [Rie74] Oswald Riemenschneider, *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*, Math. Ann. **209** (1974), 211–248, DOI 10.1007/BF01351850 (German). MR367276
- [Sta15] Richard P. Stanley, *Catalan numbers*, Cambridge University Press, New York, 2015. MR3467982
- [Ste91] Jan Stevens, *On the versal deformation of cyclic quotient singularities*, Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989), Lecture Notes in Math., vol. 1462, Springer, Berlin, 1991, pp. 302–319, DOI 10.1007/BFb0086390. MR1129040
- [Urz16a] Giancarlo Urzúa, *Identifying neighbors of stable surfaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **16** (2016), no. 4, 1093–1122. MR3616327
- [Urz16b] ———,  *$\mathbb{Q}$ -Gorenstein smoothings of surfaces and degenerations of curves*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **136** (2016), 111–136, DOI 10.4171/RSMUP/136-9. MR3593546
- [Wah81] Jonathan Wahl, *Smoothings of normal surface singularities*, Topology **20** (1981), no. 3, 219–246, DOI 10.1016/0040-9383(81)90001-X. MR608599