PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

Superfícies Fibradas Etale Simplemente Conexas

Por
Rodrigo Codorniu Cofré

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontifícia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Magister en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía : Giancarlo Urzúa

Comisión Informante:
Prof. Jan Kiwi - Pontifícia Universidad Católica de Chile
Prof. Ricardo Menares - Pontifícia Universidad Católica de Valparaíso
Prof. Juan Rivera - Pontifícia Universidad Cattólica de Chile

Junio, 2014
Santiago-Chile

(A mis padres).

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecerle a mis padres, Raquel y Rodrigo, por su apoyo y amor incondicionales y más importante aún, por regalarme la vida. No importa cuanto se los agradezca, nada será suficiente como para devolverles el regalo de la vida, por ello seguiré dando lo mejor de mi para que sientan orgullosos. Los amo a ambos como son, aunque sean muy distintos uno del otro. Yo soy resultado de esa diferencia, y pienso (creo que ustedes estarán de acuerdo conmigo), que no sería lo que soy hoy día si no fuera por ustedes, por su amor, sus enseñanzas y sus diferentes formas de ver la vida. Gracias nuevamente, los amo.

Quiero agradecerle a mi tutor, Giancarlo Urzúa, por su apoyo, paciencia y enseñanzas durante el proceso de mi tesis y mi magíster. Gracias Gian por creer siempre en mi.

Quiero agradecer también, a todos los profesores de la facultad de matemáticas UC que influenciaron enormemente mi pasión por las matemáticas y la visión que tengo de ésta, entre ellos cabe mencionar a Ernesto San Martin, Mario Ponce, Rubí Rodriguez, Jan Felipe Van Diejen, Olivier Bourget, Mariel Saez y Alberto Montero.

Extiendo mis agradecimientos a la “Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica”, CONICYT, por su apoyo financiero durante mis años de magíster, a través de la “Beca de Magíster Nacional, Año 2012” con Nro. de Folio 22121945 y también a través del proyecto FONDECYT “Inicio” Nro. 11110047 adjudicado a Giancarlo Urzúa en el que participé como alumno tesista. Mi inclusión en el proyecto anterior está autorizado por CONICYT, siguiendo lo estipulado en las bases de la beca de magíster.

Le doy un agradecimiento especial al profesor Wilhelmus Schikhof (Q.E.P.D.) fallecido hace poco porque, aunque nunca nos hayamos conocido, su obra y en particular su libro “Ultametric Calculus” me convencieron de seguir el hermoso camino de las matemáticas.

Le agradezco a mi profesor de la enseñanza media, Don Belfor Aguayo Santis, por su forma inigualable de enseñar las matemáticas, la cual es un fiel reflejo de su absoluta pasión por la educación.

A mis amigos y familiares les agradezco su compañía, en los buenos y malos momentos, y su apoyo a lo largo de estos años, a pesar de que no entiendan los detalles de mi disciplina. Ellos saben quienes son, ellos, que se sienten orgullosos de tener mi afecto y compartir mis logros. Gracias por todo.

En último lugar y no por ello menos importante, le agradezco a mi polola Fernanda su apoyo, afecto y amor entregados durante el proceso

de mi tesis. Te amo kaki, gracias por estar ahi conmigo y por seguirme hasta otro continente, no cualquier pareja podría atreverse a tamaña proeza, pero nosotros "somos especiales" como muchos nos han dicho. Tengo fe en que podremos afrontar lo que se nos presente a futuro y de que nuestro amor perdurará, no pierdas nunca esa actitud desafiante ante la vida y la fe que tienes en lo nuestro.

Índice general

Introducción

Dado un espacio topológico arcoconexo X, podemos asociarle un grupo $\pi_1(X)$, llamado *Grupo Fundamental*. Este es un invariante topológico clásico, el cuál es relevante en diversas áreas de la matemática, como por ejemplo teoría de grupos, geometría compleja y geometría diferencial.

Poniéndonos ahora en el contexto de la geometría algebraica, podemos formularnos tres preguntas básicas

1. ¿Será posible construir un objeto análogo en el caso de esquemas?
2. ¿Qué propiedades podría compartir este grupo fundamental con su símil topológico?
3. ¿Qué propiedades particulares de este grupo fundamental podrían decirnos algo acerca de la estructura de un esquema o variedad?

La respuesta acerca de la existencia es afirmativa. Alexander Grothendieck define en [**9**] lo que conocemos como *Grupo Fundamental Étale* $\pi_1(X)^{\text{ét}}$. Este es un grupo profinito, y su definición no tiene que ver con "loops" como en el caso del grupo fundamental clásico, pero si de crear un concepto de cubrimiento para esquemas con propiedades análogas a las de un cubrimiento topológico. Notar que en el caso topológico, el grupo fundamental se recupera a través de los cubrimientos topológicos.

Este trabajo de tesis cae dentro de la segunda pregunta, pero antes daremos una motivación. En el contexto de superficies algebraicas, un problema importante es el *Problema de Geografía*, el cuál esta orientado a engrosar nuestro conocimiento acerca de la existencia de superficies de tipo general con invariantes c_1^2 y c_2 dados, es decir, si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, ¿existirá una tal superficie S con $c_1^2(S) = a$ y $c_2(S) = b$? En términos sencillos, los números c_1^2 y c_2 son exactamente los dos invariantes que se fijan para hablar de espacio de móduli, así como para curvas fijamos el género. Los números c_1^2 y c_2 se llaman *números de Chern* de la superficie.

Ante la pregunta de geografía, es inmediato preguntarse si existen condiciones a priori sobre los números de Chern las cuales sean válidas para toda superficie de tipo general minimal. Dentro del ámbito de las superficies complejas, tenemos las desigualdades clásicas $c_1^2 > 0$, $c_2 > 0$, $\frac{1}{5}c_2 - \frac{36}{5} \leq c_1^2$, y la famosa *desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau* (c.f [**3**], [**19**] y [**35**])

$$c_1^2 \leq 3c_2.$$

Esto origina interrogantes, ¿hasta qué punto se pueden exhibir superficies cuya razón c_1^2/c_2 rellene lo más posible $[1/5, 3]$? ¿qué pasa si las superficies en cuestión son además simplemente conexas? Recientemente se ha probado (c.f. [**23**]) que las superficies simplemente conexas poseen pendientes de Chern arbitrariamente cercanas a cualquier número $r \in [2, 3]$ dado, lo cual completa el intervalo $[1/5, 3]$ por trabajos anteriores. Ver la introducción de [**23**] para historia y referencias.

¿Qué sucede en característica positiva? En primer lugar nos referimos al grupo fundamental étale, y ahora la pregunta es si existe una cota como la de Bogomolov-Miyaoka-Yau, y cuál es el papel de las superficies étale simplemente conexas respecto a esa posible cota. En general, es sabido que no existe una cota de Bogomolov-Miyaoka-Yau en ninguna característica prima, y además existen ejemplos de superficies con c_1^2/c_2 tendiendo a infinito para cada característica (ver por ejemplo [**32, 33**], los primeros ejemplos son de Parshin y Szpiro).

Particularmente, las superficies en [**33**] son especiales, pues están fibradas sobre $\mathbb{P}^1$ sin fibras múltiples y con una fibra distinguida, la cuál es un árbol de $\mathbb{P}^1$'s. De esta forma, si estas superficies fueran complejas, tendríamos que son simplemente conexas en la topología analítica, debido a un resultado de fibraciones de superficies sobre curvas de G. Xiao [**34**], el cual es también usando en [**23**].

Inspirado en dicha estrategia para calcular grupos fundamentales, lo principal en esta tesis es haber obtenido un resultado análogo al de Xiao para el caso de grupos fundamentales étales. Dicho resultado aplicado a las superficies en [**33**] permite demostrar que son *simplemente conexas*. De esta forma, el problema de geografía simplemente conexa tampoco tiene restricciones del tipo Bogomolov-Miyaoka-Yau.

En el capítulo 1, se presentan los conceptos básicos de la teoría de esquemas, curvas y superficies algebraicas, junto con los grupos profinitos, para continuar en el capítulo 2 con la definición y propiedades básicas del grupo fundamental étale. En el capítulo 3 se expone el concepto de fibración y el resultado de Xiao para fibraciones. A continuación probaremos el resultado central de este trabajo. Finalmente, en el capítulo 4 se discuten direcciones posibles de investigación basados en los resultados del capítulo 3.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este primer capítulo, revisaremos los conocimientos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Comenzaremos viendo límites directos y grupos profinitos, para pasar a la teoría de haces y esquemas, y finalizaremos con curvas y superficies. Cuando nos refiramos a algún anillo de aquí en adelante, serán todos conmutativos con 1 y todos los homomorfismos de anillos enviarán 1 en 1 a menos que se diga lo contrario.

1.1. Límites Directos y Grupos Profinitos

Para ambas definiciones, necesitamos los siguientes conceptos:

DEFINICIÓN 1. *Sea I un conjunto. Una relación $\leq$ en I es un* ***Orden Parcial*** *si:*

- *Para todo $i \in I$ se cumple que $i \leq i$.*
- *Si $i, j \in I$ verifican que $i \leq j$ y $j \leq i$, entonces $i = j$.*
- *Sean $i, j, k \in I$ los cuales satisfacen que $i \leq j$ y $j \leq k$, entonces $i \leq k$.*

Si I es un conjunto con una relación de orden parcial $\leq$, se dice que I es un ***Conjunto Parcialmente Ordenado****.*

DEFINICIÓN 2. *Sea I un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación $\leq$. Decimos que el conjunto I es* ***Dirigido*** *si para cada $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.*

Establecido lo anterior, podemos definir:

DEFINICIÓN 3. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de grupos abelianos indexados sobre un conjunto dirigido I con la propiedad de que para todo par de índices $i \leq j$ existen morfismos $\phi_{ij} : A_i \to A_j$ los cuales satisfacen $\phi_{ii} = id$ y $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ cuando $i \leq j \leq k$. La colección $\{A_i, \phi_{ij}\}$ se llama* ***Sistema Dirigido de Grupos****.*
Se define el ***Límite Directo de un sistema dirigido*** *$\{A_i, \phi_{ij}\}$ como el único grupo abeliano $\varinjlim A_i$ con las propiedades:*

- *Existen morfismos* $\phi_i : A_i \to \varinjlim A_i$ *tales que* $\phi_j \circ \phi_{ij} = \phi_i$ *para todo* $i \leq j$.
- $\varinjlim A_i$ *satisface la propiedad universal de que todo grupo abeliano* L *que posea morfismos* $\rho_i : A_i \to L$ *que satisfacen la propiedad que cumplen los morfismos* ϕ_i *anteriores, genera un único morfismo* $\phi : \varinjlim A_i \to L$ *tal que* $\rho_i = \phi \circ \phi_i$ *para todo* $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & L \\
& \varinjlim A_i \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

Observación 1. *De la propiedad universal, no es difícil probar que los límites directos son únicos.*

Para las siguientes secciones, es necesario darle forma a los límites directos:

Proposición 1. *Sea* $\{A_i, \phi_{ij}\}$ *un sistema dirigido de grupos abelianos, entonces:*

- *Su límite directo existe y es el cociente del producto directo de los* A_i *por el subgrupo generado por* $a_i - \phi_{ij}(a_i)$ *con* $a_i \in A_i$ *para todo* i *y* $j \geq i$.
- *Es también el grupo de clases de equivalencia de los pares* $\langle A_i, a_i \rangle$ *bajo la relación* $\langle A_i, a_i \rangle \sim \langle A_j, a_j \rangle$ *si y sólo si existe* $k \geq i, j$ *tal que* $\phi_{ik}(a_i) = \phi_{jk}(a_j)$, *con el producto* $\langle A_i, a_i \rangle + \langle A_j, a_j \rangle = \langle A_k, \phi_{ik}(a_i) + \phi_{jk}(a_j) \rangle$ *donde* $k \geq i, j$.

Demostración. Sea S la suma directa de los A_i y N el subgrupo del enunciado. Para cada A_i, sea $\phi_i : A_i \to S/N$ la composición de la inclusión a S y la proyección al cociente, abusando un poco con la notación, en el cociente se tiene que $a = \phi_{ij}(a)$ para todo $a \in A_i$ y $i \leq j$, luego es claro que $\phi_j \circ \phi_{ij} = \phi_i$ para todo $i \leq j$.
Sea G un grupo abeliano, con morfismos $\rho_i : A_i \to G$ que satisfacen $\rho_j \circ \rho_{ij} = \rho_i$ para todo $i \leq j$, como S es la suma directa, existe un único morfismo $\varphi : S \to G$ tal que $\varphi \circ \psi_i = \rho_i$ donde ψ_i es la inclusión de A_i en la suma directa, debido a esto, no es difícil probar que $\varphi(a) = \varphi(\phi_{ij}(a))$ para todo $a \in A_i$ y $j \geq i$, lo cual permite inducir un morfismo en el cociente $\phi : S/N \to G$ con las características requeridas.
Para la segunda parte, sea H el grupo de las clases de equivalencia, los morfismos ϕ_i vienen dados por $\phi_i(a) = \langle A_i, a_i \rangle$, los cuales trivialmente satisfacen $\phi_i = \phi_j \circ \phi_{ij}$. Además, si G es un grupo abeliano como el

del párrafo anterior, se puede definir un morfismo $\phi : H \to G$ mediante $\phi(\langle A_i, a_i\rangle) = \rho_i(a_i)$. Este morfismo esta bien definido por las propiedades de los ρ_i, y así se concluye la demostración. $\square$

EJEMPLO 1. *Consideremos los grupos $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para p un primo fijo e $i \geq 1$ y los morfismos $\phi_i : \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z}$ el cual envía $n \,(mod\ p^i)$ en $pn \,(mod\ p^{i+1})$. Estos grupos con dichos morfismos forman un sistema dirigido, y su límite directo se conoce como el* ***Grupo de Prüfer*** *$\mathbb{Z}(p^\infty)$.*
Este grupo es de hecho isomorfo al grupo $\left\{z \in \mathbb{C} : \exists i \geq 1;\ z^{p^i} = 1\right\}$, es decir, es isomorfo al grupo de p-raíces de la unidad, identificando $\langle \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, a\rangle$ con $e^{\frac{2a\pi i}{p^i}}$.

Ahora definiremos los grupos profinitos, para ello necesitamos primero:

DEFINICIÓN 4. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una colección de grupos indexados sobre un conjunto dirigido I con la propiedad de que para todo par de índices $i \leq j$ existen morfismos $\phi_{ij} : G_j \to G_i$ los cuales satisfacen $\phi_{ii} = id$ y $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ cuando $i \leq j \leq k$. La colección $\{G_j, \phi_{ij}\}$ se llama* ***Sistema Inverso de Grupos****.*
Se define el ***Límite Inverso de un sistema dirigido*** *$\{G_j, \phi_{ij}\}$ como el subgrupo del producto directo $\prod_{i\in I} G_i$ conformado por todas las secuencias $(g_i)_{i\in I}$ tales que $\phi_{ij}(g_j) = g_i$ para todo i y $j \geq i$. Se denota por $\varprojlim G_i$.*
Un ***Grupo Profinito*** *es el límite inverso de un sistema inverso de grupos finitos.*

OBSERVACIÓN 2.

- *Si consideramos cada grupo G_i de un sistema inverso con la topología discreta, entonces podemos darle al producto directo de todos ellos la topología producto y así en consecuencia darle una topología al límite inverso usando la topología subespacio. Con dicha topología, el límite es un grupo topológico.*
- *Con esta topología, las proyecciones $p_i : \varprojlim G_i \to G_i$ son continuas y sus kernels son base de vecindades de 1.*
- *No es difícil probar que $\varprojlim G_i$ es un cerrado dentro del producto directo.*

Las observaciones anteriores más el hecho de que los grupos finitos son compactos con la topología discreta, muestran que

Proposición 2. *Los grupos profinitos son compactos y totalmente disconexos (los únicos conjuntos conexos son los singletons). Además, todo subgrupo abierto es un subgrupo cerrado de índice finito.*

Demostración. La compacidad sale del hecho de que el límite directo es un cerrado en el producto, el cual es compacto por el Teorema de Tikhonov.
Como los kernels de las proyecciones son clopen, el 1 posee una base clopen de vecindades, lo cual asegura que todo elemento del límite inverso las posee, pues la función $h \mapsto gh$ es siempre un homeomorfismo en un grupo topológico para g fijo. Esto prueba que el límite es totalmente disconexo. Finalmente, si H es un subgrupo abierto, entonces sus clases laterales gH son abiertas, son disjuntas y cubren el grupo entero, por lo tanto, estas clases deben ser finitas por compacidad y además H debe ser cerrado. Por otro lado, si H es cerrado de índice finito, posee finitas clases laterales, que son cerradas y dado que el complemento de H es una unión finita de cerrados, se concluye que H es abierto. □

Observación 3. *La afirmación conversa, grupos topológicos compactos y totalmente disconexos son profinitos es cierta. El lector interesado puede consultar* [**29**, §1 Teo. 2].

La siguiente construcción es muy importante en teoría de grupos y para este trabajo, además nos permitirá dar ejemplos de grupos profinitos:

Definición 5. *Sea G un grupo cualquiera. Sea I familia de todos los subgrupos normales de G que tienen índice finito, entones $\{G/H\}_{H \in I}$ es un sistema inverso, con el orden $H \leq K$ si y sólo si $H \supseteq K$ y el homomofismo natural $\phi_{HK} : G/K \to G/H$ que envía aK en aH. El límite inverso de dicho sistema se llama* ***Completación Profinita de*** *G y se denota por $\hat{G}$.*

Observación 4.
- *Claramente $\hat{G}$ es un grupo profinito.*
- *$\hat{G}$ siempre existe, pero podría ser trivial si por ejemplo G no posee subgrupos de índice finito distintos del mismo G.*
- *Existe un morfismo natural $\pi : G \to \hat{G}$ que envía $a \in G$ en la tupla de todas sus clases en los cocientes respectivos.*
- *Se podría pensar a primera vista que π es inyectivo, eso no siempre es verdad como se verá en los ejemplos siguientes. La inyectividad es equivalente a que la intersección de todos los subgrupos normales de índice finito sea trivial lo cual se llama ser* ***Residualmente Finito****.*

EJEMPLO 2.
1. *La completación profinita de* $\mathbb{Z}$ *se llama* $\hat{\mathbb{Z}}$ *y es un grupo profinito. Usando la divisibilidad de los enteros se puede probar que* $\mathbb{Z}$ *es residualmente finito, pero notar que el morfismo natural* π *no es sobreyectivo.*
2. *Existen ejemplos de grupos que no son residualmente finitos, luego* G *no se inyecta en* $\hat{G}$*, uno de los primeros grupos conocidos con esta propiedad es* $G = \langle a, b |\, a^{-1}b^2a = b^3 \rangle$ *el cual no es Hopfiano (Hopfiano significa que todo homomorfismo* $\phi : G \to G$ *sobreyectivo es isomorfismo), propiedad que posee todo grupo finitamente generado y residualmente finito* [**14**, Thm. 4.10].
3. *El grupo* $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *es un grupo profinito. Como espacio topológico, es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

OBSERVACIÓN 5. *Las definiciones de límite directo e inverso, no se limitan solo a grupos, sin dificultad alguna la definición puede hacerse extensiva a anillos, módulos, espacios vectoriales y álgebras.*

1.2. Haces y Cohomología

Para poder definir los objetos de estudio de la geometría algebraica, primero necesitamos definir lo que son los esquemas, los cuales tiene dos piezas estructurales, un conjunto con cierta pavimentación especial, en esquemas afines, y un "haz estructural", el cual puede pensarse como una generalización de las funciones regulares definidas en abiertos de las variedades de la geometría algebraica clásica, los conjuntos de ceros de polinomios.

DEFINICIÓN 6. *Sea* X *un espacio topológico, un* ***Prehaz*** $\mathcal{F}$ ***de Grupos Abelianos sobre*** X *consiste en los siguientes datos:*

- *Por cada abierto* $U \subseteq X$*, un grupo abeliano* $\mathcal{F}(U)$*. Los elementos de* $\mathcal{F}(U)$ *se llaman* ***Secciones****.*
- *Por cada inclusión de abiertos* $V \subseteq U$*, un morfismo de grupos abelianos* $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$*, llamado* ***Restricción****. Generalmente, si* $g \in \mathcal{F}(U)$*, su restricción a* V *se denota por* $g|_V$*.*

Más las siguientes condiciones

0. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.
1. ρ_{UU} *es la identidad del grupo* $\mathcal{F}(U)$*.*
2. *Si* $W \subseteq V \subseteq U$*, se cumple que* $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho UV$*.*

Notación 1. *Generalmente, un prehaz se denota como una función poniéndose $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ y especificando las restricciones a menos que se subentienda cuales son.*

Los prehaces sirven para mantenerse al tanto de la información local de un espacio topológico que posea cierta estructura algebraica local intrínseca, están inspirados en tomar funciones definidas en U a un grupo abeliano, de donde viene la notación para las restricciones. Sin embargo, la definición de prehaz no permite ciertas cosas que parecen obvias para funciones, como definir una función globalmente a partir de sus restricciones en subconjuntos más pequeños, cuidando que estas restrinjan bien en las intersecciones. Es posible realizar eso agregando:

Definición 7. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos sobre X. Si $\mathcal{F}$ cumple adicionalmente con:*

3. *Si U es un abierto, que posee un cubrimiento abierto V_i y una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo i, entonces $s = 0$.*
4. *Si U es un abierto, que posee un cubrimiento abierto V_i y secciones $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tales que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ para todo par i, j, entonces existe una (única por la parte anterior) sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para todo i.*

Entonces $\mathcal{F}$ es un ***Haz de Grupos Abelianos****.*

Observación 6. *En la definición de prehaz y haz, se pueden perfectamente cambiar las palabras "Grupo Abeliano" por "Anillo" o "Módulo", y en tal caso se dirá que $\mathcal{F}$ es un* ***Prehaz (Haz) de anillos (módulos) sobre*** *X o sencillamente* ***Prehaz (Haz)*** *si se subentiende cual es la estructura algebraica involucrada.*

Ejemplo 3.

- *Sea A un grupo abeliano fijo con la topología discreta. Dado un espacio topológico X, si le asignamos a cada abierto el grupo abeliano $\mathcal{A}(U) = \{f : U \to A,\, f \text{ es continua}\}$, entonces $\mathcal{A}$ es un haz de grupos abelianos (las restricciones son las restricciones usuales de funciones) llamado* ***Haz Constante****.*
- *Si X es una superficie de Riemann, el haz $\mathcal{O}_X$ dado por $U \mapsto \{f : U \to \mathbb{C} |\, f \text{ es holomorfa}\}$ es también un haz sobre X*
- *Si V es una variedad quasi-afín, o sea, un abierto Zariski irreducible (no es la unión de dos cerrados no vacíos) de un conjunto cerrado Zariski de $\mathbb{A}_k^n$ irreducible (hablando ligeramente, el conjunto de ceros de un polinomio irreducible o un conjunto finito que genera un ideal primo en el anillo de polinomios). La asignación $U \mapsto \mathcal{O}_V(U) = \{f : U \to k |\, f \text{ es regular}\}$ con las*

restricciones de funciones es también un haz, el ***Haz de Funciones Regulares de*** V $\mathcal{O}_V$.

DEFINICIÓN 8. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Dado un punto $p \in X$ el* ***Tallo de $\mathcal{F}$ en*** *p como el límite directo de los grupos $\mathcal{F}(U)$ para los abiertos U que contienen a p (los morfismos están dados por las restricciones). Se denota por $\mathcal{F}_p$.*

EJEMPLO 4. *Sea $X = \mathbb{C}$ y consideremos el haz de funciones holomorfas respectivo $\mathcal{H}$. Notar que el tallo en 0 es*

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i : a_i \in \mathbb{C} \text{ y existe } r > 0 \text{ tal que la serie converge para } |z| \leq r \right\}$$

Es decir, $\mathcal{H}_0$ es la $\mathbb{C}$-álgebra de las series convergentes en vecindades de 0, o gérmenes en 0.

DEFINICIÓN 9. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos prehaces(haces) sobre X.*
Un ***Morfismo de prehaces (haces)*** *$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una colección de morfismos de grupos abelianos $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ el cual satisface que $f(U)(s)|_V = f(V)\left(s|_V\right)$ para todo $V \subseteq U$. Estos morfismos se pueden componer de la forma obvia, y se dice que f es* ***Isomorfismo*** *si posee una inversa.*

OBSERVACIÓN 7. *Todo morfismo de prehaces induce un morfismo de tallos $f_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ que envía $\langle U, s\rangle$ en $\langle U, f(U)(s)\rangle$. Dicho morfismo esta bien definido por la propiedad con las restricciones que se le pide a un morfismo de haces en su definición.*

Al hablar de haces y morfismos de ellos, es natural definir kernels e imágenes pues estamos trabajando con grupos abelianos. Dado un morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, intuitivamente uno querría definir el "haz kernel" y "haz imagen", como $U \mapsto \ker(f(U)), \operatorname{im}(f(U))$. No es difícil probar que la primera asignación si es un haz, el cual llamaremos $\mathcal{K}er(f)$ o **Haz Kernel** pero en general la segunda asignación es sólo un prehaz, por lo que debemos introducir un concepto adicional para poder definir un haz imagen.

DEFINICIÓN 10.

- *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X, un* ***Subhaz de $\mathcal{F}$*** *es un haz $\mathcal{G}$ tal que para todo abierto U, se tiene que $\mathcal{G}(U) \leq \mathcal{F}(U)$, es decir, los grupos que corresponden a $\mathcal{G}$ son subgrupos de los que corresponden a $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{G}$ es subhaz de $\mathcal{F}$ anotaremos $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$.*
- *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X, entonces existe un haz $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ con la propiedad de que para todo haz $\mathcal{G}$ que posea un morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, entonces existe un único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\phi = \psi \circ \theta$. Esta propiedad universal hace*

que el haz $\mathcal{F}^+$ sea único bajo isomorfismos y se conoce como el ***Haz Asociado al Prehaz*** *$\mathcal{F}$.*
- *Si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, entonces se define el* ***Haz Imagen*** *como el haz asociado al prehaz $U \mapsto im(f(U))$, el cual se denota por $\mathcal{I}m(f)$.*

Observación 8.
- *Si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, claramente $\mathcal{K}er(f) \le \mathcal{F}$ e $\mathcal{I}m(f) \le \mathcal{G}$.*
- *Dado cualquier haz $\mathcal{F}$, se puede precisar una construcción para $\mathcal{F}^+$. El lector interesado puede consultar* [**10**, Prop. 1.2, Chap. II].

Con las definiciones de kernel e imagen, podemos decir más cosas acerca de los morfismos de haces.

Proposición 3. *Sea $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X. Entonces:*
- *f es inyectiva si y sólo si $\mathcal{K}er(f) = \mathbb{O}$ donde el lado derecho corresponde al "Haz Cero", el cual envía todo abierto al grupo $\{0\}$, y equivalentemente si el morfismo inducido sobre los tallos es inyectivo para todo punto $p \in X$.*
- *f es sobreyectiva si y sólo si $\mathcal{G} = \mathcal{I}m(f)$ si y sólo si el morfismo inducido sobre los tallos es sobreyectivo en todo punto.*
- *f es isomorfismo si y sólo si el morfismo inducido entre los tallos es isomorfismo para todo punto.*

Además de kernel e imagen, existen también los cocientes.

Definición 11. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ dos haces sobre X con $\mathcal{F}'$ subhaz de $\mathcal{F}$. El* ***Haz Cociente*** *$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es el haz asociado al prehaz $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$.*

Observación 9.
- *El tallo de un haz cociente es*
$$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{F}'_p.$$
- *Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, entonces siempre se tiene que $\mathcal{I}m(\phi) = \mathcal{F}/\mathcal{K}er(\phi)$.*
- *Al igual que en los grupos abelianos, uno puede definir cuando una secuencia de haces es exacta. Basta cambiar ker por $\mathcal{K}er$ e im por $\mathcal{I}m$ donde corresponda.*

Hemos hablado únicamente acerca de haces para un espacio topológico fijo. Pero si consideramos más de un espacio, es posible llevar haces sobre uno en haces sobre el otro y viceversa de varias maneras, la que nos interesará después es esta:

Definición 12.
- *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si $\mathcal{F}$ es un haz sobre X, se define*

su ***Imagen Directa*** *como el haz* $f_*\mathcal{F}$ *sobre* Y *definido por* $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

- *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua. Dado un haz* $\mathcal{G}$ *sobre* Y, *se define el haz* $f^{-1}\mathcal{G}$ *como el haz* $U \mapsto \lim\limits_{V;\, f(U)\subseteq V} \mathcal{G}(V)$ *donde la notación anterior denota al límite directo de los anillos* $\mathcal{G}(V)$ *para aquellos abiertos* V *que contengan* $f(U)$.
- *En el caso particular de tener* $Z \subseteq X$ *y la inclusión* $i : Z \to X$, *el haz* $f^{-1}\mathcal{F}$ *para un haz sobre* X *se denota por* $\mathcal{F}|_Z$ *y se llama* ***Restricción de*** $\mathcal{F}$ ***a*** Z. *Notar que el tallo en cada punto* $p \in Z$ *para la restricción es sencillamente* $\mathcal{F}_p$.

1.3. Esquemas y Haces Coherentes

Esta sección explora algunos de los conceptos principales para este trabajo, asociados a los elementos basales de la geometría algebraica moderna, los "Esquemas". No trataremos todos los esquemas posibles, pero necesitamos algunas definiciones necesarias para lo que sigue. Eso si, antes debemos definir:

DEFINICIÓN 13. *Sea* A *un anillo. Dicho anillo es* ***Local*** *si posee un único ideal maximal, a veces se nombran dichos anillos como* (A, m) *donde* m *es el único ideal maximal de* A.
Un homomorfismo local entre anillos locales es un homomorfismo de anillos $\phi : (A, m) \to (B, n)$ *tal que* $f(m) \subseteq n$. *Esto es equivalente a que* $f^{-1}(n) = m$.

DEFINICIÓN 14. *Un* ***Espacio Anillado*** *es un par* $(X, \mathcal{O}_X)$ *donde* X *es un espacio topológico y* $\mathcal{O}_X$ *es un haz de anillos sobre* X.
Los morfismos entre espacios anillados serán pares $(f, f^\#)$ *donde* f *es una función continua* $f : X \to Y$ *y* $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ *es un morfismo de haces.*
Si pedimos además, que el tallo en cada punto $\mathcal{O}_{X,p}$ *sea local para todo punto* p *el par* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un* ***Espacio Localmente Anillado*** *y sus morfismos son morfismos de espacios anillados, tales que el homomorfismo inducido entre tallos* $f_p^\# : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ *es local.*
Dos espacios anillados son ismomorfos si $(f, f^\#)$ *poseen ambos inversa, lo que es lo mismo a que* f *sea un homeomorfismo y* $f^\#$ *un isomorfismo de haces.*

NOTACIÓN 2 (Secciones Globales). *Sea* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espacio anillado. Se denota por* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $\mathcal{O}_X(X)$.

Los esquemas son todos espacios anillados, pero están compuestos de partes "más pequeñas".

EJEMPLO 5 (Espectros de Anillos). *Sea A un anillo, definimos para todo ideal I de A el conjunto $V(I) = \{p \subset A : p \text{ es ideal primo e } I \subseteq p\}$. No es difícil ver que los conjuntos $V(I)$ satisfacen las propiedades de los conjuntos cerrados en un espacio topológico. Luego, si denotamos por SpecA al conjunto de todos los ideales primos de A, podemos darle una topología a SpecA en la que los cerrados son exactamente los conjuntos $V(I)$. Ahora que tenemos un espacio topológico, nos falta dar un haz y para ello consideremos la siguiente construcción:*

DEFINICIÓN 15.

- *Sea A un anillo y $f \in A$ un elemento no nulo. El conjunto $\{f^n : n \geq 0\}$ es multiplicativamente cerrado, luego uno puede considerar el anillo de fracciones respectivo, el cual se denota por A_f.*
- *Sea A un anillo y p un ideal primo, el conjunto $A-p$ es multiplicativamente cerrado y no contiene al cero, luego podemos localizar A en dicho conjunto, es decir, tomar fracciones $\frac{a}{d}$ con $a \in A$ y $d \notin p$. Dicho anillo se denota por A_p y se llama **Localización de A en p**.*
  Notar además que A_p es un anillo local con ideal maximal
  $$\left\{\frac{a}{d} : a \in p,\, d \notin p\right\}.$$

Con esto, para todo abierto $U \subseteq SpecA$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como el conjunto de las funciones $s : U \to \coprod_{p\in U} A_p$ que "localmente se ven como cocientes", esto es, dado $p \in U$, existe una vecindad de p, V contenida en U, y elementos $a, f \in A$ tales que $f \notin q$ para todo $q \in V$ y $s(q) = \frac{a}{f}$ para todo $q \in V$.
*No es difícil probar que $\mathcal{O}(U)$ es un anillo con la suma y productos punto a punto y cuyo 1 es la función que envía todo $p \in U$ a 1. Además, la restricción de funciones usual $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ permite probar que el prehaz $\mathcal{O}$ definido antes es efectivamente haz. El espacio topológico SpecA más el haz $\mathcal{O}$ forman un espacio anillado, llamado **Espectro del Anillo** A.*
Además, tenemos:

PROPOSICIÓN 4. *Sea $(SpecA, \mathcal{O})$ el espectro del anillo A. Entonces:*

a) *Dado $p \in SpecA$, el tallo $\mathcal{O}_p$ es isomorfo a la localización A_p.*
b) *Para todo $f \in A$, $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$. Donde $D(f) = V((f))^c$.*
c) *De lo anterior, tenemos que $A \cong \Gamma(SpecA, \mathcal{O})$.*

De la parte a) de la Proposición anterior, se concluye que $(SpecA, \mathcal{O})$ es un espacio localmente anillado.
Además, podemos caracterizar los morfismos entre espectros

PROPOSICIÓN 5.
- *Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Entonces, este induce un morfismo de espacios localmente anillados*

$$(f, f^{\#}) : (SpecB, \mathcal{O}_B) \to (SpecA, \mathcal{O}_A)\,.$$

- *Y al revés, todo morfismo de espacios anillados*

$$(f, f^{\#}) : (SpecB, \mathcal{O}_B) \to (SpecA, \mathcal{O}_A)$$

Induce un homomorfismo de anillos $\phi : A \to B$.

Definidos los esquemas afines, podemos definir finalmente los esquemas:

DEFINICIÓN 16. *Un **Esquema Afín** es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorfo al espectro de un anillo.*
*Un **Esquema** es un espacio localmente anillado tal que todo punto posee un abierto U tal que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un esquema afín, dichos abiertos se llaman **Abiertos Afines**.*
*En el caso de esquemas, el haz $\mathcal{O}_X$ se llama **Haz Estructural** y X el **Espacio Subyacente**. Generalmente nos referiremos al esquema como X si se entiende cual es el haz estructural.*
Un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios localmente anillados entre esquemas.

EJEMPLO 6. *Consideremos $Spec\, k[x]$ para k un cuerpo algebraicamente cerrado. Los ideales primos de este anillo son el ideal 0 y los ideales $(x-a)$ para $a \in k$, los cuales son maximales. No es difícil probar que para un ideal primo p en cualquier anillo A, se tiene que $\overline{\{p\}} = V(p)$, luego, como los ideales $(x-a)$ son maximales, se tiene que el singleton $\{(x-a)\}$ es cerrado, pero $\{(0)\}$ es denso y esta situación será frecuente en los esquemas que se nos presentarán.*
Por ello definiremos:

DEFINICIÓN 17. *Sea X un esquema, un **Punto cerrado** es un punto de X que es cerrado como singleton y un **Punto Genérico** es un punto denso.*

En el caso de espectros afines, (0) es un punto genérico y los ideales maximales corresponden a puntos cerrados.
Para lo que sigue, cuando nos refiramos a puntos en un esquema, nos referiremos a puntos cerrados a menos que se diga lo contrario.
Ello esta inspirado en que por ejemplo, para un cuerpo algebraicamente cerrado k, en $Spec\, k[x, y]$, los ideales maximales son de la forma $(x-a, y-b)$ para $a, b \in k$, los cuales se sabe que corresponden a puntos

de $\mathbb{A}^2_k$, y en cambio, el resto de los ideales primos corresponden a curvas afines dentro de el espacio afín.

Definidos los esquemas, estaremos ahora interesados en definir las "variedades abstractas" que son el análogo de las variedades topológicas en la geometría algebraica. Para ello partamos con:

DEFINICIÓN 18.

- *Sea X un esquema. Dicho esquema es* ***Integral*** *si para todo abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio integral.*
- *Un esquema X es* ***Reducido*** *si para todo abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no posee nilpotentes. Esto es equivalente a que todo tallo es libre de nilpotentes.*
- *Un esquema es* ***Conexo*** *si X es conexo como espacio topológico.*
- *Un espacio topológico es* ***Irreducible*** *si no puede escribirse como la unión de dos cerrados propios. Un esquema es* ***Irreducible*** *X es irreducible como espacio topológico.*

Los esquemas integrales se caracterizan por:

PROPOSICIÓN 6. *Un esquema X es integral si y sólo si es irreducible y reducido.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. 2, Prop. 3.1]. □

Algunos esquemas tienen propiedades de finitud especiales en sus espacios topológicos subyacentes.

DEFINICIÓN 19.

- *Sea X un espacio topológico, se dice que X es* ***Noetheriano*** *si cumple con la condición descendente para cerrados, esto es, si*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$$

  Es una cadena descendente de cerrados X, entonces existe $r \geq 1$ tal que $F_i = F_r$ para todo $i \geq r$.
- *Un anillo A es* ***Noetheriano*** *si cumple con la condición ascendente para ideales. Es decir, si*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

  entonces existe $r \geq 1$ tal que $I_i = I_r$ para todo $i \geq r$. Notar que si A es noetheriano como anillo, entonces $\operatorname{Spec} A$ es noetheriano como espacio topológico.
- *Un esquema X es* ***Localmente Noetheriano*** *si posee un cubrimiento por abiertos afines, cuyos anillos correspondientes*

son noetherianos. Esta condición puede ser verificada en cada abierto afín de X en lugar de un cubrimiento [**10**, Chap. 2, Prop. 3.2]*. X es **Noetheriano** si es localmente noetheriano y cuasi-compacto, esto último significa que todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento finito.*
Luego, X es noetheriano si puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos afines $\operatorname{Spec} A_i$ donde cada A_i es noetheriano. Notar que esto implica que X es noetheriano como espacio topológico, pero un esquema noetheriano como espacio topológico no tiene por qué ser noetheriano como esquema. En el caso de esquemas afines, que el anillo sea noetheriano es equivalente a que el esquema afín lo sea.

En lo referente a subesquemas, tenemos los conceptos de subesquemas abiertos y cerrados, junto con las inmersiones.

Definición 20. *Sea X un esquema.*

- *Un esquema $(U, \mathcal{O}_U)$ es un **Subesquema Abierto** si U es un abierto de X y $\mathcal{O}_U$ es isomorfo a $\mathcal{O}_X|_U$.*
- *Una **Inmersión Abierta** es un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ el cual es un isomorfismo de X con un subesquema abierto de Y.*
- *Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es una **Inmersión Cerrada** si el morfismo a nivel de espacios es un homeomorfismo con un cerrado de Y y el morfismo de haces respectivo es sobreyectivo.*
- *Sea X un esquema. Un **Subesquema Cerrado** es una clase de equivalencia de inmersiones cerradas. Dos inmersiones cerradas $f : Y \to X$ y $f' : Y' \to X$ son equivalentes si existe un isomorfismo $i : Y \to Y'$ tal que $f' \circ i = f$.*

Lo segundo que necesitamos para poder definir variedades, es un cuerpo algebraicamente cerrado, el cual influya en la estructura de los anillos del haz estructural, dicha influencia se define asi:

Definición 21.

- *Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es **Localmente de Tipo Finito** si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \operatorname{Spec} B_i$, tales que para todo i, el abierto $f^{-1}(V_i)$ es una unión de abiertos afines $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$ donde cada A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. Si la cantidad de abiertos U_{ij} en la definición anterior es finita para todo $f^{-1}(V_i)$, se dice que el morfismo es de **Tipo Finito**.*
- *Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es **Finito** si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \operatorname{Spec} B_i$, tales que*

para todo i, el abierto $f^{-1}(V_i)$ es un abierto afín $Spec\, A_i$ y A_i es una B_i-álgebra que a su vez es un B_i-módulo finitamente generado.

OBSERVACIÓN 10. *Las condiciones de las definiciones anteriores son equivalentes a verificarlas para todo abierto afín, es decir, para verificar que tipo de morfismo es f basta tomar cualquier abierto afín $SpecB \subseteq Y$ y probar que $f^{-1}(SpecB)$ es lo que tenga que ser según cada definición.*

La siguiente definición importante es lo análoga a la condición Hausdorff para variedades topológicas. Es sabido que un espacio topológico X es Hausdorff si y sólo si el morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times X$ es una inmersión cerrada, o sea Δ es continua, inyectiva y la imágen $\Delta(X)$ es un cerrado en el producto. De lo anterior, necesitamos primero un "producto" para esquemas:

DEFINICIÓN 22. *Sean X, Y dos esquemas sobre un esquema S, es decir, cada esquema posee un morfismo hacia S. El **Producto Fibrado** de X con Y sobre S es un esquema, denotado por, $X \times_S Y$, junto a dos morfismos $p_1 : X \times_S Y \to X$ y $p_2 : X \times_S Y \to Y$ tales que estos conmutan con los morfismos de X e Y a S.*
El producto fibrado satisface la propiedad universal de que si Z es un esquema con morfismos $\phi : Z \to X$ y $\psi : Z \to Y$ que conmutan con los morfismos de X e Y a S, entonces existe un único morfismo $\theta : Z \to X \times_S Y$ que también se denota generalmente por phi $\times \psi$, tal que $p_1 \circ \theta = \phi$ y $p_2 \circ \theta = \psi$.
Se define el producto $X \times Y$ como el producto fibrado $X \times_{Spec\mathbb{Z}} Y$ (el morfismo a $Spec\mathbb{Z}$ es el que proviene del morfismo de anillos que envía el 1 de $\mathbb{Z}$ en el 1 de cualquier anillo, el cual induce un morfismo de esquemas afines).

PROPOSICIÓN 7. *Dados dos esquemas X, Y sobre S. Su producto fibrado existe y es único salvo isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Chp. 2, Thm. 3.3]. □

Aprovechando este nuevo concepto, definiremos:

DEFINICIÓN 23.
- *Sea $f : X \to Y$ un morfismo. Dado un punto $y \in Y$, el **Cuerpo Residual de** y es el cuociente $k(y) = \mathcal{O}_{Y,p}/m_y$ donde m_y es el único ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{Y,p}$. La **Fibra de** f **sobre** y es el esquema*

$$X_y = X \times_Y Speck(y)$$

donde el morfismo del espectro es el morfismo Speck$(y) \to Y$ es la composición del morfismo Speck$(y) \to$ SpecA donde SpecA es un abierto afín que contiene a y el cual proviene de $A \to A_p \to A_p/m$ donde p es el ideal primo de A que representa a y y la inclusión SpecA $\to Y$.

- *Sea X un esquema sobre S. Si tenemos un morfismo $S' \to S$, entonces el esquema $X' = X \times_S S'$ es un* ***Cambio de Base*** *dado por la* ***Extensión de Bases*** *$S' \to S$.*
- *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. El* ***Morfismo Diagonal*** *es el morfismo $\Delta = id \times id : X \to X \times_Y X$. X es* ***Separado sobre*** *Y si el morfismo diagonal es una inmersión cerrada. Se dice que X es* ***Separado*** *si es separado sobre Spec$\mathbb{Z}$.*

OBSERVACIÓN 11. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo de esquemas, el espacio topológico asociado a la fibra sobre un punto $y \in Y$ es sencillamente el conjunto $f^{-1}(y)$.*

Para saber si un morfismo de esquemas es separable, hay una pequeña simplificación:

PROPOSICIÓN 8. *Un morfismo $f : X \to Y$ es separado si y sólo si la imagen del morfismo diagonal es un cerrado en $X \times_Y X$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. 2, Cor. 4.2]. □

DEFINICIÓN 24. *Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es* ***Propio*** *si es separado, cerrado, de tipo finito y universalmente cerrado. Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es* ***Cerrado*** *si la imagen de todo cerrado en X es cerrado en Y y es* ***Universalmente Cerrado*** *si para todo cambio de base $X' = X \times_Y Y'$, el morfismo $X' \to Y'$ es cerrado.*
Un morfismo $f : X \to Y$ es ***Proyectivo*** *si f se factoriza como una inmersión cerrada $i : X \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{Spec\mathbb{Z}} Y$ seguido de la proyección $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{Spec\mathbb{Z}} Y \to Y$.*
Un morfismo es ***Cuasi-Proyectivo*** *si en la definición anterior cambiamos la inmersión cerrada por inmersión abierta.*
El producto $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{Spec\mathbb{Z}} Y$ se conoce como el ***Espacio Proyectivo sobre*** *Y, notar que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ es por supuesto lo mismo que el espacio proyectivo sobre un cuerpo pero las coordenadas son sobre $\mathbb{Z}$ y las coordenadas son equivalentes si difieren por un múltiplo entero.*

TEOREMA 1. *Un morfismo proyectivo entre esquemas noetherianos es propio. Un morfismo cuasi-proyectivo entre esquemas noetherianos es separado y de tipo finito.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. II, Th. 4.9]. □

Proposición 9. *Asumiendo que todos los esquemas mencionados en esta proposición son Noetherianos, se cumplen:*

(a) *Las inmersiones cerradas son propias.*
(b) *La composición de morfismos propios es propia.*
(c) *Los morfismos propios son estables bajo cambios de base.*
(d) *Si tenemos dos morfismos propios $f : X \to Y$ y $f' : X \to Y'$ donde Y e Y' son dos esquemas sobre un esquema Z, entonces el morfismo producto $f \times f' : X \to Y \times_Z Y'$ es propio.*
(e) *Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos morfismos tales que $g \circ f$ es propio y f es separado, entonces g es propio.*
(f) *Un morfismo $f : X \to Y$ es propio si y sólo si existe un cubrimiento abierto $\{V_i\}_{i \in I}$ de Y tal que $f|_{f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \to V_i$ es propio para todo $i \in I$.*
(g) *Los morfismos finitos son propios.*

Demostración. Para las 6 primeras afirmaciones ver [**10**, Ch. II, Cor. 4.8], la última proposición aparece en [**10**, Ch. II, Excercise 4.1]. □

Después de todas esas definiciones, podemos definir las variedades que consideraremos.

Definición 25. *Una **Variedad Abstracta** es un esquema integral, separado y de tipo finito sobre $\operatorname{Spec} k$ con k un cuerpo algebraicamente cerrado. Si además es propio, se dice que la variedad es **Completa**.*

Observación 12. *Notar que si X es una variedad abstracta, la condición de ser de tipo finito (Definición 21) sobre el espectro de un cuerpo k nos dice que X esta cubierto por una cantidad finita de abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, donde A_i es una k-álgebra finitamente generada, o sea, es el cociente de un anillo de polinomios $k[x_1, \cdots, x_n]$ los cuales son noetherianos por* [**4**, Ch. 15, Sec. 15.1, Cor.5]. *De esto, se concluye que todas las variedades abstractas son esquemas noetherianos (c.f Definición 19).*

Además del concepto de variedad, necesitamos un concepto de dimensión, análogo al que tienen las variedades topológicas, sin embargo la definición misma dista de parecerse al caso topológico.

Definición 26.

- *Sea X un espacio topológico. Definimos la **Dimensión de** X $\dim X$ como el supremo sobre todos los enteros n, para los cuales existe una cadena ascendente de cerrados irreducibles distintos de X*

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_{n-1} \subset Z_n$$

Notar que dicho supremo puede ser infinito.

- *Si X es un esquema la **Dimensión de** X es la dimensión de X como espacio topológico.*
- *Si Z es un cerrado irreducible de un esquema X, su **Codimensión** $codim(Z,X)$ es el supremo sobre todos los enteros n para los que existe una cadena ascendente de cerrados irreducibles*

$$Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_{n-1} \subset Z_n$$

- *Si Y es cualquier cerrado en un esquema X, su **Codimensión** es el entero*

$$codim(Y,X) = \inf_{Z \subseteq Y} codim(Z,X)$$

donde Z es un cerrado irreducible contenido en Y.

Además del concepto de variedad, necesitamos agregar un concepto de no singularidad.

Definición 27.

- *Sea A un anillo y p un ideal primo de A. La **Altura de** p es el supremo sobre todos los enteros n para los cuales existe una cadena ascendente de ideales primos distintos*

$$p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_{n-1} \subset p_n = p$$

*La **Dimensión de** A es el entero $\dim A$ definido como el supremo de las alturas de todos los ideales primos de A.*
- *Sea A un anillo local con ideal maximal m y cuerpo cuociente $k = A/m$. Notar que m/m^2 posee una estructura natural de k-espacio vectorial. Se dice que A es **Regular** si $\dim_k(m/m^2) = \dim A$. Un esquema integral es **Regular** si todos sus tallos son anillos locales regulares.*
- *Un esquema integral X es **Normal** si todos sus tallos son amigos integralmente cerrados (dentro de sus cuerpos de fracciones). Equivalentemente, un esquema es normal si todos los anillos que corresponden a sus abiertos afines son integralmente cerrados.*
- *Una variedad abstracta X es **No Singular** si todos los tallos del haz estructural $\mathcal{O}_X$ son anillos locales regulares.*
- *Una variedad abstracta sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado es **Proyectiva**, si esta inmersa en algún espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$ como variedad proyectiva.*

Observación 13.

- *Si X es un esquema regular, entonces es normal, sin embargo la afirmación contraria no es cierta en* *general, aunque si es cierta en el caso de curvas, las cuales definiremos en la siguiente sección.*

- *La condición de ser normal es equivalente a que para todo abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathcal{O}_X$ es integralmente cerrado en su cuerpo de fracciones.*

Observación 14. *Recordaremos a continuación, algunos conceptos básicos de geometría algebraica clásica, expuestos en* [**10**, Chapter I].

- *Recordar que en $\mathbb{P}^n_k$ existe una topología en la que los cerrados son los conjuntos de ceros de polinomios homogéneos. Una variedad proyectiva es un cerrado irreducible de $\mathbb{P}^n_k$. Dichas variedades tienen estructura de esquemas, pues sus funciones regulares en subabiertos son cuocientes $\frac{f}{g}$ donde f y g son polinomios homogéneos con coeficientes en k del mismo grado y dichas funciones forman un haz. De aqui en adelante, cuando hablemos de variedades proyectivas, nos estaremos refiriendo a variedades abstaractas proyectivas.*
  Del mismo modo, una variedad cuasi-proyectiva será un abierto irreducible de $\mathbb{P}^n_k$, e igualmente al caso de variedades proyectivas, corresponden a variedades abstractas.
- *Las variedades proyectivas, al ser subconjuntos de $\mathbb{P}^n_k$, poseen un cubrimiento en variedades cuasi-afines: abiertos irreducibles de espacios afines $\mathbb{A}^n_k$ con funciones regulares dadas por cuocientes de polinomios, cuyo denominador no se anula en subabiertos de la variedad. O variedades afines, los cuales son cerrados de $\mathbb{A}^n_k$ con las mismas funciones regulares en el caso de abiertos.*
- *Lo anterior permite dar una caracterización más simple para ser no singular. Si $V = V(f_1, f_2, \cdots, f_t)$ es una variedad afín en $\mathbb{A}^n_k$, la variedad es no singular en un punto p si el rango de la matriz jacobiana $(\partial f_i/\partial x_j)$ es $n-r$ donde $r = \dim V$. Luego, para verificar que una variedad proyectiva es no singular, basta remitirse al cubrimiento por variedades afines (c.f.* [**10**, Ch. I, Exercise 5.8]*).*
- *En realidad las variedades proyectivas, son variedades cuyo morfismo sobre $\operatorname{Spec} k$ es proyetivo, esto implica en particular que las variedades son propias sobre $\operatorname{Spec} k$ por el teorema 1.*

Definición 28.
- *Sea X una variedad proyectiva sobre el cuerpo k. Una **Función Racional** es un elemento del límite directo del sistema dirigido que conforman los anillos $\mathcal{O}_X(U)$ para $U \subseteq X$ abierto con las restricciones. Es decir, una función racional, es un par $\langle U, \phi_U\rangle$ donde $\phi_U : U \to k$ es regular y dos pares $\langle U, \phi_U\rangle$, $\langle V, \phi_V\rangle$ son iguales si las funciones respectivas*

coinciden en la intersección $U \cap V$.
*Las funciones regulares tienen estructura de anillo y de hecho forman un cuerpo, el **Cuerpo de Funciones Racionales** $K(X)$. Generalmente, se describen las funciones racionales como $f : X \dashrightarrow k$ para hacer distinción con las funciones definidas en todo X.*

- *Si Y es otra variedad proyectiva. Un **Mapeo Racional** $\phi : X \dashrightarrow Y$ es un par $\langle U, \phi_U \rangle$ donde U es un abierto de X y $\phi_U : U \to Y$ es un morfismo de variedades proyectivas, es decir, en subabiertos se ven como un cuociente de polinomios homogéneos del mismo grado en los que el denominador no se anula. Dos pares $\langle U, \phi_U \rangle$, $\langle V, \phi_V \rangle$ son iguales si las funciones respectivas coinciden en la intersección $U \cap V$. Observar que los morfismos racionales son además morfismos de esquemas, si se considera U con el haz restringido $\mathcal{O}_X|_U$.*
*Si $f : X \dashrightarrow Y$ es un mapeo racional que está representado por $\langle X, \phi \rangle$ donde ϕ es un morfismo, diremos que f es un **Morfismo Racional**.*
- *Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es **Dominante** si la imágen de f es densa en Y. Un mapeo racional es **Dominante** si el morfismo de $\langle U, \phi_U \rangle$ es dominante. Los mapeos racionales dominantes se pueden componer, restringiendo abiertos en el dominio o recorrido si es necesario.*
- *Un mapeo racional $\phi : X \dashrightarrow Y$ es **Biracional** si posee una inversa racional $\psi : Y \dashrightarrow X$, siendo $\langle X, id_X \rangle$ e $\langle Y, id_Y \rangle$ las identidades respectivas. Un **Morfismo Biracional** es un morfismo $f : X \to Y$ que es también biracional, o sea, su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es una función racional.*

Observación 15.

- *Los mapeos y funciones racionales poseen siempre un abierto maximal en donde son funciones bien definidas en dicho abierto.*
- *Si $f : X \dashrightarrow Y$ es un mapeo racional dominante de variedades sobre k, representado por $f_U : U \to Y$. Dada una función racional de $K(Y)$, $\langle V, \phi \rangle$, el "pull back" $\phi \circ f$ definido como $\left\langle f_U^{-1}(V), \phi \circ f_U \right\rangle$ es una función racional de X. Esto induce una función $f' : K(Y) \to K(X)$ que es de hecho una extensión de cuerpos y un morfismo de k-álgebras. Además, toda extensión $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ proviene de un mapeo racional dominante $f : X \to Y$. Esta correspondencia entre mapeos es parte de una equivalencia de categorías, la categoría de las variedades con*

los mapeos racionales dominantes y las extensiones finitamente generadas de k.

- *De la correspondencia anterior, los morfismos biracionales corresponden isomorfismos de cuerpos de funciones racionales.*
- *Además, un morfismo racional $f : X \to Y$ es biracional si y sólo si existen abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ los cuales son variedades isomorfas, si y sólo si los cuerpos de funciones racionales son isomorfos.*
- *En muchos casos, las extenciones $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ son separables, inseparables o puramente inseparables. En tal caso, se dice que el morfismo racional respectivo es* ***Separable****,* ***Inseparable*** *o* ***Puramente Inseparable*** *según corresponda. Como referencia para todo lo relacionado con teoría de cuerpos, el lector puede consultar* [**4**]*, específicamente en los capítulos 13 y 14, las extensiones separables e inseparables se tratan el la sección 13.5 y las puramente inseparables en la sección 14.9.*

Existe una forma equivalente a ser no singular para variedades, la cual contiene el concepto de diferenciales, que son una generalización de los diferenciales que se tienen, por ejemplo, para superficies de Riemann o variedades diferenciables. Los diferenciales son una especie distinguida de haz, el cual definiremos a continuación.

DEFINICIÓN 29. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un* ***Haz de $\mathcal{O}_X$-Módulos*** *es un haz $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo para todo abierto $U \subseteq X$ y para $V \subseteq U$ las restricciones $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ son compatibles con las restricciones $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ en el sentido que ponderaciones por secciones de $\mathcal{O}_X(U)$ se vuelven ponderaciones por secciones de $\mathcal{O}_X(V)$ al restringir.*
Un ***Haz de Ideales*** *es un haz $\mathcal{F}$ sobre X que es subhaz de $\mathcal{O}_X$ y a la vez un $\mathcal{O}_X$-módulo. Esto dice escencialmente que $\mathcal{F}(U)$ es un ideal del anillo $\mathcal{O}_X(U)$.*

OBSERVACIÓN 16. *Los kernels, imágenes, cokernel, imágenes directas, cuocientes, restricciones, sumas directas, productos directos y límites directos e inversos de $\mathcal{O}_X$-módulos son $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Además de las operaciones listadas anteriormente, la naturaleza especial de los $\mathcal{O}_X$-módulos permite definir más operaciones:

DEFINICIÓN 30.

- *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos haces de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se define el* ***Haz Tensor*** *como el haz $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ asociado al prehaz $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.*
- *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de espacios anillados. Notar que si $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_Y$, entonces $f^{-1}\mathcal{G}$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo.*

Además, por la propiedad adjunta de la operación f^{-1} ([**10**, Chap. 2, Ex. 1.18]*) existe un morfismo de haces $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Ambas cosas juntas, permiten definir el **Pull-Back de** $\mathcal{G}$ como*

$$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

EJEMPLO 7 (Haz de Ideales de un Subesquema Cerrado). *Sea X un esquema. Los subesquemas cerrados, se identifican naturalmente con un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$ y una inclusión $i : Y \to X$ que es una inmersión cerrada. El haz estructural de I es el haz de algún esquema en la clase de equivalencia de $i : Y \to X$. Como i es inmersión cerrada, el morfismo inducido entre los haces $i^{\#} : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ es sobreyectivo. El kernel de este morfismo es un haz de ideales, $\mathcal{I}$ el cual se conoce como **Haz de Ideales Asociado a** Y.*

EJEMPLO 8 (Haz de módulos asociado a un módulo). *Sea A un anillo y M un A-módulo. Definiremos el **Haz Asociado a** M sobre $SpecA$, que se denota por $\widetilde{M}$, como sigue:*
Por cada ideal primo $p \subset A$, consideramos la localización M_p, que es el A_p módulo de las fracciones m/a con $m \in M$ y $a \in A - p$ y por cada abierto $U \subseteq SpecA$ definimos $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de las funciones $s : U \to \coprod_{p \in U} M_p$ tales que $s(p) \in M_p$ para todo $p \in U$ y son localmente fracciones en el sentido de que para todo $p \in U$, existe un vecindad V de p contenida en U y elementos $m \in M$ y $a \in A$ tales que $a \notin q$ para $q \in V$ y $s(q) = \frac{m}{a}$ para los mismos $q \in V$.
Claramente $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_{SpecA}$-módulo, y además tenemos:

PROPOSICIÓN 10. *Sea A un anillo y M un A-módulo. Entonces:*

- *Dado $p \in SpecA$, el tallo en p de $\widetilde{M}$ es isomorfo M_p.*
- *Dado $f \in A$, $\widetilde{M}(D(f))$ es isomorfo a la localización M_f que consiste en localizar M por el conjunto $\{f^n\}_{n \geq 0}$.*
- *De lo anterior, $\Gamma(SpecA, \widetilde{M}) \cong M$.*

DEMOSTRACIÓN. La construcción de $\widetilde{M}$ es similar a la del haz estructural de Spec$A$, por ende, la demostración es similar a [**10**, Chap. 2, Prop. 2.2], basta cambiar M por A donde corresponda. □

Además estos haces son compatibles con las operaciones típicas que se definen sobre módulos y permiten ver la categoría de los A módulos desde otro punto de vista.

PROPOSICIÓN 11. *Sean A, B dos anillos. Y sea $f : B \to A$ el morfismo de espacios anillados inducido por el homomorfismo de anillos $A \to B$. Entonces,*

- *El funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ es un funtor exacto y completamente fiel (la función inducida sobre los conjuntos de morfismos entre objetos es biyectiva) desde la categoría de los A-módulos a la categoría de los $\mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A}$-módulos.*
- *Dados dos A-módulos, M y N se tiene que*

$$\widetilde{M \otimes N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A}} \widetilde{N}.$$

- *Si $\{M_i\}$ es una familia de A-módulos, entonces $\widetilde{\oplus M_i} \cong \oplus \widetilde{M_i}$.*
- *Para todo B-módulo N, se tiene $f_*(\widetilde{N}) \cong \widetilde{{}_AN}$ donde ${}_AN$ es N considerado como un A-módulo a través del morfismo que hay entre A y B.*
- *Para todo A-módulo M se tiene $f^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes_A B}$.*

Demostración. Ver [**10**, Chap. 2, Prop. 5.2]. □

Ahora que conocemos la estructura y propiedades básicas de estos haces, los usaremos para definir una clase especial de haces de módulos sobre esquemas.

Definición 31. *Sea X un esquema. Un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ es* ***Cuasi-Coherente*** *si existe un cubrimiento de X por abiertos afines $\{U_i = \mathit{Spec}\, A_i\}$ tales que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es isomorfo $\widetilde{M_i}$ donde M_i es un A_i-módulo. Si además, cada módulo M_i es finitamente generado sobre A_i decimos que $\mathcal{F}$ es un* ***Haz Coherente****.*
Si $\mathcal{F}$ es un haz cuasi coherente, tal que todo A_i-módulo M_i es libre. Decimos que $\mathcal{F}$ es ***Localmente Libre****.*

Observación 17. *Si $\mathcal{F}$ es un haz localmente libre, el rango de cada módulo libre es constante en cada componente conexa de X, dicho número se conoce como el* ***Rango de*** *$\mathcal{F}$ para el caso en que X es conexo.*

Uno puede probar que para comprobar la propiedad de ser cuasi-coherente o coherente se puede analizar cada abierto afín de un esquema X en lugar de un cubrimiento particular. En el caso de probar que un haz es coherente, necesitamos hipótesis adicionales:

Proposición 12. *Sea X un esquema y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente si y sólo si para todo abierto afín de X, $U = \mathit{Spec}\, A$, se tiene que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ donde M es un A-módulo. Si X es noetheriano, $\mathcal{F}$ es coherente si y sólo si para todo abierto afín $U = \mathit{Spec}\, A$ se tiene que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ donde M es un A-módulo finitamente generado.*

Demostración. Ver [**10**, Chap. 2, Prop. 5.4]. □

Esta proposición le agrega más propiedades al funtor $M \to \widetilde{M}$.

COROLARIO 1. *Sea $X = \operatorname{Spec} A$ con A un anillo. El funtor $M \to \widetilde{M}$ es una equivalencia de categorías, con funtor inverso $\widetilde{M} \to \Gamma(X, \widetilde{M})$ entre la categoría de los A-módulos y los $\mathcal{O}_X$-módulos cuasi-coherentes. Si A es noetheriano, el mismo funtor restringido a los A-módulos finitamente generados es una equivalencia de categorías entre los A-módulos finitamente generados y los haces de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes.*

Además, los haces cuasi-coherentes y coherentes se comportan bien con la mayoría de operaciones sobre los esquemas.

PROPOSICIÓN 13.

- *El kernel e imagen de un haz cuasi-coherente por un morfismo es cuasi-coherente. Si X es noetheriano, lo mismo aplica para haces coherentes.*
- *Si $f : X \to Y$ es un morfismo de esquemas y $\mathcal{G}$ es cuasi-coherente sobre Y, entonces $f^*\mathcal{G}$ es cuasi-coherente. Si X e Y son noetherianos, entonces lo mismo aplica para haces coherentes.*
- *Si X es noetheriano o f es un morfismo cuasi-compacto (un morfismo es cuasi-compacto si Y puede ser cubierto por abiertos afines, cuyas preimágenes son cuasi-compactas), entonces dado cualquier haz cuasi-coherente $\mathcal{F}$, se tiene que $f_*\mathcal{F}$ es cuasi-coherente.*

DEMOSTRACIÓN. Para el primero ver [**10**, Ch. II, Prop. 5.7] y para los demás [**10**, Ch. II, Prop. 5.8]. □

Lo que sigue, son una clase especial de haces cuasi-coherentes, llamados de diferenciales relativos, los cuales generalizan los diferenciales que uno tiene, por ejemplo, en superficies de Riemann. Como los haces son de naturaleza local, y los esquemas se componen localmente de esquemas afines, vamos a definir diferenciales para esquemas afines. Como referencia en este tema, el lector puede remitirse a [**10**, Ch. II, Sect. 8]

DEFINICIÓN 32.

- *Sea B una A-álgebra, notar que hay implícitamente en ello un morfismo $f : A \to B$, y M un B-módulo. Una **Derivación** de B en M es una función $d : B \to M$ tal que $d(b + b') = db + db'$, $d(bb') = b \cdot db' + b' \cdot db$ y $da = 0$ para todos $b, b' \in B$ y $a \in A$.*
- *Manteniendo las hipótesis sobre A y B de la definición anterior. Definimos el **Módulo de Formas Diferenciales Relativas de** B **sobre** A como el B-módulo $\Omega_{B/A}$ junto con una derivación $d : B \to \Omega_{B/A}$ que satisface la siguiente propiedad*

universal: Para todo B-módulo M y derivación $d' : B \to M$, existe un único morfismo de B-módulos $f : \Omega_{B/A} \to M$ tal que $d' = f \circ d$.

OBSERVACIÓN 18. *La propiedad universal hace que el módulo de formas diferenciales relativas sea único salvo isomorfismo. Además, este módulo se puede construir con el B-módulo libre generado por los símbolos $db : b \in B$ cocientado por el submódulo generado por los elementos, $d(b + b') - db - db'$, $d(bb') - b'db - bd'$ y da para $b, b' \in B$ y $a \in A$. La proyección $b \mapsto db$ induce un morfismo al cociente, el cual es una derivación y la denotamos por d.*
De esta construcción, se deduce que $\Omega_{B/A}$ está generado por los db como B-módulo.

EJEMPLO 9. *Si $B = A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ es el anillo de polinomios sobre A, entonces $\Omega_{B/A}$ es el B-módulo libre de rango n generado por $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$.*

La siguiente proposición resume algunas de las propiedades básicas de los diferenciales relativos.

PROPOSICIÓN 14.
- *Sea B un A-álgebra. Sea $f : B \otimes_A B \to B$ el "morfismo diagonal" definido por $f(b \otimes b') = bb'$ y sea $I = Kerf$. Notar que $B \otimes_A B$ posee una estructura de B-módulo con la multiplicación a la izquierda por elementos de B, y dicha estructura le da una estructura de B-módulo a I/I^2 también. Con todas estas hipótesis, la función $d : B \to I/I^2$ definida por $db = 1 \otimes b - b \otimes 1$(módulo I^2) da una estructura de módulo de formas diferenciales relativas de B sobre A.*
- *Si A' y B son A-álgebras y $B' = B \otimes_A A'$. Entonces, $\Omega_{B'/A'} \cong \Omega_{B/A} \otimes_B B'$. Además, si S es un subconjunto multiplicativamente cerrado de B, entonces $\Omega_{S^{-1}B/A} \cong S^{-1}\Omega_{B/A}$.*
- *Si B es una A-álgebra finitamente generada, o si B es una localización de una A-álgebra finitamente generada, entonces $\Omega_{B/A}$ es un B-módulo finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Ver respectivamente [**16**, p. 182], [**16**, p. 186] y [**10**, Ch. II, Cor. 8.5] □

Definidos los diferenciales entre anillos, podemos definir los diferenciales para esquemas.

DEFINICIÓN 33. *Sea X un esquema sobre un esquema Y, o sea, X viene con un morfismo $f : X \to Y$. El morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ da siempre un isomorfismo de X con su imagen, el cual es un* *cerrado dentro de un abierto W de $X \times_Y X$ (ver* [**10**, Ch. II, Cor. 4.2]*), es decir, Δ es una inmersión cerrada a un abierto de $X \times_Y X$. Si $\mathcal{I}$ es el haz de ideales de $\Delta(X)$ en W, se define el* ***Haz de Diferenciales Relativos de** X **sobre** Y* *como $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ en X.*

Observación 19.

- *Notar que $\mathcal{I}$ es un $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$-módulo pues es un $\mathcal{O}_{X\times_Y X}$-módulo al ser un haz de ideales y entonces restringiendo ponderadores se tiene la estructura de $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$, entonces $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ también lo es. Como X es isomorfo a $\Delta(X)$, y $\Omega_{X/Y}$ es un pullback desde $\Delta(X)$, este tiene estructura de $\mathcal{O}_X$-módulo, además es cuasi-coherente pues I es cuasi-coherente al ser haz de ideales por* [**10**, Ch. II, Prop. 5.9]*, su cociente es cuasi-coherente (Proposición 13), y entonces cualquier pull-back es cuasi coherente (Proposición 13 también). Si Y es noetheriano y f es de tipo finito, entonces $X \times_Y X$ es noetheriano, ya que X es noetheriano por un argumento análogo al de la Observación 12, luego $\Omega_{X/Y}$ es coherente por la Proposición 13.*
- *Si $U = Spec\, A \subseteq X$ e $V = SpecB \subseteq Y$ son abiertos afines con $f(U) \subseteq V$, entonces $V \times_U V$ es el esquema afín $B \otimes_A B$, y $\Delta(X) \cap V \times_U V$ es un subesquema cerrado (el morfismo diagonal restringido a U es separable* [**10**, Prop. 4.1] *), y su haz de ideales esta dado por el kernel I del morfismo diagonal $B \otimes_A B \to B$. Luego, restringido a V el haz $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ no es nada más que el haz de módulos asociado a I/I^2, luego $\Omega_{X/Y}\big|_V \cong \widetilde{I/I^2} \cong \widetilde{\Omega_{B/A}}$. Por lo tanto, restringido a abiertos afines, el haz de diferenciales relativos se ve como el haz asociado al módulo de diferenciales relativas que vimos antes. Y en ese sentido, se puede pensar que $\Omega_{X/Y}$ es un pegado de haces $\Omega_{B/A}$ para un anillo B tal que $U = SpecB$ un abierto afín de X y $V = Spec\, A$ es un abierto afín de Y con $f(U) \subseteq V$. Pensar $\Omega_{X/Y}$ como un pegado, permite definir una derivación $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/Y}$ pegando las derivaciones $d : B \to \Omega_{B/A}$ para todos los abiertos afines $U = SpecB \subseteq X$.*

La segunda parte de la proposición 14 tiene un análogo para esquemas en general. Basta notar que el tensor de dicha parte corresponde en el lenguaje de esquemas afines a un cambio de base.

Proposición 15. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo, y sea $g : Y' \to Y$ otro morfismo. Si $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ es el morfismo que se obtiene por cambio de base, entonces $\Omega_{X'/Y'} \cong h^*(\Omega_{X/Y})$ donde $h : X' \to X$ es la primera proyección.*

Con las diferenciales, podemos dar una forma equivalente para probar que una variedad sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k es no singular.

TEOREMA 2. *Sea X un esquema irreducible, separado y de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. X es una variedad no singular si y sólo si $\Omega_{X/Y}$ es un haz localmente libre de rango $n = \dim X$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. II, Th. 8,15] $\square$

Notar que según las hipótesis, el haz de diferenciales es coherente (Observación 19), luego tiene sentido que $\Omega_{X/Y}$ tenga rango finito. Además, para variedades no necesariamente suaves se tiene.

COROLARIO 2. *Si X es una variedad sobre k. Entonces, existe un abierto denso U de X que es no singular.*

La última parte de esta sección esta dedicada a la **Cohomología de Haces**. Si X es un esquema y $\mathcal{F}$ es un haz sobre X, tendremos los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$. No definiremos las cadenas que definen la cohomología, asumiremos la existencia de dichos grupos y daremos las reglas básicas como se comportan dichos grupos. El lector interesado en los detalles, puede consultar [**10**, Ch. III].

TEOREMA 3 (Reglas de la Cohomología).

1. *(Secciones Globales) Dado cualquier haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, se tiene que $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.*
2. *(Sucesión exacta Larga) Si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ es una sucesión exacta corta de haces, entonces dicha secuencia induce una sucesión exacta larga de grupos de cohomología*

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

$$\to H^i(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(X, \mathcal{F}') \to \cdots$$

3. *(Teorema de Anulación de Grothendieck* [**6**, Thm. 3.6.5]*) Sea X un esquema noetheriano de dimensión n. Entonces, para todo $i > n$ se tiene que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ y lo anterior es válido para cualquier haz de grupos abelianos sobre X.*
4. *(Cohomología de Esquemas Afines , J.P. Serre* [**25**] *ó* [**10**, Ch. III, Thm 3.7]*) Si X es un esquema noetheriano. Son equivalentes:*
   - *X es afín.*
   - *$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$, y haz cuasi-coherente $\mathcal{F}$ sobre X.*

- *$H^i(X,\mathcal{I}) = 0$ para todo $i > 0$ y haz de ideales coherente $\mathcal{I}$ sobre X.*

5. *(Cohomología de Haces Coherentes) Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, esto es, X esta inmerso en $\mathbb{P}^n_A$ como una variedad proyectiva. Entonces, para todo haz coherente $\mathcal{F}$, los grupos de cohomología $H^i(X,\mathcal{F})$ son A-módulos finitamente generados. En tal caso, se anota $h^i(X,\mathcal{F}) = \dim_A H^i(X,\mathcal{F})$.*
6. *(Cálculo de la Cohomología usando Cohomología Čech,* [**10**, Ch. III, Thm. 4.5]*) Sea X un esquema separado y noetheriano. Dado un cubrimiento abierto afín $\mathfrak{U}$ y un haz cuasi-coherente $\mathcal{F}$, se tiene el isomorfismo de grupos abelianos para todo $p \geq 0$*

$$H^p(X,\mathcal{F}) \cong H^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

donde los grupos de cohomología de la derecha corresponden a los grupos de ***Cohomología Čech*** *de $\mathcal{F}$. El lector puede consultar dicha cohomología en* [**10**, Ch. III, Sec. 4].

Finalmente, definimos la **Característica de Euler** de una cohomología cuyos grupos sean finitamente generados y solo una cantidad finita de ellos no sea nula (como en el caso de haces coherentes sobre variedades) como $\chi(X,\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i h^i(X,\mathcal{F})$.

1.4. Curvas

Ahora nos centraremos en las variedades proyectivas de dimensión 1, o curvas proyectivas.

Definición 34. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, una* ***Curva*** *es una variedad abstracta de dimensión 1 sobre k. Una curva es* ***Lisa*** *si es no singular.*

Observación 20.

- *Si $k = \mathbb{C}$, una curva proyectiva lisa es esencialmente lo mismo que una superficie de Riemann compacta, a través de la topología analítica que heredan éstas al ser subconjuntos del espacio proyectivo complejo, que es una variedad analítica. No es fácil establecer el puente entre la definición algebraica y la analítica, pero el lector puede consultar* [**5**, Ch. IV, Sect. 11].
Sin embargo, en dimensiones mayores a 1 no es cierto. Es verdad que las variedades proyectivas no singulares son analíticas, pero en general las variedades analíticas compactas no son algebraicas.

- *Si C es una curva proyectiva cualquiera. Entonces $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k$ y el número $p_a(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ se conoce como el* ***Género Aritmético****. Notar que no hay más cohomología relevante, pues para todo haz $\mathcal{F}$, $H^i(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = 0$ si $i \geq 2$ por el teorema de Grothendieck (ver Teorema 3).*
- *Si C es lisa, el género aritmético se llama* ***Género Geométrico****, se denota por $g(C)$, y en el caso complejo coincide con el correspondiente género de la superficie de Riemann compacta asociada.*
- *Dada una curva proyectiva C, siempre existe un morfismo biracional $\overline{C} \to C$ con $\overline{C}$ una curva proyectiva lisa. Este morfismo esta dado por la* ***Normalización*** *de la curva C, y al género de $\overline{C}$ lo llamaremos el* ***Género Geométrico de*** *C. Si el género de $\overline{C}$ es 0, diremos que C es una curva* ***Racional****. El lector que desee consultar detalles sobre la normalización puede dirigirse a* [**26**, Ch. II, Sec. 5.3].
- *Si C es una curva completa como variedad (Definición 25), entonces es proyectiva por* [**10**, Ch. III, Exc. 5.8].

Definición 35. *Sea C una curva proyectiva lisa. Un* ***Divisor*** *es un elemento del grupo abeliano libre con base en los puntos de C. Es decir, es una suma formal finita*

$$\sum_{i=1}^{k} n_i p_i$$

Con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $p_i \in C$. El grupo de todos los divisores se llama $Div(C)$. Si los coeficientes enteros de un divisor son todos no-negativos, se dice que un divisor es ***Efectivo*** *y en ese caso se escribe $D \geq 0$.*
Si $f \in K(C)$ entonces se define el divisor $div(f)$ como

$$div(f) = Ceros\ de\ f - Polos\ de\ f.$$

Un divisor D es ***Principal*** *si $D = div(f)$ para alguna $f \in K(C)$.*
Los divisores principales forman un subgrupo de $Div(C)$, denotado por $PDiv(C)$. El ***Grupo de Picard*** *es el grupo*

$$Pic(C) = Div(C)/PDiv(C).$$

Dos divisores que poseen la misma clase en el grupo de Picard se dicen ***Linealmente Equivalentes****.*

Dado que los coeficiente son enteros, es natural definir lo siguiente:

Definición 36. *Sea $D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i$ un divisor. El* ***Grado de*** *D es el entero $deg(D) = \sum_{i=1}^{k} n_i$.*

Proposición 16. *Sea D un divisor principal, entonces deg$(D) = 0$.*

Demostración. Ver [**10**, Ch. II, Cor. 6.10]. □

De lo anterior, la función grado en el grupo de divisores induce una función grado $\deg(\cdot) : \mathrm{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$.

Observación 21. *Como una curva X es un esquema sobre Spec k, su haz de diferenciales es $\Omega_{X/k}$. Como X es no singular, es un haz localmente libre de rango 1 por el Teorema 2, o sea, si $U \subset X$ es abierto, entonces $\Omega_{X/k}(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$ y entonces este módulo esta generado por una diferencial dg con $g \in \mathcal{O}_X(U)$. Luego, todo elemento es de la forma fdg donde f es una función regular en U y dg corresponde al generador de $\Omega_{X/k}(U)$. De esto, los diferenciales se ven como funciones regulares en abiertos de X más un dg que esta fijo en cada abierto.*
Por ejemplo, en $\mathbb{P}^1_k$, los diferenciales en el abierto afín $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}\, k[x]$ son de la forma $p(x)dx$ donde $p \in k[x]$ es una función regular en $\mathbb{A}^1_k$ y dx es el diferencial que corresponde a la función regular x. En efecto, notar que $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ usando la fórmula $d(x \cdot x^{n-1}) = xd(x^{n-1}) + x^{n-1}dx$ y aplicando un paso inductivo sobre $d(x^{n-1})$.
Notar que si C es una curva proyectiva, entonces no posee funciones regulares globales además de las constantes, es decir, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ y la diferencial de una función constante es 0, luego $\Gamma(X, \Omega_{X/k}) = 0$.
Los detalles específicos pueden hallarse en [**26**, Ch. III, Sec. 5].
Luego, el hecho de que los diferenciales se ven como funciones regulares en abiertos, motiva la siguiente definición.

Definición 37. *Sea C una curva no singular. Un* ***Diferencial Racional*** *(c.f.* [**26**, Ch. III, Sec. 5.4]*) es una clase de equivalencia, que se denota por $\langle U, \omega \rangle$, donde U es un abierto de C y $\omega \in \Omega_{X/k}(U)$, o sea, es de la forma $\omega = fdg(U)$ donde f es regular en U y g es una función regular en U fija. Dos pares $\langle U, \omega \rangle$ y $\langle V, \omega' \rangle$ son iguales si $\omega|_{U\cap V} = \omega'|_{U\cap V}$.*

Observación 22. *Una diferencial racional no es nada más que un elemento del límite directo de los módulos $\Omega_{X/k}(U)$ y los morfismos que corresponden a las restricciones.*
Dado $p \in C$, el tallo de $\Omega_{X/k}$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo libre de rango 1. Luego, sobre p una diferencial racional se ve como fdt donde f es una función racional (que podría no estar definida en p) y es parte del cuerpo de fracciones de $\Omega_{X/k}$ y t es un generador del ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,p}$.
Notar que si $p \in C$ es un punto, el tallo en p, $\mathcal{O}_{X,p}$, es un anillo regular de dimensión 1, lo cual es equivalente a que sea un anillo de valuación discreta [**1**, Ch.5, Prop. 62 y Ejercicios en la pág. 72]. *Si R*

es un anillo de valuación discreta con cuerpo de fracciones K, existe una ***Valuación Discreta*** $v : K^* \to \mathbb{Z}$ *la cuál es una función que satisface:* $v(xy) = v(x) + v(y)$ *y* $v(x+y) \geq \text{mín}(v(x), v(y))$.
Además, se tiene que

$$R = \{0\} \cup \{x \in K : v(x) \geq 0\}$$

y $m = \{x \in K : v(x) > 0\}$ *es el único ideal maximal de R, luego R es local, por ende, los elementos con valuación 0 son los invertibles de dicho anillo.*
Las valuaciones permiten calcular divisores de diferenciales.

Definición 38. *Sea ω una diferencial racional no nula en un curva no singular C (estamos omitiendo el abierto que le corresponde). El* ***Divisor de*** ω *es el divisor (ω) dado por*

$$(\omega) = \sum_{P \in C} v_P(f_P)P$$

Donde $\omega = f_P dt_P$ es la forma que tiene la diferencial ω en una vecindad de P y v_P es la valuación discreta del anillo $\mathcal{O}_{X,P}$.

Proposición 17.
- *(ω) es un divisor bien definido, o sea, sólo para finitos $P \in C$ se tiene que $v_P(f_P) \neq 0$.*
- *Si ω es una forma regular en P, su coeficiente respectivo en el divisor es no negativo, es positivo si ω se anula en P, es decir, la función regular que lo representa cerca de P se anula.*

Demostración. La primera parte aparece en [**26**, Pág. 202].
Lo segundo sale del hecho de que en $\mathcal{O}_{X,P}$ podemos escribir a la forma como $\omega_P = f_P dt_P$, donde $f_P \in \mathcal{O}_{X,P}$. Luego, ω se anula en P si y sólo si f_P pertenece al ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$, si y sólo si $v_P(f_p) \geq 1$ por la observación anterior. □

Definición 39. *Si C es una curva no singular, el* ***Divisor Canónico*** *es el divisor K_C de una diferencial racional.*

Definición 40. *Sea C una curva no singular y D un divisor de C. Definimos el haz $\mathcal{L}(D)$ (también se denota por $\mathcal{O}_C(D)$) por la fórmula*

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \text{ racional no nula en } U : (f) + D|_U \geq 0\}$$

donde si $D = \sum_{P \in C} n_P P$, entonces $D|_U$ es el divisor $\sum_{P \in U} n_P P$.

Proposición 18. *Para todo divisor D, el haz $\mathcal{L}(D)$ es localmente libre de grado 1.*

Demostración. Ver [**27**, Pág. 64]. □

De la proposición, el haz $\mathcal{L}(D)$ es coherente, y entonces sus grupos de cohomología tienen dimensión finita (c.f Teorema 3 parte 5).

DEFINICIÓN 41. *Sea D un divisor en una curva no singular C. Definimos $H^i(D) = H^i(C, \mathcal{L}(D))$, $h^i(D) = h^i(C, \mathcal{L}(D))$ y $\chi(D) = \chi(C, \mathcal{L}(D))$.*

OBSERVACIÓN 23. *Como C tiene dimensión 1, los únicos grupos de cohomología relevantes para cualquier divisor son $H^0(C, \mathcal{L}(D))$ y $H^1(C, \mathcal{L}(D))$, además*

$$\chi(D) = h^0(D) - h^1(D)$$

Los grupos H^1 son en general difíciles de calcular, pero hay una forma de convertir $h^1(D)$ en un h^0 de otro divisor.

TEOREMA 4 (Dualidad de Serre para Curvas). *Sea D un divisor, entonces $H^i(C, \mathcal{L}(D)) \cong H^{1-i}(C, \mathcal{L}(K_C - D))$ para $i = 0, 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver la primera parte de [**10**, Ch. IV, Thm. 1.3]. □

Además, $\chi(D)$ sólo depende del género de la curva y el grado del divisor D.

TEOREMA 5 (Riemann-Roch para Curvas). *Sea C una curva y D un divisor no nulo. Entonces, $H^i(D)$ es independiente de la clase de D en el grupo de Picard y siempre se cumple*

$$\chi(D) = deg(D) + 1 - g$$

Usando la dualidad de Serre uno puede escribir esta ecuación como

$$h^0(D) = deg(D) + 1 - g + h^0(K_C - D)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. IV, Thm. 1.3]. □

Ahora nos resta ver que sucede con los morfismos entre curvas. Notar que las curvas no singulares que son proyectivas sobre $\operatorname{Spec} k$, luego son variedades completas, luego podemos probar:

PROPOSICIÓN 19. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre curvas sobre un cuerpo k con X no singular y completo. Entonces f es constante o $f(X) = Y$. En el segundo caso, $K(X)$ es una extensión finita de $K(Y)$, el morfismo f es finito, e Y es completo sobre k como variedad.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. II, Prop. 6.8]. □

OBSERVACIÓN 24.
- *Notar que si $f : X \to Y$ es un morfismo finito entre esquemas, entonces para todo $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es finito (Ver* [**10**, Ch. 2, Exercise 3.5 (a)]*).*

- *De la proposición anterior, los morfismos entre curvas no singulares siempre son finitos, por lo que nos enfocaremos ahora en dichos morfismos.*
- *Como las curvas completas son proyectivas (Observación 20), la proposición anterior nos dice que tanto X como Y son curvas proyectivas.*

DEFINICIÓN 42. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre curvas no singulares. Definimos el **Grado de** f como $\deg(f) = [K(X) : K(Y)]$ donde el lado derecho corresponde al grado de una extensión de cuerpos. El grado esta bien definido por la proposición anterior.*

En superficies de Riemann, sabemos que para todo punto $y \in Y$, la preimagen $f^{-1}(y)$ es una cantidad finita de puntos, con multiplicidades, las cuales suman el grado de f. Para nuestras curvas, este comportamiento se mantiene, y se puede expresar en términos de divisores.

DEFINICIÓN 43. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre curvas no singulares. Definiremos un homomorfismo de **Pull-Back de Divisores** $f^* : Div(Y) \to Div(X)$, mediante la siguiente fórmula: Si definimos el pullback para un punto $P \in Y$, podemos definir el pull-back para todos los divisores extendiendo linealmente.*
*Ahora, sea $P \in Y$, y t una **Parámetro Local en** P, esto es, un elemento de $\mathcal{O}_{Y,P}$ con valuación $v_P(t) = 1$, notar que esto implica que t es una función regular en P que se anula en dicho punto. Con esto, definimos*

$$f^*(P) = \sum_{Q:\, f(Q)=P} v_Q(t)Q$$

Recordar que los morfismos de esquemas inducen morfismos entre los haces y en particular entre los tallos, luego $v_Q(t)$ denota a la valuación en $\mathcal{O}_{X,Q}$ de la imagen de t por el morfismo $f_Q^{\#} : \mathcal{O}_{Y,P} \to \mathcal{O}_{X,Q}$.

OBSERVACIÓN 25.

- *Como f es finito, hay una cantidad finita de $Q \in X$ tales que $f(Q) = P$, luego $f^*(P)$ está bien definido.*
- *La definición de $f^*(P)$ es independiente del parámetro local escogido en P, pues el parámetro genera el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y,P}$ y dos generadores del mismo ideal difieren por una unidad, luego si t' es otro parámetro local, $t' = ut$ donde u es una unidad del anillo local en P. Como la imagen de u por $f_P^{\#}$ es de nuevo una unidad (por la condición de que el morfismo es local), la valuación de t' es la misma que la de t al ser la suma de la de t más la de una unidad, que tiene valuación 0.*

- *La definición se puede extender entre los grupos de Picard respectivos, esto es porque el pull-back del divisor de una función racional, es el divisor de una función racional.*
- *Se tiene siempre que* $f^*(\mathcal{L}(D)) \cong \mathcal{L}(f^*(D))$.

PROPOSICIÓN 20. *Sea* $f : X \to Y$ *un morfismo finito entre curvas no singulares. Entonces, para todo divisor* $D \in Div(Y)$*, se tiene que*

$$\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg(D).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. II, Prop. 6.9]. □

OBSERVACIÓN 26. *De lo anterior, como los puntos tienen grado 1, se tiene que* $\deg(f^*(P)) = \deg(f)$ *para* $P \in Y$*, por lo que los puntos en la preimagen de* P *son finitos, y sus multiplicidades, i.e. los coeficientes que les corresponden en el divisor* $f^*(P)$*, suman* $\deg(f)$ *al igual que en el caso de superficies de Riemann.*

Además del concepto de grado de un morfismo, también tenemos el concepto de ramificación:

DEFINICIÓN 44. *Sea* $f : X \to Y$ *un morfismo finito entre curvas no singulares. Dado* $Q \in X$ *y* $P = f(Q)$*, definimos el* ***Índice de Ramificación*** e_Q ***en*** Q *como la valuación en* $\mathcal{O}_{X,Q}$ *de la imagen por* $f^\# : \mathcal{O}_{Y,P} \to \mathcal{O}_{X,Q}$ *de un parámetro local* $t \in \mathcal{O}_{Y,P}$ *(Recordar que un parámetro local es un elemento con valuación 1).*
Como se dijo en una observación anterior, el índice es independiente de la coordenada local escogida en $\mathcal{O}_{Y,P}$.
Si $e_Q = 1$ *se dice que* f *es* ***No Ramificada en*** Q *y es* ***Ramificada en*** Q *si* $e_Q > 1$*, en el último caso se dice que* P *es un* ***Punto de Ramificación de*** f.
Además, considerando la característica de k*, si* $char(k) = 0$ *ó* $char(k) = p > 0$ *y* p *no divide a* e_Q*, se dice que la ramificación es* ***Mansa****. Si no, la ramificación es* ***Salvaje****. (c.f.* [**10**, Pág. 299]*).*

Recordar que un morfismo entre curvas $f : X \to Y$ será separable o inseparable dependiendo si la extensión de cuerpos $K(X)/K(Y)$ es inseparable. Para los morfismos separables tendremos un teorema de Riemann-Hurwitz, que es un poco más complicado que el de superficies de Riemann para el caso $\operatorname{char} k > 0$. Y en el caso inseparable podemos caracterizar los morfismos. Partamos por el caso separable.

PROPOSICIÓN 21. *Sea* $f : X \to Y$ *un morfismo finito y separable entre curvas no singulares. Entonces, la siguiente sucesión natural de haces de diferenciales (ver* [**10**, Ch. II, Sec. 6]*) es exacta:*

$$0 \to f^*\Omega_{Y/k} \to \Omega_{X/k} \to \Omega_{X/Y} \to 0$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. III, Prop. 2.1]. □

De la proposición, podemos decir que $\Omega_{X/Y}$ mide la diferencia entre los haces $\Omega_{X/k}$ y $\Omega_{Y/k}$. Si $Q \in X$ y $P = f(Q)$, y t, u son parámetros locales para P y Q resp. entonces se puede probar que dt y du generan los módulos libres (sobre quién corresponda) $\Omega_{Y/k,P}$ y $\Omega_{Y/k,Q}$. Pero además, tenemos un morfismo entre tallos inducido por f, $f^{\#} : \Omega_{Y/k,P} \to \Omega_{X/k,Q}$, y entonces existe un único $g \in \mathcal{O}_{X,Q}$ tal que $f^{\#}(dt) = gdu$. Denotaremos a dicho g por $\frac{dt}{du}$.

DEFINICIÓN 45. *Sea M un A-módulo. Si*

$$N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{l-1} \subsetneq N_l$$

*es una cadena ascendente de submódulos de M, decimos que tiene **Largo** l.*
*El **Largo de** M es el supremo sobre todos las cadenas ascendentes de submódulos, de los largos de dichas cadenas.*

PROPOSICIÓN 22. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito y separable entre curvas no singulares. Entonces:*

(a) *$\Omega_{X/Y}$ es un **Haz de Torsión**, i.e., el tallo en el punto genérico de X es 0 y su soporte (los puntos con tallo no nulo) son exactamente los puntos de ramificación de f. En particular estos son finitos.*
(b) *Para todo $P \in X$, el tallo $\Omega_{X/Y,P}$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo principal, es decir, todo submódulo es generado por un elemento.*
(c) *Si f esta ramificado de forma mansa en $P \in X$, entonces*

$$Largo(\Omega_{X/Y,P}) = e_P - 1$$

Si la ramificación es salvaje en P, entonces

$$Largo(\Omega_{X/Y,P}) > e_P - 1$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. IV, Prop. 2.2]. □

La proposición anterior, permite definir el divisor de ramificación, el cuál es el mismo que uno pone en el teorema de Riemann-Hurwitz para superficies de Riemann.

DEFINICIÓN 46. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito y separable entre curvas no singulares. El **Divisor de Ramificación de** f (c.f. [**10**, Pag. 301]) es el divisor*

$$R = \sum_{P \in X} Largo(\Omega_{X/Y,P}) P$$

Observación 27. *En el caso de que k tenga característica 0, este divisor es exactamente igual al que se obtiene de un morfismo de superficies de Riemann.*

Queda sólo un paso antes de probar Riemann-Hurwitz, sólo basta relacionar los divisores canónicos de dos curvas que poseen un morfismo entre ellas.

Proposición 23. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo separable y finito entre curvas no singulares. Entonces, K_X el divisor canónico de X es linealmente equivalente a $f^*(K_Y) + R$ donde R es el divisor de ramificación de f.*

Observación 28. *Si X es una curva no singular de género g, entonces* $\deg(K_X) = 2g - 2$ *(*[**10**, Ch. III, 1.3.3]*).*
Esto más el hecho de que divisores linealmente equivalentes tienen el mismo grado, nos da el teorema de Riemann-Hurwitz.

Teorema 6 (Riemann-Hurwitz para Curvas). *Sea $f : X \to Y$ un morfismo separable y finito entre curvas no singulares. Entonces,*

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \deg R$$

Y si las ramificaciones de f son todas mansas, además tenemos

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \sum_{P \in X} e_P - 1.$$

Ahora que completamos el caso separable, estudiaremos el caso puramente inseparable.
Recordar que una extensión de cuerpos de característica positiva p, L/K, es **Puramente Inseparable** si para todo $\alpha \in L$ existe $n \geq 0$ tal que $\alpha^{p^n} \in K$. Si dicha extensión es finita, el grado siempre es una potencia de p (c.f. [**4**, Pág. 649]).

Definición 47. *Sea X un esquema, tal que todos sus anillos locales son de característica prima $p > 0$, lo cual significa que dichos anillos contienen a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Definimos el* ***Morfismo de Frobenius*** *$F : X \to X$ como el morfismo que es la identidad sobre los espacios topológicos y el morfismos entre haces $f^\# : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ es el que corresponde a tomar la p-ésima potencia. Notar que $f^\#$ es un morfismo dado que los anillos locales son de característica p, donde elevar a la potencia p-ésima claramente es un morfismo.*

Observación 29. *Si X esta sobre $\operatorname{Spec} k$ mediante el morfismo $\pi : X \to \operatorname{Spec} k$, entonces el morfismo de Frobenius no es k lineal. Pero* *si se tiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"'] \\ Spec\, k \arrow[r, "F"'] & Spec\, k \end{tikzcd}$$

*Luego, podemos definir un esquema X_p de modo tal que la acción de k sea lineal para F. Definimos X_p como el mismo esquema X pero con el morfismo $F \circ \pi$ hacia $Spec\, k$. Con esta construcción, el morfismo de Frobenius $F' : X_p \to X$ queda k-lineal pues los elementos de k sobre los anillos del haz $\mathcal{O}_{X_p}$ actúan como $k \cdot f = k^p f$ si $f \in \mathcal{O}_{X_p}(U)$. A este morfismo lo llamaremos **Morfismo k-lineal de Frobenius**.*

Observación 30. *El morfismo k-lineal de Frobenius esta ramificado en todos los puntos del dominio con índice de ramificación p. (*[**10**, Ch. III, 2.5.1]*)*

Proposición 24. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre curvas no singulares. Supongamos que $K(X)$ es una extensión puramente inseparable de $K(Y)$. Entonces X e Y son isomorfos como esquemas abstractos y f es una composición de morfismos k-lineales de Frobenius. En particular $g(X) = g(Y)$.*

Demostración. Ver [**10**, Ch. III, Prop. 2.5]. □

Observación 31. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo finito e inseparable de curvas no singulares. Como la extensión $K(X)/K(Y)$ es inseparable, se puede dividir en una extensión separable seguida de una puramente inseparable. Esto se traduce en que existe una curva C por la que f se factoriza, luego se puede tratar cada parte de la extensión de cuerpos por separado.*
Esto permite probar por ejemplo que siempre que se tiene un morfismo, debe suceder que $g(X) \geq g(Y)$.

1.5. Superficies

Comenzaremos con la definición básica de esta sección.

Definición 48. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, una **Superficie** es una variedad abstracta de dimensión 2 sobre k. Una superficie es **Lisa** si es no singular.*

Observación 32.
- *Si S es una superficie, esta podría ser singular, o sea, algún tallo podría no ser regular y los puntos con dichos tallos se llaman **Singularidades**. Dichas singularidades se pueden eliminar bajo un proceso llamado **Resolución***

de Singularidades *que consiste en una superficie no singular* $\widetilde{S}$ *más un morfismo biracional propio* $\phi : \widetilde{S} \to S$. *El método de resolución depende de la característica, Zariski en 1935 probó el resultado para superficies en característica 0 y en 1953 Abhyankar hizo lo mismo para superficies sobre un cuerpo de característica positiva.*

- *Si* S *es una superficie lisa, al ser proyectiva y de dimensión 2, tenemos que* $h^0(S, \mathcal{O}_S) = 1$ *pues* $H^0(S, \mathcal{O}_S) = k$ *ya que las variedades proyectivas no tienen funciones regulares no constantes globales, además, los números* $q = h^1(S, \mathcal{O}_S)$ *y* $p_g = h^2(S, \mathcal{O}_S)$ *son las únicas dimensiones de los grupos de cohomología que podrían no ser 0, dichos números se conocen como la* ***Irregularidad*** *y el* ***Género Geométrico*** *de* S *respectivamente.*
  Notar en ese caso que tenemos $\chi(S) = 1 - q + p_g$.

Definición 49. *Sea* S *una superficie proyectiva no singular. Un* ***Divisor*** *es un elemento del grupo libre abeliano con base en las curvas proyectivas irreducibles de* S.
Es decir, un divisor es una suma formal finita

$$D = \sum_{i=1}^{n} k_i C_i$$

Con $C_i \subset S$ *una curva, considerada como un subesquema cerrado de* S. *El grupo de los divisores de* S *se denota por* $Div(S)$.
Si $f : S \to \mathbb{P}^1_k$ *es una función racional, para todo punto* $P \in \mathbb{P}^1_k$ *la fibra de* f *sobre* P *tiene dimensión 1 (*[**10**, Ch.III, Prop. 9.6 y 9.7]*), luego es una unión de curvas proyectivas irreducibles dentro de* S. *Luego, los ceros y polos de* f *corresponden a una unión finita de curvas con multiplicidades, por lo que tiene sentido definir el* ***Divisor de una Función Racional o Principal***

$$(f) = (Ceros\ de\ f - Polos\ de\ f)$$

Dos divisores D *y* D' *son* ***Linealmente Equivalentes****, y se denota por* $D \sim D'$ *si están en la misma clase módulo el subgrupo de* $Div(S)$ *compuesto por los divisores principales. El cociente de* $Div(S)$ *se conoce como el* ***Grupo de Picard de*** S $Pic(X)$.
Si $f : S \to S'$ *es un morfismo entre variedades (pensar en curvas o superficies), definimos el* ***Pull-Back de un Divisor*** D *definiendo el pullback de un punto/curva* $P \in S'$ *como sigue: Si elegimos un parámetro local en* P, *o sea, un generador del ideal maximal de su anillo local con valuación 1, en cada componente* Q *de* $f^{-1}(P)$ *se tiene un morfismo de anillos* $f^{\#} : \mathcal{O}_{S',P} \to \mathcal{O}_{S,Q}$ *y como el anillo de llegada también es de*

valuación, podemos calcular la valuación de la imagen del parámetro. Si llamamos a dicha valuación v_Q, el pull-back es

$$f^*(P) = \sum_{f(Q)=P} v_Q Q.$$

OBSERVACIÓN 33. *Si D es un divisor, definimos el haz $\mathcal{O}_S(D)$ de manera análoga a como definimos los haces $\mathcal{L}(D)$ para el caso de curvas (ver Definición 40) y* [**10**, Ch. II, Sec. 7]*), los cuales también son coherentes. Entonces, de la misma manera que para divisores en curvas no singulares definimos también $H^i(D)$ y $h^i(D)$.*

Lo siguiente que necesitamos es la noción de intersección de curvas. Sabemos que en el caso del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, dos curvas cualquiera se intersecan, y además la suma de las multiplicidades en cada punto de intersección es el producto de los grados de las curvas intersecadas (c.f. [**10**, Ch. I, Sec. 7]).
En general uno no puede esperar que todas las curvas se intersequen, por lo que dicho inconveniente se arregla dándole la libertad de "moverse" a la curvas y probando que dos curvas se pueden mover, de modo tal que su intersección sea calculable, es decir, que se intersequen transversalmente en un sentido algebraico por supuesto.
No definiremos explícitamente como es la intersección pero mostraremos sus propiedades principales, al igual que lo hicimos con la cohomología de haces previamente.

TEOREMA 7. *Sea S una superficie lisa. Dados dos divisores D y D' existe un único pareado*

$$(.) : Pic(S) \times Pic(S) \to \mathbb{Z}$$

El cuál satisface:

(i) *Si C y C' son dos curvas no singulares de S, entonces $C.C'$ es la cantidad de puntos en la intersección $C \cap C'$.*
(ii) *Siempre se tiene $D.D' = D'.D$.*
(iii) *Si E es otro divisor, entonces $(D + D').E = D.E + D'.E$.*
(iv) *Si $D \sim E$, entonces $D.D' = E.D'$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. IV, Sec. 1]. □

DEFINICIÓN 50. *Sea S una superficie. Definimos el* ***Haz Canónico*** *de S como el producto exterior $\bigwedge^2 \Omega_{X/k} = \Omega_{X/k} \bigwedge \Omega_{X/k}$, este es un $\mathcal{O}_S$-módulo libre de rango 1. Si $U \subseteq S$ es un abierto $\bigwedge^2 \Omega_{X/k}(U)$ es el $\mathcal{O}_S(U)$-módulo libre generado por $dx \wedge dy$ (siempre se tiene que $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$) donde dx y dy son los generadores de $\Omega_{X/k}(U)$ que es un $\mathcal{O}_S(U)$-módulo libre de rango 2. O sea, los elementos de*

*$\bigwedge^2 \Omega_{X/k}(U)$ son de la forma $f dx \wedge dy$ donde f es una función regular en U, este elemento es llamado **2-Diferencial Regular**.*
*Una **2-Diferencial Racional** es un elemento del límite directo de los módulos $\bigwedge^2 \Omega_{X/k}(U)$ con las restricciones y esencialmente se ve como $f dx \wedge dy$ donde f es una función racional.*
*De forma parecida al caso de curvas, si $C \subset S$ es una curva en S, el tallo en el punto genérico de dicha curva es un anillo local regular de dimensión 1, luego es un anillo de valuación discreta y entonces una 2-forma racional posee una valuación v_C en dicho anillo dada por la valuación del elemento f_P en la descomposición $\omega_P = f_P dx_P \wedge dy_P$. Con esto, se define el **Divisor de un Diferencial Racional** ω como*

$$(\omega) = \sum_{C \subset S} v_C(f_P) C$$

Este divisor es bien definido igual que en el caso de curvas ([**10**, Ch. II, Lem. 6.1]*). El divisor de cualquier 2-forma se llama **Divisor Canónico** y se denota por K_S.*

OBSERVACIÓN 34. *La auto-intersección del divisor canónico K_S^2 es un invariante bajo isomorfismos que sólo depende de S.*

DEFINICIÓN 51. *Sea S una superficie lisa. Dado un punto $P \in S$ se define el **Blow-up de S en P** como a la única superficie $\widehat{S}$ que posee un morfismo biracional $\epsilon : \widehat{S} \to S$ tal que:*

- *La restricción de ϵ a $\epsilon^{-1}(S - \{P\})$ es un isomorfismo sobre $S - \{P\}$.*
- *La fibra sobre P es una curva $E \subset \widehat{S}$ isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$.*

*La curva E se llama **Curva Excepcional del Blow-up**.*

OBSERVACIÓN 35. *El blow-up se construye tomando una vecindad de P, de modo tal que existan dos funciones regulares x, y en U tales que la intersección de las curvas $x = 0, y = 0$ sea sólo P en U, luego se construye el blow-up considerando la subvariedad $\widehat{U} \subset U \times_{Spec\, k} \mathbb{P}^1_k$ de los puntos $[x : y; X : Y]$ tales que $xY - yX = 0$.*
Entonces, fuera de p la proyección $\epsilon : \widehat{U} \to U$ es un isomorfismo pues existe un sólo punto de U dado que sólo una de las funciones x o y se anula fuera de P y además tenemos $\epsilon^{-1}(P) = \{P\} \times_{Spec\, k} \mathbb{P}^1_k$, luego se extiende esta proyección a todo S pegando el resto, utilizando el hecho de que $U - \{P\} \cong \widehat{U} - \epsilon^{-1}(P)$.
Notar que cada punto de $\{P\} \times_{Spec\, k} \mathbb{P}^1_k$ se identifica con una dirección tangente en S a p.

Además de ser una superficie, tenemos:

Proposición 25. *Si S es una superficie lisa, el blow-up de S en cualquier punto también lo es. Además, la curva excepcional satisface $E^2 = -1$.*

Demostración. Ver [**10**, Ch. IV, Prop. 3.1]. □

A continuación mostraremos algunas propiedades que relacionan los divisores y su intersección en el blow-up con los de la superficie original.
Si C es una curva en S que pasa por P y hacemos el blow-up $\widetilde{S}$ de S en P, definimos la **Transformada Estricta de** C como la curva $\overline{\epsilon(C - \{P\})} \subset \widetilde{S}$, se denota por $\widetilde{C}$.

Proposición 26. *Sea S una superficie lisa y $\widetilde{S}$ su blow-up en un punto P. Entonces:*

- *Si C es una curva que pasa por P y tiene multiplicidad P, entonces $\epsilon^*(C) = \widetilde{C} + mE$.*
- *$Pic(\widetilde{S})$ es isomorfo a $Pic(S) \oplus \mathbb{Z}$ mediante el isomorfismo $(D, n) \mapsto \epsilon^*(D) + nE$.*
- *Si D, D' son dos divisores en S, entonces $\epsilon^*(D).\epsilon^*(D') = D.D'$ y $E.\epsilon^*(D) = 0$.*
- *$K_{\widetilde{S}} = \epsilon^*(K_S) + E$.*

El blow-up no sólo inside en los divisores de una superficie, si no que ayuda a convertir funciones racionales en funciones regulares tras eliminar los puntos donde la función regular se indeterminada. Notar que siempre hay una cantidad finita de puntos en los que las funciones racionales no están definidas.

Teorema 8. *Sea S una superficie lisa y $f : S \to X$ un mapeo racional de S a una variedad proyectiva X. Entonces, existe una superficie $\widetilde{S}$ con morfismos regulares $\epsilon : \widetilde{S} \to S$ y $g : \widetilde{S} \to X$ tal que $\widetilde{S}$ se obtiene de S mediante una secuencia finita de blow-ups y $g = f \circ \epsilon$.*

Teorema 9. *Sea S una superficie lisa y $f : S \to S_0$ un morfismo biracional entre superficies. Entonces, existe una sucesión finita de blow-ups $\epsilon_k : S_k \to S_{k-1}$ para $1 \leq k \leq n$ y un isomorfismo $g : S \to S_n$ tal que $f = \epsilon_1 \circ \epsilon_2 \circ \cdots \circ \epsilon_n \circ g$.*

El primer teorema "arregla" las indeterminaciones para f y el segundo las de f^{-1} en el caso de una función racional. Por ende:

Corolario 3. *Sea $f : S \to S'$ un morfismo biracional entre superficies lisas. Entonces, existe una superficie $\widetilde{S}$ y morfismos regulares $g : \widetilde{S} \to S$ y $h : \widetilde{S} \to S'$ tales que $h = f \circ g$ y ambos morfismos son composiciones de blow-ups con isomorfismos.*

Notar que el blow-up de una superficie es un morfismo biracional, luego, el blow-up sirve para cambiar el modelo biracional de una superficie a considerar. Sin embargo, el blow-up no es único pues se puede hacer en muchos puntos de muchas maneras posibles, por lo que es más conveniente buscar un modelo biracional " canónico " en algún sentido. Dicho sentido será el siguiente:

Definición 52. *Sea S una superficie. Diremos que S* ***Domina a una Superficie*** *X si existe un morfismo biracional $f : S \to X$ y lo denotaremos por $S \geq X$.*

Observación 36. *El blow-up nos permite ir "hacia arriba" en términos de dominación dentro de una clase biracional (superficies biracionales a ...), pero también es posible ir " hacia abajo ".*

Teorema 10 (Criterio de Castelnuovo). *Sea S una superficie, que posee una curva Y isomorfa a $\mathbb{P}^1$ y con $Y^2 = -1$. Entonces, existe un morfismo biracional $f : S \to S_0$ con S_0 una superficie no singular proyectiva y un punto $X_0 \in S_0$ tal que S es isomorfo al blow-up de S_0 en X_0 y cuya curva excepcional sea Y.*

Demostración. Ver [**10**, Ch. IV, Teo. 5.7]. □

Como podemos ir siempre para abajo gracias a este teorema, podemos considerar los elementos "minimales" respecto al orden de la dominación de superficies.

Definición 53. *Sea S una superficie. Se dice que S es* ***Minimal*** *si no existe una superficie X biracional a S que sea dominada por ella. Un* ***Modelo Minimal*** *para una superficie S es una superficie X biracional a X que es minimal.*

Observación 37.
- *De existir un modelo minimal, este no necesariamente es único, como en el caso de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*
- *Notar que ser minimal es equivalente a que todo morfismo biracional $S \to X$ es siempre un isomorfismo y también a que S no posee curvas " -1 ", o sea, curvas isomorfas a $\mathbb{P}^1$ con auto-intersección -1.*

Teorema 11. *Sea S una superficie lisa. Entonces, S siempre posee un modelo minimal en su clase biracional.*

Demostración. Ver [**10**, Ch. IV, Teo. 5.8] □

Observación 38. *Toda superficie lisa tiene dos invariantes principales. Son los llamados* ***Números de Chern*** *y se denotan por c_1^2 y c_2.*

No diremos como se obtienen (el lector puede consultar [**10**, Appendix A]*), pero es cierto que* $c_1^2 = K_S^2$ *y en característica 0,* c_2 *corresponde a la característica de Euler topológica de* X*. Esto es, es la suma alternada de sus números de Betti, en otras palabras, de los rangos de sus grupos de homología topológica.*
Estos dos números están presentes en las identidades más importantes en el contexto de superficies.

TEOREMA 12. *Sea* S *una superficie lisa. Entonces:*

- *(Fórmula de Adjunción) Si* C *es una curva proyectiva irreducible en* S*, entonces* $C.(C + K_S) = 2p_a(C) - 2$ *donde* p_a *es el género aritmético de* C*.*
- *(Dualidad de Serre) Para todo divisor* D *en* S *se tiene que* $H^i(D) \cong H^{2-i}(K_S - D)$ *para* $i = 0, 1, 2$*. En particular* $h^i(D) = h^{2-i}(K_S - D)$*.*
- *(Teorema de Riemann-Roch) Sea* D *un divisor en* S*, entonces*
$$\chi(D) = \frac{1}{2}D.(K_S - D) + \chi(\mathcal{O}_S).$$
- *(Fórmula de Noether)* $12\chi(\mathcal{O}_S) = K_S^2 + c_2$*.*

OBSERVACIÓN 39. *De la última fórmula, podemos definir* c_2 *en general como*
$$c_2 = 12\chi(\mathcal{O}_S) - K_S^2.$$

DEFINICIÓN 54. *Sea* X *una variedad proyectiva sobre un cuerpo algebraicamente cerrado* k*. Se define la* ***Dimensión de Kodaira de*** X *como el grado de trascendencia sobre* k *menos 1 de*
$$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}(nK))$$
donde K *es el divisor canónico de* X*.*

OBSERVACIÓN 40. *Si* X *es de dimensión* n *la dimensión de Kodaira varía entre* -1 *y* n*, luego las superficies pueden tener números de Kodaira* $-1, 0, 1$ *y* 2*.*
Si la dimensión es -1, tenemos $H^0(X, \mathcal{L}(nK)) = 0$ *para todo* $n > 0$*.*

DEFINICIÓN 55. *Una superficie proyectiva* S *es de* ***Tipo General*** *si tiene dimensión de Kodaira 2.*

TEOREMA 13. *Sea* S *una superficie. Entonces,* S *es de tipo general si y sólo si existe* $n > 0$ *tal que las secciones globales de* $\mathcal{L}(nK)$ *definen un morfismo* $X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ *que es biracional entre* X *y su imagen.*

Ahora tenemos suficiente lenguaje para hablar de la motivación de este trabajo (ver la sección 3.5 de Aplicaciones).
Para contextualizar, estamos interesados en un problema de **Geografía** para superficies sobre un cuerpo de característica positiva. Un problema de geografía es considerar en el plano un par $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ y encontrar una superficie minimal y de tipo general S tal que $c_1(S)^2 = a$ y $c_2(S) = b$. Por supuesto, uno podría agregar condiciones a la superficie si es necesario.
A priori podría pensarse que hay una gran porción del plano que esta cubierta por superficies, sin embargo, hay desigualdades básicas que debe cumplir toda superficie. De partida, $c_1^2 > 0$ y además

TEOREMA 14 (Desigualdad de Noether, [**22**] [**13**]). *Sea S una superficie lisa minimal y de tipo general, entonces se cumple que*

$$p_g \leq \frac{1}{2}c_1^2 + 2.$$

Luego, debemos separar dos casos: Si la característica del cuerpo base es 0, tenemos además

TEOREMA 15 (Desigualdad de Castelnuovo). *Sea S una superficie lisa minimal y de tipo general sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, entonces se cumple que $c_2(S) > 0$*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**2**, Ch. X, Prop. X.1]. □

Y también la famosa:

TEOREMA 16 (Desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau, [**3, 19, 35**]). *Sea S una superficie lisa minimal y de tipo general sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, entonces*

$$c_1^2 \leq 3c_2.$$

En característica 0, recientemente se han podido hallar superficies de tipo general, minimales y simplemente conexas con $c_1^2(S)/c_2$ arbitrariamente cercano a todo $r \in [2, 3]$ [**23**].
En característica positiva, no se cumplen las desigualdades de Castelnouvo y Bogomolov-Miyaoka-Yau, y en el caso de la segunda hay ejemplos de superficies con $c_1^2 > pc_2$ donde p es la característica e incluso ejemplos con $c_1^2 > p^n c_2$ para un n apropiado. En nuestro caso, mostraremos ejemplos de superficies de tipo general, sobre una característica $p > 0$ fija, con $c_1^2(S), c_2(S) > 0$ y cocientes $\frac{c_1^2}{c_2}$ tendiendo a infinito, además de que dichas superficies son “Simplemente Conexas” en un sentido análogo al del grupo fundamental de espacios topológicos, definido por A. Grothendieck en [**9**], el cuál mostraremos en el

siguiente capítulo.
Haremos finalmente una última observación:

OBSERVACIÓN 41. *Si S es una superficie de tipo general y minimal sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, y además es simplemente conexa. Entonces se puede probar fácilmente que*

$$c_1^2 \geq \frac{c_2}{5} - \frac{36}{5}$$

Solo basta reemplazar el género geométrico p_g en la desigualdad de Noether luego de haber despejado este último en la fórmula de Noether.
Por otro lado, para cualquier superficie, independiente de su característica se tiene

$$c_1^2 \leq 5c_2 + 12h^0(S, \Omega_{S/k})$$

Esto es debido al Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch (c.f. [**10**, Appendix A, Thm. 4.1]*) el cuál dice en el caso de una superficie que*

$$c_1^2 - 5c_2 = 6\chi(S, \Omega_{S/k}) = 6h^0(S, \Omega_{S/k}) - 6h^1(S, \Omega_{S/k}) + 6h^2(S, \Omega_{S/k})$$

Pero $\Omega_{S/k} \cong \Omega_{S/k}^* \otimes \bigwedge^2 \Omega_{S/k} = \Omega_{S/k}^* \otimes K_S$ donde $\Omega_{S/k}^*$ es el dual de $\Omega_{S/k}$ por [**10**, Ch. II, Exc. 5.16 b)] *ya que $\Omega_{S/k}$ es un haz localmente libre de rango 2 por el Teorema 2, pero entonces por dualidad de Serrre (*[**10**, Ch. III, Cor. 7.7] *y* [**10**, Ch. III, Cor. 7.12]*) tenemos que $h^0(S, \Omega_{S/k}) = h^2(S, \Omega_{S/k})$, de donde se concluye*

$$c_1^2 - 5c_2 = 12h^0(S, \Omega_{S/k}) - 6h^1(S, \Omega_{S/k}) \leq 12h^0(S, \Omega_{S/k}).$$

Y si consideramos una superficie simplemente conexa en característica 0, la Teoría de Hodge dice que $h^0(S, \Omega_{S/k}) \leq \frac{b_1}{2}$ donde b_1 es el primer número de Betti de la superficie, o sea, es el rango del primer grupo de homología topológica, el cuál es 0 si la superficie en cuestión es simplemente conexa. Por lo tanto, $c_1^2 \leq 5c_2$.
Notar en último lugar, que los ejemplos de superficies que construiremos tienen c_1^2/c_2 tendiendo a infinito, esto obliga a que $h^0(\Omega_{S/k})$ también tienda a infinito.

CAPÍTULO 2

Morfismos y Grupo Fundamental Étale

2.1. Introducción

Este capítulo esta orientado en presentar el concepto de "Grupo Fundamental Étale" y sus propiedades básicas.

El grupo fundamental étale es una analogía del grupo fundamental usual para las variedades topológicas. Su definición esta basada en tomar el grupo fundamental respecto a los cubrimientos y no los lazos, de manera de que se puedan generalizar al contexto de esquemas.
Usaremos los resultados expuestos en el libro [**15**] para el caso topológico.
La forma clásica de definir el grupo fundamental de un espacio topológico X es a través de los lazos en este espacio y sus homotopías entre ellas. Esto no tiene como generalizarse apropiadamente para esquemas, salvo en el caso sobre $\mathbb{C}$, pues la topología dista mucho de la de los espacios topológicos usuales, como las variedades topológicas.
Sin embargo, se puede definir alternativamente el grupo fundamental mediante cubrimientos.

DEFINICIÓN 56. *Sea X un espacio topológico, un espacio topológico Y con una función continua sobreyectiva $f : X \to Y$ es un* ***Cubrimiento*** *si para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta de X, llamada* ***Vecindad Elemental*** *, U tal que $f^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos $V_i \subseteq Y$ tales que $f|_{V_i} : V_i \to U$ es un homeomorfismo. Un* ***Morfismo de Cubrimientos*** *es una función continua $g : Y_1 \to Y_2$ entre los cubrimientos $f_i : Y_i \to X$ tal que $f_1 = f_2 \circ g$.*
Un ***Isomorfismo*** *es un morfismo de cubrimientos que posee inversa. Un* ***Automorfismo*** *de un cubrimiento $f : Y \to X$ es un isomorfismo $g : Y \to Y$ donde el segundo Y esta considerado como el mismo cubrimiento, se denota además por $Aut(f : Y \to X)$ al grupo de automorfismos del cubrimiento f.*

OBSERVACIÓN 42.
- *Notar que de la definición tenemos que si U es una vecindad elemental, entonces $f^{-1}(U) \cong \coprod_i U_i$ donde*

$U_i = U$, el particular $f^{-1}(x)$ es una unión disjunta de puntos, con la topología discreta.

- *Si Y es arcoconexo, y $f : Y \to X$ es un cubrimiento, entonces para todo $x \in X$ la cardinalidad de $f^{-1}(x)$ es constante y se conoce como el **Grado del Cubrimiento**.*
- *Si $f : Y \to X$ es un cubrimiento, el grupo $Aut(f : Y \to X)$ actúa sobre $f^{-1}(x)$ mediante $g \circ y = g(y)$.*
- *Dicha acción es libre puntos fijos, es decir, todo automorfismo $g \neq id$ no posee ningún punto fijo.*

Para obtener el grupo fundamental, necesitamos un tipo especial de cubrimiento. No todos los espacios topológicos lo poseen pero si una mayoría aceptable, como las variedades topológicas y analíticas.

Definición 57. *Un espacio topológico arco-conexo X es **Simplemente Conexo** si dados dos lazos con los mismos puntos iniciales y finales, estas siempre serán homotópicas.*
*Si X es un espacio topológico, un **Cubrimiento Universal** es un cubrimiento $f : \widetilde{X} \to X$ con $\widetilde{X}$ simplemente conexo.*

Observación 43.

- *Bajo ciertas condiciones especiales (*[**15**, pág. 142]*), un espacio topológico posee siempre un cubrimiento universal.*
- *Dos caminos en un espacio topológico son equivalentes en un espacio topológico si y sólo si la curva que resulta de recorrer el primero y después el segundo en sentido inverso, el cual es un lazo, es homotópica al lazo constante. De esto, el grupo fundamental, obtenido usando clases de homotopía de curvas, es trivial si y sólo si el espacio topológico en cuestión es simplemente conexo.*
- *El cubrimiento universal de un espacio topológico X tiene la propiedad universal de que todo cubrimiento $Y \to X$ es cubierto a su vez por el cubrimiento universal, o sea, existe un cubrimiento $g : \widetilde{X} \to Y$ de modo tal que el cubrimiento universal factoriza a través de Y.*

Una vez que se tiene el cubrimiento universal, el comportamiento de los cubrimientos se simplifica.

Teorema 17. *Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un cubrimiento universal $\widetilde{X}$. Entonces:*

1. *Dado $x_0 \in X$, se tiene que $G = \pi_1(X, x_0) \cong Aut(f : \widetilde{X} \to X)$.*
2. *A todo subgrupo $H \leq \pi_1(X, x_0)$ le corresponde un cubrimiento Y_H. Además, las clases de isomorfismo del cubrimiento Y_H corresponden a los subgrupos en la clase de conjugación de H.*

3. *Si* $H \subseteq K$ *entonces existe un homomorfismo de cubrimientos* $Y_H \to Y_K$ *que es de hecho un cubrimiento, donde* Y_H *e* Y_K *son los cubrimientos que corresponden a* H *y a* K *resp. .*
4. *Si* Y *es un cubrimiento que corresponde al grupo* H*, entonces* $Aut(Y \to X) \cong N(H)/H$ *donde* $N(H)$ *es el subgrupo normalizador de* H *en* G*.*
5. *En particular si* H *es normal en* G*, e* Y *es el cubrimiento que le corresponde se tiene que* $Aut(Y \to X) \cong G/H$*.*
6. *Los cubrimientos cuyo subgrupo correspondiente es normal, se caracterizan por tener una acción transitiva de* $Aut(Y \to X)$ *en cualquier fibra sobre puntos* $x \in X$*. De esto, el grado de un cubrimiento Galois será la cardinalidad del grupo de automorfismos.*

Los cubrimientos que corresponden a subgrupos normales se llaman **Cubrimientos Regulares o Galois** en analogía con las extensiones Galois en de cuerpos. Son especiales en el sentido a que dominan a todos los cubrimientos de un espacio topológico. Para explicar de que forma los dominan, debemos definir primero.

DEFINICIÓN 58. *Sea* Y *un espacio topológico y* G *un grupo de homeomorfismos de* Y *que actúan sobre este espacio. Decimos que la acción es* ***Propiamente Discontinua*** *si para todo punto* x*, existe una vecindad abierta* U *tal que los abiertos* $gU = \{g \circ u : u \in U\}$ *son disjuntos para todo* $g \in G$*.*

OBSERVACIÓN 44. *El grupo de automorfismos de un cubrimiento Galois es un grupo que actúa de forma propiamente discontinua.*

PROPOSICIÓN 27. *Sea* Y *un espacio topológico arco-conexo y que posee cubrimiento universal, y* G *un grupo de homeomorfismos que actúa de forma propiamente discontinua sobre* Y*. Entonces, la proyección al cociente* $\pi : Y \to Y/G$ *es un cubrimiento topológico Galois y* $G = Aut(\pi : Y \to Y/G)$*.*

Con esto, tenemos:

TEOREMA 18. *Sea* X *un espacio topológico arco-conexo que posee un cubrimiento universal* $\widetilde{X}$*, entonces:*

- *Para todo cubrimiento $Y \to X$ existe un cubrimiento Galois $Z \to X$ con*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & Y \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd}$$

  Además, si H es el subgrupo que corresponde al cubrimiento $Y \to X$, el cubrimiento Galois $Z \to X$ corresponde al grupo $\bigcap_{g \in \pi_1(X)} gHg^{-1}$ y es el cubrimiento "más próximo" a Y en el sentido de que no hay cubrimientos Galois intermedios.
- *Si $Y \to X$ es un cubrimiento Galois, todo cubrimiento intermedio $Z \to X$ es de la forma $Y \to Y/H$ donde H es un subgrupo de $Aut(Y \to X)$, en particular todos los cubrimientos $Y \to Z$ son Galois y además $X \cong Y/Aut(Y \to X)$.*
- *Bajo las hipótesis de la parte anterior, si $H \subseteq K$ entonces se tiene un cubrimiento $Y/H \to Y/K$ y un morfismo de subcubrimientos $Z_1 \to Z_2$ corresponden a dos subgrupos de $Aut(Y \to X)$, H_1 y H_2 resp. con $H_1 \subseteq H_2$.*

El contenido de los dos teoremas que enunciamos antes se puede resumir en los siguientes diagramas: Primero para la correspondencia entre cubrimientos y subgrupos

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d] & \\ & \vdots \arrow[d] & \\ & Y \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Z_1 \arrow[r, "\cong"] & Z_2 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & Z_3 \cdots \\ & \vdots & \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{1\} \arrow[d] & \\ & \vdots \arrow[d] & \\ & H \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H_1 & H_2 = g_1 H_1 g_1^{-1} \arrow[d] & H_3 = g_2 H_1 g_2^{-1} \cdots \\ & \vdots & \\ & G = \pi_1(X, x_0) & \end{tikzcd}$$

Y para la correspondencia entre automorfismos cuando se tiene un cubrimiento Galois

$$
\begin{array}{ccc}
Y & & G = \mathrm{Aut}(Y \to X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_1 & & G/H \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_2 & & G/K\,(H \subset K) \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & & \{1\}
\end{array}
$$

Ahora que hemos expuesto al grupo fundamental desde el punto de vista de los automorfismos de un cubrimiento, adelantaremos que características son similares en el grupo fundamental étale. De partida, la definición de cubrimiento universal es imposible de trasladar a un contexto algebraico pues su definición esta puramente asociada a lazos, y además estaremos interesados sólo en cubrimientos finitos, es decir, cuyas fibras tengan finitos puntos.

Una objeción a lo anterior sería que aún es posible considerar un cubrimiento universal por la propiedad de que domina a cualquier cubrimiento, el problema con ello es que si quisiéramos que este cubrimiento universal coincida con los cubrimientos universales en el caso analítico, tendríamos que este cubrimiento no sería en general algebraico, como en el caso de superficies de Riemann de género mayor que 2, las cuales tienen al disco unitario como cubrimiento universal, el cual no es de tipo algebraico. Además, dicha propiedad haría que el cubrimiento universal no tuviera fibras finitas, lo cual se sale de los cubrimientos que vamos a considerar.

Para reparar la falta de cubrimiento universal, nuestro grupo fundamental étale estará armado a partir de los cubrimientos Galois finitos de un esquema, que dominarán a los cubrimientos de un esquema de una forma análoga al caso topológico. Nuestra definición de Galois será similar al caso topológico pues pediremos una acción transitiva al grupo de automorfismos del cubrimiento, sobre un tipo especial de fibra.

Como los cubrimientos Galois serán además finitos, los grupos de automorfismos serán todos finitos, y el grupo de automorfismos del cubrimiento universal será reemplazado por el límite inverso de los grupos de automorfismos de los cubrimientos Galois, por lo que el grupo fundamental étale será profinito.

2.2. Morfismos Étales

En el camino a definir el grupo fundamental étale debemos definir lo que entenderemos como cubrimientos para esquemas, este será el objetivo de esta sección.
El concepto de morfismo "étale" requiere dos ingredientes importantes, los morfismos planos y los no ramificados. Partiremos con el primero.

Definición 59. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, el cuál le da a B una estructura de A-módulo, diremos que f es* ***Plano*** *si el funtor $M \to M \otimes_A B$ es exacto, es decir, si*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

Es una sucesión exacta de A-módulos, entonces

$$0 \to M_1 \otimes_A B \to M_2 \otimes_A B \to M_3 \otimes_A B \to 0$$

es también exacta.

Observación 45.
- *El funtor de la definición anterior siempre es exacto por la derecha, o sea, en general el primer cero no aparece en la sucesión exacta al tomar productos tensoriales.*
- *Si $f : A \to B$ es plano, para todo ideal I de A se tiene que el morfismo $I \otimes_A B \to A \otimes_A B = B$ es inyectivo, la afirmación conversa también es cierta.*

Proposición 28. *Un morfismo de anillos $f : A \to B$ es plano si para todo ideal I de A, el morfismo $a \otimes b \mapsto f(a)b$ de $I \otimes_A B \to B$ es inyectivo.*

Demostración. Ver [**18**, Ch. I, Prop. 2.1]. □

Además del criterio anterior para probar que un morfismo es plano, los morfismos planos se comportan bien con las localizaciones.

Proposición 29. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Entonces:*

- *Para subconjuntos multiplicativos $S \subset A$ y $T \subset B$ tales que $f(S) \subseteq T$, si f es plano, entonces $f' : S^{-1}A \to T^{-1}B$ es también plano.*
- *Si para todo ideal maximal $n \subset B$, el morfismo entre localizaciones $f_n : A_{f^{-1}(n)} \to B_n$ es plano, entonces f es plano.*

Demostración. Ver [**18**, Ch. I, Prop. 2.2]. □

DEFINICIÓN 60. *Un morfismo de esquemas $f : Y \to X$ es* ***Plano*** *si para todo $y \in Y$, el morfismo inducido entre tallos $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ es plano.*
Equivalentemente, f es plano si para todo par de abiertos afines $U \subseteq Y$ y $V \subseteq X$ con $f(U) \subseteq V$, el morfismo inducido $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_Y(U)$ es plano.

Listaremos a continuación las propiedades básicas de los morfismos planos.

PROPOSICIÓN 30.
- a) *Las inmersiones abiertas son planas.*
- b) *La composición de morfismos planos es plana.*
- c) *El cambio de base de un morfismo plano es plano.*
- d) *Si $f : X \to Y$ es plano y localmente de tipo finito, entonces f es abierta (lleva abiertos en abiertos).*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**18**, Ch. I, Prop. 2.4] para las 3 primeras. La cuarta aparece en [**18**, Ch. I, Teo. 2.12]. □

EJEMPLO 10. *Sea A un anillo y consideremos*

$$\mathbb{A}^n_A = Spec\, A[x_1, x_2, \cdots, x_n].$$

Una ***Hipersuperficie*** *corresponde al esquema*

$$H = Spec\, A[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(P)$$

donde P es un polinomio no nulo. El morfismo natural $H \to Spec\, A$ que corresponde a incluir A en el cociente, es plano, si y sólo si para todo ideal maximal $m \subset A$, se tiene que

$$A[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(P) \otimes_A k(m) \neq \mathbb{A}^n_{k(m)},$$

si y sólo si el ideal de A generado por los coeficientes de P es todo A (en el caso de que $Spec\, A$ sea conexo).
Notar que el tensor anterior corresponde a una fibra sobre un punto cerrado de A, además es isomorfo a $Spec\, k(y)[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(\bar{P})]$ donde $\bar{P}$ es el polinomio P con los coeficientes proyectados al cuerpo residual, este anillo tiene dimensión $n-1$ a menos que todos los coeficientes de P hayan estado en el ideal m, en cuyo caso tendrá dimensión n y la fibra será isomorfa a $\mathbb{A}^n_{k(m)}$, por lo que si el morfismo es plano, todas las fibras sobre puntos cerrados tendrán la misma dimensión. Como ejemplos específicos, podemos notar que la proyección en la variable t de la curva $yt - 1 = 0$ en $\mathbb{A}^1_k$ es plana para cualquier cuerpo k, notar que el anillo $k[t, y]/(yt - 1)$ es la localización $k[t]_{(t)}$ la cual es plana sobre $k[t]$, ya que las localizaciones son planas.
Por otro lado, $k[t, y]/(ty - t)$ no es plano sobre $k[t]$ pues la fibra en 0 del morfismo inducido es isomorfa a $k[y]$, es decir a un $\mathbb{A}^1_k$.

En el caso de variedades suaves, la propiedad de que todas las fibras poseen la misma dimensión para morfismos planos se enuncia así:

PROPOSICIÓN 31. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo plano de esquemas de tipo finito sobre un cuerpo k con Y irreducible. Entonces, las siguientes son equivalentes:*

- *Cada componente irreducible de X tiene dimensión $n + \dim Y$ para cierto $n \geq 0$.*
- *Para todo punto $y \in Y$ cerrado o no, cada componente de la fibra X_y tiene dimensión n.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. III, Cor. 9.6]. □

Para finalizar con los morfismos planos, la siguiente proposición muestra el comportamiento de morfismos $f : Y \to X$ planos y finitos, en términos de $\mathcal{O}_X$ y $f_*\mathcal{O}_Y$.

DEFINICIÓN 61 (Def. 5.2.1 de [**30**]). *Un morfismo finito de esquemas $f : X \to Y$ es **Localmente Libre** si $f_*\mathcal{O}_X$ es un $\mathcal{O}_Y$-módulo libre. El **Rango** de f es el rango del haz $f_*\mathcal{O}_X$.*

EJEMPLO 11. *Sea $f : X \to \operatorname{Spec} k$ un morfismo finito de esquemas cualquiera. Entonces f es localmente libre pues por la definición de un morfismo finito, tenemos en primer lugar que X es afín, y corresponde al espectro de un k-módulo finitamente generado, es decir, X es el espectro de un espacio vectorial de dimensión finita, o sea, $X = \operatorname{Spec} k^n$ y de esto se tiene claramente que f es localmente libre.*

Por otro lado, si consideramos el morfismo de esquemas $\operatorname{Spec} k[x] \to \operatorname{Spec} k$, este no es localmente libre pues $k[x]$ no es un k-espacio vectorial de dimensión finita, más aún, este morfismo no es finito.

PROPOSICIÓN 32. *Sea M un A-módulo finitamente generado. Entonces son equivalentes:*

(a) *M es plano sobre A.*
(b) *La localización M_m es un A_m-módulo libre para todo ideal maximal m de A.*
(c) *$\widetilde{M}$ es un haz localmente libre sobre $\operatorname{Spec} A$.*
(d) *$\dim_{k(p)}(M \otimes_A k(p))$ es la misma para todos los ideales primos p de A.*

OBSERVACIÓN 46. *Sea $f : X \to Y$ finito. De acuerdo a la proposición anterior, un morfismo es plano si y sólo si es localmente libre. Luego, un morfismo localmente libre es plano y finito.*

Lo segundo que necesitamos para definir morfismos étales es el concepto de morfismo no ramificado.

Definición 62. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo localmente de tipo finito. Diremos que f es* ***No Ramificado*** *si para todo $y \in Y$ y $x = f(y)$, se tiene que $\mathcal{O}_{Y,y}/m_x\mathcal{O}_{Y,y}$ es una extensión de cuerpos finita y separable de $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_x\mathcal{O}_{X,x}$, notar que siempre se tiene un morfismo entre tallos $f^\# : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ el cual satisface $f^\#(m_x) \subset m_y$, por lo que podemos considerar el ideal generado por m_x en $\mathcal{O}_{Y,y}$, el cual es sencillamente $m_x\mathcal{O}_{Y,y}$, y pasando al cociente tenemos un morfismo $\mathcal{O}_{X,x}/m_x\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}/m_x\mathcal{O}_{Y,y}$.*

Observación 47.

- *En términos de anillos, un morfismo $f : A \to B$ es no ramificado si para todo ideal primo q de B, se tiene que $p = f^{-1}(q)$ genera el ideal maximal del anillo local B_q y $k(q) = B_q/qB_q$ es una extensión finita y separable de $k(p) = A_p/pA_p$. Claramente dicha definición es equivalente a que el morfismo inducido para esquemas $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ sea no ramificado.*
- *Para curvas y puntos cerrados, la definición de no ramificado, significa que el generador t_p del ideal maximal de un punto p genera al ideal maximal de $q \in f^{-1}(p)$, por lo que tendrá valuación discreta igual a 1, luego la definición de no ramificado coincide con la de Superficies de Riemann: El pullback de cualquier punto (como divisor) sólo tiene coeficientes 1, luego no hay ramificación.*

Vamos ahora a enunciar equivalencias para morfismos no ramificados, para ello necesitaremos dos conceptos, el segundo será usado bastante cuando hablemos de grupo fundamental y morfismos étales:

Definición 63. *Sea k un cuerpo y K su clausura algebraica. Una k-álgebra A es* ***Separable o Étale sobre*** *k si la K-álgebra $\bar{A} = A \otimes_k K$ tiene ideal de Jacobson 0. El ideal de Jacobson de un anillo es la intersección de todos sus ideales maximales.*

Proposición 33. *Sea A una k-álgebra finitamente generada como k-módulo y $K = \bar{k}$. Son equivalentes:*

(a) *A es una k-álgebra separable.*
(b) *$\bar{A}$ es isomorfo a un producto finito de copias de K.*
(c) *A es isomorfa a un producto finito de extensiones separables y finitas de k.*
(d) *Independiente de la base escogida para A, el discriminante es no nulo. El discriminante de la función lineal $A^n \to A^n$ que resulta*

de tomar para $n = \dim_k A$ elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, la matriz $(a_{i,j})$ cuyas entradas son las trazas $T(x_i, x_j)$, donde, para $x \in A$ fijo, la traza $T(x, \cdot)$ corresponde a la traza de la función k-lineal $A \to A$ dada por $y \to xy$.

PROPOSICIÓN 34. *Ver* [**18**, Ch. I, Prop. 3.1].

DEFINICIÓN 64. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo de esquemas. Dado $x \in X$, definimos la **Fibra Geométrica** sobre x como el producto fibrado $Y \times_X \mathit{Spec}\,\Omega$ donde Ω es una extensión algebraicamente cerrada de $k(x)$, y el morfismo a la segunda coordenada corresponde al morfismo $\mathit{Spec}\,\Omega \to X$ que tiene como imagen a x. (Notar que esto es equivalente a que Ω es una extensión de $k(x)$).*

PROPOSICIÓN 35. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo localmente de tipo finito. Entonces son equivalentes:*

(a) *f no es ramificado.*
(b) *Para todo $x \in X$, la proyección de la fibra $Y_x \to k(x)$ es no ramificada.*
(c) *Todas las fibras geométricas son no ramificadas. En el sentido de la equivalencia de arriba.*
(d) *Para todo $x \in X$, la fibra Y_x tiene un cubrimiento abierto por espectros de $k(x)$-álgebras separables.*
(e) *Para todo $x \in X$, la fibra Y_x es una unión disjunta $\coprod \mathit{Spec}\, k_i$, donde cada k_i es una extensión finita y separable de $k(x)$.*
(f) *f es no ramificado.*
(g) *El haz $\Omega_{Y/X}$ es 0.*
(h) *El morfismo diagonal $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ es una inmersión abierta.*

Si f es de tipo finito, podemos agregar en (d) que Y_x es de hecho el espectro de una $k(x)$-álgebra separable y finitamente generada. En (e) podemos agregar además que la unión disjunta es finita.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**18**, Ch. I, Prop. 3.2] para las 5 primeras y [**18**, Ch. I, Prop. 3.5] para las tres últimas. □

EJEMPLO 12. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica positiva p. Consideremos en $\mathbb{A}^2_k$ la curva*

$$C = \{y^p - y + f(x) = 0\}$$

donde $f \in k[x]$.

Entonces, la proyección a la variable x, $C \to \mathbb{A}^1_k$ es un morfismo no ramificado. En efecto, este morfismo corresponde al morfismo de anillos $k[x] \to A = k[x,y]/(y^p - y + f(x))$, luego el módulo

$\Omega_{A/k[x]}$ *esta generado por* dx *y* dy, *pero* $dx = 0$ *y* $d(y^p - y + f(x)) = py^{p-1}dy - dy + f'(x)dx = -dy$, *y como este diferencial es 0, tenemos que* $dy = 0$, *luego,* $\Omega_{A/k[x]} = 0$ *y entonces el morfismo es no ramificado.*

Por otro lado, si k *es cualquier cuerpo y consideramos* $k[s] \to k[t]$ *el morfismo que envía* s *en* t^2, *entonces este morfismo si es ramificado ya que* $\Omega_{k[t]/k[s]}$ *no es 0 ya que se tiene* $ds \neq 0$. *Sin embargo este diferencial satisface* $2sds = 0$ *pues* $d(s^2) = 0$. *La ramificación claramente está en 0, debido a que el morfismo de anillos corresponde a elevar al cuadrado en* $\mathbb{A}^1_k$.

Con esto tenemos suficiente para definir morfismos étales.

Definición 65. *Un morfismo localmente de tipo finito* $f : X \to Y$ *es* ***Étale*** *si es plano y no ramificado. Si además es finito es* ***Étale Finito****, y si es étale finito y sobre es un* ***Cubrimiento Étale****.*

Antes de dar ejemplos de morfismos étales, vamos a enunciar propiedades básicas de estos.

Proposición 36. (a) *Las inmersiones abiertas son étales.*
(b) *La composición de morfismos étales es también étale.*
(c) *El cambio de base de un morfismo étale es étale.*
Además, en el caso de tener morfismos étales finitos o cubrimientos étales, dichas proposiciones se mantienen válidas.

Demostración. Ver [**18**, Ch. I, Prop. 3.3]. ☐

Ejemplo 13.
- *Si* X *es cualquier esquema, este siempre posee cubrimientos étales. Basta tomar la unión disjunta* $Y = \coprod X$ *de finitas copias de* X *y considerar el morfismo* $Y \to X$ *que es la identidad en cada copia de* X. *Dichos cubrimientos se llaman* ***Cubrimientos Triviales****.*
- *Si* k *es un cuerpo y* $P \in k[x]$ *es un polinomio irreducible mónico, entonces* $k[x]/(P)$ *es un cuerpo y es una extensión de* k. *Si* P *es separable, o sea, no posee raíces múltiples en alguna clausura algebraica de* k, *entonces la extensión es separable. Esto nos dice que el morfismo* $\operatorname{Spec} k[x]/(P) \to \operatorname{Spec} k$ *es étale.*
- *Si* A *es un anillo, decimos que un polinomio mónico* $P \in A[x]$ *es* ***Separable*** *si* $(P, P') = k[x]$, *lo cual es equivalente a que* P' *es una unidad en* $k[x]/(P)$, *además se puede probar que* P *es separable si y sólo si su imagen en* $k(p)[x]$ *es separable para todo ideal primo* p *de* A.
  De esto, si $B = A[x]/(P)$ *y consideramos el morfismo* $A \to B$, *como* B *es un* A*-módulo libre de rango igual al grado de* P,

tenemos que es plano sobre A y será no ramificado si y sólo si $B \otimes_A k(p) = k(p)[x]/(\bar{P})$ es no ramificado para todo ideal primo p de A, donde $\bar{P}$ es la imagen de P en $k(p)[x]$. Esto nos dice que B será étale sobre A si y sólo si P' es una unidad en B, si y sólo si su imagen en cada $k(p)[x]/(\bar{P})$ es una unidad en cada anillo correspondiente.

- *Generalizando lo anterior, si $B = A[x_1, \cdots, x_n]/(P_1, \cdots, P_n)$, donde cada polinomio P_i es mónico, B será étale sobre A si y sólo si el determinante de la matriz con entradas $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}$ es una unidad en B.*

PROPOSICIÓN 37. *Consideremos los morfismos $f : X \to S$, $g : Y \to X$. Si $f \circ g$ es étale y f es no ramificado, entonces g es étale.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**18**, Ch. I, Cor. 3.6]. □

De aquí en adelante, nos preocuparemos sólo de los morfismos étales finitos, partiremos con equivalencias de dicho concepto.

PROPOSICIÓN 38. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo finito. Son equivalentes:*

1. *f es étale finito.*
2. *f es no ramificado y localmente libre.*
3. *f es plano y el morfismo diagonal $Y \to Y \times_X Y$ es una inmersión abierta y cerrada.*
4. *f es plano (o localmente libre) y el haz de diferenciales relativos $\Omega_{Y/X}$ es 0.*
5. *f es plano (o localmente libre) y para todo x en la imagen de f, se tiene que la fibra Y_x es el espectro de una $k(x)$-álgebra étale.*
6. *f es plano (o localmente libre) y para todo x en la imagen de f, se tiene que la fibra Y_x es una unión disjunta de espectros de extensiones finitas y separables de $k(x)$.*
7. *f es plano (o localmente libre) y para todo x en la imagen de f, se tiene que la fibra geométrica $Y \times_X \overline{k(x)}$ es isomorfa Spec $\overline{k(x)}^n$.*
8. *f es plano (o localmente libre) y para todo x en la imagen de f, se tiene que la fibra geométrica $Y \times_X \overline{k(x)}$ es isomorfa a una unión disjunta finita de esquemas afines Spec $\overline{k(x)}$.*

DEMOSTRACIÓN. De la parte (c) de la Proposición 32, se deduce que plano es equivalente a localmente libre para morfismos finitos, luego 1 $\Leftrightarrow$ 2. De esto también, tenemos que las proposiciones de la 4 a la 8 son equivalentes entre sí y a la proposición 1 pues no son más que morfismos planos más alguna equivalencia la Proposición 35.

Por último, todo morfismo finito es propio (parte (g) de la Proposición 9), en particular es separado y entonces el morfismo diagonal es inmersión cerrada, además es inmersión abierta porque f es no ramificado, y como la última afirmación es reversible por la Proposición 35, tenemos que 1 es equivalente a 3. □

2.2.1. Cubrimientos Étales. El propósito de esta sección es exponer las propiedades más importantes de los cubrimientos étales. Notar que según la parte 8 de la última proposición, la fibra geométrica de un morfismo étale es una unión disjunta de finitos puntos, y cada punto posee el mismo cuerpo residual, esto motiva la siguiente definición.

Definición 66. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo de esquemas. Un* ***Punto Geométrico*** *es un morfismo $\overline{x} : Spec\,\Omega \to X$ donde Ω es una extensión algebraicamente cerrada de $k(x)$ para un punto cualquiera $x \in X$. Para un punto geométrico $\overline{x}$, denotaremos a la fibra geométrica asociada como $Y_{\overline{x}} = Y \times_X Spec\,\Omega$.*

Observación 48. *Notar que cada punto geométrico está marcado sobre un punto de X, ya que $Spec\,\Omega$ posee un solo punto, por lo que en el futuro si x es algún punto del esquema X, denotaremos por $\overline{x}$ al punto geométrico que tiene por imagen a x.*

Los morfismos étales son bastante restrictivos, no cualquier esquema Y podría ser un cubrimiento étale de X cuando este esquema es normal o regular, por ejemplo. Esto es porque si X posee ciertas propiedades, entonces Y "heredará" dichas propiedades.

Proposición 39. *Sea $f : Y \to X$ un cubrimiento étale. Entonces,*

- *Si X es normal, entonces también Y.*
- *Si X es regular, entonces también Y.*
- *Si X es normal y localmente Noetheriano, también lo será Y.*
- *Para todo $y \in Y$, se tiene que $\dim \mathcal{O}_{Y,y} = \dim \mathcal{O}_{X,f(y)}$.*
- *Si X es reducido, entonces también Y*

Demostración. Las tres primeras proposiciones se prueban en [**30**, Ch. 5, Prop. 5.2.12], la penúltima en [**18**, Ch. I, Prop. 3.17 (a)] y la última en [**30**, Ch. 5, Prop. 5.2.12]. □

Sigamos con más propiedades:

Proposición 40. *Sea $f : Y \to X$ un cubrimiento étale, y sea $s : X \to Y$ una* ***Sección****, esto es, un morfismo tal que $f \circ s = id_X$.*

Entonces, s induce un isomorfismo de X con un subconjunto abierto y cerrado de Y. En particular, si X es conexo, entonces s es un isomorfismo entre X y una componente conexa de Y.

Demostración. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.3.1]. □

Esta proposición permite probar una propiedad para cubrimientos étales que es análoga a una de cubrimientos topológicos: Sea $p : Y \to X$ $q : Z \to X$ dos cubrimientos topológicos y $\phi_i : Y \to Z$ $(i = 1, 2)$ son dos morfismos de cubrimiento tales que existe $y \in Y$ con $p(\phi_1(y)) = p(\phi_2(y))$, entonces $\phi_1 = \phi_2$.

Primero definamos morfismos de cubrimientos étales.

Definición 67. *Sean $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ dos cubrimientos étales de X. Un **Morfismo de Cubrimientos** es un morfismo de esquemas $h : Y \to Z$ tal que $f = g \circ h$, un morfismo es **Isomorfismo de Cubrimientos** si posee una inversa. Un **Automorfismo de Cubrimiento** es un isomorfismo $\phi : Y \to Y$ tal que $f = f \circ \phi$.*

Observación 49. *Si $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ son dos cubrimientos étales de X, y existe un morfismo de cubrimientos $h : Z \to Y$, siempre se tiene que Z es cubrimiento étale de Y por* [**30**, Ch. 5, Lemma 5.3.2].

Proposición 41. *Sea $Y \to X$ un cubrimiento étale con Y conexo, y sean $\phi_1, \phi_2 : Y \to Z$ dos morfismos de cubrimiento. Si existe un punto geométrico $\overline{y}$ para algún $y \in Y$ tal que $\phi_1 \circ \overline{y} = \phi_2 \circ \overline{y}$, entonces $\phi_1 = \phi_2$.*

Demostración. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.3.3]. □

Definición 68. *Sea $f : Y \to X$ un cubrimiento étale, el **Grupo de Automorfismos del Cubrimiento** será el grupo $Aut(Y|X) = \{\phi : Y \to Y : \phi$ es Automorfismo de Cubrimiento$\}$.*

Observación 50. *Si $\phi : Y \to Y$ es un automorfismo de cubrimiento, entonces para cualquier punto geométrico $\overline{x} : Spec\,\Omega \to X$, el cambio de base de ϕ, $\phi' : Y \times_X Spec\,\Omega \to Y$ induce un isomorfismo entre las fibras geométricas $Y \times_X Spec\,\Omega \to Y \times_X Spec\,\Omega$ (tomando el morfismo $\phi' \times p_2$ donde p_2 es la segunda proyección del producto), por lo que $Aut(Y|X)$ actúa sobre la fibra geométrica $Y \times_X Spec\,\Omega$ a través de dichos morfismos.*

Por convención, la acción de $Aut(Y|X)$ será siempre por la izquierda.

La siguiente proposición nos dice que la acción del grupo de automorfismos sobre una fibra geométrica actúa del mismo modo que en el caso topológico.

Proposición 42. *Si $f : Y \to X$ es un cubrimiento étale con X conexo, entonces los elementos no triviales de $Aut(Y|X)$ actúan sin puntos fijos sobre las fibras geométricas. Luego, el grupo $Aut(Y|X)$ es finito.*

Demostración. Ver [**30**, Ch. 5, Cor. 5.3.4]. □

En el caso topológico, los cubrimientos con acción transitiva sobre las fibras los llamamos Galois, ahora podemos definir el mismo concepto para cubrimientos étales.

Definición 69. *Un cubrimiento étale conexo $f : Y \to X$ es* ***Galois*** *si la acción $Aut(Y|X)$ sobre las fibras geométricas es transitiva.*

Los cubrimientos topológicos Galois se caracterizan por dominar a los demás cubrimientos y regularizar a sus cubrimientos subordinados, en el sentido que todos ellos son cocientes por subgrupos de su grupo de automorfismos. Lo mismo sucede para cubrimientos étales, pero necesitamos primero definir una noción de esquema "Cociente".

Definición 70. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Diremos que f es* ***Afín*** *si para todo abierto afín $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es también afín.*

Sea $\phi : Y \to X$ un morfismo afín y sobreyectivo de esquemas, podemos definir un grupo de automorfismos $Aut(Y|X)$ de la misma forma en que lo definimos antes para cubrimientos étales. Dado $G \subset Aut(Y|X)$, definiremos el ***Cociente de*** *Y* ***por*** *G como el espacio anillado $G\backslash Y$ junto a una proyección $\pi : Y \to G\backslash Y$ como sigue:*

El espacio topológico de $G\backslash Y$ será el cociente Y/G y la función π la proyección natural. El haz estructural será el subhaz de $\pi_*\mathcal{O}_X$, denotado por $(\pi_*\mathcal{O}_X)^G$ de elementos G-invariantes, es decir, cada $g \in G$ induce un automorfismos del haz estructural $\sigma_g : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ el cuál induce a su vez un automorfismo σ'_g de $\pi_*\mathcal{O}_X$, en cada abierto $V \subset G\backslash Y$ los elementos G-invariantes, son los elementos de $a \in \pi_*\mathcal{O}_X(V)$ tales que $\sigma'_g(a) = a$ para todo $g \in G$.

La definición anterior da un espacio anillado, pero no un esquema a priori. Sin embargo, PROPOSICIÓN 43. *El espacio anillado* $G\backslash Y$ *es un esquema, el morfismo* π *es afín y sobre, y el morfismo* $f : Y \to X$ *factoriza como* $f = \phi \circ \pi$ *para cierto morfismo afín* $\phi : G\backslash Y \to X$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.3.6]. □

De forma análoga al caso topológico, los cocientes son cubrimientos étales.

PROPOSICIÓN 44. *Sea* $f : Y \to X$ *un cubrimiento étale conexo y* $G \subset Aut(Y|X)$. *Entonces* $\pi : Y \to G\backslash Y$ *y* $\phi : G\backslash Y \to X$ *son ambos cubrimientos étales.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.3.7]. □

Las siguientes dos proposiciones son análogas al caso topológicos, en lo que respecta al comportamiento de los cubrimientos Galois.

PROPOSICIÓN 45. *Sea* $f : Y \to X$ *un cubrimiento étale Galois. Si* $\phi : Z \to X$ *es un cubrimiento intermedio, entonces* Y *es un cubrimiento étale Galois de* Z *y además* Z *es isomorfo a* $G\backslash Y$ *para cierto* $G \subset Aut(Y|X)$.

Luego, existe una correspondencia entre subgrupos de $Aut(Y|X)$ *y cubrimientos intermedios de* $f : Y \to X$.

Además, el cubrimiento ϕ *es Galois si y sólo el subgrupo* G *que le corresponde es normal y en tal caso el grupo de automorfismos es el cociente* $Aut(Y|X)/G$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.3.8]. □

PROPOSICIÓN 46. *Sea* $\phi : Z \to X$ *un cubrimiento étale conexo. Entonces existe* Y *y un morfismo* $\pi : Y \to Z$ *tal que* $\phi \circ \pi$ *es un cubrimiento étale Galois, además, todo cubrimiento étale Galois que domine a* Z *dominará a* Y, *luego* Y *es una suerte de cubrimiento Galois "minimal".*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.3.9]. □

Expuestas ya las propiedades de los cubrimientos Galois, procederemos a definir el grupo fundamental étale de un esquema.

2.3. Grupo Fundamental Étale

Ahora podemos definir el grupo fundamental étale. Nos basaremos para esta sección en [**30**, Ch. 5, Sec. 5.4] como referencia para el lector, también este puede consultar [**17**]. Esta sección además, utiliza conceptos básicos de categorías, expuestos en [**30**, Secc. 1.4].

La primera definición que daremos no está directamente relacionada con los cubrimientos Galois, por lo que necesitaremos un par de teoremas primero para definirlo usando dichos cubrimientos.

Definición 71. *Sea X un esquema, definimos la categoría Fet_X como la categoría de los cubrimientos étales con los morfismos de cubrimiento.*
Sea $\overline{x} : Spec\,\Omega \to X$ (con $\Omega = \overline{\Omega}$ un punto geométrico fijo de X, a cada cubrimiento Y de X podemos asignarle su fibra geométrica respectiva $Y_{\overline{x}}$, pero más aún, si $g : Y \to Z$ es un morfismo de cubrimientos, la composición $g \circ p_1$ más la proyección a la segunda coordenada p_2 da un morfismo $g' : Y \times_X Spec\,\Omega \to Z \times_X Spec\,\Omega$. Esto se puede apreciar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& Y \times_X Spec\,\Omega \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dd, "g'"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
Y \arrow[dd, "g"'] & & Spec\,\Omega \arrow[dd, "id"] \\
& Z \times_X Spec\,\Omega \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[dr] & & Spec\,\Omega \arrow[dl, "\overline{x}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Luego, si a cada cubrimiento Y le asignamos el conjunto subyacente de su fibra geométrica sobre $\overline{x}$, y denotamos a este conjunto como $Fib_{\overline{x}}(Y)$, la asignación $Y \mapsto Fib_{\overline{x}}(Y)$ por lo discutido antes será un funtor

$$Fib_{\overline{x}} : Fet_X \to Conjuntos$$

*dicho funtor se llama **Funtor de Fibra en el Punto Geométrico** $\overline{x}$.*

Con el funtor de fibra definido, definiremos el grupo fundamental en términos de "automorfismos de funtor" el cual definiremos a continuación. La gracia de dichos automorfismos es que codifican globalmente los automorfismos de todos los cubrimientos de un esquema X, cosa que harían los automorfismos del cubrimiento universal en el caso topológico.

DEFINICIÓN 72. *Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores, y asumamos por el momento que son covariantes. Una **Transformación Natural** η es una asignación $X \mapsto \eta_X$ donde $\eta_X : F(X) \to G(X)$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{D}$, tal que si $X \to Y$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(Y) \\ {\scriptstyle \eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ G(X) & \longrightarrow & G(Y) \end{array}$$

Si los funtores son ambos contravariantes, las flechas horizontales deben cambiarse de sentido en el diagrama anterior. Las transformaciones naturales se denotan por $\eta : F \Rightarrow G$. Las transformaciones naturales se pueden componer en el sentido de que la composición $\theta \circ \eta$ de $\eta : F \Rightarrow G$ y $\theta : G \Rightarrow H$ asigna a cada X el morfismo $\theta_X \circ \eta_X : F(X) \to H(X)$. (o al revés en el caso de funtores contravariantes).

*Si η es una transformación natural que posee inversa, diremos que es un **Isomorfismo Funtorial**.*

*Si F es un funtor, un **Automorfismo de** F es una transformación natural $\phi : F \Rightarrow F$ que posee inversa.*

La composición de automorfismos le da estructura de grupo al conjunto $Aut(F)$ de todos los automorfismos de F.

OBSERVACIÓN 51. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor, todo automorfismo de F, ϕ, induce por definición un automorfismo $F(X) \to F(X)$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Si la categoría $\mathcal{D}$ es de conjuntos, dichos automorfismos inducen una acción (izquierda) de $Aut(F)$ en cada $F(X)$.*

*De esto, como cada elemento de la imagen del funtor posee una acción, la imagen ya no serán conjuntos sino que conjuntos con acción de un grupo por la izquierda, los cuales se llaman **G-Conjuntos Izquierdos**, dichos conjuntos conforman una categoría con los **G-Morfismos**, un G-morfismo $f : X \to Y$ entre G-conjuntos izquierdos es una función entre conjuntos tal que $g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$, es decir, es una función que preserva la acción.*

Como los automorfismos que actúan sobre la imagen del funtor F vienen de transformaciones naturales, se tiene que el funtor F es un funtor de la categoría $\mathcal{C}$ a una categoría de $Aut(F)$-conjuntos izquierdos, *el diagrama conmutativo de la definición anterior prueba que morfismos $X \to Y$ en $\mathcal{C}$ inducen G-morfismos $F(X) \to F(Y)$.*

Ahora podemos definir el grupo fundamental étale.

DEFINICIÓN 73. *Sea X un esquema y $\overline{x} : Spec\,\Omega \to X$ un punto geométrico. Definimos el* ***Grupo Fundamental Étale de X en el Punto*** *$\overline{x}$ como el grupo $\pi_1(X, \overline{x})^{ét}$ de automorfismos del funtor de fibra $Fib_{\overline{x}}$.*

OBSERVACIÓN 52. *Por lo discutido en la observación anterior, el funtor de fibra tiene sus imágenes en los $\pi_1(X, \overline{x})^{ét}$-conjuntos izquierdos.*

EJEMPLO 14. *Si $X = Spec\,k$ donde k es un cuerpo, un cubrimiento étale corresponde a un morfismo $Y = SpecL \to Spec\,k$ donde L es una k-álgebra separable. Si escogemos un punto geométrico $\overline{x}$, entonces el funtor de fibra para un cubrimiento conexo entregará el conjunto subyacente de $SpecL \otimes \Omega$, el cual corresponde a los homomorfismos de k-álgebras de L en Ω.*

Notar además, que como L es una extensión separable, tenemos que las imágenes de cada inclusión están dentro de la clausura separable de k, k_s, y el homomorfismo definido por $\overline{x}$ corresponde a escoger una inclusión de k en k_s, luego los elementos de la fibra son homomorfismos de k-álgebras a k_s. Por lo tanto $Fib_{\overline{x}}(L) = Hom_k(L, k_s)$ para el caso de cubrimientos conexos, esto nos dice por [**30**, Ch. 1, Teo. 1.5.2] *que los automorfismos del funtor de fibra, corresponden a los elementos del grupo de Galois de k_s/k, luego en este caso, el grupo fundamental étale será $\pi_1(X, \overline{x})^{ét} \cong Gal(k_s|k)$.*
Notar que el grupo de la derecha es profinito, pues corresponde al límite inverso de los grupos de Galois de las subextensiones Galois $k \hookrightarrow K \hookrightarrow k_s$, los cuales son finitos.

Además, notar que el funtor se identifica con el funtor

$$X \mapsto Hom(Spec\,k_s, X)$$

el cual es ***Representable*** *en la categoría de los esquemas X con un morfismo a $Spec\,k$, un funtor F sobre una categoría $\mathcal{C}$, cuyas imágenes son conjuntos es representable si existe un elemento $C \in \mathcal{C}$ tal que para todo X se tiene $F(X) = Hom(C, X) = \{f : C \to X : f \text{ es morfismo}\}$. Sin embargo, esto no quiere decir que el funtor de fibra sea representable, pues $Spec\,k_s$ NO ES un cubrimiento étale de $Spec\,k$ y entonces no es posible considerarlo pues se sale de la categoría de los cubrimientos* *étales.*

Esto es un ejemplo de lo que decíamos antes, k_s es una suerte de cubrimiento universal, el cual no es cubrimiento étale. Sin embargo, es la unión de sus subextensiones Galois finitas, lo cuál es análogo al hecho de que en cubrimientos topológicos, los cubrimientos Galois nos sirven para recuperar toda la información acerca de los cubrimientos de un espacio topológico. En el caso del grupo fundamental, aunque el funtor no sea representable en general, lo será tomando límites inversos, construidos a partir de los cubrimientos Galois.

Definición 74. *Sea $F : \mathcal{C} \to Conj.$ un funtor con imágenes en la categoría de los conjuntos. Diremos que F es* ***Pro-Representable*** *si existe un sistema inverso $\{P_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ en el mismo sentido de la Definición 4 para el caso de grupos (cambiar homomorfismos de grupos por morfismos en la categoría $\mathcal{C}$) tal que para todo X se tenga que un isomorfismo funtorial*

$$F(X) \cong \lim_{\to} Hom(P_\alpha, X)$$

El límite directo de un sistema dirigido (como en la Definición 3) de conjuntos, $\{S_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$, se define como el cociente de la unión disjunta de los conjuntos S_α por la relación de equivalencia s_α s_β ($s_\alpha \in S_\alpha$, $s_\beta \in S_\beta$) si y sólo si existe $\gamma \geq \alpha, \beta$ tal que $s_{\alpha\gamma}(s_\alpha) = s_{\beta\gamma}(s_\beta)$.

Observación 53. *Si F es un funtor pro-representable sobre una categoría $\mathcal{C}$ mediante un sistema inverso $\{P_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$, para todo α, la identidad de P_α corresponde a un morfismo de $Hom(P_\alpha, P_\alpha)$, y a su vez corresponde a una clase en el límite $\lim_{\to} Hom(P_\alpha, P_\alpha)$. Como el límite es $F(P_\alpha)$, dicha clase corresponde a un elemento $p_\alpha \in F(P_\alpha)$.*
Además, $\phi_{\alpha\beta}$ lleva p_β en p_α mediante $F(\phi_{\alpha\beta})$, pues si denotamos para $X \in \mathcal{C}$

$$S_\alpha^X = Hom(P_\alpha, X)$$

entonces las funciones del sistema dirigido son

$$s_{\alpha\beta}^X(\psi) = \psi \circ \phi_{\alpha\beta}, \psi \in Hom(P_\alpha, X)$$

y si tenemos un morfismo $f : X \to Y$, entonces el morfismo inducido $F(f)$ que llevará $\lim_{\to} Hom(P_\alpha, X)$ en $\lim_{\to} Hom(P_\alpha, Y)$ esta dado por $F(f)([\psi]) = [f \circ \psi]$ donde los corchetes denotan clases en los límites respectivos, y $\psi \in Hom(P_\alpha, X)$.
Luego,

$$F(\phi_{\alpha\beta})(p_\beta) = [\phi_{\alpha\beta} \circ id_{P_\beta}] = [\phi_{\alpha\beta}]$$

Pero esta última clase es igual a $[id_{P_\alpha}]$ *pues* $s^{P_\alpha}_{\alpha\beta}(id_{P_\alpha}) = s^{P_\alpha}_{\beta\beta}(\phi_{\alpha\beta})$.
Por ende, si consideramos el límite inverso (definido igual que en la definición 4) $\lim\limits_{\leftarrow} F(P_\alpha)$, *entonces la tupla* (p_α) *define un elemento en dicho límite por lo visto anteriormente, esta tupla permite dar con el isomorfismo* $F(X) \cong \lim\limits_{\rightarrow} Hom(P_\alpha, X)$ *ya que cada homomorfismo* $\psi : P_\alpha \to X$ *cuando es mapeado a* $F(\psi)(p_\alpha)$ *da el isomorfismo deseado.*

PROPOSICIÓN 47. *Sea* X *un esquema conexo y* $\overline{x}$ *un punto geométrico. Entonces, el funtor de fibra es pro-representable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Λ el conjunto de índices, consistente en todos los cubrimientos étale Galois $P_\alpha \to X$ de X, diremos que $P_\alpha \leq P_\beta$ si existe un morfismo de cubrimientos $P_\beta \to P_\alpha$.
Para definir el sistema inverso que necesitamos, vamos a tomar los mismos cubrimientos Galois P_α y necesitamos definir morfismos $\phi_{\alpha\beta} : P_\beta \to P_\alpha$. A priori, no hay una forma canónica y única de elegir morfismos cuando $P_\alpha \leq P_\beta$, por lo que consideraremos la siguiente elección: Sea p_α un elemento arbitrario de la fibra $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}(P_\alpha$. Si $P_\beta \geq P_\alpha$, como la acción de $\mathrm{Aut}(P_\beta|X)$ es transitiva y tenemos un morfismo $\phi : P_\beta \to P_\alpha$, entonces existe un único automorfismo λ tal que $\phi \circ \lambda(p_\beta) = p_\alpha$, luego podemos definir $\phi_{\alpha\beta} = \phi \circ \lambda$.
Bajo dicha elección, tenemos que $\{P_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ es un sistema inverso, con la propiedad adicional de tener una tupla $(p_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}(\phi_{\alpha\beta})(p_\beta) = p_\alpha$ cuando $\alpha \leq \beta$. Con este sistema inverso, dado Y un cubrimiento de X, tenemos para cada cubrimiento Galois P_α una función $\mathrm{Hom}(P_\alpha, Y) \to \mathrm{Fib}_{\overline{x}}(Y)$ en el caso que este conjunto no sea vacío, definida por

$$\psi : P_\alpha \to Y \mapsto \mathrm{Fib}_{\overline{x}}(\psi)(p_\alpha)$$

Notar que si no existen morfismos de $P_\alpha \to Y$, $\mathrm{Hom}(P_\alpha, Y) = \emptyset$ y este conjunto no aporta nada al límite directo.
Si $\beta \geq \alpha$, tenemos que $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}(\psi \circ \phi_{\alpha\beta})(p_\beta) = \mathrm{Fib}_{\overline{x}}(\psi)(p_\alpha)$, y por ende podemos inducir una función bien definida $\lim\limits_{\rightarrow} \mathrm{Hom}(P_\alpha, Y) \to \mathrm{Fib}_{\overline{x}}(Y)$, la cual además es una transformación natural.
Sólo resta entonces definir una inversa para dicha transformación, sea Y un cubrimiento conexo (si no lo es analizar cada componente por separado y tomar uniones disjuntas donde sea necesario), y sea $\pi : P \to Y$ el cubrimiento Galois de Y que se obtiene de la Proposición 46. Claramente P es uno de los P_α, y como este cubrimiento es Galois, para cada $\overline{y} \in \mathrm{Fib}_{\overline{x}}(Y)$ existe un único automorfismo λ de P sobre X, tal que $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}(\pi \circ \lambda)$ lleva p_α en $\overline{y}$. Luego, la asignación $\overline{y} \mapsto [\pi \circ \lambda]$ es la inversa que buscamos. $\square$

OBSERVACIÓN 54. *Notar que los morfismos $\phi_{\alpha\beta}$ del sistema inverso anterior, dependen de las elecciones de los p_α, sin embargo, fijada una tupla (p_α), el sistema inverso correspondiente es único.*

COROLARIO 4. *Cada automorfismo del funtor de fibra proviene de un automorfismo del sistema inverso $\{P_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ de la proposición anterior.*

Un automorfismo de $\{P_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ es una colección de automorfismos $\lambda_\alpha \in \mathrm{Aut}(P_\alpha|X)$ los cuales satisfacen $\phi_{\alpha\beta} \circ \lambda_\beta = \lambda_\alpha \circ \phi_{\alpha\beta}$.

DEMOSTRACIÓN. Un automorfismo de $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}$ lleva la tupla (p_α) en otra tupla del mismo tipo (p'_α). Como cada P_α es Galois, existe un automorfismo λ_α de P_α que lleva p_α en p'_α, como los (p_α) son compatibles con los morfismos $\phi_{\alpha\beta}$ tomando funtor de fibra, entonces los automorfismos λ_α son compatibles entre sí y entonces el automorfismo del funtor esta determinado por los λ_α, terminando la demostración. □

DEFINICIÓN 75. *Sea G un grupo, definimos el* ***Grupo Opuesto*** *G^{op} como el mismo grupo G con la multiplicación $(x, y) \mapsto yx$.*

COROLARIO 5. *Los grupos $Aut(P_\alpha|X)^{op}$ forman un sistema inverso, cuyo límite inverso es isomorfo a $\pi_1(X, \overline{x})^{ét}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto de índices de la Proposición 47. Notar que si $\alpha \leq \beta$, tenemos un morfismo $\mathrm{Aut}(P_\beta|X) \to \mathrm{Aut}(P_\alpha|X)$, el cual es sobreyectivo pues el segundo grupo de automorfismos es un cociente del primero por la Proposición 45.
Los elementos del límite inverso $\varprojlim \mathrm{Aut}(P_\alpha|X)$ corresponden a automorfismos del sistema inverso $\{P_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ y por el corolario anterior, corresponden biyectivamente a automorfismos del funtor de fibra.
Que el isomorfismo sea con el grupo opuesto viene del hecho de que λ_α induce un automorfismo de $\mathrm{Hom}(P_\alpha, Y)$ mediante $\psi \mapsto \psi \circ \lambda_\alpha$, luego, el morfismo que corresponde a $\lambda_\alpha \circ \lambda'_\alpha$ es $\psi \mapsto \psi \circ \lambda'_\alpha \circ \lambda_\alpha$, por lo que necesitamos invertir la composición en el grupo de automorfismos para obtener un homomorfismo de grupos. □

Este corolario nos muestra que el grupo fundamental étale es profinito y corresponde al límite inverso de los automorfismos de los cubrimientos Galois, en el caso de esquemas conexos.
El siguiente teorema muestra además que el funtor de fibra no sólo tiene imágenes en $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}$ sino que es de hecho una equivalencia de categorías sobre una subcategoría un poco más restrictivo.

TEOREMA 19 (Grothendieck). *Sea X un esquema conexo y sea $\overline{x}$ un punto geométrico. Entonces,*

1. *El grupo $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t}$ es profinito y la acción en cada fibra $Fib_{\overline{x}}(Y)$ es continua para todo $Y \in Fet_X$ (a cada fibra le damos la topología que viene del esquema que le corresponde).*
2. *El funtor de fibra es una equivalencia de categorías entre la categoría Fet_X y la categoría de los $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t}$-conjuntos finitos con acción continua. Bajo dicha equivalencia, los cubrimientos conexos corresponden a conjuntos con acción transitiva y los Galois a la acción de multiplicación izquierda en cocientes finitos de $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t}$.*

Demostración. Ver [**30**, Ch. 5, pág. 169]. □

Observación 55. *Si X es un $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t}$-conjunto con acción transitiva, entonces para cualquier $x \in X$, tenemos que la acción en X es equivalente a la acción sobre las clases laterales de $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t}/U$ para cierto subgrupo $U = Stab_x$. Este subgrupo es además abierto y de índice finito, luego también es cerrado (Proposición 2) y la afirmación contraria también es obviamente cierta, es decir, la acción de $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t}$ en el conjunto de clases laterales de un subgrupo abierto de índice finito es una acción transitiva.*

Antes de pasar a la subsección siguiente, mencionaremos la propiedad del grupo fundamental étale de mantenerse igual si uno cambia el punto geométrico en esquemas conexos, esto es completamente análogo al caso topológico.

Proposición 48. *Sea X un esquema conexo y $\overline{x}$, $\overline{x}'$ dos puntos geométricos de X. Entonces los funtores de fibra correspondientes son isomorfos.*

Demostración. Ver [**30**, Ch.5, Prop. 5.5.1]. □

Con esto es fácil probar lo siguiente

Corolario 6. *Si X es un esquema conexo. Para cualquier par de puntos geométricos $\overline{x}$, $\overline{x}'$ se tiene un isomorfismo continuo de grupos fundamentales étales $\pi_1(X,\overline{x})^{\acute{e}t} \cong \pi_1(X,\overline{x}')^{\acute{e}t}$.*

Demostración. Si $\lambda : \mathrm{Fib}_{\overline{x}} \to \mathrm{Fib}_{\overline{x}'}$ es el isomorfismo de funtores, para todo automorfismo ϕ de $\mathrm{Fib}_{\overline{x}'}$, el homomorfismo $\phi \mapsto \lambda^{-1} \circ \phi \circ \lambda$ es el isomorfismo deseado. Es continuo además, por la construcción de la proposición anterior. □

Observación 56. *Notar la analogía con el caso topológico, en ese caso el isomorfismo de grupos es de la forma $\alpha \to \lambda^{-1} \circ \alpha \circ \lambda$ donde λ es un camino entre los dos puntos base sobre los que se consideran los grupos fundamentales. Inspirado en esta analogía, al isomorfismo* *de funtores de fibra se le llama* ***Camino o Chemin*** *(chemin es camino en francés) entre los puntos geométricos, este isomorfismo no es canónico, pero dos caminos difieren por una conjugación en los grupos fundamentales, es decir, por un automorfismo interno.*

Notar que los puntos geométricos escogidos pueden estar sobre un punto cerrado o no de X.

Antes de ir a la otra sección, hablaremos de que significa que un esquema conexo X tenga grupo fundamental étale trivial

DEFINICIÓN 76. *Sea X un esquema conexo. Diremos que X es* ***Étale Simplemente Conexo*** *si $\pi_1(X,\overline{x})^{ét} = 1$ para cualquier punto geométrico $\overline{x}$.*

PROPOSICIÓN 49. *Sea X un esquema conexo. Entonces son equivalentes:*

1. *X es étale simplemente conexo.*
2. *X sólo posee cubrimientos triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X simplemente conexo, basta probar que todo cubrimiento étale conexo $Y \to X$ es trivial. Si Y no fuera un cubrimiento étale trivial, entonces existiría un cubrimiento Galois $Z \to Y \to X$ por la Proposición 46, cuyo grupo de Galois correspondería a un cociente finito de $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}} = \{1\}$, luego $\text{Aut}(Z|X) = \{1\}$ y como la acción de este grupo debe ser transitiva sobre las fibras, se concluye que las fibras de Z tienen un sólo elemento, luego $Z = Y = X$ lo cuál contradice el hecho de que Y no es trivial.
Por otro lado, si X posee un cubrimiento no trivial y conexo Y, entonces $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}$ posee un subgrupo de índice > 1, que corresponde a la cantidad de elementos de una fibra geométrica por el Teorema 19. $\square$

2.3.1. Propiedades del Morfismo Inducido. El propósito de esta subsección es mostrar las propiedades básicas de los morfismos inducidos en los grupos fundamentales étales. Por morfismo inducido, nos referimos a que si $f : X \to S$ es un morfismo de esquemas, para puntos geométricos compatibles, tendremos un homomorfismo $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}} \to \pi_1(S,\overline{s})^{\text{ét}}$ de forma análoga a lo que sucede para el grupo fundamental topológico con las funciones continuas. Esta sección esta basada en [**30**, Ch. 5, Sec. 5.5].

DEFINICIÓN 77. *Sean X, X' dos esquemas conexos, y consideremos dos puntos geométricos $\overline{x} : Spec\,\Omega \to X$ y $\overline{x}' : Spec\,\Omega \to X'$ de X y X' respectivamente. Si tenemos un morfismo $\phi : X' \to X$ con $\phi \circ \overline{x}' = \overline{x}$. ϕ induce un funtor cambio de base $CB_{X,X'}$ $Y \to Y \times_X X'$ de Fet_X en*

$Fet_{X'}$ por la parte (c) de la Proposición 36. Gracias a que ϕ relaciona los puntos geométricos, tenemos la igualdad de funtores $Fib_{\overline{x}} = Fib_{\overline{x}'} \circ CB_{X,X'}$. Por lo mismo, todo automorfismo del funtor de fibra $Fib_{\overline{x}'}$ induce un automorfismo del funtor $Fib_{\overline{x}}$ vía componer con $CB_{X,X'}$. Luego, ϕ induce un homomorfismo de grupos

$$\phi_* : \pi_1(X', \overline{x}')^{\acute{e}t} \to \pi_1(X, \overline{x})^{\acute{e}t}$$

*Dicho homomorfismo se conoce como **Morfismo Inducido por** ϕ.*

OBSERVACIÓN 57. *Otra forma de entender el cambio de base, es que gracias al Teorema 19, el cambio de base $Y \to Y \times_X X'$ corresponde a tomar el $\pi_1(X, \overline{x})^{\acute{e}t}$-conjunto $Fib_{\overline{x}}(Y)$ y considerarlo un $\pi_1(X', \overline{x}')^{\acute{e}t}$-conjunto vía ϕ_*, ese será $Fib_{\overline{x}'}(Y \times_X X')$.*

PROPOSICIÓN 50. *Sea $\phi : X' \to X$ un morfismo de esquemas que compatibiliza los puntos geométricos $\overline{x}$ y $\overline{x}'$ de X y X' respectivamente. Sea ϕ_* el morfismo inducido entre los grupos fundamentales étales.*

- *ϕ_* es trivial si y sólo si para todo cubrimiento étale conexo Y de X, el cambio de base $Y \times_X X'$ es un cubrimiento trivial de X'.*
- *ϕ_* es sobre si y sólo si para todo cubrimiento étale Y conexo, el cambio de base también es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. (c.f. [**30**, Ch. 5, Prop. 5.5.4]) Como los cubrimientos étales triviales de X' corresponden a $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$-conjuntos con acción trivial de acuerdo a la prueba de la Proposición 49, si cada cambio de base es trivial para un cubrimiento conexo Y, el $\pi_1(X, \overline{x})$-conjunto $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}(Y)$ tendrá acción trivial al considerarse la acción de $\pi_1(X', \overline{x}')$, por lo que cada elemento en la imagen ϕ_* será trivial.
Supongamos ahora que $\mathrm{Im}(\phi_*)$ no es trivial, entonces existe un subgrupo abierto U de $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}$ que no contiene completamente a $\mathrm{Im}(\phi_*)$. Entonces, $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ actúa sobre las clases laterales de $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}/U$ mediante $a \cdot bU = \phi_*(a)bU$ y gracias a que U no contiene a la imagen de ϕ_*, esta acción no es trivial, de esto, el cubrimiento (no trivial) de X que corresponde a la acción de $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}$ en $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}/U$ al cambiarse de base corresponde a la acción mencionada antes, la cual no es trivial, luego el cambio de base no es trivial, lo que nos da la parte "sí".
Para la segunda parte, que cada cambio de base sea conexo, significa que todo $\pi_1(X \overline{x})$-conjunto con acción transitiva tendrá también una acción transitiva de $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$.
Ahora bien, si Y es un cubrimiento Galois de X, la acción del grupo fundamental, corresponde a la multiplicación izquierda sobre un cociente finito $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}/N$, esta acción es transitiva, el estabilizador de

cualquier clase es N y el cociente es isomorfo a $\mathrm{Aut}(Y|X)$. Esta acción no es nada más que la acción del grupo de automorfismos en la fibra del cubrimiento Galois Y y en términos de la acción del cociente, esta acción esta libre de puntos fijos. Ahora, el cambio de base convierte a $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}/N$ en un $\pi_1(X',\overline{x}')^{\text{ét}}$-conjunto y la acción de este grupo es transitiva pues el cambio de base es conexo por hipótesis, como la acción es transitiva, tenemos que $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}/N = \mathrm{Im}(\overline{\phi_*}) \cdot \mathrm{Stab}_y$ donde $\overline{\phi_*}$ es la composición de ϕ_* con la proyección a N e y es cualquier punto de la fibra sobre Y. Como la acción de Y es sin puntos fijos, el estabilizador es 1, luego $\overline{\phi_*}$ es sobre para todo cociente finito, es decir, $\overline{\phi_*} : \pi_1(X',\overline{x}')^{\text{ét}} \to \mathrm{Aut}(Y_\alpha|X)$ es sobre para todo cubrimiento Galois P_α de X, y estos morfismos sobreyectivos son compatibles con los morfismos estructurales del grupo profinito que conforman, lo cuál nos dice que $\pi_1(X',\overline{x}')^{\text{ét}} \to \pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}$ es sobre.
Para la segunda parte, si $\mathrm{Im}(\phi_*)$ no fuera todo $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}$, entonces es un cerrado propio de $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}$ ya que este grupo es compacto y existe un subgrupo abierto no trivial U que contiene a $\mathrm{Im}(\phi_*)$ (ver el lema de más adelante).
Entonces, $\pi_1(X',\overline{x}')^{\text{ét}}$ actúa trivialmente sobre $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}/U$ por la construcción de U. Por ende, el cubrimiento que corresponde a $\pi_1(X,\overline{x})^{\text{ét}}/U$ es conexo, no es trivial (igual a X), y su cambio de base es trivial, lo cual es contradictorio, y así termina la proposición. $\square$

OBSERVACIÓN 58. *Notar que un $\pi_1(X,\overline{x})^{ét}$-conjunto con acción transitiva y continua F se identifica con un conjunto de clases laterales $\pi_1(X,\overline{x})^{ét}/U$ para un subgrupo abierto U, si identificamos el punto $\overline{y} \in F$ que corresponde a la clase lateral $1 \cdot U$, este corresponde a uno de los puntos de la fibra geométrica del cubrimiento $Y \to X$ sobre el punto geométrico $\overline{x}$, como esta fibra es igual a la fibra de un cambio de base, podemos también identificar $\overline{y}$ con un punto de la fibra geométrica de $Y \times_X X'$. Este punto $\overline{y}$ define un punto geométrico $\overline{y} : Spec\,\Omega \to X$.*

PROPOSICIÓN 51. *Sea $U \subset \pi_1(X,\overline{x})^{ét}$ un subgrupo abierto, y sea $Y \to X$ el cubrimiento conexo correspondiente al conjunto de clases laterales $\pi_1(X,\overline{x})^{ét}/U$, junto al punto $\overline{y}$ descrito en la observación anterior.*
El subgrupo U contiene a la imagen de ϕ_* si y sólo si el cubrimiento $Y \times_X X' \to X'$ posee una sección $X' \to Y \times_X X'$ que envía $\overline{x}$ en $\overline{y}$.

DEMOSTRACIÓN. (c.f. [**30**, Ch. 5, Prop. 5.5.5]) Notar que $\mathrm{Im}(\phi_*) \subset U$ si y sólo si $\pi_1(X',\overline{x}')^{\text{ét}}$ actúa trivialmente sobre la fibra geométrica de Y y por ende sobre $\overline{y}$.
En la componente conexa del cambio de base que contiene a y, el grupo

fundamental étale $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ actúa trivialmente, por ende, esta componente conexa es un cubrimiento trivial, el cuál debe ser conexo, es decir, dicha componente es isomorfa a X' vía $Y \times_X X' \to X'$, lo cuál nos da la sección deseada. □

Ahora que tenemos caracterizada la imagen del morfismo inducido, nos centraremos en el kernel.

Proposición 52. *Sea $U' \subset \pi_1(X', \overline{x}')^{\acute{e}t}$ un subgrupo abierto, y sea $Y' \to X'$ el cubrimiento que corresponde a la acción en las clases laterales de $\pi_1(X', \overline{x}')^{\acute{e}t}/U'$.*
El subgrupo U' contiene al kernel de ϕ_* si y sólo si existe un cubrimiento $Y \to X$ y un morfismo $Y_i \to Y'$ sobre X', donde Y_i es una componente conexa de $Y \times_X X'$.

Antes de probar esta proposición, probaremos el siguiente lema:

Lema 1. *Sea G un grupo profinito y $H \subset G$ un subgrupo cerrado.*

1. *La intersección de todos los subgrupos abiertos de G que contienen a H es exactamente H.*
2. *Dado cualquier subgrupo abierto $V' \subset H$, entonces existe un subgrupo abierto V de G tal que $V \cap H = V'$.*

Demostración. (c.f. [**30**, Ch. 5, Lem. 5.5.7]) Sea $g \in G - H$, debemos encontrar un subgrupo abierto de G que no contenga a g. Notar que para todo $g \in G$, una base de vecindades para g son los conjuntos gN donde N es un subgrupo normal abierto de G, ya que todos los subgrupos normales abiertos son una base de vecindades de 1 (c.f. [**29**, §1 Teo. 2 (2)]), y la traslación izquierda $h \mapsto gh$ es un homeomorfismo. Luego, existe un subgrupo normal abierto tal que $gN \cap H = \emptyset$ ya que H es cerrado.
Sea $p : G \to G/N$ la proyección al cociente, entonces el subgrupo abierto $p^{-1}(p(H)) = \bigcup_{h \in H} hN$ es el buscado.
Para la segunda parte, notar que $[H : V']$ es finito, pues el subgrupo H es compacto y hV' es un cubrimiento abierto de H y el mismo argumento sobre G dice que V' es cerrado en G. Luego, podemos aplicar la parte anterior a V'

$$V' = \bigcap_{V \text{ Abierto y } V' \subset V} V$$

Luego,

$$H - V' \bigcup V \text{ Abierto y } V' \subset V H - V$$

Pero $H - V$ es un abierto de H (pues los K son también cerrados), por lo que existen finitos abiertos $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_n$ que contienen a V' pero no a H, luego $V' = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \cap H$, por lo que $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ es el abierto buscado. $\square$

Demostración Proposición 52. (c.f. [**30**, Ch. 5, Lem. 5.5.6]) Partamos con el "sólo si": Sea X como en el enunciado, y sea $U \subset \pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}$ el subconjunto abierto del grupo fundamental étale tales que $X \cong \pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}/U$ como $\pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}$-conjunto.
Ahora bien, podemos identificar un punto geométrico en una componente conexa de $Y_i \subset Y' \times_X X'$ con un subgrupo abierto U'' de $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ ya que Y_i corresponde a un cubrimiento étale conexo de X'.
Notar que $\text{Ker}(\phi_*)$ estabiliza al punto geométrico de Y_i obviamente, pero U'' es el estabilizador de la acción de $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ sobre el punto geométrico de Y_i, luego $\text{Ker}(\phi_*) \subset U''$, pero el morfismo sobre X', el cual es morfismo de cubrimientos étales, corresponde a una inclusión $U'' \subset U'$ pues la única forma de que la acción en $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}/U''$ se restrinja a la acción sobre $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}/U'$ es si tenemos la inclusión de arriba. De esto finalmente, como U'' contiene a $\text{Ker}(\phi_*)$, U' contiene al kernel como deseábamos. Para la otra implicación, supongamos que $\text{Ker}(\phi_*) \subset U'$ y sea $H = \text{Im}\,(\phi_*)$. Este es un subgrupo cerrado pues $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ es compacto, y además $V' = \phi_*(U')$ el cual es un subgrupo abierto, pues U' es abierto en $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$, por lo que es cerrado, y entonces compacto, por lo que V' es compacto, y abierto en H, pues notar que $[H : V'] \leq [\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}} : U'] < \infty$, y entonces V' es abierto porque es compacto y de índice finito.
Con esto, podemos usar el lema anterior para encontrar un subgrupo abierto $V \subset \pi_1(X, \overline{x})^{\text{ét}}$ tal que $V \cap H = V'$. Dicho V da a lugar un cubrimiento conexo $Y \to X$.
Igual que antes, una componente conexa Y_i de $Y \times_X X'$ corresponde a un conjunto de clases laterales $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}/U''$ para cierto subgrupo abierto $U'' \subset \pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ el cual contiene a $\text{Ker}\,(\phi_*)$ igual que antes, además, existe un morfismo de cubrimientos de X' $Y_i \to Y'$ si y sólo si $U'' \subset U'$. Pero en nuestro caso tenemos que $\phi_*(U'') \subset \phi_*(U') = V'$ ya que los elementos de U'' estabilizan a un punto de la fibra de $Y \times_X X'$, luego, los elementos de $\phi_*(U'')$ estabilizan al mismo punto considerado como parte de la fibra de Y, pero este estabilizador es V, luego $\phi_*(U'') \subset V$.
Por lo tanto, como $\phi_*(U'') \subset V$, $H = \text{Im}\,(\phi_*)$, entonces $\phi_*(U'') \subset V \cap H = V'$ y como tanto U' como U'' contienen a $\text{Ker}\,(\phi_*)$, entonces tomando preimágenes tenemos que $U'' \subset U'$ y por ende tenemos un morfismo de Y' en Y_i sobre X' $\square$

COROLARIO 7. *El morfismo* ϕ_* *es inyectivo si y sólo si, para cada cubrimiento conexo* $Y' \to X'$*, existe un cubrimiento étale* $Y \to X$ *y un morfismo de cubrimientos de* X'*,* $Y_i \to Y'$ *donde* Y_i *es una componente conexa de* $Y \times_X X'$*.*
En particular, si todo cubrimiento $Y' \to X'$ *es de la forma* $Y \times_X X'$ *para un cubrimiento* $Y \to X$ *entonces* ϕ_* *es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. (c.f. [**30**, Ch. 5, Lem. 5.5.8]) Notar que $\{1\}$ es un subgrupo cerrado, luego la intersección de todos los subgrupos abiertos de $\pi_1(X', \overline{x}')^{\text{ét}}$ es $\{1\}$. Por ende, todo cubrimiento conexo de X', que corresponde a la acción sobre las clases laterales de un subgrupo abierto del grupo fundamental cumple las hipótesis de la proposición anterior y entonces la primera parte del corolario es cierto. La segunda parte es sólo un caso particular de la primera parte. $\square$

COROLARIO 8. *Sea* $X'' \overset{\psi}{\to} X' \overset{\phi}{\to} X$ *una sucesión de morfismos de esquemas, y sean* $\overline{x}$*,* $\overline{x}'$*,* $\overline{x}''$ *puntos geométricos de* X*,* X' *y* X'' *resp. tales que* $\overline{x} = \phi \circ \overline{x}'$ *y* $\overline{x}' = \psi \circ \overline{x}''$*. Entonces, la secuencia*

$$\pi_1(X'', \overline{x}'')^{ét} \overset{\psi_*}{\to} \pi_1(X', \overline{x}')^{ét} \overset{\phi_*}{\to} \pi_1(X, \overline{x})^{ét}$$

es exacta si y sólo si se cumplen:

1. *Para todo cubrimiento* Y *de* X*, el cambio de base* $Y \times_X X''$ *es un cubrimiento trivial de* X''*.*
2. *Para cada cubrimiento conexo* $Y' \to X'$ *tal que* $Y' \times_{X'} X''$ *posea una sección sobre* X''*, existe un cubrimiento étale* $Y \to X$ *y un morfismo* $Y_i \to Y'$ *de cubrimientos de* X'*, donde* Y_i *es una componente conexa de* $Y \times_X X'$*.*

DEMOSTRACIÓN. (c.f. [**30**, Ch. 5, Lem. 5.5.9]) La primera parte es consecuencia de la Proposición 50 y la segunda es una aplicación combinada de las Proposiciones 51 y 52 $\square$

OBSERVACIÓN 59. *Si cambiamos la segunda parte del corolario anterior por la frase “ Todo cubrimiento conexo* $Y' \to X'$ *tal que* $Y' \times_{X'} X''$ *posea una sección sobre* X''*, es de la forma* $Y \times_x X'$ *para cierto cubrimiento* Y *de* X *”, esta frase más la primera implican que la sucesión anterior siga siendo exacta, ya que la imagen de* ψ_* *es cerrada en* $\pi_1(X', \overline{x}')^{ét}$ *y entonces es la intersección de todos los subgrupos abiertos que la contienen.*
Además, la segunda parte del corolario necesita sólo ser verificada para cubrimientos Galois de X'*, ya que como* $Ker(\phi_*)$ *es un subgrupo normal cerrado, es igual a la intersección de todos los subgrupos abiertos normales que lo contienen (esto es porque el cociente de un grupo profinito es profinito).*

2.4. Comparación entre $\pi_1^{\text{ét}}$ y π_1^{top}

El propósito de esta sección es mostrar la comparación entre el grupo fundamental étale de un esquema X de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ y el grupo fundamental "analítico" que posee X. Pero primero debemos hablar de que significará la parte "analítica" del esquema X. En lo que sigue, denotaremos por $X(\mathbb{C})$ al conjunto de todos los puntos de X cuyo cuerpo residual sea $\mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 78. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $\mathcal{H}$ el haz de funciones holomorfas de U, si consideramos m funciones holomorfas en U, $f_1, f_2, \cdots, f_m$, podemos considerar el haz de ideales cuasi-coherente sobre $\mathcal{H}$ definido por $V \subset U \mapsto (f_1|_V, f_2|_V, \cdots, f_m|_V) \subset \mathcal{H}(V)$ y lo denotamos por $\mathcal{I}$.*
*Con esto, definimos un **Espacio Analítico Afín** como el espacio anillado $(X, \mathcal{H}_X)$ donde*

$$X = \{y \in U : f_1(y) = f_2(y) = \cdots = f_m(y) = 0\} \subset U$$

y $\mathcal{H}_X = i^{-1}(\mathcal{H}/\mathcal{I})$ donde $i : X \to U$ es la inclusión. Notar que de esto el tallo en cada $x \in X$ es $\mathcal{H}_{X,x} = \mathcal{H}_x/(f_1, f_2, \cdots, f_m)$.
*Definimos en general un **Espacio Analítico** como un espacio topológico Hausdorff que posee un cubrimiento $(V_i, \mathcal{H}_X|_{V_i})$ por espacios analíticos afines.*

OBSERVACIÓN 60. *Si X es un espacio analítico, para todo punto $x \in X$, se tiene que $\mathcal{H}_{X,x}$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ el anillo de gérmenes alrededor de 0 en k variables o $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}/(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ donde f_i es una función holomorfa. Y más aún, los tallos pueden ser $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ para cierto m positivo o $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}/I$ donde I es un ideal no trivial tal que $I \subset m_x^2$ donde m es el (único pues el anillo de gérmenes es local) ideal maximal del anillo de gérmenes. En el primer caso se dice que el punto x es **Suave** y en el segundo que x es una **Singularidad Analítica**.*
*Si todos los puntos de x son suaves, se dice que X es **Suave** y en tal caso X no es nada más que una variedad compleja de dimensión m.*

Ahora, dado un esquema X localmente de tipo finito sobre $\mathbb{C}$, le asignaremos un espacio analítico X^{an} y un morfismo de espacios localmente anillados $X^{\text{an}} \to X$

DEFINICIÓN 79. *Sea X un esquema localmente de tipo finito sobre $\mathbb{C}$. Entonces, $(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}_X|_{X(\mathbb{C})})$ es un espacio localmente anillado.*
Si X es afín, tenemos que $X = Spec\, \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I$ y el espacio topológico del esquema esta representado por el conjunto de ceros de

los polinomios en el ideal I en $\mathbb{C}^n$, por ende, podemos considerar dicho conjunto con la topología que hereda de la topología usual de $\mathbb{C}$ y llamarle X^{an}, al cuál le agregaremos un haz $\mathcal{H}_{X^{an}}$ de modo tal que el tallo en cada $x \in X^{an}$ sea $\mathcal{H}_x/I \cdot \mathcal{H}_x$ donde $\mathcal{H}$ es el haz de funciones holomorfas de X^{an} de modo tal de que $(X^{an}, \mathcal{H}_{X^{an}})$ sea un espacio localmente anillado.
En general, X^{an} se obtiene pegando los espacios anillados construidos antes sobre un cubrimiento afín de X.
Este espacio anillado se llama ***Espacio Analítico Asociado a*** *X.*

OBSERVACIÓN 61. *Existe un morfismo de espacios localmente anillados $\phi : (X^{an}, \mathcal{H}_{X^{an}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ que lleva biyectivamente X^{an} en $X(\mathbb{C})$ y su morfismo entre haces $\phi^{\#}$ consiste en llevar una función regular $f \in \mathcal{O}_X(U)$ a la función regular $f \circ \phi : U^{an} \to \mathbb{C}$ donde una función regular para espacios analíticos es sencillamente una función que se ve localmente como un cociente de polinomios con coeficientes complejos.*

Los espacios analíticos asociados son universales en el sentido que todo morfismo de espacios localmente anillados $\mathcal{X} \to X$ induce un morfismo $\mathcal{X} \to X^{\mathrm{an}}$.

PROPOSICIÓN 53. *Sea X un esquema de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ y sea X^{an} su espacio analítico asociado. Entonces, el funtor Φ_X que envía un espacio analítico $\mathcal{X}$ en el conjunto de morfismos de este espacio a X, $Hom(\mathcal{X}, X)$ es representable por X^{an}, es decir, $Hom(\mathcal{X}, X) \cong Hom(\mathcal{X}, X^{an})$ para todo espacio analítico $\mathcal{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**9**, XII, Thé. 1.1]. $\square$

COROLARIO 9. *Todo morfismo entre esquemas de tipo finito sobre $\mathbb{C}$, $f : X \to Y$ induce un morfismo entre espacios analíticos $f^{an} : X^{an} \to Y^{an}$ de modo tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X^{an} \arrow[r, "f^{an}"] \arrow[d, "\phi_X"'] & Y^{an} \arrow[d, "\phi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Además, si X e Y son esquemas sobre otro esquema Z, entonces $(X \times_Z Y)^{an} = X^{an} \times_{Z^{an}} Y^{an}$ donde el producto fibrado del lado derecho se define análogamente al caso de esquemas por su propiedad universal.

OBSERVACIÓN 62. *Notar que existen las nociones de morfismos finitos, planos, no ramificados y étales para espacios analíticos. Ya que*

la definición de plano o no ramificado depende de los tallos y el morfismo a nivel de haces que define un morfismo de espacios localmente anillados.
Para el caso de morfismos finitos para variedades analíticas asociadas a esquemas, la definición es la misma, ya que las partes afines de un espacio analítico corresponden a los puntos cerrados del esquema $Spec\,\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I$ *y entonces tiene sentido hablar de que la preimagen de un abierto afín es un abierto afín correspondiente a módulos finitamente generados.*
Los cubrimientos (ver definición más abajo) étales finitos de variedades analíticas asociadas, son sencillamente cubrimientos topológicos, y el teorema siguiente relaciona los cubrimientos étales de X *con los cubrimientos topológicos de* X^{an}

DEFINICIÓN 80. *Sea* $f : \mathcal{X} \to X$ *un morfismo de espacios analíticos. Diremos que* f *es un* ***Cubrimiento Finito*** *si* f *es finito y toda componente irreducible (ser irreducible para espacios analíticos es esencialmente lo mismo que para esquemas, si* $X = \cup Y_i$ *con* Y_i *irreducible, dicho conjunto se conoce como componente irreducible de* X*) de* $\mathcal{X}$ *tiene por imagen a una componente irreducible de* X*.*

TEOREMA 20 (Teorema de Existencia de Riemann). *Sea* X *un esquema localmente de tipo finito sobre* $\mathbb{C}$ *y* X^{an} *su espacio analítico asociado. Entonces,* $f : Y \to X$ *es un cubrimiento étale si y sólo si* f^{an} *es un morfismo étale finito y sobre y por ende un cubrimiento topológico.*
Además, el funtor $\Phi : Fet_X \to Fet_{X^{an}}$ *donde* $Fet_{X^{an}}$ *es la categoría de los cubrimientos étales finitos de* X^{an} *que envía cubrimientos étales* $f : Y \to X$ *en el cubrimiento topológico* $f^{an} : Y^{an} \to X^{an}$ *es una equivalencia de categorías.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**9**, XII, Prop. 3.2] para la primera parte y [**9**, XII, Thé. 5.1] para la equivalencia de categorías. □

Como corolario a este teorema, tenemos la relación entre el grupo fundamental étale y el topológico.

COROLARIO 10. *Sea* X *un esquema localmente de tipo finito sobre* $\mathbb{C}$ *y* $x \in X^{an}$*, entonces el grupo fundamental étale de* X *en* x *(*x *es un punto geométrico en este caso)* $\pi_1(X, x)^{ét}$ *es isomorfo a la completación profinita de* $\pi_1(X^{an}, x)$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**9**, XII, Cor. 5.2]. □

OBSERVACIÓN 63. *Si* X *es una curva suave sobre* $\mathbb{C}$*, entonces* X^{an} *es también suave (c.f.* [**9**, XII, Prop. 3.2]*) y entonces es una superficie* *de Riemann.*

Para estas superficies, se sabe que el grupo fundamental topológico es residualmente finito (c.f. [**11**]*), por lo que el grupo fundamental topológico de estas superficies se inyecta en el grupo fundamental étale. Sin embargo, ya en superficies hay ejemplos de superficies S cuyo grupo fundamental no se inyecta en el grupo fundamental étale (c.f.* [**31**]*).*

2.5. Ejemplos

En esta sección presentaremos ejemplos de grupos fundamentales.

EJEMPLO 15 (Esquemas sobre $\mathbb{C}$). *Aprovechándonos de que tenemos grupos fundamentales para variedades sobre $\mathbb{C}$, tenemos $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, x)^{ét} = \pi_1(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, x)^{ét} = \{1\}$ ya que la línea proyectiva no es nada más que una esfera y el espacio afín es el plano.*
También, tenemos por ejemplo $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}, x)^{ét} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ ya que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, 1\}$ es homeomorfo a la esfera menos dos puntos, lo cual se retrae por deformación a una circunferencia.
Si ahora quitamos 3 puntos, el grupo fundamental étale

$$\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}, x)^{ét}$$

se conoce como el ***Grupo Profinito Libre en dos letras****, este nombre no es al azar pues posee al igual que los grupos libres una propiedad universal: Una función $\theta : X \to G$ de un conjunto X a un grupo profinito G es* ***1-Convergente*** *si para todo subgrupo normal abierto N de G, el conjunto $\{x \in X : \theta(x) \notin N\}$ es finito. Un grupo profinito G es* ***Libre sobre un Conjunto*** *X si posee una función 1-convergente $\theta : X \to G$ de modo tal que si F es otro grupo profinito, con una función 1-convergente $\eta : X \to F$, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\phi : G \to F$ tal que $\phi \circ \theta = \eta$.*

EJEMPLO 16 ($\pi_1^{\text{ét}}$ de Variedades). *Sea X un esquema normal e integral. Al igual que en el caso de variedades, X posee un "cuerpo de funciones racionales". En este caso, corresponde al cuerpo residual de su (único) punto genérico o equivalentemente al cuerpo de fracciones de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.*
Sea K el cuerpo de fracciones de X, entonces tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 54. *Sea X un esquema integral y normal, con cuerpo de funciones racionales K. Sea K_s una clausura separable de K fija y sea K_S la unión de todas las extensiones finitas L/K de K_s que corresponden a morfismos finitos y sobreyectivos $\widetilde{X} \to X$ donde $\widetilde{X}$ es un*

*esquema integral normal cuyo cuerpo de funciones racionales es L ($\widetilde{X}$ se llama **Normalización de** X **en** L), tales que el morfismo anterior es un cubrimiento étale.*
Entonces K_S/K es una extensión Galois, y $Gal(K_S|K)$ es isomorfo a $\pi_1(X,\overline{x})^{ét}$ para el punto geométrico $\overline{x} : Spec\overline{K} \to X$ donde $\overline{K}$ corresponde a una extensión algebraicamente cerrada de K que contiene a K_s.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**30**, Ch. 5, Prop. 5.4.9]. □

Esta proposición nos permite calcular el grupo fundamental étale de cualquier variedad normal, las cuales están dentro de las hipótesis de la proposición anterior.

EJEMPLO 17 (Línea Proyectiva). *Sea k es un cuerpo algebraicamente cerrado, ya vimos antes que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es étale simplemente conexo. Este comportamiento se replica en general: Sea $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ un cubrimiento étale conexo de la línea proyectiva, como la línea es una curva suave, por herencia de propiedades (Proposición 39) tenemos que X es regular y localmente noetheriano, además, por la Proposición 31, la dimensión de X es 1 ya que el cubrimiento es plano y la fibra sobre cualquier punto de $\mathbb{P}^1_k$ es finita y por ende de dimensión 0.*

De esto se concluye que X también es una curva proyectiva ya que el cubrimiento también es propio, al ser finito (Proposición 9 y Observación 20). Además, f es separable aplicando la definición de no ramificado sobre su punto genérico. Luego, podemos usar la Fórmula de Riemann-Hurwitz (Teorema 5).

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(\mathbb{P}^1_k) - 2) + \deg R$$

Pero $R = 0$ y $g(\mathbb{P}^1_k) = 0$ porque este número corresponde a $\Gamma(\mathbb{P}^1_k, \Omega_{\mathbb{P}^1_k/k})$ y la línea proyectiva no posee diferenciales globales. Luego tenemos,

$$2g(X) - 2 = -2\deg(f)$$

luego las únicas posibilidades para $\deg(f)$ y $g(X)$ son $g(X) = 0$ y $\deg(f) = 1$, luego f es isomorfismo y $X \cong \mathbb{P}^1_k$, por lo que $\mathbb{P}^1_k$ no posee cubrimientos conexos no triviales.

EJEMPLO 18 ($\mathbb{A}^1_k$). *Vimos antes que $\pi_1(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, x)^{ét} = \{1\}$, sin embargo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p > 0$ esto no es cierto: Recordemos el morfismo $C = \{y^p - y + f(x) = 0\} \to \mathbb{A}^1_k$ donde $f(x) \in k[x]$ (Ejemplo 12). La curva C es suave pues la matriz de las derivadas parciales tiene rango 1, además el morfismo es plano por* [**10**, Ch. III, Prop. 9.7]*, por lo tanto el morfismo es un cubrimiento* *étale no trivial, lo cual implica que* $\pi_1(\mathbb{A}^1_k, x)^{ét} \neq \{1\}$ *para cuerpos algebraicamente cerrados de característica positiva.*

Nuestro siguiente ejemplo son los árboles de líneas proyectivas, pero primero necesitamos unas definiciones previas:

DEFINICIÓN 81. *Sea* $\{X_i\}_{i\in I}$ *una colección de espacios anillados, tal que para cada par* $i, j \in I$ *existen un espacio anillado* $Z_{i,j}$ *y morfismos* $\phi_{(i,j),i} : Z_{i,j} \to X_i$ *y* $\phi_{(i,j),j} : Z_{i,j} \to X_j$*.*
Definimos la ***Unión de los espacios*** X_i ***sobre los Espacios*** $Z_{i,j}$ $\bigcup_{Z_{i,j}} X_i$ *como el cociente* $\coprod_{i\in I} X_i/\sim$ *por la relación de equivalencia* $x_i \sim x_j$ *si y sólo si existe* $z_{i,j} \in Z_{i,j}$ *tal que* $\phi_{(i,j),i}(z_{i,j}) = z_i$ *y* $\phi_{(i,j),j}(z_{i,j}) = x_j$*.*
Dotamos a $\bigcup_{Z_{i,j}} X_i$ *de la topología más fina que hace a cada inclusión natural* $\alpha_i : X_i \to \bigcup_{Z_{i,j}} X_i$ *continua.*
Dotamos también de un haz a esta unión: Dado $U \subset \bigcup_{Z_{i,j}} X_i$ *abierto, notar que* $\phi_i^{-1}(U)$ *es abierto en* X_i *y además* $\phi^{-1}_{(i,j),i}(\alpha_i^{-1}(U)) = \phi^{-1}_{(i,j),j}(\alpha_j^{-1}(U))$ *para todo par* $i, j \in I$*. Definimos el anillo de secciones en* U*, como el subanillo producto directo* $\prod_{i\in I} \mathcal{O}_{X_i}(\alpha^{-1}(U))$ *consistente en todas las sucesiones* $(a_i)_{i\in I}$ *tales que* $\phi^{\#}_{(i,j),i}(a_i) = \phi^{\#}_{(i,j),j}(a_j)$ *para todo* i, j*, donde* $\phi^{\#}_{(i,j),i}$ *es el morfismo de haces asociado al morfismo de espacios anillados correspondientes.*
Finalmente, si I *es vacío se define la unión como vacía, y en el caso de tener dos espacios anillados* X, Y *y un sólo* $Z_{i,j}$ *anotaremos* $X \cup_Z Y$*.*

OBSERVACIÓN 64. *La unión de la definición anterior siempre es un espacio anillado (c.f.* [**24**, Prop. 2.1]*) pero no necesariamente es un esquema cuando los espacios anillados* X_i *son todos esquemas (ver* [**24**, Example 3.2]*).*
Sin embargo, cuando X, Y *son dos esquemas y* Z *es un subesquema abierto de ambos, la unión sobre* Z *es un esquema (c.f.* [**24**, Example 3.1]*). Para lo que vamos a hacer, necesitamos:*

PROPOSICIÓN 55. *Sean* X, Y *dos esquemas y* Z *un subesquema cerrado común, entonces* $X \cup_Z Y$ *es un esquema.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**24**, Cor. 3.7]. □

Con esto podemos definir un árbol de líneas proyectivas.

EJEMPLO 19 (Árbol de líneas proyectivas).

DEFINICIÓN 82. *Sea* k *un cuerpo algebraicamente cerrado. Un* ***Árbol de Líneas Proyectivas*** *es una unión* $\bigcup_{Z_{i,j}} X_i$ *donde* $X_i = \mathbb{P}^1_k$ *para*

todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ *y* $Z_{i,j}$ *corresponde a un punto cerrado de* X_i *y de* X_j.
Los puntos cerrados $Z_{i,j}$ *están asociados a los índices* i, j *de modo tal que el grafo cuyos vértices representan al conjunto* $\{1, \cdots, n\}$ *y tiene una arista que une* i *con* j *si y sólo si* $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ *es un árbol.*
Un árbol de líneas proyectivas X *es* ***Simple*** *si su grafo correspondiente consiste en* n *puntos y una arista que une* i *con* $i + 1$ *para cada* $i \in \{1..n - 1\}$.

Observación 65.

- *Un árbol de líneas proyectivas, se puede descomponer como la unión de árboles simples, pues basta considerar el grafo del árbol y dividirlo en sub grafos que corresponden al grafo de un árbol simple.*
- *En el caso que* $k = \mathbb{C}$, *un árbol de líneas proyectivas simples es simplemente conexo, debido al teorema de Van Kampen para el grupo fundamental topológico, más el hecho de que cada línea proyectiva es simplemente conexa. Por lo tanto, todo árbol sobre* $\mathbb{C}$ *es simplemente conexo topológicamente y así también es étale simplemente conexo.*

En general, un árbol de líneas proyectivas siempre es étale simplemente conexo.

Basta considerar la unión de dos líneas, pues la afirmación en general sale por inducción en árboles simples para luego concluirse para todo árbol. El argumento es general, si tenemos dos cerrados, unidos por un punto, y los dos cerrados son étale simplemente conexo, su unión lo será también.

Sea $X = X_1 \cup X_2$ *una variedad sobre un cuerpo algebraicamente cerrado* k *donde* X_i *es una subvariedad cerrada étale simplemente conexo de* X *para* $i = 1, 2$ *y* $X_1 \cap X_2$ *es un punto cerrado.*

Dado un cubrimiento étale $f : Y \to X$, *en nuestro caso la fibra geométrica coincide con la fibra usual, sea* F *la fibra sobre el punto* p *de intersección de* X_1 *con* X_2 *e* Y_i *es el subesquema cerrado de* Y *que corresponde a* $f^{-1}(X_i)$. *Entonces, tenemos el siguiente diagrama* *conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y_1 \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Donde las flechas corresponden a las inclusiones respectivas.
Ahora bien, la unión de Y_1 *con* Y_2 *sobre* F *tiene una propiedad universal (c.f.* [**24**, Thm. 2.2] *): Para todo diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y_1 \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $Y_1 \cup_F Y_2 \to Z$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y_1 \arrow[dr] \arrow[ddr] & & Y_2 \arrow[dl] \arrow[ddl] \\ & Y_1 \cup_F Y_2 \arrow[d, "\psi"] & \\ & Z & \end{tikzcd}$$

En particular, tenemos un morfismo $Y_1 \cup_F Y_2 \to Y$ *el cuál no es difícil ver que es un isomorfismo por la construcción del producto sobre* F*, estamos simplemente volviendo a pegar* Y*.*
Por otro lado, como X_1 *y* X_2 *son étale simplemente conexos, tenemos que* $Y_1 \cong \coprod^n X_1$*,* $Y_2 \cong \coprod^m X_2$ *y* $F = \coprod^k Spec\,\Omega$ *donde la notación* $\coprod^d$ *denota a la unión disjunta de* d *copias. Notar además, que la fibra* F *sobre* p *por* f *es también la fibra del cubrimiento étale* $Y_i \to X_i$ *sobre* p*, luego debe tener la misma cantidad de puntos que la cantidad de copias de* X_i *hay presentes en* Y_i*, por lo tanto* $n = m = k$ *y no es difícil tampoco ver que* $\coprod^n X_1 \cup_F \coprod^n X_2 \cong \coprod^n X$*.*

En efecto, la fibra del punto p es una fibra común de Y_1 e Y_2 y en cada uno de estos esquemas esta fibra corresponde a tomar k copias de p, una por cada copia de X_i en la unión disjunta. Cada punto de F, corresponde a un punto p en una copia de X_1 y en una copia de X_2, los cuales al ser pegados nos dan X.

Luego, como todas las copias de X_1 están pegadas a una de X_2 por un punto de la fibra de p, tenemos entonces el isomorfismo deseado y así todo cubrimiento de X es trivial.

Ejemplo 20 ($\pi_1^{\text{ét}}$ como invariante biracional de variedades no singulares). *Partamos con el siguiente hecho acerca de morfismos biracionales entre variedades:*

Proposición 56. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo biracional entre variedades. Si X es normal, el conjunto de puntos de X donde f no está definida es un cerrado consistente de puntos de codimensión mayor o igual a 2.*

Demostración. Ver [**10**, Ch. V, Prop. 5.1]. □

Teorema 21 (Teorema de Pureza de Zariski-Nagata). *Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo finito y sobreyectivo entre esquemas integrales, con X normal e Y regular. Suponer que cada fibra X_y sobre un punto $y \in Y$ de codimensión 1 es étale sobre $k(y)$. Entonces, ϕ es un cubrimiento étale.*

Demostración. La codimensión de un punto corresponde a la dimensión de su tallo $\mathcal{O}_{Y,y}$. La afirmación es de tipo local pues necesitamos estudiar si un morfismo es étale, por lo que podemos reducirnos al problema de que X sea el espectro de un anillo local regular.
Bajo esa simplificación, demostrar el teorema es una travesía difícil en el mundo del álgebra conmutativa: La prueba original de M. Nagata está en [**21**, Th. 41.1] y también existe un demostración de Grothendieck en [**8**, X, Thé 3.4]. □

Esto dice que el conjunto de "Puntos Rama" o donde un morfismo no es étale, es un subconjunto cerrado, cuyas componentes irreducibles tienen todas codimensión 1.
Como corolario al teorema, tenemos lo siguiente:

Corolario 11. *Sea X un esquema regular e integral, y $U \subset X$ un subesquema abierto cuyo complemento consiste de puntos de codimensión ≥ 2. Entonces, el cambio de base $Y \mapsto Y \times_X U$ induce una equivalencia entre cubrimientos étales de X con los cubrimientos étales de U.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**30**, Ch. 5, Cor. 5.2.14]. □

La equivalencia de categorías anterior, nos dice que bajo las hipótesis del corolario $\pi_1(X,\overline{x})^{ét} \cong \pi_1(U,\overline{x})^{ét}$ *donde* $\overline{x}$ *es un punto geométrico sobre un punto de* U*, el isomorfismo se alcanza mediante el homomorfismo inducido inclusión* $U \hookrightarrow X$*. Si juntamos la primera proposición de este ejemplo con la última, tenemos*

PROPOSICIÓN 57 (Invariancia Biracional de $\pi_1^{\text{ét}}$). *Sea* $f : X \to Y$ *un mapeo biracional entre variedades no singulares. Entonces,* f_* *induce un isomorfismo de grupos fundamentales étales, para puntos geométricos compatibles.*

DEMOSTRACIÓN. Según la Proposición 56, los conjuntos de puntos donde f y f^{-1} están definidos es un abierto cuyo complemento tiene puntos de codimensión ≥ 2, luego, si U_f y $U_{f^{-1}}$ son los conjuntos donde f y f^{-1} están definidas respectivamente, tenemos que (omitiendo puntos geométricos) $\pi_1(X)^{\text{ét}} \cong \pi_1(U_f)^{\text{ét}}$ y $\pi_1(Y)^{\text{ét}} \cong \pi_1(U_{f^{-1}})^{\text{ét}}$.
Como entre U_f y $U_{f^{-1}}$ la función f es isomorfismo, se tiene la proposición. □

EJEMPLO 21 (Grupo Fundamental del Esquema Reducido).

DEFINICIÓN 83. *Sea* X *un esquema. Definimos el* ***Esquema Reducido Asociado a*** X *como un esquema reducido (c.f. Definición 18)* X_{red} *junto a un morfismo* $X_{red} \to X$ *con la propiedad de que si* $f : Y \to X$ *es un morfismo de esquemas con* Y *reducido, entonces* f *factoriza a través de* X_{red}*.*

OBSERVACIÓN 66. *El esquema reducido asociado se construye tomando para todo abierto* $U \subset X$*, la reducción de* $\mathcal{O}_X(U)$*,*

$$\mathcal{O}_X(U)_{red} = \mathcal{O}_X(U)/Nil(\mathcal{O}_X(U))$$

donde $Nil(A)$ *denota al* ***Nilradical de un Anillo*** A *el cuál es el ideal de elementos nilpotentes de* A*.*

Luego, consideramos el espacio topológico de X *con el haz* $(\mathcal{O}_X)_{red}$ *asociado al prehaz* $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{red}$*.*

No es difícil ver que $(X, (\mathcal{O}_X)_{red})$ *es un esquema que cumple con las condiciones del esquema reducido asociado a* X *(c.f.* [**10**, Ch. II, Excersice 2.3]*). En particular, dicho esquema es único.*

Por último, no es difícil ver que los tallos $(\mathcal{O}_X)_{red,P}$ *son* $(\mathcal{O}_{X,P})_{red}$ *(c.f.* [**1**, Ch. 3, Cor. 3.12]*), luego el morfismo entre haces que forma parte del morfismo del esquema reducido corresponde al morfismo*

$\mathcal{O}_{X,P} \to (\mathcal{O}_{X,P})_{red}$ *el cuál es sobreyectivo, luego el morfismo entre haces es sobreyectivo por la Proposición 3, y como el espacio topológico de* X_{red} *es el mismo que el de* X*, tenemos que* X_{red} *es un subesquema cerrado de* X *(c.f. Definición 20).*

Con la observación anterior en mente, tenemos el siguiente resultado a nivel de grupos fundamentales étales:

PROPOSICIÓN 58. *Sea* X *un esquema noetheriano sobre otro esquema* S*. Dado* $\overline{x}$ *un punto geométrico sobre* X_{red}*, tenemos que el morfismo* $X_{red} \to X$ *induce un isomorfismo de grupos fundamentales étales* $\pi_1(X, \overline{x})^{ét} \cong \pi_1(X_{red}, \overline{x})^{ét}$.

DEMOSTRACIÓN. Esto es consecuencia de [**9**, I,Thé. 5.5 y Thé. 8.3] ya que X_{red} es un subesquema cerrado de X. $\square$

CAPÍTULO 3

Fibraciones de Superficies

3.1. Conceptos Básicos en Fibraciones de Superficies

Partamos con la definición más importante de este capítulo.

DEFINICIÓN 84. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Decimos que f es una* ***Fibración*** *si f es sobre y $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$.*

En este capítulo, consideraremos el caso especial de fibraciones $f : S \to C$ donde S es una superficie y C es una curva, ambas proyectivas. Como estas variedades son proyectivas, no es difícil ver que f es un morfismo proyectivo y que S y C son esquemas noetherianos usando las definiciones de variedad, noetheriano, más el hecho de que $\mathbb{P}^n_k$ es cuasi-compacto y noetheriano. Gracias a esto, tenemos que las fibras de un morfismo son conexas.

PROPOSICIÓN 59. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo proyectivo entre esquemas noetherianos. Si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, entonces para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. III, Cor. 11.3]. □

Además, tenemos un teorema importante que permite descomponer morfismos proyectivos o propios en una fibración más un morfismo finito.

PROPOSICIÓN 60 (Factorización de Stein). *Sea $f : Y \to X$ un morfismo proyectivo (resp. propio) entre esquemas noetherianos (resp. loc. noetherianos). Entonces, existe un esquema X' y morfismos $f' : Y \to X'$ proyectivo (resp. propio) con $f'_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{X'}$ y $g : X' \to X$ finito tales que $f = g \circ f'$.*

DEMOSTRACIÓN. La primera versión aparece en [**10**, Ch. III, Cor. 11.5] y la segunda en [**7**, Thé. 4.3.1]. □

Antes de partir con un ejemplo de fibración, probaremos un lema útil que será usado varias veces en este capítulo.

LEMA 2. *Sean S y C una superficie y una curva respectivamente, ambas suaves y proyectivas. Si $f : S \to C$ es un morfismo propio y sobreyectivo con fibras conexas, entonces es una fibración.*

Demostración. En realidad se necesitan menos hipótesis sobre S y C para probar el resultado de este lema. Sean S y C ambos normales y propios sobre $\operatorname{Spec} k$ con k algebraicamente cerrado. Usando la factorización de Stein, tenemos un esquema Y, y morfismos $g : S \to Y$ y $h : Y \to C$ tales que g es fibración, h es finito y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

Como $g_*(\mathcal{O}_S) \cong \mathcal{O}_Y$ basta probar que $Y \cong C$.

Notar que h es biyección, pues si $p \in C$ es un punto y pasara que $h^{-1}(p)$ tuviera más de un punto, entonces $g^{-1}(h^{-1}(p))$ sería una unión disjunta de fibras conexas en S, pues g es una fibración y las fibras correspondientes a puntos distintos son disjuntas. Pero $g^{-1}(h^{-1}(p)) = f^{-1}(p)$ y el lado derecho es conexo por lo mencionado antes, luego $h^{-1}(p)$ debe consistir de un solo punto.

Como h es finito, es propio y entonces Y es propio y de tipo finito sobre $\operatorname{Spec} k$ (Proposición 9). Además, Y es normal y en particular integral pues dado cualquier abierto $U \subset Y$, tenemos que

$$\mathcal{O}_Y(U) \cong g_*(\mathcal{O}_S)(U) = \mathcal{O}_S(g^{-1}(U))$$

y el último término del lado derecho es integralmente cerrado. Esto nos dice que Y es una variedad normal y completa, que además es una curva pues tiene dimensión 1 por la Proposición 31 ya que las fibras dadas por g son las mismas fibras dadas por f ya que h es biyección, las cuales son curvas.
Como tanto Y como C son curvas completas, son proyectivas (c.f. Observación 20) y además son no singulares porque son normales (c.f. Observación 13).

Como h es biyección, tiene grado 1 (Definición 42 y Observación 26) y entonces es un mapeo biracional (c.f. Observación 15), como ambas curvas son no singulares, [**10**, Ch. I, Prop. 6.8] nos dice que h es un isomorfismo ya que tanto h como su inversa racional pueden extenderse a todo Y y C resp., luego $Y \cong C$. $\square$

Ejemplo 22. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y consideremos el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$. Dados polinomios homogéneos F, G del mismo grado d en tres variables sin factores comunes, podemos definir* *el mapeo racional*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{P}^2_k & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1_k \\ [x:y:z] & \mapsto & [F(x,y,z):G(x,y,z)] \end{array}$$

*Claramente esta función esta definida en todos los puntos de $\mathbb{P}^2_k$ salvo en los d^2 puntos de intersección de las curvas (en este caso estamos considerando curvas como ceros de polinomios, las cuales no tienen por qué ser irreducibles) $F = 0$ y $G = 0$. Ahora bien, si $[a : b] \in \mathbb{P}^1_k$, entonces $f^{-1}([a : b]) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_k : -bF(x, y, z) + aG(x, y, z) = 0\}$ luego cada fibra es una curva de lo que se conoce como **Pencil de Curvas definido por F y G** y como en $\mathbb{P}^2_k$ toda curva irreducible se interseca con otra, tenemos que estas fibras son conexas.*
Mediante el Teorema 8, al hacer el blow-up en los d^2 puntos donde f se indetermina, obtenemos una superficie proyectiva suave S con morfismos $f' : S \to \mathbb{P}^2_k$ y $g : S \to \mathbb{P}^1_k$ tales que $f \circ f' = g$. Como S y $\mathbb{P}^1_k$ son propios sobre $\operatorname{Spec} k$, tenemos que g es propio por la Proposición 9 parte (b) y además es sobre porque f y f' lo son.
En lo que concierne a las fibras de g, notar que sencillamente son las transformadas estrictas (ver texto después de la Proposición 25) de las curvas del pencil, las cuales son una unión de curvas irreducibles, y son conexas pues las componentes irreducibles se intersecan, al intersecarse en $\mathbb{P}^2_k$. Como estas fibra son conexas, g es fibración por el lema precedente.

3.2. Lema Principal: Caso Topológico

El lema principal de esta sección, relaciona los grupos fundamentales en una fibración "sin fibras múltiples" $f : S \to C$ de una superficie no singular proyectiva sobre una curva no singular proyectiva, ambas sobre $\mathbb{C}$. En esta sección, cuando escribamos $\pi_1(S)$ o $\pi_1(C)$ nos referiremos al grupo fundamental topológico del espacio analítico asociado al esquema respectivo. Notar primero que si $f : S \to C$ es una fibración, el conjunto de puntos $p \in C$ para los cuales la fibra sobre p, $f^*(p)$, es singular, es finito ([**10**, Ch. III Cor. 10.7]), además, el concepto de fibración coincide para todos salvo un conjunto finito, con el concepto de fibración topológico.

Todas la afirmaciones de esta sección están basadas en [**34**].

Definición 85. *Un **Fibrado Topológico** consiste en una función continua sobreyectiva $\pi : E \to B$ donde E y B son espacios topológicos y B es arco-conexo. La función π es tal que para todo $x \in B$ existen un abierto $U \subset B$ que contiene a x y un espacio topológico F, tal que*

$\pi^{-1}(U) \cong U \times F$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"] & U \times F \arrow[dl, "Proy_U"] \\ U & \end{tikzcd}$$

*Donde $Proy_U$ es la proyección en la primera coordenada del producto. El espacio topológico F se llama **Fibra de la Fibración** π y no es difícil notar que $\pi^{-1}(x) \cong F$ para todo $x \in B$.*
*Si $f : S \to C$ es una fibración entre una superficie y una curva, ambos suaves sobre $\mathbb{C}$. La **Fibra General** corresponde a la fibra F de un punto $x \in C$ para el cual f se vea como un fibrado topológico con fibra F en una vecindad de x.*

El siguiente lema, nos dice como el grupo fundamental de una fibra general F se ve en el grupo fundamental de la superficie.

Lema 3 (Lemma 1 de [**34**]). *Sea F una fibra general y sea $\pi_1(F) \to \pi_1(S)$ el homomorfismo de grupos inducido por f. Entonces, la imagen de este homomorfismo es un subgrupo normal de $\pi_1(S)$ el cual es independiente de la fibra suave escogida.*

Debido a este lema, definimos la **Parte Vertical de** f como la imagen de $\pi_1(F)$ en $\pi_1(S)$, y la anotaremos como $\mathcal{V}_f$. También definimos la **Parte Horizontal de** f como el cociente $\mathcal{H}_f = \pi_1(S)/\mathcal{V}_f$. Claramente tenemos una sucesión exacta

$$1 \to \mathcal{V}_f \to \pi_1(S) \to \mathcal{H}_f \to 1$$

Los lemas que siguen, relacionan las partes verticales y horizontales de f con el grupo fundamental de la curva C y ciertas fibras especiales, las cuales definiremos a continuación.

Definición 86. *Sea $f : S \to C$ como antes, dado un punto $p \in C$, la fibra $f^*(p)$ se puede dividir en componentes irreducibles con multiplicidades*

$$f^*(p) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Gamma_i$$

*donde $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ es la multiplicidad de la componente irreducible Γ_i. Definimos la **Multiplicidad de la Fibra** como el entero mult$(f^*(p)) =$ m.c.d$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$. Si mult$(f^*(p)) > 1$ decimos que la fibra es **Múltiple**. Notar que f sólo tiene finitas (o cero) fibras múltiples por ([**10**, Ch. III Cor. 10.7]).*

Sea $p_1, p_2, \cdots, p_s$ los puntos de C que corresponden a fibras múltiples y sea $C' = C - \{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$. Si C tiene género g, sabemos entonces que su grupo fundamental es

$$\pi_1(C) = \left\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g \, ; \, \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \right\rangle$$

donde en un grupo G se escribe $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

En el caso de C' tenemos

$$\pi_1(C') = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s \, ; \, (\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i]) \, \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_s = 1 \rangle$$

donde γ_i es un lazo en C' que circunda a p_i.

La parte vertical esta relacionada a las curvas γ_i de la siguiente forma:

Lema 4 (Lemma 2 de [**34**]). *Sea F_i la fibra en p_i y m_i la multiplicidad de F_i, entonces $\mathcal{H}_f$ es isomorfo al cociente de $\pi_1(C')$ por el subgrupo normal generado por el conjunto $\{\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, \cdots, \gamma_s^{m_s}\}$.*

Si G es un grupo y S un subconjunto no vacío, el subgrupo normal de G generado por S es el subgrupo de G generado por todos los conjugados gsg^{-1} donde $g \in G$ y $s \in S$.

Una vez entendida la parte horizontal, podemos abocarnos a la parte vertical.

Lema 5 (Lemma 3 de [**34**]). *Suponer que la preimagen de compactos de C por f son compactos de S (esto sucede por ejemplo si las variedades involucradas son proyectivas). Sea F una fibra de f de multiplicidad m. Entonces, la imagen de $\pi_1(F)$ en $\pi_1(S)$ contiene a $\mathcal{V}_f$ como un subgrupo normal, y el grupo cociente correspondiente es un grupo cíclico de orden m, el cuál es isomorfo al subgrupo de $\mathcal{H}_f$ correspondiente a la clase de una curva que circunda a la imagen de F en C por f. En particular si f posee una fibra simplemente conexa, entonces $\mathcal{V}_f$ es trivial.*

Debido a estos dos lemas, si f no posee fibras múltiples, entonces $C' = C$ y los lazos γ_i no existen ya que se pueden deformar a un punto en C, por el Lema 3 entonces, se tiene que $\mathcal{H}_f \cong \pi_1(C)$ y del lema anterior, como toda fibra tiene multiplicidad 1, $\mathcal{V}_f$ es igual a la imagen de cualquier fibra F. Luego,

Lema 6 (Sucesión Exacta de Grupos Fundamentales para Fibraciones sin fibras múltiples: Caso Topológico). *Sea $f : S \to C$ una fibración* *entre una superficie y una curva, ambas suaves y proyectivas sobre* $\mathbb{C}$. *Si* f *no posee fibras múltiples, para todo* $x \in S$ *se tiene la sucesión exacta:*

$$\pi_1(f^{-1}(f(x)), x) \to \pi_1(S, x) \to \pi_1(C, f(x)) \to 1$$

Donde los homomorfismos corresponden a los inducidos por la inclusión de la fibra en la superficie y a f *respectivamente.*

OBSERVACIÓN 67. *Notar que no hay un 1 a la izquierda en la sucesión porque puede suceder por ejemplo que* S *este fibrando sobre una curva simplemente conexa como* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, *y que el grupo fundamental de* S *y el de una fibra no coincidan.*

3.3. Lema Principal: Caso Étale

Para el caso del grupo fundamental étale, tenemos un resultado análogo al caso de fibraciones sin fibras múltiples (dicha definición es independiente del cuerpo base) el cual es parte central de este trabajo de tesis. Pero primero partiremos con una sucesión exacta más general. Asumiremos en esta sección que todos los esquemas son localmente noetherianos y que los morfismos serán de tipo finito.

DEFINICIÓN 87. *Sea* $X \to \operatorname{Spec} k$ *un esquema sobre* k. *Diremos que* X *es* ***Separable sobre*** k *si para toda extensión de cuerpos* K/k, $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$ *es un esquema reducido. (c.f.* [**20**, Ch. 6, Def. 6.1.1]*)* *Un morfismo* $f : Y \to X$ *es* ***Separable*** *si es plano y para todo* $x \in X$, *la fibra* $Y \times_X \operatorname{Spec} k(x)$ *es separable sobre* $k(x)$.

OBSERVACIÓN 68. *No confundir esta definición con la definición de morfismo separable que dimos en la Observación 14, la cuál corresponde a* [**10**, Pág. 300].

Una propiedad importante de los morfismos separables y propios, es que en su factorización de Stein (Proposición 60), el morfismo finito es de hecho étale.

TEOREMA 22. *Sea* $f : Y \to X$ *un morfismo propio y separable de esquemas. Entonces el morfismo finito* $g : X' \to X$ *que sale de la factorización de Stein es un cubrimiento étale.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**20**, Ch. 6, Th. 6.2.1]. □

LEMA 7 (Sucesión Exacta de Grupos Fundamentales Étales para Fibraciones: Caso Morfismos Separables). *Sea* $f : Y \to X$ *una fibración propia y separable de esquemas con* Y *conexo. Entonces, dado* $y \in Y$, $\overline{y}$ *un punto geométrico y* $x = f(y)$ *con su punto geométrico respectivo*

$\overline{x}$, la siguiente sucesión es exacta con los homomorfismos inducidos respectivos:

$$\pi_1(Y_{\overline{x}},\overline{y})^{ét} \xrightarrow{\phi} \pi_1(Y,\overline{y})^{ét} \xrightarrow{\psi} \pi_1(X,\overline{x})^{ét} \to 1$$

Donde $Y_{\overline{x}}$ es la fibra geométrica de f sobre $\overline{x}$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Corolario 8 y de la Proposición 50, esta demostración tiene 3 partes.

a) (ψ es sobre) Por la Proposición 9 hay que probar que el cambio de base de un cubrimiento étale conexo $g : X' \to X$ es conexo.
Si $Y' = Y \times_X X'$ es el cambio de base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

con esto podemos aplicar [**20**, Ch. 6, Thm. 6.1.2] con $n = 0$ para obtener que

$$f_*(\mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} = f'_*((g')^*(\mathcal{O}_Y))$$

El lado izquierdo es igual a $\mathcal{O}_{X'}$ y el lado derecho es igual a $f'_*(\mathcal{O}_{Y'})$ por la Definición 30, luego, f' es fibración y entonces las fibras son conexas.
Además, si Y' fuera disconexo, entonces $H^0(Y',\mathcal{O}_{Y'})$ sería la suma directa de dos o más anillos, pero $f_*(\mathcal{O}_{Y'}) = \mathcal{O}_{X'}$ y entonces el grupo de cohomología anterior es igual a $H^0(X',\mathcal{O}_{X'})$ el cual no se descompone en una suma pues X' es conexo, luego Y' es conexo.

b) ($\psi \circ \phi$ es trivial) De acuerdo a la primera parte del Corolario 8, debemos probar que si $X' \to X$ es un cubrimiento étale, entonces $Y_{\overline{x}} \times_X X'$ es un cubrimiento trivial de $Y_{\overline{x}}$.
Si denotamos $\overline{x} : \mathrm{Spec}\overline{k(x)} \to X$, entonces

$$Y_{\overline{x}} \times_X X' = (Y \times_X \mathrm{Spec}\overline{k(x)}) \times_X X' = Y \times_X (X' \times_X \mathrm{Spec}\overline{k(x)})$$

Pero el segundo factor del lado derecho es $\coprod \overline{k(x)}$ porque es la fibra geométrica de un cubrimiento étale, y entonces

$$\begin{aligned} Y_{\overline{x}} \times_X X' &= Y \times_X \coprod \overline{k(x)} \\ &= \coprod Y \times_X \overline{k(x)} \\ &= \coprod Y_{\overline{x}} \end{aligned}$$

Por lo que el cambio de base del principio era un cubrimiento trivial.

c) $(\mathrm{Ker}\,(\psi) \subset \mathrm{Im}\,(\phi))$ Basta probar por la observación después del Corolario 8, que si $g : Y' \to Y$ es un cubrimiento étale conexo, tal que $Y'_{\overline{x}} = Y_{\overline{x}} \times_Y Y' \to Y_{\overline{x}}$ posee una sección, entonces existe un cubrimiento étale conexo $X' \to X$ tal que $Y' \cong X' \times_X Y$.
Primero necesitamos:

Lema 8. *La composición $h = f \circ g$ es propia y separable.*

Demostración. Notar que h es propio porque f es propio y g es separado (parte (e) de la Proposición 9) y es plano pues g es plano y f es localmente libre. Luego, sólo resta probar que las fibras de h son reducidas y lo son también para cualquier extensión de los cuerpos residuales.
Ahora bien, si tenemos un morfismo $\mathrm{Spec}\, K \to X$ (donde K es $k(x)$ o una extensión de este), entonces

$$Y' \times_X \mathrm{Spec}\, K = Y' \times_Y (Y \times_X \mathrm{Spec}\, K)$$

Pero como f es separable, $Y \times_X \mathrm{Spec}\, K$ es reducido y además $Y' \times_Y (Y \times_X \mathrm{Spec}\, K)$ es un cubrimiento étale del primero, por lo que entonces es un esquema reducido por herencia de propiedades (Proposición 39). Por lo tanto, h es separable. □

Establecido el lema, sean $h' : Y' \to X'$ y $g' : X' \to X$ los morfismos de la factorización de Stein de h. Por el lema anterior y el Teorema 22 g' es un cubrimiento étale.
De lo anterior, basta probar que $Y' \cong Y'' = X' \times_X Y$. Para ello, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, bend left, "h'"] \\
Y \arrow[d, "f"] & Y'' \arrow[l, "p_2"] \arrow[d, "f'"'] \\
X & X' \arrow[l, "g'"']
\end{tikzcd}$$

Por lo que necesitamos que α sea un isomorfismo, lo cuál lo conseguiremos probando que α es cubrimiento étale de Y'' y que la fibra de α sobre algún punto tiene sólo una componente.
Para lo primero, como $g' : X' \to X$ es cubrimiento étale, entonces $p_2 : Y'' \to Y$ es un cubrimiento étale, pero $g = p_2 \circ \alpha$ es también un cubrimiento étale, luego α es étale finito ([**30**, Ch. 5, Lemma 5.3.2 2.]), veremos después que es sobre. Para probar

la segunda parte, por [**20**, Th. 6.3.1.1] tenemos que h' es propio y entonces tiene fibras conexas. Pero Y' es conexo por hipótesis, luego X' es conexo porque es la imagen por una función continua de un conexo, pero recordando la parte a) nuevamente, tenemos que su cambio de base Y'' es conexo.

Finalmente, tomando el punto geométrico $\overline{x} : \overline{k(x)} \to X$, y tomando fibras geométricas en cada esquema que corresponda junto con los morfismos inducidos, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Y'_{\overline{x}} \arrow[dll, "\overline{g}"'] \arrow[dl, "\overline{\alpha}"] \arrow[ddl, "\overline{h'}"] \\
Y_{\overline{x}} \arrow[urr, bend left, "\sigma"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & Y''_{\overline{x}} \arrow[l, "\overline{p_2}"] \arrow[d] & \\
\operatorname{Spec}\overline{k(x)} & X'_{\overline{x}} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Donde σ es la sección que teníamos por hipótesis.

Como $g' : X' \to X$ es étale, tenemos que $X'_{\overline{x}} = \coprod_{i=1}^{n} \operatorname{Spec}' k_i$ donde $k_i = \overline{k(x)}$. De esto, tenemos que $Y''_{\overline{x}} = \coprod_{i=1}^{n} Y_{i,\overline{x}}$ donde $Y_{i,\overline{x}} = Y_{\overline{x}}$. La sección σ es un isomorfismo de $Y_{\overline{x}}$ en una componente conexa de $Y'_{\overline{x}}$ por la Proposición 40 ya que $Y_{\overline{x}}$ es conexo, sea Z la componente correspondiente.

Notar que $\overline{\alpha}(Z)$ debe ser un $Y_{i,\overline{x}}$, ya que $\overline{p_2} \circ \overline{\alpha} = \overline{g}$, luego $\overline{g}(Z) = Y_{\overline{x}}$ es igual a $\overline{p_2}(\alpha(Z))$ y el cubrimiento $\overline{p_2}$ es trivial, por ende, como $\alpha(Z)$ es conexo, se concluye lo afirmado.

Luego, como $\overline{p_2}$ lleva $Y_{i,\overline{x}}$ en $Y_{\overline{x}}$ isomórficamente, se concluye que $\overline{\alpha}$ lleva isomórficamente Z en $Y_{i,\overline{x}}$ con inversa $\sigma \circ \overline{p_2}$.

Por otro lado, la cantidad de componentes de $Y'_{\overline{x}}$ es n y es igual a la cantidad de componentes de $X'_{\overline{x}}$ ya que $\overline{h} = \overline{g} \circ \overline{f}$, luego la cantidad de componentes de $Y'_{\overline{x}}$ y la de $Y''_{\overline{x}}$ es la misma, además gracias a Z ya sabemos que $Y_{i,\overline{x}}$ tiene una sola preimagen.

Por último, α es sobre porque es cerrada, ya que tanto g como h' son morfismos propios, el primero porque es finito (parte (g) de la Proposición 9), y entonces α es cerrado pues es propio al corresponder a un producto de morfismos propios (parte (d) de la Proposición 9), además es abierta pues es un morfismo plano y finito (parte d) de la Proposición 30). Luego, α es abierta y cerrada, pero Y'' es conexo, por lo que necesariamente debe ser sobre, y entonces es un cubrimiento étale, el cuál tiene rango 1 pues sobre los puntos de Y'' que están en la componente $Y_{i,\overline{x}}$ de fibra geométrica dada por $\overline{x}$, estos poseen una sola preimagen por $\overline{\alpha}$, por lo que deberán tener una sola por α, lo cuál concluye la demostración.

□

OBSERVACIÓN 69. *De la demostración anterior, puede verse que la parte central es probar que el esquema que proviene de la factorización de Stein es un cubrimiento étale usando el morfismo finito de dicha factorización. En este caso, el hecho de que la fibración es separable nos permite probar esta parte central.*

La parte a) sólo requiere que la fibración sea propia y la parte de la demostración que consiste en probar el isomorfismo $Y' \cong Y'' = X' \times_X Y$ *bajo las hipótesis de la parte c) necesita sólo que la fibración sea propia una vez que se ha obtenido el cubrimiento étale proveniente de la factorización de Stein, lo que refuerza la afirmación de que el centro de la demostración anterior esta en lo mencionado en el párrafo anterior.*

Ahora nos dedicaremos a la prueba del lema análogo al de la sección anterior para grupos fundamentales étales. Pero antes necesitamos dos lemas:

LEMA 9. *Sea* $f : X \to Y$ *un morfismo de esquemas, con* Y *integral y regular de dimensión 1. Entonces* f *es plano si y sólo si todo punto asociado* $x \in X$ *(un punto es asociado si todo elemento del ideal maximal de su tallo es divisor de 0) es llevado por* f *al punto genérico de* Y*. En particular, si* X *es reducido, esto es equivalente a que cada componente de* X *tenga como imagen a un subconjunto denso de* Y*.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**10**, Ch. III, Prop. 9.7]. □

LEMA 10. *Sea* $f : S \to C$ *una fibración entre una superficie proyectiva no singular y una curva proyectiva. Entonces* C *es no singular.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir un poco menos, consideremos S normal.

Sea $n : \widetilde{C} \to C$ la normalización de C. Como los tallos de las curvas son anillos locales de dimensión 1, ser integralmente cerrado es equivalente a ser regular [**1**, Ch. 9, Prop. 92], luego la normalización de C es no singular. Como S no es singular, es normal y entonces f factoriza como $n \circ l$ donde $l : S \to \widetilde{C}$.
Afirmamos que n es biyectiva. En efecto, n claramente es sobre y si existieran $c_1, c_2 \in n^{-1}(c)$ para $c \in C$, entonces $l^{-1}(c_1)$ es disjunto de $l^{-1}(c_2)$, pero ambos conjuntos son parte de $f^{-1}(c)$ el cuál es un conjunto

conexo, luego, si $n^{-1}(c)$ consiste de $m > 1$ puntos (las normalizaciones de curvas son morfismos finitos por la Proposición 19), entonces $f^{-1}(c)$ sería la unión disjunta de m cerrados, lo cuál es imposible al ser $f^{-1}(c)$ conexo.
Luego, tenemos que n es una biyección biracional, ya que n es un isomorfismo sobre el abierto (no vacío por [**10**, Ch. II, Cor. 8.16]) de C consistente en todos sus puntos no singulares (cuyos tallos son anillos locales regulares), además l posee fibras conexas por conmutatividad.
Luego, l posee fibras conexas y es propio pues n es finito y f es propio, ya que tanto S como C son proyectivos sobre $\operatorname{Spec} k$, usando la parte (e) de la Proposición 9.
Como $\widetilde{C}$ es suave, el Lema 2 nos dice que l es fibración.

Debido a esto, tenemos

$$\mathcal{O}_C = f_*(\mathcal{O}_S) = n_*(l_*(\mathcal{O}_S)) \cong n_*(\mathcal{O}_{\widetilde{C}})$$

Y finalmente, si $\operatorname{Spec} A$ es un abierto afín de C, entonces

$$A \cong \mathcal{O}_C(\operatorname{Spec} A) \cong n_*(\mathcal{O}_{\widetilde{C}})(\operatorname{Spec} A)) = \mathcal{O}_{\widetilde{C}}(n^{-1}(\operatorname{Spec} A)) = \mathcal{O}_{\widetilde{C}}(\operatorname{Spec} A') \cong A'$$

ya que n es finito, y por ende es afín. Luego, el anillo de la derecha tiene localizaciones regulares, por ende el abierto de la izquierda tiene localizaciones regulares y entonces se concluye que C es no singular. □

TEOREMA 23 (Sucesión Exacta de Grupos Fundamentales Étales para Fibraciones: Caso fibración sin fibras múltiples). *Sea $f : S \to C$ una fibración sin fibras múltiples (en el sentido de la Definición 86) entre una superficie y una curva, ambas no singulares y proyectivas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Si $x \in S$ es un punto cerrado, entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$\pi_1(S_{f(x)}, x)^{\acute{e}t} \xrightarrow{\phi} \pi_1(S, x)^{\acute{e}t} \xrightarrow{\psi} \pi_1(C, f(x))^{\acute{e}t} \to 1$$

Donde S_x es la fibra de f sobre $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración es completamente análoga y está inspirada en el caso de morfismos separables. Tiene tres partes igual que antes:

a) (ψ es sobre) Sea $g : C' \to C$ un cubrimiento étale conexo, debemos probar que el cambio de base $S' = S \times_C C'$ es conexo.
Notar que f es propio porque es proyectivo, luego podemos hacer lo mismo que en el lema para el caso de un morfismo propio y separable (Lema 7 parte a)).

b) ($\psi \circ \phi$ es trivial) Esta parte también es exactamente igual a la parte b) del Lema 7.

c) ($\mathrm{Ker}\,(\psi) \subset \mathrm{Im}\,(\phi)$) La diferencia entre este lema y el caso separable recae aquí. Sea $g : S' \to S$ un cubrimiento étale conexo tal que el cubrimiento $S' \times_S S_{f(x)} \to S_{f(x)}$ posee una sección, entonces debemos encontrar un cubrimiento étale $C' \to C$ tal que $S \times_C C'$ sea isomorfo a S'.

No es difícil notar que $f \circ g$ es propio, ya que f lo es como se comentó antes y g es finito al ser étale. Más aún, g es propio, luego la composición es propia (parte (b) de la Proposición 9) y tenemos factorización de Stein para $h = f \circ g$. Sea $f' : S' \to C'$ la fibración y $g' : C' \to C$ el morfismo finito.

Notar que S' es una superficie completa y no singular, ya que S' hereda las propiedades de ser reducido, regular y localmente noetheriano (Proposición 39), además es propio y localmente finito sobre $\mathrm{Spec}\, k$ pues g es finito y S es propio y localmente finito sobre $\mathrm{Spec}\, k$, lo que lo convierte en variedad no singular que además es completa usando la parte (b) de la Proposición 9, pues S es proyectivo sobre $\mathrm{Spec}\, k$ y como g es finito, es propio. Además, S' tiene dimensión 2 por [**26**, Pág. 76, Thm. 7].

Como $f'_*(\mathcal{O}_{S'}) = \mathcal{O}_{C'}$ tenemos que C' es integral ya que si un anillo $\mathcal{O}_{C'}(U)$ tuviera divisores de 0, entonces $\mathcal{O}_{S'}((f')^{-1}(U))$ los tendría, lo cual es imposible pues S' es integral y también C' es conexo ya que f' es continua y sobre. En adición, C' es una variedad completa pues g' es finito y en consecuencia propio.

Finalmente, C' es una curva pues cada componente de $g^{-1}(f^{-1}(p))$ para $p \in C$ es de dimensión 1 pues $f^{-1}(p)$ es una unión de curvas al igual que $g^{-1}(f^{-1}(p))$, y la preimagen anterior es la unión disjunta de las preimágenes $(f')^{-1}(p_i)$ para $p_i \in (g')^{-1}(p)$, luego cada fibra es de dimensión 1 y entonces se concluye que C' tiene dimensión 1 por [**26**, Pág. 76, Thm. 7]. En último lugar, C es una curva no singular proyectiva por el Lema 10 y la Observación 20.

Tenemos por otro lado que g' es plano por el Lema 9 y entonces sólo resta ver que g' sea no ramificado para que sea un cubrimiento étale. Si $K(C')$ fuera una extensión puramente inseparable de $K(C)$ entonces g' es una composición de morfismos k-lineales de Frobenius (Proposición 24), pero estos morfismos son ramificados en todos los puntos, con ramificación de orden

p (c.f. Observación 30). Luego, si $c \in C$, entonces en términos de divisores $(g')^*(c) = p^i \sum_{i=1}^n P_i$, y entonces todos los coeficientes de $(f')^*((g')^*(c))$ son divisibles por p, pero por otro lado $f^*(c) = \sum_{i=1}^t m_i \Gamma_i$ donde Γ_i es una curva irreducible en S y m.c.d$(m_1, m_2, \cdots, m_t) = 1$, y como g es étale debe pasar que $g^*(\Gamma_i) = \sum_{j=1}^{k(i)} \Gamma_{i,j}$ donde $\Gamma_{i,j}$ son curvas irreducibles distintas de S' para todo i luego, los coeficientes que aparecen en $g^*(f^*(c)) = \sum_{i=1}^t m_i \sum_{j=1}^{k(i)} \Gamma_{i,j}$ son sólo los m_i y estos tienen máximo común divisor 1, lo cuál es contradictorio con lo que obtuvimos para $(f')^*((g')^*(c))$. De lo anterior, el morfismo g' tampoco puede ser inseparable, pues en tal caso, se dividiría en dos morfismos, uno puramente inseparable y otro separable (c.f. Observación 31), ambos son finitos y el morfismo puramente inseparable nos daría la misma contradicción de antes, por ende g' define una extensión separable de cuerpos de funciones racionales.

Ahora bien, supongamos que existe $c \in C$ tal que $(g')^*(c)$ posea ramificación. En tal caso tendríamos

$$(g')^*(c) = \sum_i n_i p_i$$

y algún coeficiente es mayor a uno, supongamos que $n_1 > 1$.

Si escribimos $g^*(f^*)(c)$ de nuevo, tenemos

$$\sum_{i=1}^t m_i \left(\sum_{j=1}^{k(i)} \Gamma_{i,j} \right)$$

y por otro lado tenemos

$$(f')^*(p_1) = \sum_l a_{1,l} \Gamma'_{1,l}$$

para algunos $a_{1,l} \in \mathbb{Z}_{>0}$ y curvas $\Gamma'_{1,l}$.

Para probar que g' es no-ramificado, vamos a demostrar primero que dado $i \in \{1, \cdots, t\}$, $\Gamma'_{1,l} \in g^{-1}(\Gamma_i)$ para cierto índice l.

En primer lugar, en

$$g^*(f^*)(c) = \sum_{i=1}^t m_i \left(\sum_{j=1}^{k(i)} \Gamma_{i,j} \right)$$

el coeficiente que acompaña a la curva $\Gamma_{i,j}$ es m_i para todo j, y entonces el máximo común divisor de los coeficientes de esta fibra es 1, pues $\Gamma_{i,j} \neq \Gamma_{i',k}$ si $i \neq i'$ ya que los índices i e i' corresponden a fibras sobre puntos distintos, luego el entero m_i aparece sólo con las curvas $\Gamma_{i,j}$ y no con alguna curva $\Gamma_{i',k}$.

Notar que para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$ se tiene que $g^{-1}(\Gamma_i) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$. En efecto, no puede pasar que las intersecciones anteriores sean todas vacías para todo i, pues esto nos diría que $(f')^{-1}(p_1)$ es disjunto de toda $g^{-1}(\Gamma_i)$ y entonces no sería parte de $g^{-1}(f^{*-1})(c)$, lo cuál no puede pasar pues $g \circ f = f' \circ g'$. Luego, al menos un índice i^* es tal que $g^{-1}(\Gamma_{i^*}) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$, esto nos dice que alguna curva $\Gamma_{i^*,j}$ es una de las curvas que componen $(f')^{-1}(p_1)$ ya que esta fibra es disjunta de las demás $(f')^{-1}(p_k)$, lo que obliga a que $\Gamma_{i^*,j}$ sea un subconjunto de $(f')^{-1}(p_1)$.

Ahora, sea $i \in \{1, \cdots, t\}$, como $f^{-1}(c)$ es conexo, existe una sucesión de curvas de $f^{-1}(c)$, $\Gamma_{s_0} = \Gamma_{i^*}, \Gamma_{s_1}, \cdots, \Gamma_{s_r} = \Gamma_i$ tales que $\Gamma_{s_{k-1}} \cap \Gamma_{s_k} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k \leq r$.

Consideremos $x_0 \in \Gamma_{s_0} \cap \Gamma_{s_1}$, entonces $g^{-1}(x_0)$ consiste en una cantidad finita de puntos, uno por cada $\Gamma_{i^*,j}$ ya que $x_0 \in \Gamma_{i^*}$, en particular uno de ellos está en la curva de $g^{-1}(\Gamma_{i^*})$ que pertenece a $(f')^{-1}(p_1)$, pero tal punto también pertenece a una curva que es componente de $g^{-1}(\Gamma_{i_1})$, luego esa curva interseca a $(f')^{-1}(p_1)$ y así $g^{-1}(\Gamma_{i_1}) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$.

De lo anterior, si seguimos el mismo procedimiento con Γ_{i_1} y Γ_{i_2}, concluimos que $g^{-1}(\Gamma_{i_2}) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$ e inductivamente llegamos a que $g^{-1}(\Gamma_{i_r}) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$, es decir, $g^{-1}(\Gamma_i) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$.

La condición $g^{-1}(\Gamma_i) \cap (f')^{-1}(p_1) \neq \emptyset$ implica que una componente de $(f')^{-1}(p_1)$ es una componente de $g^{-1}(\Gamma_i)$, luego, como

$$(f')^*(p_1) = \sum_l a_{1,l} \Gamma'_{1,l}$$

para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$, $\Gamma'_{1,l} \in g^{-1}(\Gamma_i)$ para cierto índice l.

Para finalizar, como $g^*(f^*)(c) = (f')^*((g')^*(c))$ es una igualdad de divisores, para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$, en cada divisor

$$g^*(\Gamma_i) = \sum_{j=1}^{k(i)} \Gamma_{i,j}$$

aparece una curva $\Gamma'_{1,l}$ la cuál pertenece a $(f')^*(p_1)$, y cuyo coeficiente es $n_1 a_{1,l}$ en $g^*(f^*)(c)$ ya que

$$(f')^*((g')^*(c)) = n_1(f')^*(p_1) + \cdots$$

Luego, n_1 divide al menos un coeficiente de $g^*(\Gamma_i)$ para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$, pero en un párrafo anterior habíamos mencionado que en $g^*(\Gamma_i)$ aparece sólo el coeficiente m_i, luego $n_i | m_i$ para todo i, y así

$$1 < n_1 \leq \text{m.c.d}(m_1, m_2, \cdots, m_t) = 1$$

Lo cuál es una contradicción, y concluimos así que g' es no-ramificado y por ende es un cubrimiento étale.

Ahora que probamos que g' es étale, la demostración de que $S' \cong S \times_C C'$ es igual a la del Lema 7, la cuál de hecho no usa la hipótesis de que f es separable (c.f. Observación 69), por lo que el lema está probado.

$\square$

3.4. Aplicaciones

Esta sección tiene como objetivo, utilizar el resultado del Teorema 23 para mostrar ejemplos de superficies minimales de tipo general sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica positiva, con radios de Chern c_1^2/c_2 tendiendo a infinito. No se ahondará en detalle alguno, pero el lector interesado en ellos puede consultar los artículos [**32, 33**] en los que está basada esta sección.

Para comenzar, fijemos un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica positiva.

Dada una superficie no singular proyectiva X sobre k, podemos considerar configuraciones de curvas proyectivas $\{C_1, \ldots, C_r\}$ tal que la unión de ellas $\bigcup_{i=1}^r C_i$ da a lugar un divisor en X con **Cruces Normales Simples**, es decir, las curvas C_i son no singulares, y las singularidades de la unión se ven localmente como una vecindad de $(0,0)$ en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{A}_k^2 : xy = 0\}$, o sea, las intersecciones son nodos.

Con esto, la idea para encontrar los ejemplos mencionados es construir superficies Z_q proyectivas, no singulares, de tipo general, minimales y étale simplemente conexas, que satisfagan

$$\lim_{q\to\infty} \frac{c_1^2(Z_q)}{c_2(Z_q)} = \infty.$$

Dichas superficies se consiguen mediante [**33**, Thm. 8.1], y dependen esencialmente de la superficie X y las configuraciones de curvas que uno escoja.

La construcción de dichas superficies, requiere de una parte técnica en la cuál se asume que las configuraciones de curvas que se escojan sean "divisibles" para arbitrarios q en el grupo de Picard de X. Esto es sutil y para ello se usa la asignación de ciertas multiplicidades a las curvas. Sin embargo, es posible demostrar que si uno elige genéricamente las multiplicidades, los invariantes que nos interesan para que las superficies Z_q son independientes de ellas.

Siendo un poco más específicos con la construcción de las superficies Z_q, lo que se hace es lo siguiente. Se construyen **Cubrimientos Cíclicos** (c.f. [**32**, Sec. 2]) $Y_q \to X$ donde q es un primo arbitrariamente grande y la superficie Y_q es proyectiva y normal, cuyas singularidades (finitas por el Corolario 2) están sobre los nodos de $\bigcup_{i=1}^r C_i$, tales que el cubrimiento anterior esta ramificado sobre $\bigcup_{i=1}^r C_i$ y el grupo $\mathbb{Z}_q$ actúe sobre Y_q de modo tal que $Y_q/\mathbb{Z}_q = X$.

Si resolvemos las singularidades de Y_q mediante una superficie $Z_q \to Y_q$ tal que toda otra resolución de singularidades $Z \to Y_q$ factorize a través de Z_q (esto se conoce como una **Resolución de Singularidades Minimal**), basta probar que la superficie que resuelve estas singularidades es minimal y de tipo general. Para esto, se pueden elegir las configuraciones de curvas en X de modo tal que las dos propiedades mencionadas anteriormente se cumplan para Z_q y $\lim_{q\to\infty} \frac{c_1^2(Z_q)}{c_2(Z_q)} = \infty$. La segunda propiedad es más delicada, ya que no puede tener un símil en característica cero (por la desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau). Luego lo que usamos es una configuración de curvas que estrictamente vive en característica positiva, la cual se construye a través de varias aplicaciones del morfismo k-lineal de Frobenius (c.f. Observación 29) sobre una configuración dada (ver [**33**, Fig.2] para una idea de la situación, donde un triángulo ordinario se vuelve a través de Frobenius muy tangente).

Por último, ya fijados X y la configuración de curvas apropiada, se puede probar que Z_q define una fibración $\overline{Z}_q \to \mathbb{P}^1_k$ donde $\overline{Z}_q$ es algún blow-up de Z_q. Esta fibración posee al menos una sección, lo cuál implica que la fibración no tiene fibras múltiples. Además posee una fibra especial dada por un árbol de líneas proyectivas. En consecuencia, debido al Lema 2 y al Ejemplo 19 tenemos que $\overline{Z}_q$ es étale simplemente conexa, y entonces Z_q es étale simplemente conexa por la invariancia biracional del grupo fundamental étale (c.f. Ejemplo 20).

CAPÍTULO 4

Preguntas

Este capítulo esta orientado a discutir posibles direcciones de investigación, basado en el contenido del capítulo anterior.

Fibras múltiples. Dada un fibración de una superficie sobre una curva, $f : S \to C$ ambas proyectivas sobre $\mathbb{C}$. Sabemos que f posee una parte vertical V_f, el cuál es un subgrupo normal de $\pi_1(S)$ y corresponde a la imagen del homomorfismo inducido $\pi_1(F) \to \pi_1(S)$ por cualquier fibra general. Además, de [**34**, Lemma 3] se deduce que si $p \in C$ es un punto cuya fibra no es múltiple, sigue siendo cierta la sucesión exacta del Lema 5.

En el caso de una fibración $f : S \to C$ entre una superficie y una curva proyectiva sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. ¿Será que la imagen del homomorfismo inducido entre los grupos fundamentales étales de una fibra general y de S es independiente de dichas fibras? El problema son las posibles fibras múltiples. Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿es posible obtener un análogo del Teorema 23 así como en el caso complejo (ver Lema 5)? ¿cómo se relacionarían la parte vertical "étale" y la imagen de una fibra múltiple?.

Variedades singulares y/o de dimensión mayor. En [**12**] se exponen generalizaciones del resultado de [**34**] para el caso de variedades complejas de dimensiones mayores, y en particular el caso de una fibración $f : X \to C$ donde X es una variedad compleja que incluso posea singularidades y C es una superficie de Riemann. ¿Es posible concluir el mismo resultado del Teorema 23 si cambiamos S por una variedad no singular de cualquier dimensión? ¿y qué podemos decir en el caso de que C sea una variedad no singular también? ¿hasta que punto podemos debilitar de la hipótesis de no singularidad?

Particularmente para esta pregunta, cabe notar que si consideramos S normal en el Teorema 23, este lema seguiría siendo válido, ya que la hipótesis de no singularidad se utiliza para poder manejar divisores en S como divisores de Cartier. Sin embargo, como sólo nos interesan las fibras, se podría imitar sin problemas la prueba del Teorema 23.

También, podríamos cambiar "superficie no singular" por "variedad no singular de dimensión n" en el Lema 23 y la demostración es la misma si consideramos como divisores a sumas con coeficientes enteros de subvariedades de codimensión 1.

Densidad geográfica en característica positiva. La aplicación de la Sección 3.4 da ejemplos de superficies minimales y de tipo general étale simplemente conexas cuyos radios de Chern c_1^2/c_2 son arbitrariamente grandes, para cada característica p fija.

Recientemente además se ha probado en el caso de característica cero, que existen superficies simplemente conexas que poseen radios de Chern arbitrariamente cercanos a todo número posible $r \in [2, 3]$ (c.f. [**23**]). ¿Cómo están dispuestas las superficies minimales y étale simplemente conexas dentro del problema de geografía? ¿serán muy dispersas, o por el contrario densas en el sentido de que sus radios de Chern están arbitrariamente cercanos a cualquier $r \in [1/5, \infty]$? Para mayor información sobre geografía en característica positiva mirar [**28**] y [**13**].

Bibliografía

1. M.F. Atiyah and I.G. Mcdonald, *Introduction to conmutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
2. A. Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd edition ed., Student Texts, vol. 34, London Mathematical Society, 1996.
3. F.A. Bogomolov, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds*, Math. USSR-Izv. **13** (1979), 499–555.
4. D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, 3rd edition ed., John Wiley & Sons, Inc., 2004.
5. H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1980.
6. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologie*, Tôhoku Math. J. (1957), no. 9, 119–221.
7. ______, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : Iii. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, première partie p. 5-167*, Publ. Math. IHES **11** (1961), 5–167.
8. ______, *Cohomologie local des faisceaux cohérents et théorèmes de lefschetz locaux et globaux*, North-Holland, Amsterdam, 1968, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961 (SGA2). Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud. Nueva edición con anotaciones: Société Mathématique de Frace, Paris, 2005.
9. ______, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961 (SGA1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud.
10. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 72, Springer-Verlag, New York, 1977.
11. J. Hempel, *Residual finiteness of surface groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 323.
12. J. H. Keum and I. J. Chung, *On fundamental groups of fibered complex manifolds*, Michigan Math. J. **2** (1997), 293–298.
13. Christian Liedtke, *Algebraic surfaces in positive characteristic*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Springer, New York, 2013, pp. 229–292.
14. R.C. Lyndon and P.E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 89, Springer-Verlag, New York, 1977.
15. W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, no. 70, Springer-Verlag, 1991.
16. H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1970.

17. Ariane Mézard, *Fundamental group*, Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998), Progr. Math., vol. 187, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 141–155.
18. J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, no. 33, 1980.
19. Yoichi Miyaoka, *On the chern numbers of surfaces of general type*, Inventiones Mathematicae **42 (1)** (1977), 225–237.
20. J.P. Murre, *Lectures on a introduction to grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathmatics, no. 40, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967, Notes by S. Anantharaman.
21. M. Nagata, *Local rings*, Interscience, New York and London, 1962.
22. M. Noether, *Zur theorie der eindeutigen entsprechungen algebraischer gebilde*, Math. Ann. **8** (1875), 495–533.
23. X. Roulleau and G. Urzúa, *Chern slopes of simply connected complex surfaces of general type are dense in [2,3] (arxiv:1402.5801)*, 2014.
24. Karl Schwede, *Gluing schemes and a scheme without closed points*, 2003, (Documento Electrónico).
25. J.P. Serre, *Sur la cohomologie des variétés algébriques*, J. Math. Pures Appl. (9) **36** (1957), 1–16.
26. I. Shafarevich, *Basic alegraic geometry*, 2 ed., vol. 1, Springer-Verlag, 1994.
27. ———, *Basic alegraic geometry*, 2 ed., vol. 2, Springer-Verlag, 1994.
28. N. I. Shepherd-Barron, *Geography for surfaces of general type in positive characteristic*, Invent. Math. **106** (1991), no. 2, 263–274.
29. Stephen S.Shatz, *Profinite groups, arithmetic and geometry*, Annals of Mathematics Studies, no. 67, 1972.
30. T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2009.
31. D. Toledo, *Projective varieties with non-residually finite fundamental group*, Publ. Math. IHES **77** (1993), 103–119.
32. G. Urzúa, *Arrangements of curves and algebraic surfaces*, J. of Algebraic Geom. **19** (2010), 335–365.
33. ———, *Arrangements of rational sections over curves and the varieties they define*, Rend. Lincei. Mat. Appl. **22** (2011), 1–34.
34. G. Xiao, π_1 *of elliptic and hyperelliptic surfaces*, Internat. J. Math. **2 5** (1991), 599–615.
35. Shing Tung Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (National Academy of Sciences) **74 (5)** (1977), 1798–1799.