PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPIEDADES DE LOS MÍNIMOS DEL FUNCIONAL DE LANDAU DE GENNES EN UN DOMINIO DOS DIMENSIONAL

por

LUIS ALFREDO CID CABRERA

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Catlica de Chile para optar al grado de Magister en Matemáticas.

Profesor Guía: José Alberto Montero Zarate

Comisión Informante: Duvan Alberto Henao Manrique
Carlos Felipe Jerez Hanckes

Diciembre, 2016
Santiago, Chile

Agradecimientos

Mi más sentido agradecimiento al profesor Montero por haber estado presente siempre, dedicándome su apoyo incondicional, conocimiento y abrirme un mundo de matemáticas.

A los profesores Raykov y Duvan Henao, por sus sólidos y completos cursos de ecuaciones en derivadas parciales y análisis funcional, sin lugar a duda fueron la base de mis intereses matemáticos que tengo en el futuro.

A mi familia y amigos por ser mi apoyo emocional, en especial a mi gran amigo Jona que ya no está con nosotros pero vivirá por siempre en mi memoria, que Dios te tenga en su santo reino hermanable.

Finalmente, agradezco a CONICYT que gracias a su programa de becas de magíster en Chile pude estudiar sin tener preocupaciones financieras.

Índice general

Introducción

Este trabajo se basa en el estudio de los mínimos del funcional de Landau de Gennes en un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sujetos a un dato de frontera $g : \partial\Omega \to \mathcal{N}$, donde $\mathcal{N}$ es una variedad que es diferenciable, compacta y difeomorfa al plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$.

El funcional de Landau de Gennes es

$$E_\epsilon(u, \Omega) = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{f(u)}{\epsilon^2} \right), \tag{1}$$

donde el dominio de E_ϵ son las funciones u definidas sobre Ω que toman valores en el conjunto de matrices simétricas de 3×3 que tienen traza nula, denotado por S_0, y cumplen con la condición $u = g$ en $\partial\Omega$. La función $f : S_0 \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(Q) = -\frac{a}{2} \operatorname{tr} Q^2 - b \operatorname{tr} Q^3 + c(\operatorname{tr} Q^2)^2,$$

donde a, b y c son constantes estrictamente positivas. Este funcional representa un modelo simplificado de la distribución de la energía de un cristal líquido nemático. Nos centraremos en el estudio de los mínimos y de las propiedades de estos cuando $\epsilon \to 0^+$.

Analizando los dos términos de la energía (1), existen dos observaciones a destacar. Por un lado, el término $f\epsilon^{-2}$ adquiere mayor importancia a medida que ϵ tiende a cero, por lo que es de esperar que los mínimos estén tomando valores cerca del conjunto de minimizadores de f, el cual es la variedad $\mathcal{N}$. Por otro lado, el término $|\nabla u|^2$ penaliza las inhomogeneidades de u.

Vía argumentos clásicos de existencia y regularidad, es posible mostrar que el funcional (1) posee mínimos u_ϵ y que son continuos. Si asumimos que $g : \partial\Omega \to \mathcal{N}$ es no contractible y suave, la hipótesis de Ω simplemente conexo imposibilita que $u_\epsilon(\Omega) \subset \mathcal{N}$. Esto hace que en el límite cuando $\epsilon \to 0$ existan defectos topológicos, más precisamente, la aparición de puntos donde la energía de los mínimos de 1 tiende a concentrarse.

Este documento se divide fundamentalmente en dos partes. La primera se encuentra en el capítulo 3, el cual se centra en el estudio de los valores propios de u_ϵ. El resultado principal es el teorema 2. Se muestra que bajo ciertas hipótesis del potencial f, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$ el mínimo u_ϵ contiene algún punto $y \in \Omega$, donde $u_\epsilon(y)$ tiene los tres valores propios diferentes. Por otro lado, el capítulo (4) describe algunas propiedades de los mínimos de (1) cuando $\epsilon \to 0^+$. El resultado fundamental es el teorema 4, en el cual se identifican los puntos donde se concentra la energía, más aún, se demuestra que a través de una sucesión $\epsilon_n \to 0$ sólo existe un único punto $a \in \Omega$ donde esto ocurre, y que la energía tiende a infinito cuando $\epsilon_n \to 0$ con orden $|\ln \epsilon_n|$. Además, se muestra que existe un mapeo armónico $u_0 : \Omega \setminus \{a\} \to \mathcal{N}$ tal que $u_{\epsilon_n} \to u_0$ cuando $\epsilon_n \to 0$ en ciertas topologías.

Capítulo 1

Notaciones y resultados preliminares.

1.1. Notaciones.

A lo largo de este trabajo se usarán las siguientes notaciones:

- Se denotará por Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ abierto, acotado y simplemente conexo.
- La bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ será denotada por $B(x,r)$. Su clausura se escribirá $\overline{B(x,r)}$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$. Su producto escalar será denotado por $a \cdot b$, el producto vectorial por $a \times b$ y el largo de a por $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.
- Se denotará por $M_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices de 3×3 con coeficientes reales.
- Denotemos por $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x|| = 1\}$.
- Para $m \in \mathbb{R}^3$, su producto tensorial es la matriz $(m \otimes m)_{i,j} = (m_i m_j)$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- Para una variedad diferenciable $\mathcal{N}$ inmersa en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 5)$ y $p \in \mathcal{N}$, su espacio tangente se escribirá $T_p\mathcal{N}$, y su ortogonal por $(T_p\mathcal{N})^{\perp}$.
- Denotemos por S_0 el espacio vectorial de las matrices simétricas de 3×3 que tienen traza nula dotado del producto interno $A : B = \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$ con $A, B \in S_0$.

El largo de la matriz A se escribirá $|A| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^t A)}$. Este espacio es de dimensión 5.

- Definiremos como $\mathcal{N} \subset S_0$ a una variedad diferenciable difeomorfa al plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$.
- Definiremos $H^1_g(\Omega, S_0)$ al espacio de las funciones que pertenecen al espacio de Sobolev $H^1(\Omega, S_0)$ y que son iguales a g en $\partial\Omega$ en el sentido de las trazas.
- Se escribirá (LQ) en lugar de cristal líquido nemático.
- Para un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$, definiremos $\mathrm{diam(A)} = \sup\{|\mathrm{x} - \mathrm{y}|, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}\}$ y $\mathrm{rad}(A) = \inf\{\sum_{i=1}^k r_i, A \subset \bigcup_{j=1}^k B(a_j, r_j)\}$.

1.2. Resultados preliminares.

Sea X un espacio topológico arco-conexo y $x_0 \in X$. Sea $\pi_1(X, x_0)$ el grupo fundamental de X con base en x_0 dotado de la operación usual de concatenación.

Nota 1. *Para $f, g \in \pi_1(X, x_0)$ el produto $f \cdot g$ recorre primero g y luego f.*

Denotemos por $[\mathbb{S}^1, X]$ al conjunto de clases de homotopía de loops libres, esto es, el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{S}^1 \to X$ que son homotópicas sin la condición de punto base. Para $f, g \in \pi_1(X, x_0)$ diremos que $f \sim g$ si y sólo si existe $h \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $f = h \cdot g \cdot h^{-1}$. Es claro que $\sim$ define una clase de equivalencia sobre $\pi_1(X, x_0)$, por lo que existe una colección de conjuntos disjuntos $\{C_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ tales que $\bigcup_{k \in \mathcal{K}} C_k = \pi_1(X, x_0)$. Cada C_k es una clase de conjugación de $\pi_1(X, x_0)$.

Proposición 1. *Sea $x_0 \in X$. Entonces existe una biyección entre las clases de conjugación de $\pi_1(X, x_0)$ y $[\mathbb{S}^1, X]$.*

Nota 2. *Como X es arco-conexo el punto x_0 no es relevante.*

Demostración. Definamos

$$\phi : \{\text{Clases de conjugación de } \pi_1(X, x_0)\} \to [\mathbb{S}^1, X]$$

$$\phi(g \cdot f \cdot g^{-1}) = [f],$$

donde g^{-1} denota al camino inverso de g. Vemos que:

- (i) ϕ está bien definida. Sean $f, g \in \pi_1(X, x_0)$. Sea $g_t = g|_{[0,t]}$, luego $F(s, t) = g_t \cdot f \cdot g_t^{-1}$ es una homotopía en el sentido de loops libres entre f y $g \cdot f \cdot g^{-1}$.

- (ii) ϕ es inyectiva. Sean $f, g \in \pi(X, x_0)$ tales que $\phi(f) = \phi(g)$, es decir existe $H_s : [0,1] \to X$ tal que $H_0(t) = f(t)$, $H_1(t) = g(t)$ y $H_s(0) = H_s(1)$.

  Sea $m(s) = H_s(0)$ y definamos $M(s,t) = m|_{[0,s]} \cdot H_s \cdot m^{-1}|_{[0,s]}(t)$. Vemos que $M(0,t) = m.|_{[0,0]} \cdot f(t) \cdot m^{-1}_{[0,0]}(t) \sim f(t)$, $M(1,t) = m \cdot g \cdot m^{-1}(t)$ y $M(s,0) = x_0$. Por lo tanto, M es una homotopía entre f y $m \cdot g \cdot m^{-1}$, es decir, f y g pertenecen a la misma clase de conjugación de $\pi_1(X, x_0)$.

- (iii) ϕ es sobre. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$. Como X es arco-conexo existe $g : [0,1] \to X$ tal que $g(0) = x_0$ y $g(1) = f(0)$. Definamos $H(s,t) = g|_{[0,t]} \cdot f \cdot g^{-1}|_{[0,t]}(s)$. Luego, $g \cdot f \cdot g^{-1} \in \pi(X, x_0)$ es homotópica en el sentido de loops libres a f.

□

Para $x \in X$, sean c_x el camino que une x_0 con x, y $\overline{c_x}$ su camino inverso. Dados $\alpha, \beta \in [\mathbb{S}^1, X]$ podemos definir una operación $*$ de la manera siguiente

$$\alpha * \beta = \{\text{clase de homotopía libre de } \left[\overline{c_{f(1)}} \cdot (f \cdot c_{f(1)})\right] \cdot \left[\overline{c_{g(1)}} \cdot (g \cdot c_{g(1)})\right] : f \in \alpha \ , g \in \beta\}. \tag{1.1}$$

Es posible ver que la operación $*$ está bien definida. En particular no depende de los caminos c_x ni de los representantes f, g.

Lema 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio suave, acotado y cuya frontera tiene $k \in \mathbb{N}$ componentes conexas, cada una llamada $A_1, A_2, ..., A_k$. Para todo $i \in \{1, .., k\}$, sea $f_i : A_i \to \mathcal{N}$ dato de frontera suave, cuya clase de homotopía libre es γ_i. Si existe $h \in \{0, 1, 2, .., k\}$ que cumple la condición*

$$\prod_{j=1}^{h} \gamma_j \cap \prod_{j=h+1}^{k} \gamma_j \neq \emptyset, \tag{1.2}$$

entonces existe una función continua $m : \Omega \to \mathcal{N}$ que extiende a cada f_i. Recíprocamente, si existe dicho m, la condición (1.2) *se cumple para todo $h \in \{1, 2, .., k\}$.*

Nota 3. *El producto $\prod_{j=1}^{h} \gamma_j$ es tomado de acuerdo a* (1.1).

Demostración. Ver A.1.1. □

Considerando que $\pi_1(\mathcal{N}) \cong \mathbb{Z}_2$ y la Proposición 1, se obtiene que $[\mathbb{S}^1, \mathcal{N}]$ cuenta con dos elementos. Lo anterior implica que dos curvas cerradas no homotópicamente triviales serán siempre homotópicas en el sentido de loops libres.

Definición 1. *Sea $\gamma \in [\mathbb{S}^1, \mathcal{N}]$, el largo de γ es*

$$\lambda(\gamma) = \inf \left\{ \left(2\pi \int_{\mathbb{S}^1} |c'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} : c \in \gamma \right\}. \tag{1.3}$$

Como $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$ es denso y tiene inyección compacta en $C(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$, el término c' está bien definido, y tenemos que 1.3 es equivalente a

$$\lambda(\gamma) = \text{ínf}\left\{ \left(2\pi \int_{\mathbb{S}^1} |c'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} : c \in \gamma \cap H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{N}) \right\}.$$

Notemos que (1.3) es un mínimo, y en el caso que γ no sea homotópicamente trivial se tiene que cada mínimo $c \in \gamma$ es una geodésica en $\mathcal{N}$.

Definición 2. *Para $\gamma \in [\mathbb{S}^1, \mathcal{N}]$ se define*

$$\lambda_*(\gamma) = \text{ínf}\left\{ \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{k} \lambda(\gamma_i)^2 : k \in \mathbb{N}, \gamma_i \in [\mathbb{S}^1, \mathcal{N}], \gamma \in \prod_{i=1}^{k} \gamma_i \right\}. \tag{1.4}$$

Al tener $\pi_1(\mathcal{N})$ orden 2, el ínfimo de (1.4) es un mínimo. En general, si se cambia $\mathcal{N}$ por otra variedad diferenciable X cuyo grupo fundamental sea finitamente generado, se alcanza la misma conclusión.

Nota 4. *Considerando la igualdad* (1.4)*, se infiere que*

$$\lambda_*(\gamma) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_*(\gamma_i)\ ,\ \forall \gamma \in \prod_{i=1}^{k} \gamma_i. \tag{1.5}$$

Definición 3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio suave, acotado y cuya frontera tiene $k \in \mathbb{N}$ componentes conexas, cada una llamada $A_1, A_2, ..., A_k$. Para todo $i \in \{1, .., k\}$, sea $f_i : A_i \to \mathcal{N}$ un dato de frontera suave, cuya clase de homotopía libre es γ_i. Se define*

$$k_* = \text{ínf}\left\{ \lambda_*(\gamma), \gamma \in \prod_{i=1}^{k} \gamma_i \right\}.$$

Haciendo uso de la igualdad (1.4), la definición anterior puede ser escrita de la forma

$$k_* = \text{ínf}\{ \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{l} \lambda(\beta_i)^2 : l \in \mathbb{N}, \beta_i \in [\mathbb{S}^1, \mathcal{N}], \prod_{i=1}^{l} \beta_i \cap \prod_{i=1}^{k} \gamma_i \neq \emptyset \}. \tag{1.6}$$

Consideremos el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio suave, acotado, simplemente conexo y $g : \partial\Omega \to \mathcal{N}$ es no homotópicamente trivial. La Definición 3 se reduce a

$$k_* = \text{ínf}\left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |c'(t)|^2 dt : c \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{N}), \text{no homotópicamente trivial} \right\} \tag{1.7}$$

La siguiente proposición es un resultado clásico en el estudio de variedades diferenciables inmersas en espacios euclideanos. Para más detalles ver [[1],Capítulo 3, p.57].

Proposición 2 (Proyección de un conjunto sobre una variedad)**.** *Sea N una variedad diferenciable, suave y compacta de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que el abierto*

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad dist(x, N) < \delta\}$$

cumple que para todo $x \in A_\delta$, hay un único punto $Q(x) \in N$ que satisface

$$dist(x, N) = |x - Q(x)|.$$

Además, $u - Q(u)$ es un vector normal en cada $u \in N$.

La aplicación $Q : A_\delta \to N$ se llama la proyección al punto más cercano de N.

Nota 5. *Para el caso de la variedad $\mathcal{N}$ y Ω simplemente conexo, la condición g homotópicamente no trivial garantiza que si $u : \overline{\Omega} \to S_0$ es continua y $u|_{\partial\Omega} = g$, entonces $\{x \in \Omega : dist(u(x), \mathcal{N}) < \delta\} \neq \Omega$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño.*

Lema 2. *Sea δ_0 de la proposición 2 y $u \in C^1(\Omega, S_0)$ tales que $dist(u(x), \mathcal{N}) \leq \delta_0$ para todo $x \in \Omega$. Sean $\pi(x) = Q(u(x))$ y $\sigma(x) = dist(u(x), \mathcal{N})$. Existe una constante M tal que para todo $x \in \Omega$ se cumple*

$$(1 - M\sigma(x))|\nabla\pi(x)|^2 \leq |\nabla u(x)|^2 \leq (1 + M\sigma(x))|\nabla\pi(x)|^2 + |\nabla\sigma(x)|^2.$$

Demostración. Ver A.1.3. □

Se utilizará la siguiente versión de la fórmula de la coárea. Para ver el caso general consultar [[2],Capítulo 3].

Proposición 3 (Fórmula de la coárea)**.** *Sea $f : \Omega \to [0, 1]$ una función Lipchitz y sea $g \in L^1(\Omega)$. Entonces*

$$\int_\Omega g(x)Jf(x)dx = \int_0^1 \int_{\gamma_t} g(y)d\mathcal{H}^1 dt,$$

donde $\gamma_t = \{x \in \Omega | f(x) = t\}$, $Jf(x_1, x_2)^2 = f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2$ y $\mathcal{H}^1$ es la medida de Hausdorff 1-dimensional.

Capítulo 2

Introducción a la teoría de Landau de Gennes.

2.1. Interpretación física del funcional de Landau de Gennes y relación con el modelamiento de cristales líquidos.

Un cristal líquido es un tipo de estado de la materia que posee propiedades de un líquido y de un cristal. Como líquidos pueden formar gotas que se unen y se deforman ante esfuerzos de corte. Por otro lado, al tener propiedades de cristal presentan anisotropías en comparación con algunas ópticas, campos eléctricos y magnéticos. Estos estados de la materia aparecen por una cierta clase de compuestos orgánicos llamados mesogénicos, en los cuales la transición de fase líquido-sólido no se produce en un solo paso, sino que procede a través de una o más transiciones intermedias.

Durante este documento se consideraran sólo (LQ), cuyas móleculas tienen forma de bastón, presentan simetría de la cabeza-cola y sus centros de masa se distribuyen al azar pero tienden a alinearse a nivel local a lo largo de algunas direcciones preferidas.

Existen diferentes teorías del continuo para modelar (LQ), entre ellas, la teoría de Landau-de Gennes o teoría de los Q-tensores, la que será el enfoque de esta tesis. En síntesis, supone que la disposición de las moléculas en un punto x es descrito por una matriz $Q(x) \in S_0$. Esta matriz representa el momento de segundo orden normalizado de la función de distribución de la orientación de las moléculas, y se clasifican de acuerdo a sus valores propios.

La evidencia física indica que las configuraciones estables de un (LQ) contenido en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sujetos a la condición $g : \partial\Omega \to S_0$ están dados por los mínimos de

$$\min_{u \in H_g^1(\Omega, S_0)} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{f(u)}{\epsilon^2} \right) = \min_{u \in H_g^1(\Omega, S_0)} E_\epsilon(u), \tag{2.1}$$

donde f es la energía potencial dada por

$$f(Q) = \frac{\alpha(T - T^*)}{2} \operatorname{tr} Q^2 - b \operatorname{tr} Q^3 + c(\operatorname{tr} Q^2)^2.$$

Los parámetros α, b y c son constantes positivas que dependen del cristal, T es la temperatura absoluta y T^* es la temperatura de transición de fase. Se trabajará en regimén de temperatura baja, esto es, $T < T^*$. En adelante se hará el cambio de variable $a = -\alpha(T - T^*) > 0$.

2.2. Propiedades básicas de los $Q - tensores$

Considérese $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \in \{2, 3\}$, un contenedor de un (LQ); nos interesa describir la orientación de las móleculas que están contenidas en Ω. Estas últimas pueden ser descritas por medio de una medida de probabilidad μ definida en los Borelianos de $\mathbb{S}^2$, es decir, si $B \subset \mathbb{S}^2$, el valor $\mu(B)$ dice la probabilidad de que la orientación de la molécula apunte en dirección de un punto de B.

Las moléculas de los (LQ), al tener simetría de la cabeza-cola, cumplen que cada una apunta en una dirección cuya línea paralela que pasa por el origen intersecta dos veces con $\mathbb{S}^2$ en puntos $\{p, -p\}$. Como consecuencia, la medida μ satisface la condición de simetría $\mu(B) = \mu(-B)$, $\forall B \in \mathbb{S}^2$, es decir, es una medida definida sobre el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$.

Los momentos de probabilidad dan información sobre la distribución de la orientación. Debido a la condición de simetría se tiene

$$\int_{S^2} p d\mu(p) = \frac{1}{2} \left(\int_{S^2} p d\mu(p) + \int_{S^2} -p d\mu(-p) \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{S^2} p d\mu(p) - \int_{S^2} p d\mu(p) \right) = 0.$$

Por tanto, el primer momento es siempre cero, y para obtener información es necesario considerar el momento de segundo orden

$$M = \int_{S^2} (p \otimes p)\, d\mu(p), \tag{2.2}$$

el cual es una matriz de 3×3 que satisface $\operatorname{tr} M = 1$.

Si la orientación de las moléculas es uniforme en $\mathcal{S}^2$, decimos que la distribución es isotrópica, y en tal caso $\mu = \mu_0$, donde

$$\mu_0 = \frac{1}{4\pi} dS.$$

Así, el momento de segundo orden es

$$M_0 = \int_{S^2} p \otimes p d\mu_0(p) = \frac{1}{3}I.$$

Definición 4. *Se define un Q-tensor como*

$$Q = M - M_0 = \int_{S^2} \left(p \otimes p - \frac{1}{3}I \right) d\mu(p). \tag{2.3}$$

En otras palabras, Q mide la desviación de M respecto del estado isotrópico.

Se desprende fácilmente de la definición anterior que $Q = Q^T$, $\operatorname{tr} Q = 0$, y si $\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$ son los valores propios de Q, se satisface $-\frac{1}{3} \leq \lambda_i \leq \frac{2}{3}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Definición 5. *Los Q-tensores se clasifican según sus valores propios de la manera siguiente:*

1. *Isotrópico si $Q = 0$.*

2. *Uniaxial si $Q \neq 0$ y tiene dos valores propios iguales.*

3. *Biaxial si los tres valores propios de Q son distintos.*

Proposición 4. *Sea $Q \in S_0 \setminus \{0\}$. Entonces Q se puede representar en la forma*

$$Q = s \left((n \otimes n - \frac{1}{3}I) + r(m \otimes m - \frac{1}{3}I) \right),$$

con $s \in (0, \infty)$, $r \in [0, 1]$ y $n, m \in \mathbb{S}^2$, y además se tiene que:

1. *Q es isotrópico si $(s = 0)$.*

2. *Q es uniaxial si $s > 0$, $r \in \{0, 1\}$.*

3. *Q es biaxial si $s > 0$, $0 < r < 1$.*

Demostración. Sean $\{\lambda_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ los valores propios de Q. Aplicando el teorema espectral, existen $n, m, p \in \mathbb{S}^2$ tales que

$$Q = \lambda_1 n \otimes m + \lambda_2 m \otimes m + \lambda_3 p \otimes p,$$

$$I = n \otimes n + m \otimes m + p \otimes p.$$

Como $\operatorname{tr} Q = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, se tiene

$$Q = \lambda_1 n \otimes m + \lambda_2 m \otimes m - (\lambda_1 + \lambda_2)(I - n \otimes n - m \otimes m)$$

$$Q = (2\lambda_1 + \lambda_2) \left(n \otimes n - \frac{1}{3}I + \frac{2\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} \left(m \otimes m - \frac{1}{3}I \right) \right).$$

Haciendo

$$s = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$r = \frac{2\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2},$$

se sigue que

$$Q = s\left((n \otimes n - \frac{1}{3}I) + r(m \otimes m - \frac{1}{3}I)\right).$$

Finalmente, se hace notar que $r = 0$ si y sólo si $\lambda_2 = \lambda_3$, $r = 1$ si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2$, y $s = 0$ si y sólo si $Q = 0$.

□

Definición 6. *Para $Q \in S_0 \setminus \{0\}$ se define su coeficiente de biaxialidad β como*

$$\beta(Q) = 1 - 6\frac{(\operatorname{tr} Q^3)^2}{(\operatorname{tr} Q^2)^3}.$$

Lema 3. *Sea $Q \in S_0 \setminus \{0\}$. Entonces $0 \le \beta(Q) \le 1$, y $\beta(Q) = 0$ si y sólo si Q es uniaxial.*

Demostración. Como $(\operatorname{tr} Q^3)^2 \ge 0$ y $\operatorname{tr} Q^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \ge 0$, se sigue que

$$6\frac{(\operatorname{tr} Q^3)^2}{(\operatorname{tr} Q^2)^3} \ge 0.$$

Por lo tanto

$$\beta(Q) = 1 - 6\frac{(\operatorname{tr} Q^3)^2}{(\operatorname{tr} Q^2)^3} \le 1.$$

Probemos ahora que $\beta(Q) \ge 0$. Escribamos

$$Q = \alpha\left(n \otimes n - \frac{1}{3}I\right) + \gamma\left(m \otimes m - \frac{1}{3}I\right),$$

con $\alpha = 2\lambda_1 + \lambda_2$ y $\gamma = 2\lambda_2 + \lambda_1$. Un cálculo directo muestra que

$$\operatorname{tr} Q^3 = \frac{1}{9}(2\alpha^3 + 2\gamma^3 - 3\gamma\alpha^2 - 3\gamma^2\alpha), \tag{2.4}$$
$$\operatorname{tr} Q^2 = \frac{2}{3}(\alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma). \tag{2.5}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}(\operatorname{tr} Q^2)^3 - 6(\operatorname{tr} Q^3)^2 &= \frac{8}{27}(\alpha^6 + \gamma^6 - 3\alpha^5\gamma - 3\gamma^5\alpha - 7\gamma^3\alpha^3 + 6\alpha^2\gamma^4 + 6\alpha^4\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma) \\ &\quad - \frac{2}{27}(4\alpha^6 + 4\alpha^6 - 12\alpha^5\gamma - 12\alpha\gamma^5 + 26\alpha^3\gamma^3 - 3\alpha^4\gamma^2 - 3\alpha^2\gamma^4) \\ &= 2\alpha^2\gamma^2(\alpha - \gamma)^2 \ge 0,\end{aligned}$$

por lo que, $(\operatorname{tr} Q^2)^3 \ge 6(\operatorname{tr} Q^3)^2$, y entonces

$$\beta(Q) = 1 - 6\frac{(\operatorname{tr} Q^3)^2}{(\operatorname{tr} Q^2)^3} \ge 0.$$

Finalmente,

$$\beta(Q) = 0 \leftrightarrow (\operatorname{tr} Q^2)^3 - 6(\operatorname{tr} Q^3)^2 = 2\alpha^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2 = 0,$$

entonces $\beta(Q) = 0$ si y sólo si se da uno de los siguientes casos: $\gamma = 0$, $\alpha = 0$ ó $\gamma = \alpha$. Si $\alpha = 0$ se cumple que $Q = 0$. Si $\gamma = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, entonces $\lambda_2 = \lambda_3$. Por último, si $\gamma = \alpha$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Nota 6. *Es posible escribir el coeficiente de biaxialidad de cualquier matriz $Q \in S_0 \setminus \{0\}$, en términos del parámetro $r(Q)$, de la manera siguiente*

$$\beta(Q) = \frac{27r^2(Q)(1-r(Q))^2}{4(r(Q)^2 - r(Q) + 1)}. \tag{2.6}$$

Puede verse que $\beta(Q) = 1$ si y sólo si $r(Q) = \frac{1}{2}$.

2.3. El potencial f y la variedad $\mathcal{N}$

Nos interesa describir las propiedades de la función $f : S_0 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(Q) = -\frac{a}{2}\operatorname{tr} Q^2 - b\operatorname{tr} Q^3 + c(\operatorname{tr} Q^2)^2.$$

Proposición 5. *Sea $Q \in S_0$ un mínimo de f. Entonces Q es uniaxial.*

Demostración. Notemos que si $Q \in S_0$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de Q, entonces

$$\operatorname{tr} Q^n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n,$$

por lo que

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{a}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - b(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) + c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2. \tag{2.7}$$

Utilizando los multiplicadores de Lagrange, con la restricción $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, encontraremos los mínimos de la función $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu) = -\frac{a}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - b(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) + c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Luego, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -a\lambda_i - 3\lambda_i^2 b + 4c\left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2\right)\lambda_i + \mu = 0 \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{2.9}$$

De (2.8), se concluye

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(-a - 3(\lambda_1 + \lambda_2)b + 4c\left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2\right)\right) = 0, \tag{2.10}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\left(-a - 3(\lambda_1 + \lambda_3)b + 4c\left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2\right)\right) = 0. \tag{2.11}$$

Supongamos $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Entonces (2.10) y (2.11) se transforman en

$$-a - 3(\lambda_1 + \lambda_2)b + 4c\left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2\right) = 0 \tag{2.12}$$

$$-a - 3(\lambda_1 + \lambda_3)b + 4c\left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2\right) = 0. \tag{2.13}$$

Luego, restando (2.12) y (2.13), se obtiene

$$-3(\lambda_2 - \lambda_3) = 0. \tag{2.14}$$

Lo que contradice el hecho que $\lambda_2 > \lambda_3$. Por lo tanto, Q debe tener dos valores propios iguales.

□

Proposición 6. *Sean*

$$s^* = \frac{b + \sqrt{b^2 + 24ac}}{4c},$$

$$\mathcal{N} = \left\{ Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : Q = s^*\left(n \otimes n - \frac{1}{3}I\right), n \in \mathbb{S}^2 \right\}.$$

Entonces f alcanza sus mínimos en el conjunto $\mathcal{N}$.

Demostración. Las Proposiciones 4 y 5 implican que $Q = s\left(n \otimes n - \frac{I}{3}\right)$. Por lo que

$$f(Q) = \frac{-9as^2 - 2bs^3 + 3cs^4}{27}.$$

La expresión anterior se minimiza cuando

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{-18as - 6bs^2 + 12cs^3}{27} = 0.$$

Es decir,

$$-18as - 6bs^2 + 12cs^3 = 0$$

$$s(-3a^2 - bs + 2cs^2) = 0.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes tres candidatos a mínimos

$$s = 0\ ,\ s_-^+ = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 24ac}}{4c}$$

Como $f(s^+) < f(s_-) < f(0) = 0$, se concluye el resultado.

□

Proposición 7. *$\mathcal{N}$ es subvariedad de S_0 y es difeomorfa al plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$.*

Demostración. Consideramos $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{N}$, dado por $\varphi(n) = s_* \left(n \otimes n - \frac{1}{3}I\right)$. Notemos que $\varphi(n) = \varphi(-n)$. Así pues, $\varphi : \mathbb{RP}^2 \to \mathcal{N}$ está bien definido, es diferenciable y tiene inversa diferenciable. □

La Proposición 6 nos dice que el conjunto de mínimos del potencial f es la variedad $\mathcal{N}$. Redefinamos $f = f - k_0$, donde $k_0 = \text{mín}_{Q \in S_0} f(Q) = \frac{a}{3}s_*^2 + \frac{2b}{27}s_*^3 - \frac{c}{9}s_*^4$. Por lo que el nuevo potencial cumple que $f \geq 0$, y su valor miñimo es 0. Los minimizadores de la energía (2.1) no cambian al modificar el potencial.

Lema 4. *Un minimizador de* (1.7) *está dado por*

$$c(t) = s_* \left(n(t) \otimes n(t) - \frac{1}{3}I\right) \quad con\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

donde

$$n(t) = [cos(t/2), sin(t/2), 0]^T.$$

Además, se tiene que $k_* = \frac{\pi s_*}{2}$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{S}^2$, $v \in T_n\mathbb{S}^2$, y $\varphi : \mathbb{RP}^2 \to \mathcal{N}$ el difeomorfismo de la Proposición 7. Diferenciando la función $\varphi(n + tv)$ respecto a t y evaluando en $t = 0$,

$$\langle d\varphi(n), v\rangle = s_*(n \otimes v + v \otimes n). \tag{2.15}$$

Por lo que

$$|\langle d\varphi(n), v\rangle|^2 = 2s_*^2 \sum_{i,j}(n_i v_j n_i v_j + n_i v_j v_i n_j) = 2s_*^2|v|^2.$$

Denotemos por a y b las restricciones del producto escalar euclideano de $\mathbb{R}^3$ y S_0 a $\mathbb{S}^2$ y $\mathcal{N}$, respectivamente. En términos de pull-Backs, se obtiene

$$\varphi^* b = 2s_*^2 a.$$

Como el término $2s_*^2$ es constante, las conexiones de Levi Civita asociadas a $\varphi^* b$ y a coinciden. Por lo tanto, c es geodésica de $\mathcal{N}$ si y sólo si puede ser escrita como $c = \varphi(n)$, con n una geodésica de $\mathbb{S}^2$. Un hecho conocido es que las geodésicas de $\mathbb{S}^2$ son los grandes círculos.

Sea $n : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2$ una geodésica en $\mathbb{S}^2$. Entonces $p(t) = \varphi(n(t))$ es un camino cerrado si y sólo si $\varphi(n(0)) = \varphi(n(2\pi))$, es decir, $n(0) = n(2\pi)$ ó $n(0) = -n(2\pi)$. Si $n(0) = n(2\pi)$, entonces c es homótopicamente trivial. Si $n(0) = -n(2\pi)$, se tiene que c es una geodésica no homotópicamente trivial, por lo que genera el grupo $\pi_1(\mathcal{N})$. Como no hay más geodésicas, se concluye que cualquier minimizador c de $\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} |c'(t)|^2 dt : c \in$

$H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$, no homotópicamente trivial$\}$ debe ser de la forma $c = \varphi(n)$, siendo n la mitad de un gran círculo de $\mathbb{S}^2$ parametrizado por longitud de arco.

Finalmente, se obtiene que si

$$n(t) = [cos(t/2), sin(t/2), 0]^T,$$

entonces

$$c(t) = \varphi(n(t)) = s_* \left(n(t) \otimes n(t) - \frac{1}{3} I \right)$$

es una geodésica de $\mathcal{N}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} k_* = \text{ínf}\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |P'(t)|^2 dt : P \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{N}), \text{no homotópicamente trivial}\} \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |c'(t)|^2 dt = \frac{s_*^2 \pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Proposición 8. *Sea* $\delta = \delta(Q) = s_* \sqrt{\frac{2}{3}} - |Q|$. *Entonces el potencial* f *satisface las siguientes desigualdades:*

$$\delta^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3} + \left(\frac{b}{3\sqrt{6}} - c\sqrt{\frac{2}{3}} s_* \right) \delta + \frac{c}{4} \delta^2 \right) + \frac{b}{6\sqrt{6}} \beta(Q) |Q|^3 \leq f(Q),$$
$$f(Q) \leq \delta^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3} + \left(\frac{b}{3\sqrt{6}} - c\sqrt{\frac{2}{3}} s_* \right) \delta + \frac{c}{4} \delta^2 \right) + \frac{b}{3\sqrt{6}} \beta(Q) |Q|^3.$$

Demostración. Ver A.1.2. □

Proposición 9. *Existen constantes* $m_0 > 0$ *y* $\delta \in (0, 1)$ *tales que para todo* $H \in \mathcal{N}$ *y* $\nu \in T_H \mathcal{N}^\perp$ *se cumple que*

$$Df(H + t\nu) \cdot \nu \geq t m_0,$$

con $0 \leq t \leq \delta$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{S}^2$ tal que $H = s_*(n \otimes n - \frac{1}{3} I)$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $n = e_3 = (0, 0, 1)^t$ (si no, basta hacer una rotación). A partir de la ecuación 2.15, concluimos que una base para $T_H \mathcal{N}$ está dada por

$$a_1 = s_* e_3 \otimes e_1 + s_* e_1 \otimes e_3,$$

$$a_2 = s_* e_3 \otimes e_2 + s_* e_2 \otimes e_3.$$

Luego, ν es vector normal unitario a $\mathcal{N}$ en H si y sólo si $a_1 \cdot \nu = a_2 \cdot \nu = 0$, y esto ocurre si y sólo si

$$\nu = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}t_1 + t_3 & t_2 & 0 \\ t_2 & -\frac{1}{3}t_1 - t_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}t_1 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

para algún $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ que satisface $|\nu|^2 = \frac{2}{3}t_1^2 + 2(t_2^2 + t_3^2) = 1$. Así, se tiene

$$Df(H + t\nu).\nu = -a(H + t\nu).\nu - b(H + t\nu)^2.\nu + c\,\mathrm{tr}(H + t\nu)^2(H + t\nu).\nu.$$

Dado que f se minimiza en $\mathcal{N}$, se tiene $Df(H) = 0$. Además, se satisface $H\nu = \nu H$. Usando lo anterior, se obtiene

$$Df(H + t\nu).\nu = t\left(-a|\nu|^2 - 2b < \nu H, \nu > +2c(\mathrm{tr}\,\nu H)^2 + \frac{2}{3}s_*^2 c|\nu|^2\right) + O(t^2).$$

Haciendo los cálculos, se tiene

$$|\nu|^2 = \frac{2}{3}t_1^2 + 2t_2^2 + 2t_3^2,$$

$$\mathrm{tr}\,\nu H = \frac{2}{3}s_* t_1, \text{ y}$$

$$< \nu H, \nu >= \frac{2}{9}s_*(t_1^2 - 3t_2^2 - 3t_3^2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} Df(H + t\nu).\nu &= t\left(t_1^2(-\frac{2a}{3} - \frac{4bs_*}{9} + \frac{16cs_*^2}{9}) + 2(t_1^2 + t_2^2)(-a + \frac{2s_*}{3} + \frac{4s_*^2 c}{3})\right) + O(t^2) \\ &\geq t\left(t_1^2(-\frac{2a}{3} - \frac{4bs_*}{9} + \frac{4cs_*^2}{3}) + 2(t_1^2 + t_2^2)(-a + \frac{2s_*}{3} + \frac{2s_*^2 c}{3})\right) + O(t^2). \end{aligned}$$

Por definición de s_*, se sigue que

$$-\frac{2a}{3} - \frac{4bs_*}{9} + \frac{4cs_*^2}{3} = \frac{2}{9}bs_* + \frac{4}{3}a \text{ y}$$

$$(-a + \frac{2s_*}{3} + \frac{2s_*^2 c}{3}) = bs_*.$$

Por lo tanto,

$$Df(H + t\nu).\nu \geq t\left(\frac{2t_1^2}{3}(\frac{1}{3}bs_* + 2a) + 2(t_1^2 + t_2^2)(bs_*)\right) + O(t^2).$$

Sea $m_0 = \mathrm{mín}\{2bs_*, \frac{1}{3}bs_* + 2a\} > 0$. De este modo

$$Df(H + t\nu).\nu \geq m_0 t\left(\frac{2t_1^2}{3} + 2t_1^2 + 2t_2^2\right) + O(t^2).$$

Como $\frac{2t_1^2}{3} + 2t_1^2 + 2t_2^2 = 1$, se concluye el resultado. $\square$

Lema 5. *Sean $u \in S_0$ y $\delta > 0$ el de la Proposición 2. Si* $\mathrm{dist(u,}\mathcal{N})$ $< \delta$ *y* $||u|| \leq 1$*, entonces existen constantes positivas m_0, M_0, tales que el potencial f satisface las siguientes dos estimaciones:*

- *(i)* $m_0 \mathrm{dist(u,}\mathcal{N}) \leq \mathrm{Df(u)} \cdot \mathrm{(u - Q(u))} \leq \mathrm{M_0 dist(u,}\mathcal{N})$.
- *(ii)*$\frac{1}{2} m_0 \mathrm{dist(u,}\mathcal{N})^2 \leq \mathrm{f(u)} \leq \frac{1}{2}\mathrm{M_0 dist(u,}\mathcal{N})^2$.

2.4. Propiedades de los mínimos del funcional de Landau de Gennes

Teorema 1. *El problema* (2.1) *posee mínimos, y estos son soluciones débiles de la ecuación diferencial*

$$-\Delta u + \frac{Df(u)}{\epsilon^2} = \frac{A(Df(u))}{\epsilon^2} I, \tag{2.17}$$

donde $A : M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$A(Q) = \frac{\operatorname{tr} Q}{3}.$$

Demostración. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1_g(\Omega, S_0)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} E_\epsilon(u_k) = \inf_{u\in H^1_g(\Omega,S_0)} E_\epsilon(u).$$

Como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^1(\Omega, S_0)$, existen $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y u_0 tal que u_{n_k} converge débilmente a $u_0 \in H^1(\Omega, S_0)$. El operador de traza, al ser lineal y continuo fuerte, es continuo débil. Por lo que se satisface $u_0 = g$ en $\partial\Omega$, de donde $u_0 \in H^1_g(\Omega, S_0)$. Como $H^1(\Omega, S_0) \subset\subset L^4(\Omega, S_0)$, tenemos que al ser $f(u)$ un polinomio de grado 4 en u, se cumple que

$$\int_\Omega f(u_{n_k}) \to \int_\Omega f(u_0) \text{ , si } k \to \infty.$$

Por lo que

$$E_\epsilon(u_0) \leq \min_{u\in H^1_g(\Omega,S_0)} E_\epsilon(u),$$

de donde se concluye la existencia de algún mínimo.

Calculemos la ecuación de Euler-Lagrange. Sea $v \in C_0^\infty(\Omega, S_0)$, y sea u_ϵ un mínimo del problema 2.1. Se tiene que

$$\frac{d}{dt} E_\epsilon(u_\epsilon + tv) = \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u_\epsilon + t\nabla v|^2 + \frac{f(u_\epsilon + tv)}{\epsilon^2} \right) = \int_\Omega \left(\nabla v \nabla u_\epsilon + t\nabla v + \frac{Df(u_\epsilon + tv)v}{\epsilon^2} \right)$$
$$= \int_\Omega \left(\nabla v \nabla u_\epsilon + t\nabla v + \frac{Df(u_\epsilon + tv)v}{\epsilon^2} \right).$$

Evaluando en $t = 0$ y usando la condición de mínimo de u_ϵ, se sigue

$$\int_\Omega \left(\nabla v \nabla u_\epsilon + \frac{Df(u_\epsilon)v}{\epsilon^2} \right) = 0,$$

Lo que implica que

$$-\Delta u_\epsilon + \frac{Df(u_\epsilon)}{\epsilon^2} = \lambda(x) I, \tag{2.18}$$

con $\lambda(x) \in \mathbb{R}$. Tomando traza en ambos lados de la ecuación 2.18 se concluye el resultado.

□

Lema 6. *Sea u_ϵ un minimizador de la energía de Landau de Gennes 2.1. Entonces*

$$||u||_\infty \leq 1$$

Demostración. Asumamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $|u_\epsilon(x_0)| > 1$. Definamos

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} u_\epsilon(x) & \text{si } u_\epsilon(x) \leq 1 \\ \frac{u_\epsilon(x)}{|u_\epsilon(x)|} & \text{si } u_\epsilon(x) > 1 \end{cases}$$

Probaremos que $E_\epsilon(u_\epsilon) > E_\epsilon(v_\epsilon)$, lo que contradice la condición de mínimo de u_ϵ. Para esto se procederá en dos partes:

- (i) $|\nabla v_\epsilon(x)| \leq |\nabla u_\epsilon(x)|$, $\forall x \in \Omega$.

  Sea B_{S_0} la bola unitaria en S_0, y $P : S_0 \to B_{S_0}$ la proyección de S_0 sobre el convexo cerrado B_{S_0}. Como $v_\epsilon = P \circ u_\epsilon$, se concluye que $|\nabla v_\epsilon(x)| \leq |\nabla u_\epsilon(x)|$, $\forall x \in \Omega$.

- (ii) Probaremos que si $v \in S_0$ es tal que $|v| > 1$, entonces $f\left(\frac{v}{|v|}\right) < f(v)$. Utilizando el hecho de que $\beta(Q) = 1 - 6\frac{(trQ^3)^2}{(trQ^2)^3} \geq 0$, se tiene que

  $$Df(Q) : Q = -a|Q|^2 - btrQ^3 + c|Q|^4 \geq -a|Q|^2 - \frac{s_* b}{3}|Q|^3 + \frac{2s_*^2 c}{3}|Q|^4.$$

  El lado derecho es positivo cuando $|Q|^2 > 1$, por lo tanto, $f\left(\frac{v}{|v|}\right) < f(v)$.

□

El lema 6 y la ecuación 2.17 implican que cada mínimo del funcional 2.1 es suave en Ω.

Proposición 10. *Sea u_ϵ un mínimo del funcional de Landau de Gennes. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$||\nabla u_\epsilon||_\infty \leq \frac{C}{\epsilon}$$

Demostración. La demostración sigue de [[3], Lema A.2]. (considerando el hecho que u_ϵ satisface la ecuación 2.17). □

Capítulo 3

Propiedades de biaxialidad

En este capítulo estamos interesados en responder a la interrogante sobre la existencia de puntos de biaxialidad de los mínimos del problema 2.1 cuando $\epsilon \to 0$.

Se harán dos rescalamientos. A cada función $u \in H^1_g(\Omega, S_0)$ se le asignará una función u^* definida como

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} s_* u^*(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Por otro lado, se definirá g_* de modo que

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} s_* g^*(x),\ \forall x \in \partial\Omega.$$

Notemos que $g_* : \partial\Omega \to \mathcal{N}_*$, donde $\mathcal{N}_* = \{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(n \otimes n - \frac{1}{3}I\right),\ n \in \mathbb{S}^1\}$ está contenida en la esfera unitaria de S_0.

Lema 7. *$u_\epsilon \in H^1(\Omega, S_0)$ es mínimo de la energía 2.1 si y sólo si u^*_ϵ es mínimo del problema*

$$\min_{u \in H^1_{g_*}(\Omega, S_0)} \frac{2s_*^2}{3} \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{f^*(u)}{\epsilon^2} \right), \tag{3.1}$$

donde

$$f^*(u) = -k_0^* - \frac{a^*}{2} \operatorname{tr} u^2 - \frac{b^*}{3} \operatorname{tr} u^3 + \frac{c^*}{4} (\operatorname{tr} u^2)^2,$$

con

$$k_0^* = \frac{3}{2s_*^2} k_0,\ a^* = a,\ b^* = \sqrt{\frac{2}{3}} s_* b \ y\ c_* = \frac{2}{3} s_*^2 c.$$

Durante este capítulo se denotará por $\mathcal{N}$ a $\mathcal{N}_*$, g a g_* y por u_ϵ a un minimizador de la energía 3.1.

Lema 8. *Si $Q \in C^1(\Omega, S_0)$ cumple con:*

- *$Q(x)$ es no biaxial para todo $x \in \Omega$.*
- *$Q(x) = g(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$.*

Entonces $\inf_{x\in\Omega} |Q(x)| = 0$.

Demostración. Supongamos que $\inf_{x\in\Omega} |Q(x)| > 0$. Sean $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \lambda_3(x)$ los valores propios de $Q(x)$, y definamos

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \Omega | \lambda_1(x) > \lambda_2(x) = \lambda_3(x)\}\ ,\ \mathcal{A}_2 = \{x \in \Omega | \lambda_1(x) = \lambda_2(x) > \lambda_3(x)\}.$$

La continuidad de los valores propios aislados y la conexidad de $\overline{\Omega}$ implican que

$$Q(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{A}_1, \text{ o bien, } Q(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{A}_2.$$

Si $x \in \partial\Omega$, se tiene

$$Q(x) = s_* \left(n(x) \otimes n(x) - \frac{1}{3} \right)$$

para cierto $n(x) \in \mathbb{S}^2$. Por lo tanto, los valores propios de $Q(x)$ son $\frac{2s_*}{3}, -\frac{s_*}{3}, -\frac{s_*}{3}$, lo que implica

$$Q(\partial\Omega) \cap \mathcal{A}_1 \neq \emptyset,$$

se sigue que $Q(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{A}_1$.

Definamos $r : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{N}$ dada por

$$r(A) = \frac{2s_*}{3\lambda_1} A.$$

Si $A \in \mathcal{A}_1$, entonces A puede ser escrita de la manera

$$A = \lambda_1 n \otimes n + \lambda_2 m \otimes m + \lambda_3 r \otimes r.$$

Como $\lambda_2 = \lambda_3$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, tenemos

$$A = \frac{3\lambda_1}{2} \left(n \otimes n - \frac{1}{3} I \right).$$

Luego

$$r(A) = s_* \left(n \otimes n - \frac{1}{3} I \right) \in \mathcal{N}.$$

Dado que $\lambda_1(A) > 0$ y es aislado, se tiene que r está bien definida y es continua. Por otra parte, r es una retracción, ya que $r(A) = A$, $\forall A \in \mathcal{N}$.

Finalmente, se tiene que $r \circ Q : \overline{\Omega} \to \mathcal{N}$ es una extensión continua de $g : \partial\Omega \to \mathcal{N}$ a todo Ω, lo que contradice la hipótesis de que g no es homotópicamente trivial. □

En virtud del lema 8, para demostrar que un mínimo u_ϵ tiene puntos de biaxialidad, basta con probar que para ciertos valores de ϵ, a^*, b^*, c^* los minimizadores del problema 3.1 satisfacen $\inf_{x\in\overline{\Omega}} |u_\epsilon(x)| > 0$.

Lema 9. *Sea $Q \in S_0$ con $|Q| \leq 1$. Entonces el potencial f^* satisface las desigualdades*

$$f^*(Q) \geq \mu_1(1-|Q|)^2 + \sigma\beta(Q)|Q|^3, \tag{3.2}$$

$$f^*(Q) \leq \mu_2(1-|Q|)^2 + 2\sigma\beta(Q)|Q|^3, \tag{3.3}$$

donde σ, μ_1, μ_2 son constantes positivas que dependen de a, b, c. Además, si $t = \frac{ac}{b^2}$, entonces $\frac{\sigma}{a}(t) \to -\infty$ y $\frac{\mu_1}{a}(t) \to \chi > 0$ cuando $t \to \infty$.

Demostración. Sea $X = 1-|Q|^2$ y $\delta = \delta(Q) = s_*\sqrt{\frac{2}{3}} - |Q|$. De la proposición 8, tenemos

$$\delta^2\left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3} + \left(\frac{b}{3\sqrt{6}} - c\sqrt{\frac{2}{3}}s_*\right)\delta + \frac{c}{4}\delta^2\right) + \frac{b}{6\sqrt{6}}\beta(Q)|Q|^3 \leq f(Q),$$

por lo que

$$f^*(Q) \geq X^2\left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{2} + \left(\frac{bs_*}{9} - \frac{2s_*^2 c}{3}\right)X + \frac{s_*^2 c}{6}X^2\right) + \beta(Q)|Q|^3\frac{bs_*}{18}.$$

Hacemos $A = \frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{2}$, $B = \frac{bs_*}{9} - \frac{2s_*^2 c}{3}$, $C = \frac{s_*^2 c}{6}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $\varphi(X) = A + BX + CX^2$. Notemos que φ alcanza su mínimo en

$$x_0 = -\frac{B}{2C} = 2 - \frac{b}{3s_* c} = 2 - \frac{4}{3\sqrt{1+24t}+3}.$$

Definimos $\mu_1 = \min\limits_{X\in[0,1]} \varphi(X)$. Si t es suficientemente grande, tenemos

$$-\frac{B}{2C} = 2 - \frac{b}{3s_* c} = 2 - \frac{4}{3\sqrt{1+24t}+3} > 1,$$

y en consecuencia,

$$\mu_1 = \varphi(1) = A + B + C = a\frac{36t + \sqrt{1+24t}+1}{144t},$$

de donde $\frac{\mu_1(t)}{a} = O(1)$. Ahora, considerando

$$\sigma(t) = \frac{s_* b}{18} = a\frac{1+\sqrt{1+24t}}{72t},$$

se tiene

$$f^*(Q) \geq X^2\varphi(X) + \sigma\beta(Q)|Q|^3 \geq \mu_1(1-|Q|)^2 + \sigma\beta(Q)|Q|^3 \text{ , y que } \sigma = O(t^{-\frac{1}{2}}).$$

Demostremos la cota superior. Tenemos de la proposición 8

$$f(Q) \leq \delta^2\left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3} + \left(\frac{b}{3\sqrt{6}} - c\sqrt{\frac{2}{3}}s_*\right)\delta + \frac{c}{4}\delta^2\right) + \frac{b}{3\sqrt{6}}\beta(Q)|Q|^3,$$

lo que equivale a

$$f^*(Q) \leq X^2\varphi(X) + \beta(Q)|Q|^3\frac{bs_*}{9}.$$

Definiendo $\mu_2 = \max_{X\in[0,1]} \varphi(X)$, se obtiene la desigualdad.

$\square$

Proposición 11. *Existe una función $v_\epsilon \in H^1(\Omega, S_0)$ tal que $v_\epsilon = g$ en $\partial\Omega$ y cumple*

$$E(v_\epsilon) \leq k_*|\ln(\epsilon)| + \frac{k_*}{2}\ln(\sigma) + L,$$

con L una constante, y σ definido como en el lema 9. En particular, si u_ϵ es un minimizador de la energía 3.1, entonces

$$E_\epsilon(u_\epsilon) \leq k_* \ln(\epsilon) + \frac{k_*}{2}\ln(\sigma) + L.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumamos que $0 \in \Omega$. En caso contrario, basta hacer una traslación.

Sea $R > 0$ tal que $B(0, R) \subset \Omega$, y $r : (0, R) \to \mathbb{R}$ dada por

$$r(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{\sigma^{1/2}\rho}{\epsilon} & \text{si } 0 < \rho < \sigma^{-1/2}\epsilon \\ 0 & \text{si } \sigma^{-1/2}\epsilon \leq \rho \leq R \end{cases}.$$

Para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, definamos

$$n(\theta) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), 0\right]^t, \; m(\theta) = \left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), 0\right]^t.$$

Sea $v_\epsilon : D = B(0, R) \to S_0$ definida como

$$v_\epsilon(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}\left[n(\theta) \otimes n(\theta) - \frac{1}{3}I + r(\rho)\left(m(\theta) \otimes m(\theta) - \frac{1}{3}I\right)\right] & , \text{si } 0 < \rho < R \\ \lim_{a\to 0} v_\epsilon(a, 0) = -\sqrt{\frac{3}{2}}(p \otimes p - \frac{1}{3}I), \text{ con } p = [0, 0, 1]^t & , \text{si } \rho = 0 \end{cases}.$$

Como $v_\epsilon|_{\partial D} \to \mathcal{N}$ es una curva cerrada no homótopicamente trivial, usando el corolario 1 podemos extender v_ϵ a Ω de forma que $v_\epsilon|_{\partial\Omega} = g$, y $v_\epsilon(x) \in \mathcal{N}$ si $x \in \Omega \setminus D$.

Por su parte, tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 = \int_{\Omega\setminus D} |\nabla v_\epsilon|^2 + \int_D |\nabla v_\epsilon|^2.$$

Dado que $\int_{\Omega\setminus D} |\nabla v_\epsilon|^2$ es una constante que depende únicamente de Ω y D, se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 = L + \int_D |\nabla v_\epsilon|^2.$$

Así, requerimos estimar el término $\int_D |\nabla v_\epsilon|^2$. Como $|\nabla v_\epsilon|^2 = |\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \rho}|^2 + \frac{1}{\rho^2}|\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \theta}|^2$, tenemos

$$\int_D |\nabla v_\epsilon|^2 = \pi \int_0^1 \left(\rho\left|\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \rho}\right|^2 + \frac{\rho}{\rho^2}\left|\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \theta}\right|^2\right)$$

$$= \pi \int_0^R \left(\rho r'(\rho)^2 + \frac{3}{4\rho}(1 - r(\rho))^2 d\rho\right)$$

$$= \pi \int_0^{\sigma^{-1/2}\epsilon} \left(\rho\frac{\sigma^{1/2}}{\epsilon} + \frac{3}{4\rho}\left(\frac{\sigma^{1/2}}{\epsilon}\right)^2\right) d\rho + \pi\int_{\sigma^{-1/2}\epsilon}^R \frac{3}{4\rho} = \frac{3}{4}\pi|\ln\epsilon| + \frac{3}{8}\pi\ln\sigma.$$

Por último, hay que estimar el término $\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega f^*(v_\epsilon)$. Por un lado, como $v_\epsilon(x) \in \mathcal{N}$ si $x \in \Omega \setminus D$, se obtiene $\frac{1}{\epsilon^2}\int_{\Omega\setminus D} f^*(v_\epsilon(x)) = 0$. Por otro lado, usando la desigualdad 3.3 del lema 9, se tiene

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_D f^*(v_\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_D 2\sigma = 2\pi.$$

Se concluye

$$E(v_\epsilon) \leq k_*|\ln(\epsilon)| + \frac{k_*}{2}\ln(\sigma) + L.$$

□

Lema 10. *Sea $Q = u_\epsilon$ un minimizador de la energía 3.1. Supongamos que es uniaxial para todo punto en Ω. Entonces existe $c > 0$ tal que*

$$E_\epsilon(Q) \geq k_*|ln\epsilon| + \frac{k_*}{2}ln\mu_1 - c,$$

donde μ_1 está dada por el lema 9.

Demostración. Sean

$$\Omega_t = \{x \in \Omega : |Q(x)| > t\},$$

$$\omega_t = \{x \in \Omega : |Q(x)| < t\},$$

$$\gamma_t = \partial\omega_t,$$

$$\alpha(t) = \int_{\Omega_t}\left|\nabla\frac{Q}{|Q|}\right|^2,$$

$$\eta(t) = \int_{\gamma_t}|\nabla|Q||d\mathcal{H}^1.$$

Por continuidad de Q y el lema 8 , el conjunto $\omega_t \neq \emptyset$ para $t \in [0,1)$.

Como $\nabla Q = 0$ en el conjunto $\{Q = 0\}$, aplicando el teorema de convergencia monótona

$$\int_\Omega |\nabla Q|^2 = \int_{\Omega_0}|\nabla Q|^2 = \lim_{t\to 0^+}\int_{\Omega_t}|\nabla Q|^2.$$

Pero si $|\nabla Q| \neq 0$, tenemos

$$|\nabla Q|^2 = |\nabla|Q||^2 + |Q|^2\left|\nabla\left(\frac{Q}{|Q|}\right)\right|^2.$$

Así pues,

$$\int_\Omega|\nabla Q|^2 = \lim_{t\to 0^+}\int_{\Omega_t}\left(|\nabla|Q||^2 + |Q|^2\left|\nabla\left(\frac{Q}{|Q|}\right)\right|^2\right).$$

Aplicando la fórmula de la coárea (proposición 3) a $E_\epsilon(Q)$,

$$E_\epsilon(Q) = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{\gamma_t}\left(|\nabla|Q|| + \frac{2f^*(Q)}{\epsilon^2|\nabla|Q||}\right)d\mathcal{H}^1 - 2t^2\alpha'(t)\right)dt.$$

Usando la desigualdad 3.2 y que $\beta(Q) = 0$, tenemos

$$f^*(Q) \geq \mu_1(1 - |Q|)^2,$$

por lo que

$$\int_{\gamma_t} \frac{2f^*(Q)}{\epsilon^2|\nabla|Q||} d\mathcal{H}^1 \geq \int_{\gamma_t} \frac{2\mu_1(1-t)^2}{\epsilon^2} \frac{1}{|\nabla|Q||} d\mathcal{H}^1. \tag{3.4}$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwarz,

$$\mathcal{H}(\gamma_t) = \int_{\gamma_t} d\mathcal{H}^1 = \int_{\gamma_t} \frac{|\nabla|Q||^{1/2}}{|\nabla|Q||^{1/2}} d\mathcal{H}^1 \leq \left(\int_{\gamma_t} |\nabla|Q|| d\mathcal{H}^1 \right)^{1/2} \int_{\gamma_t} \left(\frac{1}{|\nabla|Q||} d\mathcal{H}^1 \right)^{1/2}, \tag{3.5}$$

por lo que

$$\frac{\mathcal{H}(\gamma_t)^2}{\eta(t)} \leq \int_{\gamma_t} \frac{1}{|\nabla|Q||} d\mathcal{H}^1.$$

Usando 3.4 y 3.5, obtenemos

$$\int_{\gamma_t} \frac{2f^*(Q)}{\epsilon^2|\nabla|Q||} dt \geq \frac{2\mu_1(1-t)^2}{\epsilon^2} \frac{\mathcal{H}(\gamma_t)^2}{\eta(t)}.$$

Por otro lado, si $x, y \in \gamma_t$ son tales que $|x - y| = \mathrm{diam}(\gamma_t)$, entonces se tiene que $w_t \subset B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{|x-y|}{2}\right)$, y en consecuencia, $\mathrm{diam}(\gamma_t) \geq 2\mathrm{rad}(\omega_t)$. Como $\mathcal{H}^1(\gamma_t) \geq 2\mathrm{diam}(\gamma_t)$, se obtiene $\mathcal{H}^1(\gamma_t)^2 \geq 16\mathrm{rad}(\omega_t)^2$. Así,

$$\begin{aligned} E_\epsilon(Q) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\gamma_t} \left(\left(|\nabla|Q|| + \frac{2f^*(Q)}{\epsilon^2|\nabla|Q||} \right) d\mathcal{H}^1 - 2t^2\alpha'(t) \right) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\eta(t) + \frac{32\mu_1(1-t)^2 rad(\omega_t)^2}{\epsilon^2\eta(t)} \right) dt - \int_0^1 t^2\alpha'(t)dt \\ &\geq \int_0^1 \left(\frac{4\sqrt{2}}{\epsilon} \mu_1^{1/2}(1-t)\mathrm{rad}(\omega_t) \right) dt - \int_0^1 t^2\alpha'(t)dt \end{aligned}$$

Sea $1 > z > 0$, por integración por partes, se sigue

$$-\int_z^1 t^2\alpha'(t)dt = -\alpha(1) + \alpha(z)z^2 + 2\int_z^1 t\alpha(t)dt \geq 2\int_z^1 t\alpha(t)dt.$$

Pues, $\alpha(z) \geq 0$ y $\Omega_1 = \emptyset$.

Considerando que $\alpha(t) \geq 0$ y $\alpha'(t) \leq 0$. Por el teorema de convergencia monótona, podemos tomar límite cuando $z \to 0^+$ en la desigualdad anterior. Obtenemos

$$-\int_0^1 t^2\alpha'(t)dt \geq 2\int_0^1 t\alpha(t)dt.$$

Usando [[4], teorema 1] (considerando k_* en lugar del grado), tenemos

$$\alpha(t) \geq k_* \ln\left(\frac{1}{rad(\omega_t)}\right) - C.$$

De donde

$$E_\epsilon(Q) \geq \int_0^1 \frac{4\sqrt{2}}{\epsilon}\mu_1^{1/2}(1-t)rad(\omega_t)dt - \int_0^1 2tk_* \ln(rad(\omega_t))dt - C.$$

La función $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(r) = \frac{4\sqrt{2}}{\epsilon}\mu_1^{1/2}(1-t)r - t2k_* \ln(r)$$

alcanza su mínimo en $r = \frac{\epsilon k_* t}{2\sqrt{2\mu_1}(1-t)}$, por lo que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{4\sqrt{2}}{\epsilon}\left(\mu_1^{1/2}(1-t)\mathrm{rad}(\omega_t)\right)dt - \int_0^1 t2k_* \ln(\mathrm{rad}(\omega_t))dt - C \\
&\geq \int_0^1 \left(2k_*t - 2k_*t\ln\left(\frac{\epsilon k_* t}{2\sqrt{2}\sqrt{\mu_1}(1-t)}\right)\right)dt - C \\
&= -2k_* \int_0^1 \left(t\ln(\epsilon) - \frac{t}{2}\ln\left(\mu_1 - t\ln\frac{k_* t}{2\sqrt{2}(1-t)}\right)\right)dt - C
\end{aligned}$$

Como $\left|\int_0^1 t\ln\left(\frac{k_* t}{2\sqrt{2}(1-t)}\right)dt\right| < \infty$, se concluye

$$E_\epsilon(Q) \geq k_*|\ln\epsilon| + \frac{k_*}{2}\ln\mu_1 - c.$$

□

Teorema 2. *Existen $t_0 > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que, si $\frac{ac}{b^2} \geq t_0$ y $\epsilon \leq \epsilon_0$, los minimizadores del problema 3.1 tienen puntos de biaxialidad y nunca alcanzan el estado isotrópico.*

Demostración. Sea u_ϵ un minimizador de 3.1 y supongamos que es siempre uniaxial. Luego, por el lema 8, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $|u_\epsilon(x_0)| = 0$.
En virtud del lema 9, existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$,

$$k_* \ln\frac{\mu_1}{a} > k_* \ln\frac{\sigma}{a} + L,$$

por lo que

$$k_* \ln\epsilon + k_* \ln\mu_1(t) - c > k_* \ln\sigma + k_* \ln a + L + k_* \ln\epsilon.$$

Considerando los lemas 10 y 11,

$$E(u_\epsilon) = \inf_{u\in H_g^1(\Omega,S_0)} E(u) \geq k_* \ln\epsilon + k_* \ln\mu_1(t) - c > k_* \ln a + L + k_* \ln\epsilon > E(v_\epsilon),$$

lo que contradice que u_ϵ es mínimo.

Nota 7. *Por el lema 7 , el teorema 2 se cumple para los mínimos de 2.1.*

□

Capítulo 4

Propiedades de los mínimos cuando $\epsilon \to 0$

En este capítulo nos interesa estudiar el comportamiento de los mínimos u_ϵ cuando $\epsilon \to 0$. Partiremos mencionando un lema clásico.

Lema 11 (Identidad de Pohozaev)**.** *Sea $G \subset \Omega$, con G abierto y conexo, y consideremos $x_0 \in G$. Sean ν la normal exterior unitaria a ∂G y τ el vector tangente unitario a ∂G, de manera que (ν, τ) tiene orientación positiva respecto a la base euclideana usual. Entonces, todo minimizador u_ϵ de la energía de Landau de Gennes satisface*

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_G f(u_\epsilon) + \frac{1}{2}\int_{\partial G}(x-x_0).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu}\right|^2 d\mathcal{H}^1$$
$$= \int_{\partial G}\left\{\frac{1}{2}(x-x_0).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau}\right|^2 - (x-x_0).\tau\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} + (x-x_0).\nu\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right\} d\mathcal{H}^1$$

Demostración. La demostración es una adaptación de [7, Teorema III.2]. □

Proposición 12. *Para $b \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{B_R(b)} \subset \Omega$, existe una función $v_\epsilon \in H^1_g(\Omega, S_0)$ que cumple con:*

- *$v_\epsilon|_{\partial B_R(b)} = g_0$, donde g_0 es una geodésica cerrada y no contractible en $\mathcal{N}$.*
- *$E_\epsilon(v_\epsilon) \le k_*|\ln\epsilon| + C$, donde $C > 0$ depende de Ω , R y b.*

Demostración. Asumamos $b = 0$. Definamos $P(\theta) = s_*\left(n(\theta)\otimes n(\theta) - \frac{1}{3}I\right)$, con $n(\theta) = \left[cos\left(\frac{\theta}{2}\right), sin\left(\frac{\theta}{2}\right), 0\right]^t$. Consideremos $v_\epsilon(R,\theta) = P(\theta)$. Como $v_\epsilon(R,\theta)$ es no contractible, por el lema 1, existe una función suave $v : \Omega \setminus B(0,R) \to \mathcal{N}$ tal que $v = v_\epsilon$ en $\partial B(0,R)$ y $v = g$ en $\partial\Omega$. Sea $v_\epsilon = v$ en $\Omega \setminus B(0,R)$. Nos interesa extender v_ϵ a $B(0,R)$, lo cual se logrará como sigue

$$v_\epsilon(r,\theta) = \begin{cases} \epsilon^{-1} r P(\theta) & \text{si } 0 < r \leq \epsilon \\ P(\theta) & \text{si } \epsilon \leq r < R \end{cases} .$$

Un cálculo directo permite ver que v_ϵ cumple con lo que dice la proposición.

□

Nota 8. *Se desprende de la proposición anterior que si u_ϵ es mínimo del funcional de Landau de Gennes, entonces*

$$E_\epsilon(u_\epsilon) \leq k_* |\ln \epsilon| + C.$$

4.1. Localización de singularidades

El objetivo es probar que cuando $\epsilon \to 0$, u_ϵ está cerca de la variedad $\mathcal{N}$ salvo en una unión finita de bolas. Los centros de estas bolas serán los candidatos a defectos topológicos.

Definamos

$$e_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}.$$

Proposición 13. *Sea $\delta > 0$ de la proposición 2. Existe $C > 0$ de modo que para todo x que cumple* $\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) < \delta$*, se satisface*

$$-\Delta e_\epsilon(u_\epsilon(x)) \leq C e_\epsilon(u_\epsilon(x))^2. \tag{4.1}$$

Demostración. Se tiene

$$-\Delta|\nabla u_\epsilon|^2 = -\nabla(\Delta u_\epsilon).\nabla u_\epsilon - |\nabla^2 u_\epsilon|^2. \tag{4.2}$$

Como u_ϵ es mínimo del funcional de Landau de Gennes, satisface la ecuación 2.17, por lo que

$$-\Delta|\nabla u_\epsilon|^2 = -\nabla\frac{Df(u_\epsilon) - A(D(f(u_\epsilon)I)}{\epsilon^2}.\nabla u_\epsilon - |\nabla^2 u_\epsilon|^2 = -\nabla\frac{Df(u_\epsilon)}{\epsilon^2}.\nabla u_\epsilon - |\nabla^2 u_\epsilon|^2. \tag{4.3}$$

Por otro lado

$$-\Delta\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} = -\frac{1}{\epsilon^2}\nabla(Df(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}Df(u_\epsilon).\Delta u_\epsilon, \tag{4.4}$$

usando que u_ϵ satisface la ecuación 2.17,

$$-\Delta\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} = -\frac{1}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) - \frac{1}{\epsilon^4}|Df(u_\epsilon)|^2 + \frac{1}{\epsilon^4}Df(u_\epsilon)\dot{A}(Df(u_\epsilon))I \tag{4.5}$$

$$= -\frac{1}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) - \frac{2}{3\epsilon^4}|Df(u_\epsilon)|^2.$$

Juntando las ecuaciones 4.3 y 4.5, se obtiene

$$-\Delta e_\epsilon(u_\epsilon) = -\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) - |\nabla^2 u_\epsilon|^2 - \frac{2}{3\epsilon^4}|Df(u_\epsilon)|^2. \tag{4.6}$$

Ahora, se trabajará el término $-\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right)$. Esto se hará utilizando el hecho que $D^2 f$ es localmente Lipschitz , el lema 5 y que la proyección $Q(u_\epsilon) \in \mathcal{N}$ está bien definida. Obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) &= -\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) + \frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(Q(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon\right) \\
&\quad - \frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(Q(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon\right) \\
&\leq -\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(Q(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon\right) + \frac{2}{\epsilon^2}|D^2 f(Q(u_\epsilon)) - D^2 f(u_\epsilon)||\nabla u_\epsilon|^2 \\
&\leq -\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(Q(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon\right) + \frac{2C}{\epsilon^2}|Q(u_\epsilon) - u_\epsilon||\nabla u_\epsilon|^2 \\
&= -\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(Q(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon\right) + \frac{2C}{\epsilon^2}\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon, \mathcal{N})|\nabla \mathrm{u}_\epsilon|^2.
\end{aligned}$$

Pero, como f se minimiza en la variedad $\mathcal{N}$, la matriz $D^2 f$ es semidefinida positiva sobre $\mathcal{N}$, por lo que

$$\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(Q(u_\epsilon)).\nabla u_\epsilon\right) \geq 0,$$

y por lo tanto,

$$-\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) \leq \frac{2C}{\epsilon^2}\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon, \mathcal{N})|\nabla \mathrm{u}_\epsilon|^2.$$

Usando la desigualdad $A^2 + B^2 \geq 2AB$, se obtiene

$$\frac{2C}{\epsilon^2}\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon, \mathcal{N})|\nabla \mathrm{u}_\epsilon|^2 \leq \frac{\mathrm{m}_0^2 \mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon, \mathcal{N})^2}{\epsilon^4} + \frac{4\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}_0^2}|\nabla \mathrm{u}_\epsilon|^4,$$

y por la ecuación 4.6, se concluye

$$\begin{aligned}
-\Delta e_\epsilon(u_\epsilon) &= -\frac{2}{\epsilon^2}\nabla u_\epsilon : \left(D^2 f(u_\epsilon).\nabla u_\epsilon\right) - |\nabla^2 u_\epsilon|^2 - \frac{2}{3\epsilon^4}|Df(u_\epsilon)|^2 \\
&\leq \frac{m_0^2 \mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon, \mathcal{N})^2}{\epsilon^4} + \frac{4C^2}{m_0^2}|\nabla u_\epsilon|^4 - |\nabla^2 u_\epsilon|^2 - \frac{2}{3\epsilon^4}|Df(u_\epsilon)|^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Por $-|\nabla^2 u_\epsilon|^2 - \frac{2}{3\epsilon^4}|Df(u_\epsilon)|^2 \leq 0$ y el lema 5, se sigue

$$-\Delta e_\epsilon(u_\epsilon) \leq C e_\epsilon(u_\epsilon)^2. \tag{4.8}$$

□

Proposición 14. *Existen constantes μ_0 y λ_0 tales que, para $l \geq \lambda_0 \epsilon$ y todo $x_0 \in \Omega$, se cumple la propiedad*

$$\int_{\Omega \cap B(x_0, 2l)} f(u_\epsilon) \leq \mu_0 \epsilon^2 \Longrightarrow \mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) \leq \delta \textit{ para todo } \mathrm{x} \in \Omega \cap \mathrm{B}(\mathrm{x}_0, \mathrm{l}).$$

Demostración. Supongamos que para algún punto $y \in B(x_0, l) \cap \Omega$ se cumple

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}), \mathcal{N}) > \delta.$$

Sean $h = min\{f(a) : a \in S_0, \mathrm{dist}(\mathrm{a}, \mathcal{N}) \geq \delta, |\mathrm{a}| \leq 1\}$, y $C > 0$ como en la proposición 10. Definamos

$$\lambda_0 = \frac{\delta}{2C},\ \mu_0 = \frac{\pi}{2} \text{mín}\left\{h, \frac{m_0 \delta^2}{8}\right\}.$$

Probemos que se cumple $B(y, \lambda_0 \epsilon) \subset \Omega \cap B(x_0, 2l)$. Supongamos que $\mathrm{dist}(\mathrm{y}, \partial\Omega) \leq \lambda_0 \epsilon$. Dado que para todo $z \in \partial\Omega$ se satisface $u_\epsilon(z) \in \mathcal{N}$,

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}), \mathcal{N}) \leq |\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}) - \mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{z})| \leq ||\nabla \mathrm{u}||_\infty |\mathrm{y} - \mathrm{z}| \leq \frac{\mathrm{C}}{\epsilon}|\mathrm{y} - \mathrm{z}|.$$

Tomando ínfimo sobre $z \in \partial\Omega$, se concluye

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}), \mathcal{N}) \leq \frac{\mathrm{C}}{\epsilon}\mathrm{dist}(\mathrm{y}, \partial\Omega) \leq \frac{\mathrm{C}\lambda_0\epsilon}{\epsilon} = \frac{\delta}{2},$$

lo que contradice la elección de y, y entonces $B(y, \lambda_0\epsilon) \subset \Omega \cap B(x_0, 2l)$.

Sea $x \in B(y, \lambda_0\epsilon)$. Se tiene que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) \geq \mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}), \mathcal{N}) - |\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}) - \mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y})|.$$

Utilizando la proposición 10,

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}), \mathcal{N}) - |\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}) - \mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y})| \geq \mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{y}), \mathcal{N}) - \frac{\mathrm{C}}{\epsilon}\lambda_0\epsilon \geq \delta - \frac{\delta}{2},$$

Y por lo tanto,

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) \geq \frac{\delta}{2},\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{B}(\mathrm{y}, \lambda_0\epsilon).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_0,2l)\cap\Omega} f(u_\epsilon) \geq \frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(y,\lambda_0\epsilon)} f(u_\epsilon) \geq \pi\lambda_0^2 \text{mín}\left\{f_0, \frac{\delta^2 m_0}{8}\right\} \geq 2\mu_0$$

Lo que finaliza la prueba. □

En adelante, fijemos $0 < \alpha < \frac{1}{6}$.

Lema 12. *Sean* $x_0 \in \Omega$ *y* $0 < \epsilon < 1$. *Existe* $r \in (\epsilon^{2\alpha}, \epsilon^\alpha)$ *tal que*

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega}\left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) d\mathcal{H}^1 \leq \frac{2M_\epsilon}{\alpha r},$$

donde $M_\epsilon = |\ln\epsilon|^{-1}E_\epsilon(u_\epsilon, B(x_0, \epsilon^\alpha) \cap \Omega)$

Demostración. Si para todo $r \in (\epsilon^{2\alpha}, \epsilon^\alpha)$ se cumpliera que

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega}\left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) d\mathcal{H}^1 > \frac{2M_\epsilon}{\alpha r},$$

al integrar respecto a r entre $(\epsilon^{2\alpha}, \epsilon^{\alpha})$, se tendría

$$\int_{\epsilon^{2\alpha}}^{\epsilon^{\alpha}} \int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right) d\mathcal{H}^1 dr > \frac{2M_\epsilon}{\alpha} \int_{\epsilon^{2\alpha}}^{\epsilon^{\alpha}} \frac{1}{r} dr = 2M_\epsilon |\ln \epsilon| = 2E_\epsilon(u_\epsilon, B(x_0, \epsilon^\alpha) \cap \Omega).$$

Pero

$$E_\epsilon(u_\epsilon, B(x_0, \epsilon^\alpha) \cap \Omega) \geq \int_{\epsilon^{2\alpha}}^{\epsilon^{\alpha}} \int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right) d\mathcal{H}^1 dr,$$

y por lo tanto,

$$E_\epsilon(u_\epsilon, B(x_0, \epsilon^\alpha) \cap \Omega) > 2E_\epsilon(u_\epsilon, B(x_0, \epsilon^\alpha) \cap \Omega),$$

lo que es una contradicción. □

Lema 13. *Sea $x_0 \in \Omega$. Existen $\epsilon_0 > 0$ y $C_\alpha > 0$ tales que para todo $\epsilon < \epsilon_0$ se cumple*

$$\int_{B(x_0,\epsilon^\alpha)\cap\Omega} \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \leq C_\alpha.$$

Demostración. Por el lema 12, existe $r \in (\epsilon^{2\alpha}, \epsilon^\alpha)$ tal que

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right) d\mathcal{H}^1 \leq \frac{2M_\epsilon}{\alpha r}.$$

Pero, por la nota 8,

$$\frac{2M_\epsilon}{\alpha r} = \frac{2E_\epsilon(u_\epsilon, B(x_0, \epsilon^\alpha) \cap \Omega)}{\alpha r |\ln \epsilon|} \leq \frac{2E_\epsilon(u_\epsilon, \Omega)}{\alpha r |\ln \epsilon|} \leq \frac{2(k_* |\ln \epsilon| + C)}{\alpha r |\ln \epsilon|} = \frac{2k_*}{\alpha r} + \frac{2C}{\alpha r |\ln \epsilon|}.$$

Como

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{2C}{\alpha |\ln \epsilon|} = 0,$$

existe ϵ_0 tal que todo $\epsilon < \epsilon_0$ cumple

$$\frac{2C}{\alpha r |\ln \epsilon|} \leq \frac{2k_*}{\alpha r}.$$

Se concluye

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right) d\mathcal{H}^1 \leq \frac{4k_*}{\alpha r}. \tag{4.9}$$

Distinguimos dos casos posibles:

- (i) Si $B(x_0, r) \subset \Omega$.

  Aplicando la identidad de Pohozaev (lema 11), considerando $G = B(x_0, r)$,

$$\int_{\partial B(x_0,r)} (x - x_0).\nu \left\{ \frac{|\nabla u_\epsilon|}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right\} d\mathcal{H}^1$$

$$= \int_{\partial B(x_0,r)} (\nabla u_\epsilon.(x - x_0))(\nabla u_\epsilon.\nu) d\mathcal{H}^1 + \int_{B(x_0,r)} \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}$$

Como ν en un punto $x \in \partial B(x_0, r)$ está dada por $\nu = \frac{x-x_0}{||x-x_0||}$, se tiene

$$\int_{\partial B(x_0,r)} (\nabla u_\epsilon.(x-x_0))(\nabla u_\epsilon.\nu) d\mathcal{H}^1 \geq 0,$$

de donde

$$\int_{\partial B(x_0,r)} r\left\{\frac{|\nabla u_\epsilon|}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right\} d\mathcal{H}^1 \geq \int_{B(x_0,r)} \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2},$$

y por lo tanto,

$$\int_{B(x_0,r)} \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \leq r\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} d\mathcal{H}^1 \leq \frac{4k_*}{\alpha}.$$

Lo anterior concluye el lema en este caso.

- (ii) Si $B(x_0, r)$ no está contenida en Ω.

  Definamos $\Gamma = B(x_0, r) \cap \partial\Omega$. Usando la identidad de Pohozaev sobre $B(x_0, r) \cap \Omega$ y un punto $x_1 \in B(x_0, r) \cap \Omega$, deducimos

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) + \frac{1}{2}\int_{\partial(B(x_0,r)\cap\Omega)} (x-x_1)\cdot\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\mathcal{H}^1$$
$$= \int_{\partial(B(x_0,r)\cap\Omega)} \left\{\frac{1}{2}(x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau}\right|^2 - (x-x_1).\tau\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau} + (x-x_1).\nu\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right\} d\mathcal{H}^1,$$

  donde hemos considerado que (ν, τ) tiene orientación positiva respecto a la base usual euclideana.

  Como $\partial(B(x_0, r) \cap \Omega) = (\partial B(x_0, r) \cap \Omega) \cup \Gamma$, tenemos

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) + \frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} (x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\mathcal{H}^1 + \frac{1}{2}\int_\Gamma (x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\mathcal{H}^1$$
$$= \int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left\{\frac{1}{2}(x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau}\right|^2 - (x-x_1).\tau\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau} + (x-x_1).\nu\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right\} d\mathcal{H}^1 +$$
$$\int_\Gamma \left\{\frac{1}{2}(x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau}\right|^2 - (x-x_1).\tau\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau} + (x-x_1).\nu\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right\} d\mathcal{H}^1.$$

  Ahora, como $f|_{\partial\Omega} = 0$, se tiene que $\int_\Gamma (x-x_1).\nu\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} d\mathcal{H}^1 = 0$, y entonces

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) + \frac{1}{2}\int_\Gamma (x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\mathcal{H}^1$$
$$= \int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{1}{2}(x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau}\right|^2 - (x-x_1).\tau\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau} + (x-x_1).\nu\frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) d\mathcal{H}^1$$
$$-\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{1}{2}(x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu}\right|^2\right) d\mathcal{H}^1 + \int_\Gamma \left(\left\{\frac{1}{2}(x-x_1).\nu\left|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau}\right|^2 - (x-x_1).\tau\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tau}\right\}\right) d\mathcal{H}^1.$$

Por la ecuación 4.9, existe $A > 0$ que depende de α y Ω, tal que

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{1}{2}(x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 - (x-x_1).\tau \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} + (x-x_1).\nu \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right) d\mathcal{H}^1 - \int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \frac{1}{2}(x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\mathcal{H}^1 \le A,$$

y por tanto,

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) + \frac{1}{2} \int_\Gamma (x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\mathcal{H}^1 \le A + \int_\Gamma \left\{ \frac{1}{2}(x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 - (x-x_1).\tau \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right\} d\mathcal{H}^1.$$

Notemos que

$$- \int_\Gamma (x-x_1).\tau \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} d\mathcal{H}^1 \le \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right| \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right| d\mathcal{H}^1 \le \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left(\frac{1}{4} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 \right) d\mathcal{H}^1,$$

por lo cual

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) + \frac{1}{2} \int_\Gamma (x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\mathcal{H}^1 \le A + \int_\Gamma \left\{ \frac{1}{2}(x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 \right\} d\mathcal{H}^1 + \frac{1}{4} \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\mathcal{H}^1 + \frac{1}{2} \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 d\mathcal{H}^1.$$

Vemos que existe $B > 0$, dependiente de Ω, tal que

$$\int_\Gamma \left\{ \frac{1}{2}(x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 \right\} d\mathcal{H}^1 + \frac{1}{2} \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} \right|^2 d\mathcal{H}^1 = \int_\Gamma \left\{ \frac{1}{2}(x-x_1).\nu \left| \frac{\partial g}{\partial \tau} \right|^2 \right\} d\mathcal{H}^1 + \frac{1}{2} \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left| \frac{\partial g}{\partial \tau} \right|^2 d\mathcal{H}^1 \le B,$$

lo que implica

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) + \frac{1}{2} \int_\Gamma (x-x_1).\nu \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\mathcal{H}^1 \le A + B + \frac{1}{4} \int_\Gamma |(x-x_1).\tau| \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\mathcal{H}^1.$$

Sea $\pi(x_1)$ la proyección de x_1 sobre $\partial\Omega$. Elijamos $\epsilon > 0$ y x_1, de manera que para todo $x \in \Gamma$ se cumpla

$$\frac{1}{2}|(x-x_1) \cdot \tau| \le (x-x_1) \cdot \nu.$$

Con esta elección, se sigue que

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) \leq C_\alpha.$$

□

Proposición 15. *Existen constantes* n_α *y* $\epsilon_0 > 0$ *tales que, si* $x_0 \in \Omega$ *y* $\epsilon < \epsilon_0$ *cumplen la propiedad*

$$\int_{B(x_0,\epsilon^\alpha)\cap\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 \leq n_\alpha |\ln\epsilon| + C, \tag{4.10}$$

entonces, para todo $x \in B(x_0,\epsilon^\alpha)$*, se satisface* $\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}),\mathcal{N}) \leq \delta$.

Demostración. Sean n_α y $\epsilon_0 > 0$, por determinar, que satisfacen 4.10. Por lema 12, existe $r \in (\epsilon^{2\alpha}, \epsilon^\alpha)$ tal que

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} d\mathcal{H}^1 \leq \frac{2M_\epsilon}{\alpha r}.$$

Por 4.10 y lema 13,

$$E(u_\epsilon, B(x_0,r)\cap\Omega) = \int_{B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) \leq n_\alpha|\ln\epsilon| + C + 2C_\alpha.$$

Las afirmaciones anteriores permiten deducir que

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) d\mathcal{H} \leq \frac{2M_\epsilon}{\alpha r} \leq \frac{n_\alpha + (C+2C_\alpha)|\ln\epsilon|^{-1}}{\alpha r}.$$

Sea $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$ se cumple $(C+2C_\alpha)|\ln\epsilon|^{-1} < 7n_\alpha$. Entonces,

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) d\mathcal{H}^1 \leq \frac{8n_\alpha}{\alpha r}. \tag{4.11}$$

Haciendo la misma demostración que en el lema 13, sustituyendo el término $\frac{4k_*}{\alpha r}$ por $\frac{8n_\alpha}{\alpha r}$, obtenemos

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} f(u_\epsilon) \leq C\frac{n_\alpha}{\alpha} + C\epsilon_0^\alpha.$$

Consideremos n_α y ϵ_0 tales que

$$(C+2C_\alpha)|\ln\epsilon|^{-1} < 7n_\alpha,$$

$$C\frac{n_\alpha}{\alpha} + C\epsilon_0^\alpha < \mu_0,$$

$$\lambda_0\epsilon_0 < \epsilon_0^{2\alpha},$$

donde μ_0 y λ_0 son las constantes de la proposición 14. La conclusión sigue de la proposición 14.

□

Proposición 16. *Sea $B(x_0, r) \subset \Omega$. Para $x \in B = B(0,1)$ definamos $v_\epsilon(x) = u_\epsilon(rx + x_0)$. Si η_α y ϵ son como la proposición 15, y se cumple*

$$\int_{\partial B} e_\epsilon(v_\epsilon) \leq \eta_\alpha, \tag{4.12}$$

entonces existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$\int_B e_\epsilon(v_\epsilon) \leq \eta_\alpha C_\alpha \tag{4.13}$$

Demostración. Ver A.1.4. □

Proposición 17. *Sea v_ϵ como en la proposición 16. Supongamos que $e_\epsilon(v_\epsilon)$ satisface la desigualdad 4.1 para cada $x \in B = B(0,1)$. Entonces existe $\beta > 0$ tal que si*

$$\int_{\partial B} e_\epsilon(v_\epsilon) \leq \beta,$$

se tiene

$$\sup_{x \in B(0,\frac{1}{2})} e_\epsilon(v_\epsilon(x)) \leq \int_B e_\epsilon(v_\epsilon)$$

Demostración. El resultado es una adaptación de [[5], Teorema 2.2]. Si bien este último está hecho para funciones armónicas, puede omitirse dicha hipótesis si consideramos que se satisface la desigualdad 4.1. □

Proposición 18. *Existen constantes positivas C_α y n_α tales que, si $x_0 \in \Omega$ satisface*

$$\int_{B(x_0,\epsilon^\alpha)\cap\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 \leq n_\alpha |\ln \epsilon| + C,$$

entonces

$$\epsilon^{4\alpha} e_\epsilon(u_\epsilon)(x_0) \leq C_\alpha$$

Demostración. Asumamos primero que $B(x_0, \epsilon^{4\alpha}) \subset \Omega$. Por la proposición 15, tenemos que para todo $x \in B(x_0, \epsilon^\alpha)$ se cumple $\mathrm{dist(u_\epsilon(x)}, \mathcal{N}) < \delta$, por lo cual la proposición 13 es válida.

Por lema 12, podemos encontrar $r \in (\epsilon^{2\alpha}, \epsilon^\alpha)$ tal que

$$\int_{\partial B(x_0,r)\cap\Omega} \left(\frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{2} + \frac{f(u_\epsilon)}{\epsilon^2} \right) d\mathcal{H}^1 \leq \frac{4n_\alpha}{\alpha r}. \tag{4.14}$$

Notemos que se satisface

$$E_{\epsilon/r}(v_{\epsilon/r}, B(0,1)) = E(u_\epsilon, B(x_0, r)),$$

es decir, $v_{\epsilon/r}$ es mínimo del funcional de energía $E_{\epsilon/r}(w, B(0,1))$ sujeto a la condición $w|_{\partial B(0,1)} = u_\epsilon|_{\partial B(x_0,r)}$. Por otro lado, 4.14 se transforma en

$$\int_{\partial B(0,1)} e_\epsilon(v_{\epsilon/r}) d\mathcal{H}^1 \leq \frac{4n_\alpha}{\alpha}$$

Usando las proposiciones 16 y 17, concluimos que si η_α es suficientemente chico, se tiene

$$r^2 e_\epsilon(u_\epsilon)(x_0) = e_{\epsilon/r}(v_{\epsilon/r})(0) \leq \int_{B(0,1)} e_{\epsilon/r}(v_{\epsilon/r}) \leq C_\alpha n_\alpha.$$

Ahora, si $B(x_0, \epsilon^{4\alpha}) \cap \Omega \neq \emptyset$, el lema 16 sigue valiendo, y el lema 17 puede ser modificado como en [[6], Teorema 2.6]. □

Teorema 3. *Sea $\delta > 0$ que satisface la proposición 2. Existe ϵ_0 tal que, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, hay un conjunto finito X_ϵ que posee las siguientes propiedadades:*

- *Tiene cardinalidad acotada e independiente de ϵ.*
- $\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) \leq \delta$, *si* $\mathrm{dist}(\mathrm{X}_\epsilon, \mathrm{x}) > \lambda_0 \epsilon$, *donde λ_0 es la constante del lema 14.*
- $\epsilon^{4\alpha} e_\epsilon(u_\epsilon) \leq C_\alpha$, *si* $\mathrm{dist}(\mathrm{x}, \mathrm{X}_\epsilon) > \epsilon^\alpha$.

Demostración. Por el teorema de cubrimiento de Vitalli [[2],Teorema 1.5.1], podemos encontrar un conjunto finito $\{y_i\}_{i \in I}$ que satisface

$$\Omega \subset \bigcup_{i \in I} B(y_i, 3\epsilon^{\alpha/2}),$$

y

$$B(y_i, \epsilon^{\alpha/2}) \cap B(y_j, \epsilon^{\alpha/2}) = \emptyset \text{ si } i \neq j. \tag{4.15}$$

Sea J_ϵ el conjunto de índices $i \in I$ que cumple

$$\int_{B(y_i, 3\epsilon^\alpha)} |\nabla u_\epsilon|^2 \geq \eta_\alpha(|\ln \epsilon| + 1),$$

donde η_α es la constante del lema 15. De esta manera, se tiene

$$\eta_\alpha(|\ln \epsilon| + 1) Card(J_\epsilon) \leq \sum_{j \in J_\epsilon} \int_{B(y_i, 3\epsilon^\alpha)} |\nabla u_\epsilon|^2. \tag{4.16}$$

La condición 4.15 implica que el número de bolas de la forma $B(y_i, 3\epsilon^\alpha)$ que contienen a x fijo, es acotada e independiente de ϵ y x . Luego, aplicando la nota 8, tenemos que hay una constante $M > 0$ que satisface

$$\sum_{j \in J_\epsilon} \int_{B(y_i, 3\epsilon^\alpha)} |\nabla u_\epsilon|^2 \leq M(|\ln \epsilon| + 1). \tag{4.17}$$

Por lo tanto, por 4.16 y 4.17, tenemos que $Card(J_\epsilon)$ es acotada e independiente de ϵ. Por definición del conjunto J_ϵ y la proposición 15, tenemos que si $i \in I \setminus J_\epsilon$, entonces

$$\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) \leq \delta \ , \forall \mathrm{x} \in \mathrm{B}(\mathrm{y_i}, 3\epsilon^\alpha), \tag{4.18}$$

y

$$\epsilon^{4\alpha} e_\epsilon(u_\epsilon) \leq C_\alpha \ , \forall x \in B(y_i, \epsilon^\alpha). \tag{4.19}$$

Sea $i \in J_\epsilon$, y sean λ_0 y μ_0 de la proposición 14. Usando nuevamente el teorema de cubrimiento de Vitalli, podemos encontrar una cantidad finita de puntos $\{x_m^i\}_{m\in A_{\epsilon,i}} \subset B(y_i, 3\epsilon^\alpha)$ tales que

$$B(y_i, 3\epsilon^\alpha) \subset \bigcup_{m\in A_{\epsilon,i}} B(x_m^i, 3\lambda_0\epsilon)$$

y

$$B(x_m^i, \epsilon\lambda_0) \cap B(x_m^j, \epsilon\lambda_0) = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Definamos $L_{\epsilon,i}$ como el conjunto de índices $m \in A_{\epsilon,i}$ tales que

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_m^i, 3\lambda_0\epsilon)} f(u_\epsilon) > \mu_0.$$

Por el lema 13, sabemos que el término $\frac{1}{\epsilon^2}\int_{B(x_m^i,3\lambda_0\epsilon)} f(u_\epsilon)$ es acotado, y procediendo de manera análoga a la prueba de que el conjunto J_ϵ es acotado e independiente de ϵ, se demuestra que $Card(L_{\epsilon,i})$ es finita e independiente de ϵ.
Finalmente, por la proposición 14 se tiene que si $m \notin L_{\epsilon,i}$, entonces para todo $x \in B(x_m^i, 3\lambda_0\epsilon)$ se cumple $\mathrm{dist(u_\epsilon(x), \mathcal{N})} \leq \delta$.
Por lo anterior y la elección de las bolas, se concluye el teorema.

□

Para cada $\epsilon > 0$ digamos que $X_\epsilon = \{x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, ..., x_{k_\epsilon}^\epsilon\}$. Sea $\epsilon_n \to 0$. Como existe una constante $M > 0$ independiente de ϵ tal que $card\,(X_\epsilon) \leq M$, podemos extraer una subsucesión (redefinida como ϵ_n) tal que $k_{\epsilon_n} = N$. Denotemos por $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_l$ los distintos límites de $x_i^{\epsilon_n}$, con $i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$. Nuestro objetivo es demostrar que $\{a_i\}_{i=1}^l \subset \Omega$. Para esto, se trabajará en un dominio Ω_L que contiene a Ω. Además, definiremos una función suave $\overline{g} : \Omega_L \setminus \Omega \to \mathcal{N}$ tal que $\overline{g} = g$ en $\partial\Omega$. De esta manera, se puede extender cualquier función $v \in H_g^1(\Omega, \mathcal{N})$ a una función $\overline{v} : \Omega_L \to \mathcal{N}$ definiendo $\overline{v} = \overline{g}$ en $\Omega_L \setminus \Omega$.

4.2. Comportamiento de las singularidades

La sección 4.1 nos mostró la existencia de una cantidad finita de puntos en Ω donde lejos de estos puntos la energía es finita, y u_ϵ se encuentra cerca de la variedad $\mathcal{N}$. Ahora, nos interesa estudiar qué sucede con la energía y con los minimizadores cerca de estos puntos cuando $\epsilon \to 0$. Para comenzar se fijarán algunas notaciones.

Sea $r > 0$ tal que $r < \mathrm{dist(\partial\Omega_L, \partial\Omega)}$ y $r < \frac{1}{2}\min_{i\neq j}|a_i - a_j|$, donde $\{a_1, a_2, ..., a_l\}$ son los puntos construidos anteriormente. Con esta elección, se cumple que la colección de bolas $\{B(a_i, r)\}_{i=1}^l$ son disjuntas y están contenidas en Ω_L.

Para $i \in \{1, 2, ..., l\}$ definamos A_i como el conjunto de índices $j \in \{1, 2, ..., N'\}$ tal que $x_j^{\epsilon_n} \to a_i$, por lo que para n suficientemente grande se cumple la propiedad $B(x_j^{\epsilon_n}, \lambda_0\epsilon_n) \subset B(a_i, r)$ si y sólo si $j \in A_i$.

Definamos $\Omega_{i,n} = B(a_i, r) \setminus \bigcup_{j\in A_i} B(x_j^{\epsilon_n}, \lambda_0\epsilon_n)$. Por construcción de los puntos $\{a_i\}_{i=1}^{l}$, tenemos que si $x \in \Omega_{i,n}$ entonces $\mathrm{dist}(\mathrm{u}_\epsilon(\mathrm{x}), \mathcal{N}) \leq \delta$, y así las funciones

$$v_{\epsilon_n} = Q(u_{\epsilon_n}),$$

$$\pi_{\epsilon_n} = \mathrm{dist}(\mathrm{u}_{\epsilon_n}, \mathcal{N}),$$

están bien definidas sobre $\Omega_{i,n}$.

Sea $\eta_{j,n}$ la clase de homotopía libre de v_{ϵ_n} restringida a $\partial B(x_j^{\epsilon_n}, \lambda_0\epsilon_n)$, y sea

$$k_{i,n} = \inf\{\lambda_*(\gamma) : \gamma \in \prod_{j\in A_i} \eta_{j,n}\}$$

La continuidad de v_{ϵ_n} y el lema 1 implican que

$$k_* \leq \sum_{i=1}^{N} k_{i,n} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Notemos que si $k_{i,n} = 0$, argumentando de manera análoga a la proposición 16 podemos mostrar que la energía $E_\epsilon(u_\epsilon, B(a_i, r))$ no tiende a infinito si $\epsilon \to 0$, por lo que el punto a_i no es singularidad.

En adelante se asumirá que $k_{i,n} > 0$.

Lema 14. *Sean $s < \rho$, y $v : B_\rho \setminus B_s \to \mathcal{N}$ una función en $H^1(B_\rho \setminus B_s, \mathcal{N})$ definida en el anillo. Si $v|_{\partial B_s}$ es no contractible, entonces*

$$\frac{1}{2}\int_{B_\rho\setminus B_s} |\nabla v|^2 \geq \frac{\lambda(\eta)^2}{4\pi} \ln\frac{\rho}{s},$$

donde η es la clase de homotopía libre de $v|_{\partial B_s}$.

Demostración. Supongamos que v es diferenciable. Haciendo el cálculo en coordenadas polares,

$$\frac{1}{2}\int_{B_\rho\setminus B_s} |\nabla v|^2 = \frac{1}{2}\int_s^\rho \int_0^{2\pi} \rho|v_\rho|^2 + \frac{1}{\rho}|v_\theta|^2 d\rho d\theta$$
$$\geq \frac{1}{2}\int_s^\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}|v_\theta|^2 d\rho d\theta \geq \frac{1}{2}\int_s^\rho \frac{1}{\rho}d\rho \int_0^{2\pi} |v_\theta|^2 d\theta$$
$$= \ln\frac{\rho}{s}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |v_\theta|^2 d\theta$$

Pero, debido a que $2\pi\int_0^{2\pi} |v_\theta|^2 d\theta \geq \lambda(\eta)^2$, se tiene

$$\frac{1}{2}\int_{B_\rho\setminus B_s} |\nabla v|^2 \geq \frac{\lambda(\eta)^2}{4\pi} \ln\frac{\rho}{s}.$$

El caso $v \in H^1(B_\rho \setminus B_s, \mathcal{N})$ puede ser obtenido mediante densidad. $\square$

Lema 15. *Existe una constante $C > 0$ que no depende de n ni de r, tal que para toda función $v \in H^1(\Omega_{i,n}, \mathcal{N})$ se cumple*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{i,n}} |\nabla v|^2 \geq k_{i,n}\left(\ln\frac{r}{\epsilon_n} - C\right)$$

Demostración. Considerando el lema 14, la demostración del lema 15 es equivalente a [[4], Proposición de página 385]. □

Nos interesa extender el lema anterior a funciones que no tomen necesariamente valores en $\mathcal{N}$ en $\Omega_{i,n}$, pero que sí estén suficientemente cerca de $\mathcal{N}$, como es el caso de u_{ϵ_n}. Para esto, se necesitará el siguiente lema.

Lema 16. *Existe una constante $C_* > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega_{i,n}} \pi_{\epsilon_n}|\nabla v_{\epsilon_n}|^2 \leq C_*.$$

Demostración. Ver A.1.5. □

Lema 17. *Existe una constante $C > 0$, independiente de n y de r, y un número N_r tal que, para todo $n \geq N_r$ y para todo i, tenemos que*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{i,n}} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq k_{i,n}\left(\ln\frac{r}{\epsilon_n} - C\right) - C.$$

Demostración. Por el lema 2 , se obtiene

$$|\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq (1 - C\pi_{\epsilon_n})|\nabla v_{\epsilon_n}|^2,$$

usando el lema 16

$$\int_{\Omega_{i,n}} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \geq \int_{\Omega_{i,n}} (1 - C\pi_{\epsilon_n})|\nabla v_{\epsilon_n}|^2 = \int_{\Omega_{i,n}} |\nabla v_{\epsilon_n}|^2 - C\int_{\Omega_{i,n}} \pi_{\epsilon_n}|\nabla v_{\epsilon_n}|^2.$$

Finalmente, utilizando los lemas 15 y 16, se sigue

$$\int_{\Omega_{i,n}} |\nabla v_{\epsilon_n}|^2 - C\int_{\Omega_{i,n}} \pi_{\epsilon_n}|\nabla v_{\epsilon_n}|^2 \geq k_{i,n}\left(\ln\frac{r}{\epsilon_n} - C\right) - C_*.$$

□

Proposición 19. *Existe $C > 0$, independiente de n y de r, y un número $N(r)$ tal que para todo $n \geq N(r)$ se satisface*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_L\setminus\bigcup_{i=1}^{l} B(a_i,r)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq k_*|\ln r| + C.$$

Demostración. Es una consecuencia de la nota 8 , lema 15 y 4.20. □

La proposición 19 nos permite dar características de u_{ϵ_n} fuera de las singularidades.

Sea $K \subset \Omega_L \setminus \{a_i\}_{i=1}^l$ un compacto, y sea $r_K > 0$ tal que $K \subset \Omega_L \setminus \bigcup_{i=1}^l B(a_i, r_K)$. Con la ayuda de la proposición 19, obtenemos que existe N_K tal que para todo $n \geq N_K$ se cumple

$$\frac{1}{2}\int_K |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_L \setminus \bigcup_{i=1}^l B(a_i,r_K)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq k_*|\ln r_K| + C \leq C_K. \tag{4.21}$$

Por otra parte, por el lema 5, tenemos

$$\int_K \mathrm{dist}(\mathrm{u}_{\epsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x}), \mathcal{N})^2 \leq \mathrm{C}\int_\mathrm{K} \mathrm{f}(\mathrm{u}_{\epsilon_\mathrm{n}}).$$

Pero, como K está suficientemente alejado de los puntos $\{a_i\}_{i=1}^l$, se tiene que por construcción

$$\int_K f(u_{\epsilon_n}) \leq \mu_{0,K}\epsilon_n^2,$$

de donde se obtiene la existencia de $C_K > 0$ tal que

$$\int_K \mathrm{dist}(\mathrm{u}_{\epsilon_\mathrm{n}}, \mathcal{N})^2 \leq \mathrm{C_K}\epsilon_\mathrm{n}^2. \tag{4.22}$$

Por 19, podemos usar el teorema de Banach Alaoglu y un proceso de diagonalización, para extraer una subsucesión ϵ_{n_k} tal que $u_{\epsilon_{n_k}} \to u_0$ débilmente en $H^1_{loc}(\Omega_L \setminus \{a_1, a_2, ..., a_l\})$. Además, usando el teorema de Rellich-Kondrachov, tenemos que la convergencia es fuerte en $L^2(\Omega_L \setminus \{a_1, a_2, ..., a_l\})$, por lo que existe una subsucesión, que renombraremos como ϵ_n, tal que $u_{\epsilon_n} \to u_0$ en casi todas partes.

Finalmente, usando el lema de Fatou, la continuidad de la función distancia, y 4.22, se obtiene

$$\int_K \mathrm{dist}(\mathrm{u}_0, \mathcal{N})^2 = \int_\mathrm{K} \liminf_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{dist}(\mathrm{u}_{\epsilon_\mathrm{n}}, \mathcal{N})^2 \leq \liminf_{\mathrm{n}\to\infty} \int_\mathrm{K} \mathrm{dist}(\mathrm{u}_{\epsilon_\mathrm{n}}, \mathcal{N})^2 = 0.$$

Esto último dice que $\mathrm{dist}(\mathrm{u}_0(\mathrm{x}), \mathcal{N}) = 0$ para casi todo $\Omega_L \setminus \{a_1, a_2, ..., a_l\}$, es decir, $u_0(x) \in \mathcal{N}$ para casi todo $\Omega_L \setminus \{a_1, a_2, ..., a_l\}$. Lo anterior se resume en la siguiente proposición.

Proposición 20. *Existe una sucesión $\epsilon_n \to 0$ y $u_0 \in H^1_{loc}(\Omega_L \setminus \{a_1, a_2, ..., a_l\})$ tal que $u_{\epsilon_n} \to u_0$ en casi todas partes y débilmente en $H^1_{loc}(\Omega_L \setminus \{a_1, a_2, ..., a_l\})$. Más aún, se cumple que u_0 toma valores en $\mathcal{N}$ casi seguramente.*

La proposición anterior nos permitirá excluir la posibilidad de que los puntos $\{a_i\}_{i=1}^l$ se encuentren en $\partial\Omega$.

Proposición 21. *Para todo $i \in \{1, ..., l\}$, el punto a_i está en Ω .*

Demostración. Supongamos que algún $a_i \in \partial\Omega$, el cual en adelante llamaremos a. Haciendo el mismo cálculo que en el lema 15, obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\cap B(a,r)\setminus B(a,\epsilon)} |\nabla u_0|^2 \geq \frac{\lambda(\eta)^2}{2\pi}(1+A_r)\ln\frac{r}{\epsilon},$$

donde A_r es tal que $A_r \to 0$ si $r \to 0$. Siguiendo el mismo procedimiento que [[4], Teorema 1]], se tiene

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\cup_{i=1}^{l} B(a_i,r)} |\nabla u_0|^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i k_{i,n}\right)(1+A_r)\ln r - C, \tag{4.23}$$

donde $\alpha_i = 1$ si $a_i \notin \partial\Omega$, y $\alpha_i = 2$ si $a_i \in \partial\Omega$. Además, la convergencia débil de $u_{\epsilon_n} \to u_0$ en $H^1_{loc}(\Omega_l \setminus \{a_1,..,a_l\})$, junto con el hecho de que $f \geq 0$, implica que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\cup_{i=1}^{l} B(a_i,r)} |\nabla u_0|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, \Omega\setminus\cup_{i=1}^{l} B(a_i,r)).$$

Por la proposición 19,

$$\liminf_{n\to\infty} E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, \Omega\setminus\cup_{i=1}^{l} B(a_i,r)) \leq k_*|\ln r| + C,$$

por lo tanto se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\cup_{i=1}^{l} B(a_i,r)} |\nabla u_0|^2 \leq k_*|\ln r| + C. \tag{4.24}$$

De 4.23 y 4.24, se sigue

$$k_*|\ln r| + C \geq \left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i k_{i,n}\right)(1+A_r)\ln r - C. \tag{4.25}$$

Dividiendo por $|\ln r|$ y haciendo $r \to 0$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i k_{i,n} \leq k_*.$$

Pero de la nota 4, se concluye que $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i k_{i,n} \leq \sum_{i=1}^{N} k_{i,n}$. Por lo tanto, $\alpha_i = 1$ para $i \in \{1,..,l\}$. □

Por la proposición 7, se cumple que $k_{i,n} = k_*$ o $k_{i,n} = 0$. Por lo que la igualdad $\sum_{i=1}^{N'} k_{i,n} = k_*$ implica que el conjunto $\{a_i\}_{i=1}^{l}$ es un singleton, el cual será llamado a. Se probará el teorema principal de esta sección, que es el siguiente.

Teorema 4. *Existe una sucesión $\epsilon_n \to 0$, un punto $a \in \Omega$, y una función $u_0 \in C^\infty(\Omega \setminus \{a\})$ tales que:*

- *(i) $u_{\epsilon_n} \to u_0$ fuertemente en $H^1_{loc}(\Omega\setminus\{a\})$ y uniformemente en cada compacto $K \subset \Omega\setminus\{a\}$.*

- *(ii)Para toda bola $B \subset\subset \Omega \setminus \{a\}$, la función u_0 es un minimizante ármonico, esto es*
$$\frac{1}{2}\int_B |\nabla u_0|^2 = \min\left\{\frac{1}{2}\int_B |\nabla v|^2 : v \in H^1(B, \mathcal{N}), v = u_o \text{ en } \partial B\right\},$$
y resuelve la ecuación de mapeo armónico $\Delta u_0(x) \perp T_{u_0(x)}\mathcal{N}$, para todo $x \in \Omega \setminus \{a\}$.

Demostración. Sea x_0 y $R > 0$ tal que $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega_L \setminus \{a\}$. Como estamos lejos de $\{a\}$, la proposición 19 dice
$$\int_{B(x_0,R)} e(u_{\epsilon_n}) \leq C.$$
Usando el lema de Fatou y el teorema de Fubini,
$$\int_{R/2}^{R} \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial B(x_0,\rho)} e(u_{\epsilon_n}) d\mathcal{H}^1 d\rho \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{R/2}^{R} \int_{\partial B(x_0,\rho)} e(u_{\epsilon_n}) d\mathcal{H}^1 d\rho \tag{4.26}$$
$$= \liminf_{n\to\infty} E(u_{\epsilon_n}, B(x_0, R) \setminus B(x_0, R/2)) \leq C.$$
En consecuencia, existe $\rho \in (R/2, R)$ tal que
$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\partial(x_0,\rho)} e(u_{\epsilon_n}) d\mathcal{H}^1 \leq C.$$
Luego, existe una subsucesión de ϵ_n, la cual en adelante llamaremos $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de manera tal
$$\int_{\partial B(x_0,\rho)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C.$$
Redefinamos $R = \rho$. Como $H^1(\partial B(x_0, R)) \subset\subset C(\partial B(x_0, R))$, existe una subsucesión, en adelante llamada ϵ_n, tal que $u_{\epsilon_n} \to u_0$ uniformemente en $\partial B(x_0, R)$. Dado que se está trabajando lejos de a, es posible realizar la misma construcción de la proposición 16 para obtener una sucesión de mapeos armónicos $w_n : B(x_0, R) \to \mathcal{N}$ y una sucesión $\overline{w}_n$ tales que:

- $w_{\epsilon_n}|_{\partial B(x_0,R)} = Q(u_{\epsilon_n})|_{\partial B(x_0,R)}$.
- $\overline{w}_{\epsilon_n}|_{\partial B(x_0,R)} = u_{\epsilon_n}|_{\partial B(x_0,R)}$.
- $E_{\epsilon_n}(\overline{w}_{\epsilon_n}, B(x_0, \rho)) \leq \frac{1}{2}(1 + o\left(\frac{1}{n}\right))||\nabla w_{\epsilon_n}||^2_{L^2(B(x_0,R))} + c\epsilon_n$.

Por la elección de ϵ_n, $\{u_{\epsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada uniformemente en $H^1(B(x_0, R))$, por lo que $\{w_{\epsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. Usando [[7], Teorema 5.3], existe $\{w_{\epsilon_{\epsilon_{n_k}}}\} \subset \{w_{\epsilon_n}\}$ tal que
$$w_{\epsilon_{n_k}} \to w_0 \text{ en } H^1(B(x_0, R)).$$
Redefinimos $\{w_{\epsilon_n}\}$ como $\{w_{\epsilon_{n_k}}\}$. Dado que $w_{\epsilon_n}|_{\partial B(x_0,R)} = Q(u_{\epsilon_n})|_{\partial B(x_0,R)}$, tenemos $w_0|_{\partial B(x_0,R)} = u_0|_{\partial B(x_0,R)}$.

El objetivo es mostrar que $\frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla w_0|^2 = \frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla u_0|^2$, esto probaría que u_0 es un mapeo armónico y concluiría la primera parte del teorema. Usando el hecho de que w_0 es un mapeo armónico,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}||\nabla u_{\epsilon_n}||^2_{L^2(B(x_0,R))} \le \limsup_{n\to\infty} E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, B(x_0,R)) \le$$

$$\limsup_{n\to\infty} E_{\epsilon_n}(\overline{w}_{\epsilon_n}, B(x_0,R)) \le \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(1+o(n^{-1}))||\nabla w_{\epsilon_n}||^2_{L^2(B(x_0,R))} + c\epsilon_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla w_0|^2 \le \frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla u_0|^2.$$

Por otro lado, por proposición 20,

$$\frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla u_0|^2 \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}||\nabla u_{\epsilon_n}||^2_{L^2(B(x_0,R))}.$$

Sigue que

$$\frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla w_0|^2 = \frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} |\nabla u_0|^2,$$

y que

$$\limsup_{n\to\infty} E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, B(x_0,R)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}||\nabla u_{\epsilon_n}||^2_{L^2(B(x_0,R))}. \tag{4.27}$$

Por último, se mostrará que, a través de una subsucesión ϵ_n, se tiene que $u_{\epsilon_n} \to u_0$ uniformemente en $B(x_0,R)$. Por 4.27

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon_n^2}\int_{B(x_0,R)} f(u_{\epsilon_n}) = 0. \tag{4.28}$$

Por la convergencia de $\{\nabla u_{\epsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y 4.28, para todo $\beta > 0$ existe $d > 0$ tal que

$$\int_{B(x_0,d)} e_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \le \beta.$$

Sea β suficientemente chico tal que se pueda aplicar la proposición 17. Se infiere

$$\sup_{x\in B(x_0,\frac{d}{2})} e_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n})(x) \le E_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}, B(x,d)) \le C.$$

En particular, $|\nabla u_\epsilon(y)| \le C$ para todo $y \in B(x_0, \frac{d}{2})$. De esta manera, la sucesión $\{u_{\epsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, y por proposición 6 es equiacotada, de donde la conclusión sigue del teorema de Arzela Ascoli.

□

Queremos estudiar el comportamiento del parámetro de biaxialidad cerca de la singularidad a. Se partirá probando el siguiente lema.

Lema 18. *Sea u_ϵ un minimizador de la energía 2.1. Si $\min_{x\in\overline{\Omega}} |u_\epsilon(x)| > 0$, entonces $\max_{x\in\overline{\Omega}} \beta(u_\epsilon(x)) = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\max_{x\in\overline{\Omega}} |\beta(u_\epsilon(x))| < 1$. Por la nota 6,para algún x en Ω se cumple que $r(u_\epsilon(x)) \neq \frac{1}{2}$. La conexidad de $\overline{\Omega}$ implica que

$$u_\epsilon(\overline{\Omega}) \subset \left\{Q \in S_0 | r(Q) < \frac{1}{2}\right\} \text{ o } u_\epsilon(\overline{\Omega}) \subset \left\{Q \in S_0 | r(Q) > \frac{1}{2}\right\}.$$

Como $u_\epsilon(\partial\Omega) \subset \{Q \in S_0 | r(Q) < \frac{1}{2}\}$, se tiene que $u_\epsilon(\overline{\Omega}) \subset \{Q \in S_0 | r(Q) < \frac{1}{2}\}$. Definamos $\mathcal{K} = \{Q \in S_0 | \lambda_1 > \lambda_2$,donde λ_i son los valores propios de $Q\}$. Por la proposición 4, $u_\epsilon(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{K}$.

Para $Q \in \mathcal{K}$, sea $n \in \mathbb{S}^2$ un vector propio asociado al valor propio λ_1, y sea $s(Q) \neq 0$ el parámetro asociado a la representación dada en la proposición 4. Sea $H : \mathcal{K} \to \mathcal{N}$ definida como

$$H(Q) = s_*(n \otimes n - \frac{1}{3}I),$$

al tener λ_1 multiplicidad 1, H está bien definida y es continua. Finalmente, $H \circ u_\epsilon(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{N}$ es una extensión continua de g a todo Ω, lo que es una contradicción. $\square$

Usando la continuidad del parámetro de biaxialidad β, los teoremas 4, 2 y el lema 18, se concluye el siguiente teorema.

Teorema 5. *Sean a y $\epsilon_n \to 0$ dados en el teorema 4. Para cada $r > 0$ y todo $\chi > 0$ existe $N > 0$ tal que, para todo $n > N$ se satisface*
$\max_{\Omega\setminus B(a,r)} \beta(u_{\epsilon_n}(x)) < \chi$ *y* $\max_{x\in B(a,r)\cap\Omega} \beta(u_{\epsilon_n}(x)) = 1$

El siguiente teorema nos da una propiedad acerca de la función limite u_0 cerca de la singularidad a.

Teorema 6. *Sea $a \in \Omega$ como en el teorema 4. Para $\rho > 0$ tal que $B(a,\rho) \subset \Omega$ se define $c_\rho : [0, 2\pi] \to \mathcal{N}$ como $c_\rho(\theta) = u_0(a + a_\rho(\theta))$, donde $a_\rho(\theta) = (\rho cos(\theta), \rho sin(\theta))$. Existe $\rho_n \to 0$ tal que $\{c_{\rho_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una geodésica c_0 de $\mathcal{N}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = 0$. Sea $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset \Omega$, y definamos $L : (0,r) \to \mathbb{R}$ como

$$L(\rho) = \frac{\left(\int_{\partial B(0,\rho)} |\nabla u_0.\tau_x|^2 - k_*\right)}{\rho},$$

donde τ_x denota al vector tangente unitario en cada $x \in \partial B(0,\rho)$. Como

$$\int_{\partial B(0,\rho)} |\nabla u_0.\tau_x|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |c'_\rho(\theta)|^2 d\theta \geq \frac{\lambda(\eta)^2}{4\pi} = k_*,$$

L es positiva en $(0,r)$. Sea $0 < r_0 < r$. Por la proposición 19, a través de una sucesión $\epsilon_n \to 0$,

$$\int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq k_* |\ln r_0| + C.$$

Usando el teorema 4, podemos pasar al límite cuando $n \to \infty$. Obtenemos

$$\int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} |\nabla u_0|^2 \leq k_*|\ln r_0| + C.$$

Escribiendo lo anterior en coordenadas polares,

$$\int_{r_0}^{r} \int_0^{2\pi} |\nabla u_0.\nu|^2 + \frac{1}{\rho}|\nabla u_0.\tau|^2 d\theta dr \leq k_*|\ln r_0| + C.$$

Por lo tanto

$$\int_{r_0}^{r} \frac{1}{\rho} \int_{\partial B(0,\rho)} |\nabla u_0.\tau|^2 d\mathcal{H}^1 dr \leq k_*|\ln r_0| + C, \tag{4.29}$$

de donde, para todo $0 < r_0 < r$ se cumple

$$\int_{r_0}^{r} L(\rho)d\rho = \int_{r_0}^{r} \frac{\int_{\partial B(0,\rho)} |\nabla u_0.\tau_x|^2 d\mathcal{H}^1}{\rho} - \frac{k_*}{\rho}d\rho$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{\int_{\partial B(0,\rho)} |\nabla u_0.\tau_x|^2 d\mathcal{H}^1}{\rho} d\rho - k_*|\ln r_0| + k_*|\ln r| \leq C.$$

Por el teorema de convergencia monótona, hacemos $r_0 \to 0$. Se obtiene

$$\int_0^r L(\rho)d\rho \leq C.$$

Luego, existe una sucesión $\rho_n \to 0$ tal que $\rho_n L(\rho_n) \to 0$, es decir

$$\int_{\partial B(0,\rho)} |\nabla u_0.\tau_x|^2 \to k_*,$$

y por lo tanto, c_{ρ_n} es una sucesión minimizante de la energía 1.7. Por método estándar del cálculo de variaciones, existe c_0 un mínimo del funcional 1.7 tal que $c_{\rho_n} \to c_0$ débilmente en $H^1((0,2\pi),\mathcal{N})$. Finalmente, el teorema se concluye considerando que $H^1((0,2\pi),\mathcal{N}) \subset\subset C((0,2\pi),\mathcal{N})$. $\square$

Apéndice A

A.1. Demostraciones anexas

A.1.1. Demostración lema 1

Demostración. Supongamos que se cumple 1.2. Definamos

$$D = \{x \in \Omega, \mathrm{dist}(\partial\Omega, \mathrm{x}) > \delta\},$$

con $\delta > 0$ de manera que Ω y D sean homotópicamente equivalente. Asumamos que D es un disco con k hoyos, y que A_1 es la frontera exterior de este. A su vez, supongamos que existe un camino B, homeomorfo a un círculo que divide a D en dos regiones, D_1 y D_2, de modo que

$$\partial D_1 = \bigcup_{j=1}^{h} A_j \cup B \text{ , y } \partial D_2 = \bigcup_{j=h+1}^{k} A_j \cup B.$$

Sea $b : B \to \mathcal{N}$ tal que su clase de homotopía libre pertenece a $\prod_{j=1}^{h} \gamma_j \cap \prod_{j=h+1}^{k} \gamma_j$.

Sea $x_0 \in D_1$, y sean $a_1, a_2, a_3, .., a_h : [0,1] \to D_1$ caminos que unen x_0 con $A_1, A_2, A_3, .., A_h$ de manera que no se intersectan entre si. Definamos

$$\alpha = (\overline{a_1} * (\alpha_1 * a_1)) * (\overline{a_2} * (\alpha_2 * a_2)) * .... * (\overline{a_h} * (\alpha_h * a_h)),$$

con $\alpha_i \to A_i$ es una parametrización de A_i. Como la clase de conjugación de b pertenece a $\prod_{j=1}^{h} \gamma_j$, existe un representante σ que puede ser escrito

$$\sigma = (\overline{\sigma_1} * (g_1' * \sigma_1)) * (\overline{\sigma_2} * (g_2' * \sigma_2)) * .... * (\overline{\sigma_h} * (g_h' * \sigma_h)),$$

donde $g_i' \in \gamma_i$ y σ_i es un camino que une $v_0 \in \mathcal{N}$ con $g_i'(1)$. Sea $\Sigma(t) = \sigma(\alpha(t))$. Finalmente, por construcción existe una homotopía libre entre b y Σ, lo que permite extender $g_1, g_2, g_3, ..., g_h, b$ a una función $v_1 : D_1 \to \mathcal{N}$. Haciendo la misma construcción para D_2, obtenemos $v_2 : D_2 \to \mathcal{N}$ que extiende a $g_{h+1}, g_{h+2}, ..., g_k, b$. De donde, se obtiene

$m : D\mathcal{N}$ que extiende a cada dato de frontera. Para que m sea diferenciable basta hacer argumentos de aproximación clásicos.

Si existe la extensión m, sea $h \in \{1, 2, .., k\}$. Haciendo la misma construcción anterior, $m|_{D_1}$ induce una homotopía libre entre $m|_{IM\alpha}$ y $m|_B$, por lo que $m_B \in \prod_{j=1}^{h} \gamma_j$. Análogamente, se prueba que $m_B \in \prod_{j=h+1}^{k} \gamma_j$, de donde se concluye.

□

A.1.2. Demostración proposición 8

Demostración. La demostración tiene dos partes:

- (i)
$$\delta^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3} + \left(\frac{b}{3\sqrt{6}} - c\sqrt{\frac{2}{3}} s_* \right) \delta + \frac{c}{4}\delta^2 \right) + \frac{b}{6\sqrt{6}} \beta(Q)|Q|^3 \leq f(Q)$$
De la desigualdad $\sqrt{1-t} \leq 1 - \frac{t}{2}$, válida para $t \in [0, 1]$. Se obtiene
$$trQ^3 = |Q|^3 \sqrt{\frac{1-\beta}{6}} \leq \frac{|Q|^3}{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{\beta}{2} \right).$$
Por lo que
$$\begin{aligned} f(Q) = -\frac{a}{2} trQ^2 - \frac{b}{3} trQ^3 + \frac{c}{4} (trQ^2)^2 &= -\frac{a}{2} trQ^2 - \frac{b}{3\sqrt{6}} |Q|^3 \sqrt{1-\beta} + \frac{c}{4} (trQ^2)^2 \\ &\geq -\frac{a}{2} trQ^2 - \frac{b}{3\sqrt{6}} |Q|^3 \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) + \frac{c}{4} |Q|^4 + \\ &= -\frac{a}{2} trQ^2 - \frac{b}{3\sqrt{6}} |Q|^3 \frac{\beta}{2} + \frac{c}{4} |Q|^4 + \frac{b|Q|^3 \beta}{6\sqrt{6}}. \end{aligned}$$
Por definición de s_*, tenemos que $\frac{2cs_*^2}{3} = \frac{b}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2}{3}} s_* + a$. Entonces
$$-\frac{a}{2} trQ^2 - \frac{b}{3\sqrt{6}} |Q|^3 \frac{\beta}{2} + \frac{c}{4} |Q|^4 + \frac{b|Q|^3 \beta}{6\sqrt{6}} =$$
$$\delta \left(-a\sqrt{\frac{2}{3}} s_* + s_*^2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} c s_*^3 \right) + \delta^2 \left(-\frac{a}{2} - \frac{b}{3} s_* + s_*^2 c \right) - \delta^3 \left(c\sqrt{\frac{[}{2}]3} s_* - s_+^2 + c \right) + \delta^4 \frac{c}{4}.$$
Nuevamente por definición de s_*, tenemos
$$\left(-a\sqrt{\frac{2}{3}} s_* + s_*^2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} c s_*^3 \right) = 0,$$
y
$$\left(-\frac{a}{2} - \frac{b}{3} s_* + s_*^2 c \right) = \frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3}.$$
Lo que concluye la demostración.

- (ii)
$$f(Q) \leq \delta^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{s_*^2 c}{3} + \left(\frac{b}{3\sqrt{6}} - c\sqrt{\frac{2}{3}} s_* \right) \delta + \frac{c}{4}\delta^2 \right) + \frac{b}{3\sqrt{6}} \beta(Q)|Q|^3$$

 Consideremos que $trQ^3 = |Q|^3\sqrt{\frac{1-\beta}{6}} \leq \frac{|Q|^3}{\sqrt{6}}(1-\beta)$, ya que $0 \leq 1-\beta \leq 1$. El resultado se obtiene utilizando los mismos cálculos de la desigualdad anterior.

□

A.1.3. Demostración lema 2

Tomando $\mathcal{N}$ como subvariedad de $\mathbb{R}^d$. Sea $x \in \Omega$, y sea $e_1, e_2, .., e_k$ una base ortonormal de $\left(T_{u(x)}\mathcal{N}\right)^{\perp}$ definida en un entorno de $\pi(x)$ que llamaremos U_x. Entonces, para cada $y \in U_x$ podemos escribir

$$u(y) = \pi(y) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(y) e_i(\pi(y)). \tag{A.1}$$

Diferenciando y elevando al cuadrado, obtenemos

$$|\nabla u(y)|^2 = |\nabla \pi(y)|^2 + \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i(y)^2 |\nabla e_i(\pi(y))|^2 + |\nabla \alpha_i(y)|^2 + 2\alpha_i \nabla \pi(y) : \nabla e_i(\pi(y)) \right). \tag{A.2}$$

Tomemos $M = 1 + \sup_{1\leq i\leq k} ||\nabla e_i||_{L^\infty(U_x)}$. Usando la regla de la cadena y el hecho de que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(y)^2 = |u(y) - \pi(y)|^2 = \sigma(y)^2$,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(y)^2 |\nabla e_i(\pi(y))|^2 \leq M \sum_{i=1}^{k} \sigma(y)^2 |\nabla \pi(y)|^2.$$

Ahora trabajaremos el término $2\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nabla\pi(y) : \nabla e_i(\pi(y))$. Por la desigualdad de Cauchy Schwarz,

$$\left| 2\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nabla \pi(y) : \nabla e_i(\pi(y)) \right| \leq M \sum_{i=1}^{k} \alpha_i |\nabla \pi(y)|^2 \leq k^{1/2} M \sigma(y) |\nabla \pi(y)|^2.$$

Redefinimos $M = Mk^{1/2}$. A partir de A.2, se sigue

$$(1-M\sigma(y))|\nabla\pi(y)|^2 \leq (1-M\sigma(y))|\nabla\pi(y)|^2 + \sum_{i=1}^{k} |\nabla\alpha_i(y)|^2 \leq |\nabla u(y)|^2 \leq (1+M\sigma(y))|\nabla\pi(y)|^2 + \sum_{i=1}^{k} |\nabla\alpha_i|^2.$$

Finalmente, acotemos $\sum_{i=1}^{k} |\nabla\alpha_i(y)|^2$. Diferenciando y elevando al cuadrado la igualdad $\alpha(y) = (u(y) - \pi(y)).e_i(\pi(y))$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} |\nabla \alpha_i(y)|^2 &= \sum_{i=1}^{k} |\nabla(u(y) - \pi(y)).e_i(\pi(y))|^2 + |(u(y) - \pi(y)).\nabla e_i(\pi(y))|^2 \\ &\leq M \left(|\nabla(u(y) - \pi(y))|^2 + \sigma(y)|\nabla\pi(y)| \right) = M \left(|\nabla\sigma(y)|^2 + \sigma(y)|\nabla\pi(y)| \right), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la desigualdad para todo $y \in U_x$. Notemos que M depende del abierto U_x, utilizando que $\mathcal{N}$ es compacto se obtiene un M global.

A.1.4. Demostración proposición 16

Demostración. Sea $\pi_\epsilon : \overline{B} \to \mathbb{R}$ definida como $\pi_\epsilon(x) = |v_\epsilon(x) - Q(v_\epsilon(x))|$. Sea $Q_\epsilon : B(0,1) \to \mathcal{N}$ un mapeo armónico tal que $Q_\epsilon(x) = Q(v_\epsilon(x))$, para cada $x \in \partial B$. Por [[6], Lema 4.2], podemos asumir

$$\int_B |\nabla Q_\epsilon|^2 \leq C \int_{\partial B} e_\epsilon(v_\epsilon) \leq C\eta_\alpha. \tag{A.3}$$

El objetivo es poder modificar de alguna manera Q_ϵ de modo que cumpla la misma condición de borde que v_ϵ. Con esto, Q_ϵ tendrá menor energía que v_ϵ. Sobre $\overline{B}$, definamos

$$\varphi_\epsilon(\rho, \theta) = \begin{cases} \epsilon^{-1}(\rho - 1 + \epsilon)\pi_\epsilon(\theta) & , \text{si } 1 - \epsilon \leq \rho \leq 1 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Se puede mostrar que

$$\int_B |\nabla \varphi_\epsilon|^2 + \frac{\varphi_\epsilon^2}{\epsilon^2} \leq C\epsilon.$$

Para cada $x \in \partial B$, se cumple

$$v_\epsilon(x) - Q(v_\epsilon(x)) = v_\epsilon(x) - Q_\epsilon(x) \in \left(T_{Q(v_\epsilon(x))}\mathcal{N}\right)^\perp.$$

Usando las particiones de la unidad, podemos construir $\nu_\epsilon : B \to \mathcal{N}$ tal que $\nu_\epsilon(x) = v_\epsilon(x) - Q_\epsilon(x)$ para $x \in \partial B$ y $|\nu(x)| = \varphi_\epsilon(x)$ para $x \in B$. Finalmente, sea $Q_\epsilon^* = Q_\epsilon - \nu_\epsilon$. Se tiene

$$Q_\epsilon^*(x) = v_\epsilon(x) \text{ para cada } x \in \partial B$$

$$Q(Q_\epsilon^*(x)) = v_\epsilon(x) \text{ y } |Q_\epsilon^*(x) - Q(Q_\epsilon^*(x))| = \varphi_\epsilon(x) \text{ si } x \in B.$$

Aplicado el lema 16 a Q_ϵ^*. Se obtiene

$$|\nabla Q_\epsilon^*|^2 \leq (1 + C\varphi_\epsilon)|Q_\epsilon|^2 + C(|\nabla\varphi_\epsilon|^2 + \varphi_\epsilon^2).$$

Usando el lema 5 y que $|\varphi_\epsilon| \leq \pi_\epsilon(\theta) \leq \delta$,

$$\int_B e_\epsilon(Q_\epsilon^*) \leq (1 + \delta)||\nabla Q_\epsilon||_{L^2(B)} + C\epsilon.$$

Finalmente, la demostración se concluye considerando que v_ϵ es mínimo y A.3 . □

A.1.5. Demostración lema 16

Sea $x \in \Omega$. Definamos $A_n = \{x \in \Omega : \mathrm{dist(x, X_{\epsilon_n})} \leq \epsilon^\alpha\}$.

Por la proposición 3 junto con los lemas 5 y 13 ,

$$\int_{\Omega_{i,n}\setminus A_n} \pi_{\epsilon_n}|\nabla v_{\epsilon_n}|^2 \leq C \int_{\Omega_{i,n}\setminus A_n} \pi_{\epsilon_n}|\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C\epsilon_n^{1-6\alpha} \leq C.$$

Acotamos $\int_{A_n} \pi_{\epsilon_n} |\nabla v_{\epsilon_n}|^2$, usando la desigualdad de Cauchy Schwarz,

$$\int_{A_n} \pi_{\epsilon_n} |\nabla v_{\epsilon_n}|^2 \leq C \int_{A_n} \pi_{\epsilon_n} |\nabla u_{\epsilon_n}|^2 \leq C||\pi_{\epsilon_n}||_{L^2(A_n)} ||\nabla u_{\epsilon_n}||^2_{L^4(A_n)}.$$

Por la desigualdad de interpolación de Gagliardo Niremberg ,

$$||\nabla u_{\epsilon_n}||_{L^4(A_n)} \leq C||\Delta u_{\epsilon_n}||^{1/2}_{L^4(A_n)} ||u_{\epsilon_n}||^{1/2}_{L^\infty(A_n)}.$$

Usando la ecuación 2.17 y el lema 6,

$$||\nabla u_\epsilon||_{L^4(A_n)} \leq \frac{C}{\epsilon_n} ||Df(u_{\epsilon_n})||^{1/2}_{L^2(A_n)}.$$

Poo el lema 5,

$$\int_{A_n} \pi_{\epsilon_n} |\nabla v_{\epsilon_n}|^2 \leq \frac{C}{\epsilon_n} ||Df(u_{\epsilon_n})||^{1/2}_{L^2(A_n)} \leq \frac{CM_0}{\epsilon_n^2} ||\pi_{\epsilon_n}||_{L^2(A_n)} \leq \frac{K}{\epsilon_n^2} \int_{A_n} f(u_\epsilon).$$

Considerando el lema 13, se concluye el resultado.

Bibliografía

[1] Giacomo Canevari. Biaxiality in the asymptotic analysis of a 2-d Landau-de Gennes model for liquid crystals. *arXiv:1307.8065*, 2013.

[2] Dmitry Golovaty and José Alberto Montero. On minimizers of a Landau–de Gennes energy functional on planar domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 213(2):447–490, 2014.

[3] Roger Moser. *Partial regularity for harmonic maps and related problems.* World Scientific, 2005.

[4] Lawrence Craig Evans and Ronald F Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC press, 2015.

[5] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1(2):123–148, 1993.

[6] Etienne Sandier. Lower bounds for the energy of unit vector fields and applications. *Journal of Functional Analysis*, 152(2):379–403, 1998.

[7] Richard M Schoen. Analytic aspects of the harmonic map problem. In *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations*, pages 321–358. Springer, 1984.

[8] Richard Schoen, Karen Uhlenbeck, et al. A regularity theory for harmonic maps. *Journal of Differential Geometry*, 17(2):307–335, 1982.

[9] Robert Hardt, David Kinderlehrer, and Fang-Hua Lin. Stable defects of minimizers of constrained variational principles. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 5, pages 297–322, 1988.

[10] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. *Ginzburg-Landau Vortices*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Nigel J Mottram and Christopher JP Newton. Introduction to Q-tensor theory. *arXiv:1409.3542*, 2014.

[12] Duvan Henao and Apala Majumdar. Symmetry of Uniaxial Global Landau–de Gennes Minimizers in the Theory of Nematic Liquid Crystals. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 44(5):3217–3241, 2012.

[13] James Munkres. Topology. 2000.

[14] Apala Majumdar. Equilibrium order parameters of nematic liquid crystals in the Landau-de Gennes theory. *European Journal of Applied Mathematics*, 21(02):181–203, 2010.

[15] John M Ball and Arghir Zarnescu. Orientability and energy minimization in liquid crystal models. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 202(2):493–535, 2011.

[16] Apala Majumdar and Arghir Zarnescu. Landau–de gennes theory of nematic liquid crystals: the Oseen- Frank limit and beyond. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 196(1):227–280, 2010.