1 FUNCIONES DE R^N EN R.

1. Idea de función.

   Si $A \subset R^N$, una función $f : A \mapsto R$ es una regla que asigna a cada punto $\overrightarrow{x} \in A$ un número $f(\overrightarrow{x}) \in R$.

   Ejemplos:

   Si $\overrightarrow{x} \in R^2$ podemos considerar la función $f(\overrightarrow{x})$=(distancia de $\overrightarrow{x}$ al origen)^2.

   Si elegimos coordenadas cartesianas $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ esta función se expresa $f(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2$.

   Por otra parte si elegimos coordenadas polares $\overrightarrow{x} = (r, \theta)$, la función se expresa $f(\overrightarrow{x}) = r^2$.

   En la mayor parte de esta sección trabajaremos con coordenadas cartesianas pero quiero insistir en que la función es la regla que a cada punto de R^N le asocia un número de R pero que puede expresarse por fórmulas distintas dependiendo de las coordenadas que se elija en el dominio.

2. Dominio natural.

   Encontrar el dominio natural de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{1-x^2-y^2}$.

   b) $f(x, y, w, z) = \frac{1}{x+y-w-z}$.

3. Gráfico.

   Si $f : R^N \mapsto R$ se define su gráfico como el conjunto

   $$\{(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) \in R^N \times R | \overrightarrow{x} \in \text{dominio de } f\}.$$

   IMPORTANTE: Hacer dibujo para el caso de dos dimensiones. En este caso el gráfico es, en general, una superficie en R^3.

   Ejemplos: Use el método de seccionar, o lo que Ud. quiera, para

   bosquejar el gráfico de:

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   b) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$

   c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

   d) $f(x, y) = Ax + By$

   e) $f(x, y) = Ax + By + C$

4. Curvas y superficies de nivel.

   Otra manera de visualizar funciones es mediante las superficies de nivel. En el caso de $f : R^3 \mapsto R$ se define la superficie de nivel correspondiente al nivel C como

   $$\{(x, y, z) | f(x, y, z) = C\}.$$

   Ejemplo:

Las superficies de nivel de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ son cáscaras de esferas centradas en el origen.

Conviene recalcar que las superficies de nivel estan en el dominio de la función.

De manera análoga se define la curva de nivel para funciones de R^2 en R como también en el caso de dimensiones mayores.

5. <u>Límites y continuidad.</u>

Recordar la definición de límite de Cálculo 1 y observar que para funciones $f : R^N \mapsto R$ es lo mismo si uno toma la noción apropiada de distancia en el espacio de salida R^N. Mas precisamente si $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_N) \in R^N$, en coordenadas Cartesianas, definimos la norma

$$||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}.$$

Ahora definimos

$$(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} f(\overrightarrow{x}) = l) \Leftrightarrow (\text{ Para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}|| < \delta \Rightarrow |f(\overrightarrow{x}) - l| < \epsilon).$$

Las mismas demostraciones de cálculo 1 prueban que el límite de la suma es la suma de los límites, límite del producto es el producto de los límites, límite del cuociente, siempre que el límite del denominador no se anule , es el cuociente de los límites, etc.

Es muy fácil probar de la definición que si $f(x,y,z) = x$ entonces

$\lim_{(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = x_0.$

<u>Ejemplo</u>:

Calcular $\lim_{(x,y,z) \to (2,5,3)} \frac{x-y}{x^2+y-z}$.

<u>Definición</u>:

Como siempre diremos que una función es continua en un punto si la función está definida en el punto y su valor coincide con el límite en el punto.

También se tienen los teoremas correspondientes para la composición de funciones.

<u>Teorema</u>:

a) Sean $f : R^N \mapsto R$ y $g : R \mapsto R$ tales que $\lim_{\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x_0}} f(\overrightarrow{x}) = A$ y g es continua en A. Entonces $\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} g(f(\overrightarrow{x})) = g(A)$.

b) Sean $f : R^N \to R$ y $\overrightarrow{\gamma} : R \to R^N$ tales que f es continua en $\overrightarrow{x_0}$ y $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\gamma}(t) = \overrightarrow{x_0}$. Entonces $\lim_{t \to t_0} f(\overrightarrow{\gamma}(t)) = f(\overrightarrow{x_0})$.

La parte b) del teorema precedente tiene la consecuencia siguiente, que es muy útil para probar que un límite NO existe.

<u>Observación</u>:

Si $\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} f(\overrightarrow{x}) = A$ entonces para cualquier curva $\overrightarrow{\gamma}$ tal que $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\gamma}(t) = \overrightarrow{x_0}$ se tendrá $\lim_{t \to t_0} f(\overrightarrow{\gamma}) = A$.

En particular el límite de la composición será siempre el mismo sin importar como se acerca la curva $\overrightarrow{\gamma}$ al punto $\overrightarrow{x_0}$. Por lo tanto para comprobar que un límite NO existe basta encontrar dos curvas, que podrían ser rectas, tales que las composiciones den límites distintos.

Ejemplo:

Comprobar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Hint:

Acérquese a $(0,0)$ a lo largo del eje OX y del eje OY.

Conviene insistir que lo anterior solamente sirve para probar que un límite NO existe y que a veces se dá el caso de que el límite a lo largo de todas las rectas es el mismo pero falla para otro tipo de curvas y por lo tanto el límite de la función de dos variables no existe. Un ejemplo de esta situación es la siguiente función en R^2: $f(x,y)=1$ si $|y| \geq x^2$ o $y=0$; $f(x,y)=0$ si $|y|<x^2$ e $y \neq 0$. Acercándose al origen a lo largo de cualquier recta se obtiene límite 1, pero a lo largo de la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ se obtiene 0.

Para demostrar que un límite si existe hay que usar los teoremas de suma, producto, cuociente y composición de límites y usar límites conocidos.

Ejercicio:

Decidir si los límites siguientes existen.

a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\sin(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan\frac{1}{cos(xyz)}}$.

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$.

Otra manera de probar, a veces, que un límite existe es usando el teorema del sandwich como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo:

Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Solución:

Después de componer con unas cuantas curvas uno empieza a sospechar que el límite es 0.

Para probarlo observemos que $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. Luego

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| |y| \leq \frac{1}{2}|y|$$

y por lo tanto $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|$ tiende a 0 cuando $(x,y)\to 0$.

6. Derivadas parciales.

En esta sección trabajaremos en dos dimensiones simplemente porque en este caso es posible dibujar los gráficos. Todo lo que se hará es generalizable al caso de más dimensiones con las interpretaciones correspondientes.

Definimos ahora la derivada parcial con respecto a x de f en el punto (x_0, y_0) por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

De manera análoga se define la derivada parcial con respecto a y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Interpretación geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$:

Si se toma un plano paralelo al plano XZ que pasa por el punto (x_0, y_0) este intersecta al gráfico de la función en una curva que contiene al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Ahora $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. es exactamente la pendiente de la tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ medida en ese plano. DIBUJO.

También $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ mide la razón de crecimiento de la función f cuando la variable bidimensional (x, y) se incrementa en la dirección de $\hat{e}_1 = (1, 0)$.

Por supuesto todas estas consideraciones valen para las derivadas parciales en las demás direcciones.

Ejercicio:

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ para

a) $f(x, y, z) = \frac{\sin(x+y+z)}{\exp(xy)}$

b) $f(x, y, z) = \log(1 + xyz)$.

Ecuación del plano tangente al gráfico.(en el caso que este exista.)

Sea $f : R^2 \mapsto R$ y sea $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un punto de su gráfico. Para obtener la ecuación del plano tangente al gráfico en este punto, en el caso que dicho plano existiera, nos basta con encontrar un vector normal al plano. Para esto nos basta encontrar dos vectores tangentes al gráfico, no colineales, y el producto cruz de estos será normal. Acordándonos de la interpretación geométrica de las derivadas parciales es fácil convencerce que los vectores

$$\overrightarrow{T_1} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$$

$$\overrightarrow{T_2} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$$

son tangentes al gráfico, por lo tanto su producto cruz

$$\overrightarrow{T_1} \times \overrightarrow{T_2} = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial}(x_0, y_0), -1)$$

es normal al gráfico.

De esta forma la ecuación del plano tangente al gráfico en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es:

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Reiteramos que esta ecuación es válida siempre que el plano tangente exista.

Recordemos que la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ significa que la curva obtenida al intersectar el gráfico con el plano paralelo al plano XZ que pasa por el punto (x_0, y_0) tiene recta tangente en ese plano y que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es exactamente la pendiente de la tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, medida en ese plano. DIBUJO. Razonamiento análogo para $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

No es difícil imaginarse el gráfico de una función tal que, al intersectarlo con planos paralelos a los planos XZ e YZ que pasen por un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, den curvas suaves que tengan recta tangente en el punto, pero que si se intersectan con cualquier otro plano vertical que pase por el punto se obtenga una recta que se quiebre en ese punto y por lo tanto no tenga tangente en él. Por supuesto dicho gráfico no tendrá plano tangente en ese punto. De este modo tenemos un ejemplo en que las derivadas parciales existen en un punto, pero en el punto correspondiente, el gráfico NO tiene plano tangente.

Definimos ahora la derivada direccional de una función f en el punto $\overrightarrow{x_0}$ en la dirección de un vector unitario $\hat{u}$ como

$$D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0 + hu}) - f(\overrightarrow{x_0})}{h}$$

Observemos que se tiene los casos particulares $D_{\hat{e}_1} f(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x_0})$, $D_{\hat{e}_2} f(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x_0})$, etc.

La interpretación geométrica de la derivada direccional es la siguiente:

Si se intersecta el gráfico de f con un plano vertical que contiene a la dirección $\hat{u}$ y que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se obtiene una curva. $D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{x_0})$ es la pendiente de la tangente a dicha curva en ese punto, medida en el plano. DIBUJO.

También $D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{x_0})$ puede interpretarse como la razón de crecimiento de la función f cuando uno se aleja de punto (x_0, y_0) en la dirección de $\hat{u}$.

Aunque parezca raro, no es difícil imaginar el gráfico de una función tal que sus derivadas direccionales en un punto existan en todas las direcciones pero que, en el punto correspondiente, el gráfico NO tenga plano tangente.

7. <u>Diferenciabilidad y plano tangente al gráfico</u>.

Recordar los conceptos de diferencial y de aproximación por la tangente de Cálculo 1.

<u>Definición</u>:

Una función $f : R^N \mapsto R$ se dice diferenciable en el punto $\overrightarrow{x_0}$ si existe una función LINEAL $df(\overrightarrow{x_0}) : R^N \mapsto R$ tal que

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) + \epsilon(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})$$

donde $\frac{\epsilon(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}||}$ tiende a 0 cuando $||\overrightarrow{\overrightarrow{x}} - \overrightarrow{x_0}||$ tiende a 0.

La función lineal $df(x_0)$ se llama la diferencial de f en el punto $\overrightarrow{x_0}$.

<u>Observación</u>:

En el caso de dos dimensiones el gráfico de la función

$$\overrightarrow{x} \mapsto f(\overrightarrow{x_0}) + df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})$$

es un plano que pasa por el punto $(\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}))$ y es tangente al gráfico en dicho punto. De este modo que la función sea diferenciable en un punto significa la existencia del plano tangente al gráfico en dicho punto. También la diferenciabilidad puede pensarse como la posibilidad de aproximar la función por una función lineal en la cercanía del punto cometiendo un error ϵ con la propiedad que $\frac{\epsilon(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}_0)}{||\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x_0}||}$ tiende a 0 cuando $||\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x_0}||$ tiende a 0.

La demostración del teorema siguiente es elemental.

<u>Teorema</u>:

Si f es diferenciable en $\overrightarrow{x_0}$ entonces es continua en $\overrightarrow{x_0}$.

El recíproco no es cierto. Por ejemplo en R^2 la función $f(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||$ es continua en el origen pero su gráfico es un cono con vértice en el origen, por lo tanto no hay plano tangente en el origen y luego no es diferenciable en dicho punto.

<u>Un breve repaso sobre funciones lineales</u>:

Recordemos que una función lineal $L : R^2 \mapsto R$ tiene la propiedad que

$$L(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}) = \alpha L(\overrightarrow{x}) + \beta L(\overrightarrow{y}).$$

Esto significa que si se conoce el valor de L en los vectores básicos $\hat{e}_1 = (1, 0)$ y $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Digamos $L(\hat{e}_1) = A_1$ y $L(\hat{e}_2) = A_2$ entonces se conoce el valor de L para cualquier punto del plano.

En efecto

$$L(x, y) = L(x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2) = xL(\hat{e}_1) + yL(\hat{e}_2) = xA_1 + yA_2$$

O, si se quiere, usando la notación de producto punto

$$L(x, y) = \overrightarrow{(A_1, A_2)} \cdot \overrightarrow{(x, y)}.$$

Con esto en mente podemos estudiar mas cuidadosamente la aplicación

$$\overrightarrow{x} \mapsto f(\overrightarrow{x_0}) + df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})$$

que como sabemos tiene por gráfico el plano tangente al gráfico de la función diferenciable f en el punto $(\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}))$.

Para esto nos bastaría conocer los valores de la diferencial $df((x_0, y_0))$ en los vectores básicos $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$.

Poniendo $(x, y) = (x_0, y_0) + (\triangle x, 0)$ en la fórmula de la definición de la diferencial se obtiene

$$f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0) = \triangle x df(x_0, y_0)((1, 0)) + \epsilon(\triangle x(1, 0))$$

donde $\frac{\epsilon(\triangle x(1,0))}{\triangle x}$ tiende a 0 cuando $\triangle x$ tiende a cero.

Así, dividiendo por $\triangle x$ y haciendo $\triangle x$ tender a 0, se obtiene

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = df(x_0, y_0)(\hat{e}_1).$$

es decir

$$df(\overrightarrow{x_0})(\hat{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x_0}).$$

Analogamente
$$df(\overrightarrow{x_0})(\hat{e}_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x_0}),$$
$$df(\overrightarrow{x_0})(\hat{e}_3) = \frac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{x_0}),$$
y su generalización a más dimensiones.

Definimos ahora el vector gradiente de f en el punto $(x_1, ..., x_N)$ por
$$\overrightarrow{\text{grad}}(x_1, ..., x_N) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_N), ..., \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, ..., x_N)\right).$$

Así, de acuerdo a la discusión previa, obtenemos la fórmula
$$df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{A}$$

De manera análoga a como se prueba que $df(\overrightarrow{x_0})(\hat{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x_0})$ se demuestra
$$D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{x_0}) = df(\overrightarrow{x_0})(\hat{u}).$$

Ejercicio:

a) Calcular la derivada direccional de la funci on $f(x, y) = xe^{xy}$ en el punto $(x, y) = (0, 0)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

b) Sea f una función diferenciable en el punto (x_0, y_0) y tal que $D_{\hat{u}} f(x_0, y_0) = 3$ y $D_{\hat{v}} f(x_0, y_0) = 3$, donde $\hat{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\hat{v} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Observación:

Del ejercicio precedente se deduce que para una función diferenciable en un punto, en el caso de R^N, si se conocen las N derivadas parciales se conocen todas las derivadas direccionales. Reciprocamente, si se conocen N derivadas direccionales en N direcciones linealmente independientes entonces se conocen las N derivadas parciales, (resolviendo un sistema lineal de N ecuaciones con N incógnitas), y por lo tanto TODAS las direccionales.

Ejercicio:

Es la función definida por $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ diferenciable en el punto $(0, 0)$?

Ejercicio:

Sea $f : R^2 \mapsto R$ diferenciable en un punto (x_0, y_0). Encontrar la dirección en el plano en la cual alejarse de ese punto para que la función crezca mas rapidamente. Respuesta: La dirección de $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$.

Nota:

Un segundo de reflexión muestra que en el caso de una función diferenciable la dirección de decrecimiento máximo es la de $-\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$.

Observación:

El ejercicio anterior es la base del método del "steepest descent".

Problema:

Un esquiador se encuentra en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de una montaña que tiene la forma del gráfico de la función $f(x, y)$. Para tener mayor velocidad siempre baja en la dirección en la cual el desnivel es mas pronunciado. Encontrar la trayectoria.

Solución:

Como el esquiador va a estar siempre sobre la montaña podemos parametrizar su trayectoria en la forma $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$, donde $(x(t), y(t))$ es la proyección de la trayectoria sobre el plano XY. El hecho que siga la dirección de mayor pendiente significa que la tangente a la proyección de su trayectoria sobre el plano XY es paralela a menos el gradiente en el punto correspondiente. En otras palabras buscamos una curva $(x(t), y(t))$ de modo que su tangente $(x'(t), y'(t))$ sea paralela a $-\overrightarrow{\text{grad}} f(x(t), y(t))$. O sea que exista una función $g : R \mapsto R$ de modo que

$$(x'(t), y'(t)) = -g(t)\overrightarrow{\text{grad}} f(x(t), y(t))$$

O, en términos de coordenadas, buscamos $x(t)$, $y(t)$ y $g(t)$ de modo que

$$\begin{aligned} x'(t) &= -g(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= -g(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Además queremos que cumpla con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$

Un problema como el anterior, que se trata de buscar funciones tales que ellas y sus derivadas cumplan con ciertas relaciones, es lo que se llama una ecuación diferencial. Este tipo de problemas aparece casi siempre que se hace un modelo matemático de alguna situación. En general es difícil resolverlas, pero hoy es no tan difícil encontrar soluciones aproximadas con un computador.

Para fijar las ideas veamos el caso de una montaña sencilla en el sentido que las ecuaciones se pueden resolver.

Tomemos $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2 - 3x + 2y$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$.

En este caso las ecuaciones se ven

$$\begin{aligned} x'(t) &= -g(t)(2x(t) - 3) \\ y'(t) &= -g(t)(2y(t) + 2) \end{aligned}$$

Podemos tomar $g(t) = 1$ y resolver el sistema por integración. Finalmente se evalúan las constantes de integración para que $x(0) = 1$ y $y(0) = 1$.

8. La regla de la cadena.

Si $f : R^N \mapsto R$ y $g : R \mapsto R$ podemos hablar de la composición $g \circ f : R^N \mapsto R$. Si f y g son diferenciables la compuesta también lo es y se tiene, simlemente de la regla de la cadena de Cálculo 1,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(f(x_1, ..., x_N)) = g'(f(x_1, ..., x_N))\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_N)$$

Pensando en términos de gradientes tenemos

$$\overrightarrow{\text{grad}} gf(x_1, ..., x_N) = g'(f(x_1, ..., x_N))\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, ..., x_N)).$$

La otra composición posible es $f: R^N \mapsto R$ con una curva $\overrightarrow{\gamma}: R \mapsto R^N$. En este caso tenemos $f \circ \overrightarrow{\gamma}: R \mapsto R$ y la regla de la cadena toma la forma

$$\frac{d}{dt}\left(f \circ \overrightarrow{\gamma}\right)(t) = \overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{\gamma}(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(t)$$

La fórmula precedente en términos de coordenadas toma la forma:

Si $f = f(x_1, .., x_N)$ y $x_1 = x_1(t)$,...,$x_N = x_N(t)$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\left(f(x_1(t), ..., x_N(t))\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), ..., x_N(t)) \frac{dx_n}{dt}(t)$$

Ejercicio:

Calcular la derivada de la compuesta para cualquier composición simple.

9. Otra gracia del gradiente.

Sea $f: R^N \mapsto R$ y consideremos la "superficie" de nivel $\{\overrightarrow{x} | f(\overrightarrow{x}) = C\}$. Sea $\overrightarrow{x_0}$ un punto en dicha "superficie". Entonces se tiene que $\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{x_0})$ es un vector perpendicular a la superficie de nivel en el punto $\overrightarrow{x_0}$. DIBUJO.

Ejemplos:

a) En el caso de $N = 2$ consideremos la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. Sus curvas de nivel son las hipérbolas $x^2 - y^2 = C$. El punto $(2, 1)$ está sobre la curva de nivel $x^2 - y^2 = 3$. Ahora el gradiente de f está dado por $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = 2x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}$. De este modo un vector normal a la curva de nivel $x^2 - y^2 = 3$ en el punto $(2, 1)$ será $\overrightarrow{\text{grad}} f(2, 1) = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$. Como ejercicio escriba la ecuación de la recta tangente a $x^2 - y^2 = 3$ en el punto $(2, 1)$.

b) En el caso de $N = 3$ consideremos la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Sus superficies de nivel son los paraboloides $x^2 + y^2 - z = C$. El punto $(2, 1, 1)$ está sobre la curva de nivel $x^2 + y^2 - z = 4$. Ahora el gradiente de F está dado por $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y) = 2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. De este modo un vector normal a la superficie de nivel $x^2 + y^2 - z = 4$ en el punto $(2, 1, 1)$ será $\overrightarrow{\text{grad}} F(2, 1, 1) = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Como ejercicio escriba la ecuación del plano tangente y de la recta normal a $x^2 + y^2 - z = 4$ en el punto $(2, 1, 1)$.

Ejercicio:

Encontrar todos los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ para los cuales el plano tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje $0Z$.

Finalmente demostraremos que $\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{x_0})$ es perpendicular a la superficie de nivel en $\overrightarrow{x_0}$. Para esto consideremos una curva $\overrightarrow{\gamma}(t)$ de modo que $\overrightarrow{\gamma}(0) = \overrightarrow{x_0}$ y que este cotenida en la superficie de nivel. Esto último significa $f(\overrightarrow{\gamma}(t)) = C$. Derivando esta última identidad con respecto a t y evaluando en $t = 0$ se obtiene, por la regla de la cadena

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(0) = 0$$

Esto significa que $\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{x_0})$ y $\overrightarrow{\gamma}'(0)$ son ortogonales. Como $\overrightarrow{\gamma}'(0)$ es tangente a la curva contenida en la superficie de nivel también lo es a la superficie. Tomando otras curvas conseguimos probar que

$\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{x_0})$ es perpendicular a todos los vectores tangente a la superficie, es decir es perpendicular a ella.

Finalizamos esta sección con la observación siguiente.

Observación:

Si $f : R^2 \mapsto R$ su gráfico es el conjunto $G = \{(x, y, z) \in R^3 / z = f(x, y)\}$. El conjunto G también puede verse como la superficie de nivel, correspondiente a $C = 0$, de la función $F : R^3 \mapsto R$ definida por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Mirando las cosas desde este último punto de vista podemos conseguir un vector tangente a G en un punto calculando el gradiente de F en ese punto. Calculando obtenemos $\overrightarrow{\text{grad}}\, F = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$. Que es exactamente la misma respuesta que se obtuvo por el otro método.

10. Derivadas de mayor orden.

Si $f(x, y)$ es una función diferenciable en toda una región entonces en esa región sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existen y son funciones de (x, y). Como tales, si es que son derivables, pueden ser derivadas nuevamente con respecto a x y a y. Se define ahora las derivadas parciales de segundo orden por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)
\end{aligned}$$

Se tiene el siguiente lema cuya demostración no daremos

Lema de Schwartz:

Si f es tal que sus segundas derivadas parciales existen y son continuas en una región, entonces en esa región se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

En lo que concierne a este curso, todas las funciones, salvo mención expresa,cumplen con el lema de Schwartz.

Para derivadas de orden mayor y en mas dimensiones se procede analogamente.

Ejercicio:

Calcular varias derivadas de mayor orden para distintas funciones.

11. Campos exactos.

Si $f : R^N \mapsto R$ entonces $\overrightarrow{\text{grad}} f : R^N \mapsto R^N$, es decir el gradiente de f es una función que a cada punto $\overrightarrow{x} \in R^N$ le asocia el vector $\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{x}) \in R^N$.

En general, una función $\overrightarrow{F} : R^N \mapsto R^N$ se llama un campo vectorial. Para entender mejor la idea concentrémonos en el caso $N = 2$, con el entendido que todo se generaliza sin problemas al caso general.

Si se fija una base en el espacio de llegada, digamos $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$ en R^2, conocer $\overrightarrow{F} : R^2 \mapsto R^2$ significa conocer dos funciones $P : R^2 \mapsto R$ y $Q : R^2 \mapsto R$ en el sentido que

$$\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\overrightarrow{i} + Q(x, y)\overrightarrow{j}$$

Cabe ahora hacerse la preganta siguiente.

Problema:

Dado un campo vectorial $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$, bajo que condiciones existe $f : R^2 \mapsto R$ tal que $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{F}(x, y)$?

En términos de coordenadas la pregunta anterior se reduce a:

Dado un campo vectorial $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$, bajo que condiciones existe $f : R^2 \mapsto R$ de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)?$$

Derivando la primera ecuación con respecto a y y la segunda con respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Así, , si las funciones son 'buenas' en el sentido que vale el lema de Schwartz, obtenemos la condición necesaria:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Esta condición resulta también ser suficiente y se tiene el teorema siguiente

Teorema:

Para 'buenas' funciones se tiene que: Dado un campo vectorial $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$, entonces existe $f : R^2 \mapsto R$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Antes de dar una demostración del teorema daremos un ejemplo. La demostración en el caso general es la misma.

Ejemplo:

Consideremos el campo $\overrightarrow{F}(x, y) = (3x^2y + e^y)\overrightarrow{i} + (xe^y + y^2 + x^3)\overrightarrow{j}$. En este caso $P(x, y) = 3x^2y + e^y$ y $Q(x, y) = xe^y + y^2 + x^3$.

Se tiene $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + e^y$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y + 3x^2$. Luego el campo es exacto.

Si f es la función que buscamos esta debe cumplir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 3x^2y + e^y$$

Fijando y e integrando con respecto a x se obtiene

$$f(x,y) = x^3y + xe^y + C(y)$$

donde la constante de integración, $C(y)$, depende del y fijado.

Para determinar $C(y)$ derivamos con respecto de y obteniendo $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xe^y + C'(y)$. Pero como $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = xe^y + y^2 + x^3$. Igualando obtenemos la ecuación para $C(y)$:

$$x^3 + xe^y + C'(y) = xe^y + y^2 + x^3$$

Cancelando términos

$$C'(y) = y^2$$

Observamos que en la última ecuación no aparece x, esto debe pasar siempre que el campo sea exacto. Finalmente por integración se obtiene $C(y) = \frac{y^3}{3} + C$ donde ahora C es una genuina constante. Substituyendo $C(y)$ en la expresión para f se obtiene

$$f(x,y) = x^3y + xe^y + \frac{y^3}{3} + C$$

<u>Demostración del Teorema</u>:

Ya sabemos que la condición es necesaria.

Para ver que es suficiente supongamos que el campo es exacto. Si f es la función que buscamos se tendrá que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

Integrando con respecto a x con y fijo se tiene

$$f(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + C(y)$$

donde $C(y)$ es la constante de integración, que depende del y fijado.

Para encontrar el $C(y)$ derivamos con respecto a y y usando el hecho que el campo es exacto obtenemos

$$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dx = \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx = Q(x,y) - Q(0,y) + C'(y)$$

Por lo tanto $C'(y) = Q(0,y)$, que no depende de x,luego

$$C(y) = \int_0^y Q(0,y)dy + C$$

donde C es una genuina constante.

Reemplazando en la fórmula anterior tenemos

$$f(x,y) = \int_0^x P(s,y)ds + \int_0^y Q(0,r)dr + C$$

Esto termina la demostración. Si tiene buena memoria memorice la fórmula, pero apuesto a que se equivoca, sobre todo en mas dimensiones.

Ejercicio:

Generalice todo lo anterior al caso de mas dimensiones.

12. Diferencial total y la idea de forma diferencial:

Recordemos que para $f : R^N \mapsto R$ definimos la diferencial de f en el punto $\overrightarrow{x}$ como la función lineal $df(\overrightarrow{x}) : R^N \mapsto R$ que aplicada a un vector $\overrightarrow{h}$ era $df(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{h}$.

De este modo podemos pensar en la función $df : R^N \mapsto \{$aplicaciones lineales de R^N en $R\}$ que a cada punto $\overrightarrow{x}$ de R^N le asocia la función lineal $df(\overrightarrow{x}) : R^N \mapsto R$.

Por ejemplo, si $f(x,y) = x$ entonces $df(x,y)(h_1,h_2) = h_1$. La diferencial de esta función, que en este caso particular no depende del punto (x,y), la denotamos por dx. Es decir $dx(\overrightarrow{h}) = h_1$. Analogamente para y, z, etc.

Con esto en mente la aplicación $df : R^N \mapsto \{$aplicaciones lineales de R^N en $R\}$ puede escribirse

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N$$

La aplicación $df : R^N \mapsto \{$aplicaciones lineales de R^N en $R\}$ asi descrita es lo que se llama la diferencial total de f.

En forma mas general, una aplicación $w : R^N \mapsto \{$aplicaciones lineales de R^N en $R\}$ es lo que se llama una forma diferencial en R^N.

Para fijar las ideas de nuevo trabajamos en R^2.

Toda forma diferencial

$$w : R^2 \mapsto \{\text{aplicaciones lineales de } R^N \text{ en } R\}$$

puede escribirse en la forma

$$w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

donde $P : R^2 \mapsto R$ y $Q : R^2 \mapsto R$.

Al igual que en la sección anterior cabe preguntarse.

Problema:

Dada una forma diferencial $w = Pdx + Qdy$, bajo que condiciones existe $f : R^2 \mapsto R$ tal que $df = w$.

Al igual que en la sección anterior, en términos de coordenadas esta pregunta se reduce a: Bajo que condiciones existe $f : R^2 \mapsto R$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)?$$

Así, tenemos exactamente el problema de la sección anterior , pero en este nuevo lenguaje de formas diferenciales. Por supuesto, la respuesta es la misma.

13. Máximos y mínimos:

Repaso de máximos y mínimos de Cálculo 1. Recordar que para encontrar los candidatos a dar un máximo o un mínimo de una función diferenciable $f : [a,b] \mapsto R$ en el intervalo $[a,b]$ se procede como sigue: Para encontrar los candidatos INTERIORES se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$. Las soluciones de esta ecuación que estan en $[a,b]$ son los candidatos INTERIORES. A estos hay que agregar los extremos a y b. Para decidir cual dá máximo y cual dá mínimo se puede evaluar la función en TODOS los candidatos y ver cual dá el mayor y cual dá el menor valor. Otra manera de proceder es usando el conocido criterio de las segundas derivadas. En el caso que la función no sea diferenciable en algunos puntos, estos también deben ser agregados a los candidatos.

En el caso de intervalos no acotados, como $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, +\infty)$ hay que estudiar lo que pasa en $-\infty$ o en $+\infty$.

En el caso de mas variables la situación cambia un poco.

Sea $D \subset R^N$ y sea $f : D \mapsto R$ una función diferenciable. Para no complicar la notación trabajaremos en R^3.

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto en el INTERIOR de D en el cual f alcanza un extremo relativo, entonces la función, de una variable, $x \mapsto f(x, y_0, z_0)$, que esta definida para x en un intervalo alrededor de x_0 pues (x_0, y_0, z_0) es un punto en el INTERIOR de D, tiene un extremo interior relativo en $x = x_0$. De la teoría de Cálculo 1 se deduce que su derivada, como función de una variable, es igual a 0 en x_0. Esto significa exactamente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Procediendo de manera análoga con y y con z se obtiene

Condición necesaria para candidatos INTERIORES:

Si $f : D \mapsto R$ alcanza un extremo relativo en un punto (x_0, y_0, z_0) INTERIOR de D, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Ejercicio:

La temperatura en una placa de la forma $x^2+y^2 \leq 1$ está dada por la función $T(x,y) = x^2 - x + y^2$. Encontratr los puntos de la placa de mayor y menor temperatura.

Solución:

De acuerdo a lo anterior los candidatos interiores se encuentran resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 \\ 0 &= \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 2y \end{aligned}$$

cuya única solución es $(\frac{1}{2}, 0)$.

Tiene que haber dos soluciones. Donde está la otra?

La respuesta es: En el borde de D que denotaremos por ∂D.

Aquí encontramos otra diferencia con el caso de una variable. Mientras en el caso de una dimensión el borde consistía en a lo más de dos puntos, que agregábamos a los candidatos, ahora el borde consiste de toda la curva $x^2+y^2=1$. (Notemos que si estuviéramos en un problema tridimensional el borde sería una superficie!). En este caso es fácil estudiar la función restringida al borde, ya que es muy fácil parametrizar la circunferencia. En efecto la curva $x^2+y^2=1$ se parametriza por $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$. De este modo extremar la función restringida a la curva es lo mismo que extremar la función

$$t \mapsto T(\cos(t), \sin(t)) = 1 - \cos(t).$$

Usando la teoría de Cálculo 1, los extremos de esta función se encuentran donde $\sin(t) = 0$. O sea $t = 0$ o $t = \pi$. Por lo tanto debemos agregar a nuestros candidatos los puntos del borde correspondientes que son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Evaluando ahora T en estos tres candidatos es elemental decidir cual, o cuales, dan un máximo o un mínimo.

Ejercicio:

Encontrar los candidatos a dar los extremos en todo R^3 para $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xz + zy^2$.

Extremos con restricciones

Como sabemos una superficie en R^3 puede darse como una superficie de nivel de una función $G : R^3 \mapsto R$, es decir $S = \{(x, y, z)/G(x, y, z) = 0\}$. Planteamos ahora el siguiente problema.

Problema

Sea $f : R^3 \mapsto R$. Encontrar los valores extremos de f/S. Es decir encontrar los puntos de la superficie S tales que la función f restringida a la superficie alcanza su extremo. En el caso de máximo relativo debemos encontrar los puntos $\overrightarrow{x_0} \in S$ tales que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ para todo } x \in S \text{ y tal que } ||x - x_0|| < \epsilon.$$

Se define de manera análoga mínimos relativos.

Que condición deben cumplir los candidatos en este caso?

Si $(x_0, y_0, z_0) \in S$ dá un máximo o mínimo relativo a los otros puntos de la superficie entonces si $\overrightarrow{\gamma}(t)$ es una curva contenida en la superficie y tal que $\overrightarrow{\gamma}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ la función auxiliar $h(t) = f(\overrightarrow{\gamma}(t))$ tendrá un máximo o un mínimo en $t = 0$. De Cálculo 1 se deduce que $h'(0) = 0$. Así, por la regla de la cadena obtenemos

$$0 = h'(0) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(0)$$

Esto significa que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ y $\overrightarrow{\gamma}'(0)$ son perpendiculares. Recordando que $\overrightarrow{\gamma}'(0)$ es un vector tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) y que variando la curva los podemos obtener todos (SIEMPRE QUE (x_0, y_0, z_0) SEA INTERIOR EN LA SUPERFICIE!!) se deduce que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).

Si nos acordamos ahora que $\overrightarrow{\text{grad}} G(x_0, y_0, z_0)$ también es normal a la superficie en ese punto deducimos que

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} G(x_0, y_0, z_0)$$

para algún $\lambda \in R$.

De este modo como el candidato debe estar en la superficie tenemos que debe satisfacer las ECUACIONES de LAGRANGE

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \lambda \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \lambda \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \lambda \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\\
G(x_0, y_0, z_0) &= 0
\end{aligned}$$

Observación

Lo anterior también vale para curvas en R^2 y también para los objetos correspondientes en más dimensiones.

Ejercicio

a) Extremar $f(x, y, z) = x - yz$ restringida a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Encontrar el punto de la curva $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y + 3$ que está más cercano al origen.

Mas restricciones

Una curva en R^3 puede darse como la intersección de dos superficies. Digamos $G_1(x, y, z) = 0$ y $G_2(x, y, z) = 0$. El problema de extremar una función f restringida a esta curva se reduce entonces al problema siguiente.

Problema

Extremar la función $f(x, y, z)$ sujeta a $G_1(x, y, z) = 0$ y $G_2(x, y, z) = 0$.

Cómo encontrar los candidatos?

Al igual que antes si (x_0, y_0, z_0) es un candidato y $\overrightarrow{\gamma}(t)$ es una parametrización de la curva tal que $\overrightarrow{\gamma}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ entonces la función auxiliar $h(t) = f(\overrightarrow{\gamma}(t))$ tendrá un extremo en $t = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$. Así, por la regla de la cadena, tenemos

$$0 = h'(t) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(0)$$

O sea $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la curva en el punto (x_0, y_0, z_0). Como $\overrightarrow{\text{grad}} G_1(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie $G_1(x, y, z) = 0$ también lo es a la curva. Análogamente $\overrightarrow{\text{grad}} G_2(x_0, y_0, z_0)$ también es normal a la curva. Por lo tanto, si $\overrightarrow{\text{grad}} G_1(x_0, y_0, z_0)$ y $\overrightarrow{\text{grad}} G_2(x_0, y_0, z_0)$ son linealmente independientes, se debe tener que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ es una combinación lineal de $\overrightarrow{\text{grad}} G_1(x_0, y_0, z_0)$ y $\overrightarrow{\text{grad}} G_2(x_0, y_0, z_0)$. Esto significa que existen reales λ_1 y λ_2 tales que satisfacen las ECUACIONES de LAGRANGE con dos restricciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\\
G_1(x_0, y_0, z_0) &= 0\\
G_2(x_0, y_0, z_0) &= 0
\end{aligned}$$

Observación

De nuevo hacemos notar que lo anterior también vale para los objetos correspondientes en más dimensiones.

Ejercicio

Extremar $f(x, y, z) = x + y + z$ restringida a la curva $x^2 - y^2 = 1$, $z - xy = 2$.

En el siguiente ejercicio se debe buscar candidatos en el interior, en los bordes bidimensionales, en los bordes de los bordes y en los bordes de los bordes de los bordes.

Ejercicio

Extremar

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2yz + z^2 - 25$$

en la región $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$.

14. El teorema de Taylor y el criterio de segundas derivadas:

Recordemos un poco de Cálculo 1. Si $f : R \mapsto R$ es tantas veces derivable como necesitemos sabemos que

$$f(t) = \frac{f(t_0)}{0!} + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + R(t - t_0)$$

donde el resto R está dado por $R(t - t_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}$ y c es un punto intermedio entre t y t_0. En el caso de $n = 1$ tenemos que

$$f(t) = \frac{f(t_0)}{0!} + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(c)}{2!}(t - t_0)^2$$

lo que significa que estamos aproximando, cerca de t_0 la función $f(t)$ por la función $t \mapsto f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$, que tiene por gráfico la recta tangente al gráfico de f en el punto $(t_0, f(t_0))$. El error que se comete es $\frac{f''(c)}{2!}(t - t_0)^2$ que es cuadr'atico en el incremento $t - t_0$.

En el caso de $n = 2$ tenemos que

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(t - t_0)^3$$

lo que significa que estamos aproximando, cerca de t_0 la función $f(t)$ por la función $t \mapsto f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2$, que tiene por gráfico una parábola tangente al gráfico de f en el punto $(t_0, f(t_0))$. El error que se comete es $\frac{f'''(c)}{3!}(t - t_0)^3$ que es cúbico en el incremento $t - t_0$.

En el caso general se aproxima f por un polinomio de grado n y el error es de orden $n + 1$ en el incremento.

Una aplicación de lo anterior es el criterio de las segundas derivadas para máximos y mínimos. Si una función f alcanza un extremo en un punto t_0 en el INTERIOR de su dominio entonces $f'(t_0) = 0$. Expandiendo según Taylor alrededor de t_0 se tiene

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(t - t_0)^3$$

Como para valores pequeños de $t - t_0$, $(t-t_0)^3$ es mucho mas pequeño que $(t-t_0)^2$, el signo de $\frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(t-t_0)^3$ está determinado por el signo de $f''(t_0)$ para t cercano a t_0. De este modo se tiene

$$f(t) = f(t_0) + \text{"algo"}$$

donde, para t cercano a t_0, el signo del "algo" es el signo de $f''(t_0)$. Así, f tiene un mínimo local si $f''(t_0) > 0$ y un máximo local si $f''(t_0) < 0$. En el caso que $f''(t_0) = 0$ se puede expandir por Taylor hasta mayores órdenes para decidir que clase de punto crítico es t_0.

Pasemos ahora al Teorema de Taylor en mas dimensiones. Trabajaremos en R^3 entendiendo que la generalización a mas dimensiones es igual.

Sea $f : R^3 \mapsto R$ diferenciable tanto como lo necesitemos. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto en el interior de su dominio.

Obtendremos la expansión de Taylor de f alrededor de (x_0, y_0, z_0) basándonos en el caso unidimensional. Para esto, sea (x, y, z) un punto cercano a (x_0, y_0, z_0) y consideremos la función auxiliar $h : R \mapsto R$ definida por

$$h(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0))$$

Observamos que $h(0) = f(x_0, y_0, z_0)$ y $h(1) = f(x, y, z)$, luego la expansión de Taylor de h con $t_0 = 0$ y $t = 1$ nos dará la expansión deseada.

Necesitamos ahora las derivadas de h. Usando cuidadosamente la regla de la cadena se obtiene

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$h''(0) = \sum_{\{(i,j,k)/i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0, i+j+k=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k$$

y en general

$$h^{(n)}(0) = \sum_{\{(i,j,k)/i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0, i+j+k=n\}} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k$$

Aplicando ahora el Teorema de Taylor de Cálculo 1 a la función h con $t_0 = 0$ y $t = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) &+ \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) &+ \\ \frac{1}{2!} \sum_{\{(i,j,k)/i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0, i+j+k=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k &+ .... \\ .... + \frac{1}{n!} \sum_{\{(i,j,k)/i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0, i+j+k=n\}} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k &+ R \end{aligned}$$

donde

$$R = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\{(i,j,k)/i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0, i+j+k=n+1\}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x_1, y_1, z_1)(x-x_0)^i(y-y_0)^j(z-z_0)^k$$

y (x_1, y_1, z_1) es un punto que está en el segmento que une (x, y, z) con (x_0, y_0, z_0).

Criterio de Segundas Derivadas para EXTREMOS LIBRES.

Podemos ahora dar una idea de como se vé el criterio de segundas derivadas en el caso de varias variables. Trabajaremos sólo en el caso de $f : R^2 \mapsto R$, para el caso general necesitaríamos un poco de algebra lineal pero las ideas son las mismas.

Sea $f : R^2 \mapsto R$ y supongamos que f tiene un punto crítico INTERIOR en (x_0, y_0). Por la expansión de Taylor, hasta orden 2 se tiene

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ \frac{1}{2!} \sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=2\}} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)(x-x_0)^i(y-y_0)^j + R \end{aligned}$$

donde

$$R = \frac{1}{3!} \sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=3\}} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_1,y_1)(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

y (x_1, y_1) es un punto que está en el segmento que une (x, y) con (x_0, y_0).

Queremos comparar el valor de f en el punto crítico (x_0, y_0) con los valores de f en puntos cercanos (x, y). Escribamos $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ y recordemos que (x, y) cercano a (x_0, y_0) significa r pequeño. Substituyendo en la fórmula precedente, acordándonos que (x_0, y_0) es un punto crítico, obtenemos

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{2!} \sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)(\cos(\theta))^i(\sin(\theta))^j \right) r^2 + R$$

donde

$R = G(\theta) r^3$ y G es una función acotada.

Supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$\left(\sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)(\cos(\theta))^i(\sin(\theta))^j \right) \geq M > 0 \ \forall \ \theta$$

entonces para cualquier r pequeño se tendrá $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ y tendremos un mínimo.

Análogamente si existe $M < 0$ tal que

$$\left(\sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)(\cos(\theta))^i(\sin(\theta))^j \right) \leq M < 0 \ \forall \ \theta$$

tendremos un máximo.

En el caso que

$$\left(\sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)(\cos(\theta))^i(\sin(\theta))^j\right)$$

es mayor que 0 para algunos valores de θ y menor que 0 para otros tendremos un punto silla.

Así para decidir que clase de punto crítico es (x_0, y_0) hay que estudiar el signo de

$$\left(\sum_{\{(i,j)/i\geq 0, j\geq 0, i+j=2\}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)(\cos(\theta))^i(\sin(\theta))^j\right) \ \forall\ \theta.$$

Desenredando la notación y dividiendo por $(\cos(\theta))^2$, lo que no cambia el signo de la expresión, debemos estudiar el signo de

$$W(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\tan(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\tan(\theta))^2 \ \forall\ \theta$$

Esta es una parábola en $\tan(\theta)$ y volvemos a los cursos elementales.

Cuándo es una parábola $p(x) = A + 2Bx + Cx^2$ estrictamente mayor, menor que cero, o cuando cambia de signo?

La respuesta está en el discriminante $\triangle = B^2 - AC$.

Si $\triangle > 0$ entonces $p(x)$ cambia de signo. Si $\triangle < 0$ distinguimos dos casos; si $C > 0$ entonces $p(x) > 0$ y si $C < 0$ entonces $p(x) < 0$.

De este modo estudiando la parábola en $\tan(\theta)$ tenemos el discriminante

$$\triangle = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0))\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(x_0,y_0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(x_0,y_0)\right).$$

Por lo tanto si pensamos un poco, no mucho, tenemos el siguiente criterio

CRITERIO PARA EXTREMOS LIBRES:

Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f entonces:

a) Si $\triangle > 0$ entonces es un punto silla.

b) Si $\triangle < 0$ entonces hay dos casos:

  b1) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) > 0$ es un mínimo.

  b2) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) < 0$ es un máximo.

c) Si $\triangle = 0$ no hay información.

Ejercicio

Estudiar los puntos críticos en R^2 de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x.$$

Otra notación

Usando matrices la expansión de Taylor en tres dimensiones hasta orden 2 puede escribirse en la forma

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) \quad +$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0) \quad +$$

$$\frac{1}{2!}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} + R$$

donde el error R es un polinomio homogéneo de grado 3 en $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. La matriz que aparece en a fórmula precedente se llama la <u>Matriz Hessiana en el punto (x_0,y_0,z_0)</u>.

En R^3 los puntos cercanos a (x_0,y_0,z_0) pueden escribirse en la forma $(x,y,z)=(x_0+rw_1,y_0+rw_2,z_0+rw_3)$ con $w_1^2+w_2^2+w_3^2=1$ y r pequeño. Ahora si (x_0,y_0,z_0) es un punto crítico de la fórmula precedente se tendrá

$$f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) \quad =$$

$$\frac{1}{2!}(w_1,w_2,w_3)\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} r^2 + Gr^3$$

donde G es una función acotada.

De este modo para decidir que clase de punto crítico es (x_0,y_0,z_0) hay que estudiar el signo de

$$H(f)(x_0,y_0,z_0)(w_1,w_2,w_3) = (w_1,w_2,w_3)\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

para todo (w_1,w_2,w_3) tal que $w_1^2+w_2^2+w_3^2=1$.

Por ejemplo si existe $M>0$ tal que $H(f)(x_0,y_0,z_0)(w_1,w_2,w_3)\geq M>0$ para todo (w_1,w_2,w_3) tal que $w_1^2+w_2^2+w_3^2=1$ entonces (x_0,y_0,z_0) dá un mínimo relativo. Analogamente para máximo relativo y punto silla.

El decidir si $H(f)(x_0,y_0,z_0)(w_1,w_2,w_3)$ para todo (w_1,w_2,w_3) tal que $w_1^2+w_2^2+w_3^2=1$ es mayor o menor que 0, o si cambia de signo, es un problema de máximos y mínimos con restricciones que conduce a un problema de resolver sistemas lineales de ecuaciones. En el curso de álgebra lineal se ven criterios para decidir la positividad, negatividad o cambio de signo de la expresión anterior.

Todo lo anterior vale en el caso de mas variables donde aparecen matrices de $n \times n$, etc.