Solución Variacional de Ecuaciones de Schrödinger Estocásticas

Carlos Mauricio García Vera [1]

Tesis para optar el título profesional de Ingeniero Civil Matemático

Tutor: Carlos M. Mora González

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Concepción, Chile.

Agosto, 2012

[1] Ha recibido subsidios por parte de los proyectos FONDECYT 1070686 y BASAL FBO-16 Además, una parte de esta memoria ha sido realizada en las dependencias del CI^{2}MA, proyecto BASAL PFB-03.

A Mi Madre, Abuelos y Hermana, Graciela, Orquídea, Pedro y Verónica.

Agradecimientos Agradezco enormemente al Profesor Carlos Mora, por su apoyo, paciencia y ejemplo. Al Departamento de Ingeniería Matemática por la formación de calidad impartida y al Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI^{2}MA) por facilitar sus dependencias para el desarrollo de esta tesis.

Resumen

Con el propósito de tratar sistemas cuánticos abiertos que involucren Hamiltonianos con potenciales singulares, desarrollamos la formulación variacional de las ecuaciones estocásticas de Schrödinger de tipo lineal y no-lineal con espacios de estados de dimensión infinita. En particular, establecemos la existencia y unicidad de soluciones regulares de estas ecuaciones de evolución estocásticas. Además, probamos que el valor medio del cuadrado de la norma de la solución variacional de la ecuación lineal de Schrödinger estocástica es constante.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Motivados por el estudio de sistemas cuánticos abiertos que involucran potenciales singulares, en esta Memoria de Ingeniero Civil Matemático desarrollamos la formulación variacional de las ecuaciones estocásticas de Schrödinger de tipo lineal y no-lineal, cuyos espacios de estados tienen dimensión infinita.

La ecuación lineal de Schrödinger estocástica es una ecuación de evolución estocástica sobre el espacio de Hilbert complejo separable $(\mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que tiene la forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t G(s) X_s ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t L_k(s) X_s dW_s^k, \tag{1.1}$$

donde $W^1, W^2, \ldots,$ son procesos de Wiener independientes, a valores reales, definidos sobre la base estocástica $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \mathbb{P}\right)$, que satisface las condiciones usuales. Como es usual, $(G(t))_{t\geq 0}, (L_1(t))_{t\geq 0}, (L_2(t))_{t\geq 0}, \ldots$, son familias de operadores lineales no-acotados en $\mathfrak{h}$ que están relacionados en un dominio conveniente a través de:

$$G(t) = -iH(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} L_k(t)^* L_k(t), \tag{1.2}$$

con $H(t)$ operador simétrico. En la literatura Física se utiliza (1.1) para modelar sistemas cuánticos abiertos. Efectivamente, $H(t)$ es el Hamiltoniano de un sistema cuántico cuya interacción con un medio ambiente, o baño térmico, es descrita por los operadores $(L_1(t))_{t\geq 0}, \ldots)$ (ver, e.g., [1, 5, 8]). Usando argumentos formales, de (1.2) podemos concluir que para todo $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(\| X_t \|^2\right) = \mathbb{E}\left(\| X_0 \|^2\right). \tag{1.3}$$

Si $dim(\mathfrak{h}) < \infty$, entonces (1.1) se reduce a una ecuación diferencial estocástica lineal, luego (1.1) tiene una única solución. En caso que $\mathfrak{h}$ sea infinito-dimensional, diferentes interpretaciones de la igualdad presente en (1.1) nos llevan a diferentes tipos de soluciones para

(1.1). Bajo ciertas hipótesis, que incluyen G semigrupo de contracciones y $\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k^* x\|^2 < \infty$ en un dominio esencial de G^*, Holevo [9] probó la existencia y unicidad de la solución topológica débil de (1.1). Como Holevo [9] señala, una solución débil puede no satisfacer la propiedad (1.3), la cual está estrechamente relacionada con la válidez física del sistema cuántico abierto que describe (1.1).

En [7, 13, 16] se desarrollaron las soluciones fuertes de (1.1) que son C-regulares en el sentido que $\mathbb{E}\|X_t\|^2 \leq \mathbb{E}\|X_0\|^2$ y $\mathbb{E}\|CX_t\|^2$ es localmente acotado en el tiempo; C es un operador usualmente no acotado. Fagnola y Mora [7] probaron la existencia y unicidad de soluciones fuertes C-regulares de (1.1) en caso que exista un operador positivo C tal que:

(P1) $G(t)$ es relativamente acotado con respecto a C.

(P2) $L_1(t), L_2(t), \ldots$ son relativamente acotados con respecto a C.

(P3) Para todo x en un dominio esencial de C^2,

$$2Re\langle C^2 x, G(t)x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \| CL_k(t)x \|^2 \leq \alpha(t) \left(\| Cx \|^2 + \| x \|^2\right), \tag{1.4}$$

donde $\alpha(t)$ es una función no decreciente.

Además de garantizar la propiedad de conservatividad (1.3), las soluciones fuertes C-regulares de (1.1) permiten representar probabilísticamente las ecuaciones maestras cuánticas [12] y las ecuaciones maestras cuánticas adjuntas [15], así como estudiar la evolución de los observables cuánticos no acotados [12, 15]. Las hipótesis de [7, 13, 16] han sido chequeadas en varios sistemas físicos como osciladores cuánticos en la representación dada por el operador Número [13, 16], sistemas formados por un número arbitrario de partículas de Fermi [16] y en sistemas cuánticos abiertos con potenciales regulares descritos en la representación dada por el operador Posición [7].

Hasta donde conocemos, no se ha comprobado la existencia de soluciones fuertes regulares de (1.1) en casos donde $H(t)$ incluye potenciales singulares, como en el siguiente sistema.

Ejemplo 1 *Consideremos el espacio de estados $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Para todo $t \geq 0$, hacemos*

$$H(t) = -\alpha\triangle - \beta/|x| + \sum_{k=1}^{n} g_k(t,\cdot)^2,$$

donde α, β son números reales positivos, y $g_1, \ldots, g_n \in C^{0,2}([0,\infty[\times\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Aqui $\triangle$ denota el operador Laplaciano sobre $\mathbb{R}^3$. Para cada $k = 1, \ldots, m$ definimos:

$$L_k(t) = \phi_k(t,\cdot),$$

con $\phi_k \in C^{0,2}\left([0,\infty[\times\mathbb{R}^3,\mathbb{C}\right)$, *y además elegimos* $L_k = 0$ *cuando* $k > m$. *Finalmente,*

$$G(t) = -iH(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left|\phi_k(t,\cdot)\right|^2.$$

El Ejemplo 1 describe átomos de hidrógeno en interacción con baños térmicos (ver, e.g., [27, 28]). Supongamos ahora que las funciones $g_1,\ldots,g_n$ y $\phi_1,\ldots,\phi_m$ presentes en el Ejemplo 1 tienen un crecimiento del tipo:

- Para todo $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\left|\overline{g(x)}\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)\right| \leq K(1+|x|)$, con $j=1,2,3$.
- Para todo $x\in\mathbb{R}^3$, $|g(x)\triangle g(x)| \leq K\left(1+|x|^2\right)$.

Entonces, Fagnola y Mora [6] probaron que para cierto valor de γ, el operador D dado por la raíz cuadrada del operador positivo

$$-\alpha\triangle - \beta/|x| + \gamma + |x|^2$$

satisface la desigualdad (1.4), unido a

$$\|\phi_k(t,\cdot)f\|^2 \leq K\left(\|f\|^2 + \|Df\|^2\right)$$

para todo f en el dominio de D, luego D verifica las Condiciones P2 y P3; Fagnola y Mora [6] además chequearon que los operadores D y $\left(-\triangle + |x|^2 + 1\right)^{1/2}$ son relativamente acotados uno con respecto al otro. Sin embargo, ya que el cuadrado de D se comporta esencialmente como $G(t)$, $G(t)$ no es relativamente acotado con respecto a tal D. Lo que nos lleva a concluir que D no satisface la Condición P1 aplicada al Ejemplo 1.

No podemos garantizar la existencia de soluciones fuertes de (1.1) que son solamente D-regulares en el caso del Ejemplo 1 debido a que ellas no pertenecen a $\mathcal{D}(G(t))$, el dominio de $G(t)$. No obstante, en el Ejemplo 1 podemos chequear que

(P1') $G(t)$ es relativamente acotado con respecto a D^2 y

$$(f,g)\to g_t(f,g) := \langle G(t)f,g\rangle$$

es una forma sesquilineal continua definida sobre $\left(\mathcal{D}(D^2),\|\cdot\|_D\right)\times\left(\mathcal{D}(D^2),\|\cdot\|_D\right)$, donde $\|\cdot\|_D$ es la norma del grafo de D.

Ya que g_t se extiende a una forma sesquilineal continua en $(\mathcal{D}(D), \|\cdot\|_D) \times (\mathcal{D}(D), \|\cdot\|_D)$, denotada también por g_t, nos podemos preguntar si existirá un proceso D-regular X_t que satisfaga (1.1) en el sentido variacional, o sea para todo $x \in \mathcal{D}(D)$,

$$\langle X_t, x\rangle = \langle X_0, x\rangle + \int_0^t g_s(X_s, x)\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s) X_s, x\rangle dW_s^k. \tag{1.5}$$

El Capítulo 2 nos asegura que sí. En efecto, en el Capítulo 2 demostramos que (1.1) tiene una única solución variacional C-regular bajo las Condiciones P2 y P3, unidas a la Condición P1' con C en lugar de D. Con este fin, modificando la demostración del Teorema 1 de [7] obtenemos X_t como límite de soluciones de ecuaciones de evolución estocásticas lineales cuyos coeficientes son operadores acotados construidos usando aproximaciones por resolvente. Una alternativa a nuestro procedimiento, es adaptar un resultado general de la Sección 3.2 de Rozovskii [26], donde se construyen soluciones variacionales regulares de ecuaciones lineales estocásticas disipativas sobre espacios de Hilbert reales, por medio de límites de soluciones de ecuaciones de evolución estocásticas coercivas.

Habiéndose aclarado el buen posicionamiento de (1.1), más bien de (1.5), queda abierta la pregunta si las soluciones variacionales C-regulares nos ayudarán a comprobar rigurosamente propiedades físicas de, por ejemplo, el sistema cuántico abierto descrito en Ejemplo 1. En esta dirección, en el Capítulo 2 probamos que la propiedad de conservatividad (1.3) continúa siendo válida bajo las Condiciones P2, P3 y P1' (con C en lugar de D).

En el Capítulo 3 vemos que la solución variacional C-regular de (1.1) permite lidiar con la ecuación no lineal de Schrödinger estocástica:

$$\begin{aligned} Y_t = Y_0 &+ \int_0^t \left(G(s) Y_s + \sum_{k=1}^{\infty} (Re\langle Y_s, L_k(s) Y_s\rangle L_k(s) Y_s - \frac{1}{2} Re^2 \langle Y_s, L_k(s) Y_s\rangle Y_s) \right) ds \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(L_k(s) Y_s - Re\langle Y_s, L_k(s) Y_s\rangle Y_s \right) dW_s^k. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Esta ecuación de evolución estocástica juega un rol fundamental en la modelación de los procesos de medición cuánticos (ver, e.g., [1, 2, 3, 4, 5, 8]) y la simulación numérica de la evolución de los valores medios de los observables cuánticos (ver, e.g., [5, 14, 21]).

En [14] (ver también [1, 20]) se probó la existencia y unicidad de soluciones de (1.6) para $\mathfrak{h}$ finito-dimensional. Cuando el espacio de estados $\mathfrak{h}$ es infinito-dimensional, la existencia de soluciones de (1.6) fue establecida por Barchielli y Holevo [2] en caso $G(t)$, $L_1(t), L_2(t), \ldots$ operadores acotados. Además, Fagnola, Mora y Rebolledo [7, 17] obtuvieron que la existencia y unicidad de la solución fuerte C-regular de (1.1) implica la existencia y unicidad de la solución fuerte C-regular de (1.6), que este caso es débil en el sentido probabilístico. Regresando al Ejemplo 1, si un proceso estocástico Y_t es solamente D-regular, no puede ser solución fuerte de (1.6) porque no podemos asegurar que Y_t está en el dominio de $G(t)$. Esto nos lleva a considerar una formulación variacional de (1.6), que se forma nuevamente reemplazando $G(t)$ por la forma sesquilineal $g_t(\cdot,\cdot)$. En el Capítulo 3, probamos la existencia y unicidad de la solución variacional C-regular de (1.6) en caso que se cumpla la existencia y unicidad de la solución variacional C-regular de (1.1). Con este propósito modificamos la demostración del Teorema 1 de [17].

1.1. Notación

En esta tesis, $(\mathfrak{h},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ representa un espacio de Hilbert complejo separable, donde el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en la segunda componente y sesqui-lineal en la primera. Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ al dominio del operador lineal A. Cuando $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ son espacios normados, $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ será el espacio de todos los operadores lineales acotados de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{Y}$; escribimos $\mathcal{L}(\mathfrak{X})=\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$. El conmutador entre A y B, operadores lineales en $\mathfrak{h}$, es $[A,B]=AB-BA$. La σ-álgebra de Borel asociada al espacio topológico (X,τ) será denotada por $\mathcal{B}(X)$.

Sea C un operador lineal en $\mathfrak{h}$. Entonces para $x,y\in\mathcal{D}(C)$ definimos

$$\langle x,y\rangle_C=\langle x,y\rangle+\langle Cx,Cy\rangle,$$

el producto escalar asociado al grafo de C, además ponemos $\|x\|_C=\sqrt{\langle x,x\rangle_C}$. El símbolo $L^2(\mathbb{P},\mathfrak{h})$ representa al conjunto de todas las variables aleatorias de cuadrado integrable de $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ en $(\mathfrak{h},\mathcal{B}(\mathfrak{h}))$. Adicionalmente, $L^2_C(\mathbb{P},\mathfrak{h})$ denota al conjunto de todos los $X\in L^2(\mathbb{P},\mathfrak{h})$ tales que $X\in\mathcal{D}(C)$ a.s. y $\mathbb{E}\|X\|^2<\infty$. Definimos $\pi_C:\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ como

$$\pi_C(x)=\begin{cases} x & si\ x\in\mathcal{D}(C)\\ 0 & si\ x\notin\mathcal{D}(C)\end{cases}.$$

En el caso que $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ sea $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ medible, $\lceil g\rceil$ representa el operador de multiplicación en $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ dado por $f\to gf$. Denotaremos por $C^k(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$, al espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{K}$ cuyas derivadas parciales de hasta orden k son continuas. Mas aún, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ será el conjunto de todas las funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ con soporte compacto. Considere $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$. Entonces $\partial_k f$ denotará a la k-ésima derivada parcial de f, ∇f al gradiente de f y $\triangle f$ al Laplaciano de f.

Si no se presta a confusión, en lo que sigue diferentes constantes no-negativas serán escritas como K. Además, $K(\cdot)$ denotará a diferentes funciones no decrecientes y no negativas definidas sobre el intervalo $[0,\infty[$.

Capítulo 2

Ecuación lineal de Schrödinger estocástica

2.1. Resultados Principales

Con vistas a precisar el concepto de solución de (1.1) que utilizaremos en esta Memoria, a continuación construimos una forma sesquilineal a partir de $G(t)$.

Hipótesis 1 *Asumimos que C es un operador positivo en $\mathfrak{h}$ tal que:*

(H1.1) Para todo $l \in \mathbb{N}$ y para todo $t \geq 0$, $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(L_l(t))$ y $L_l(\cdot) \circ \pi_C$ es medible como función de $([0, \infty[\times \mathfrak{h}, \mathcal{B}([0, \infty[\times \mathfrak{h}))$ en $(\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h}))$.

(H1.2) Para todo $t \geq 0$, $\mathcal{D}(C^2) \subseteq \mathcal{D}(G(t))$ y

$$G(\cdot) \circ \pi_{C^2} : ([0, \infty[\times \mathfrak{h}, \mathcal{B}([0, \infty[\times \mathfrak{h})) \to (\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h}))$$

es medible.

(H1.3) Para todo $t \geq 0$ y cualesquiera $x, y \in \mathcal{D}(C^2)$ tenemos que:

$$| \langle G(t)x, y \rangle | \leq K(t) \left\| x \right\|_C \left\| y \right\|_C . \tag{2.1}$$

Nota 2.1 *Gracias a que $\mathcal{D}(C^2)$ es un dominio esencial de C, usando la Condición H1.3 y un proceso de límite extendemos de manera única la aplicación $(x, y) \mapsto \langle G(t)x, y \rangle$ a una forma sesquilineal acotada $g_t : ((\mathcal{D}(C), \left\|\cdot\right\|_C) \times (\mathcal{D}(C), \left\|\cdot\right\|_C)) \to \mathbb{C}$ que satisface*

$$|g_t (x, y)| \leq K(t) \left\| x \right\|_C \left\| y \right\|_C ,$$

donde $K(t)$ es la función no decreciente y no negativa presente en (2.1). Además,

$$g_t \circ (\pi_C, \pi_C) : ([0, \infty[\times \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}, \mathcal{B}([0, \infty[\times \mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

es medible, como demostramos en el Lema 2.1.

La noción de C-solución de (1.1) usada en [7, 16] explota la propiedad que $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(G(t))$. Como en este trabajo solamente $\mathcal{D}(C^2) \subseteq \mathcal{D}(G(t))$, emplearemos soluciones variacionales de (1.1) que son C-regulares.

Definición 2.1 *Supongamos que C verifica la Hipótesis 1. Sea $\mathbb{I} = [0, \infty[$ ó $\mathbb{I} = [0, T]$, con $T > 0$. Diremos que un proceso estocástico adaptado $(X_t)_{t \in \mathbb{I}}$ con valores en $\mathfrak{h}$ y trayectorias continuas es una C-solución variacional de* (1.1) *en $\mathbb{I}$ con dato inicial X_0 si y solo si para todo $t \in \mathbb{I}$:*

- $\mathbb{E} \left\| X_t \right\|^2 \leq \mathbb{E} \left\| X_0 \right\|^2$, *$X_t \in \mathcal{D}(C)$ $\mathbb{P} - c.s$ y*

$$\sup_{s \in [0,t]} \mathbb{E} \left\| C X_s \right\|^2 < \infty.$$

- *$\mathbb{P}$-c.s, para todo $x \in \mathcal{D}(C)$:*

$$\langle X_t, x \rangle = \langle X_0, x \rangle + \int_0^t g_s \left(\pi_C \left(X_s \right), x \right) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s) \circ \pi_C \left(X_s \right), x \rangle dW_s^k.$$

La siguiente hipótesis surge al reemplazar en los supuestos usados en [7] la propiedad $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(G(t))$ por $\mathcal{D}(C^2) \subseteq \mathcal{D}(G(t))$ y la Condición H1.3.

Hipótesis 2 *Asumamos que C verifica la Hipótesis 1. Suponemos además que:*

(H2.1) Para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathcal{D}(C^2)$,

$$\left\| G\left(t\right) x \right\|^2 \leq K(t) \left\| x \right\|_{C^2}^2 .$$

(H2.2) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una función no-decreciente y no-negativa $K_k\left(t\right)$ tal que:

$$\left\| L_k(t) x \right\|^2 \leq K_k\left(t\right) \left\| x \right\|_C^2$$

para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathcal{D}(C)$.

(H2.3) Existe una función no-decreciente y no-negativa α sobre $[0,+\infty[$ tal que:

$$2Re\langle C^2x, G(t)x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)x\|^2 \leq \alpha(t)\|x\|_C^2$$

para todo $t \geq 0$ y x en un dominio esencial $\mathcal{D}_1$ de C^2.

(H2.4) Existe un dominio esencial $\mathcal{D}_2$ de C^2 tal que:

$$2Re\langle G(t)x, x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 \leq 0$$

para todo $x \in \mathcal{D}_2$ y $t \geq 0$.

En la Sección 2.3 probamos nuestro primer teorema, que afirma que (1.1) tiene una única solución C-regular bajo la Hipótesis 2, ahora en el sentido variacional.

Teorema 1 *Supongamos que C satisface la Hipótesis 2. Sea $X_0 \in L^2_C((\mathcal{F}_0, \mathbb{P}), \mathfrak{h})$. Entonces (1.1) tiene una única C-solución variacional $(X_t)_{t\geq 0}$ con dato inicial X_0. Además,*

$$\mathbb{E}\|CX_t\|^2 \leq \exp(t\alpha(t))(\mathbb{E}\|CX_0\|^2 + t\alpha(t)\mathbb{E}\|X_0\|^2).$$

Nota 2.2 *Ya que $\mathcal{D}(C^2)$ es un dominio esencial de $\mathcal{D}(C)$, de la Condición H2.4 concluimos que:*

(H2.4') Existe un dominio esencial $\mathcal{D}_3$ de C tal que:

$$2Re\left(g_t(x,x)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 \leq 0$$

para todo $x \in \mathcal{D}_3$ y $t \geq 0$.

Directamente de la demostración del Teorema 1, tenemos que el Teorema 1 seguirá siendo válido si reemplazamos la Condición H2.4 por la Condición H2.4', que es más débil pero está formulada en términos de g_t.

La igualdad (1.3) nos permite deducir formalmente que el sistema cuántico abierto descrito por $G(t)$ y $L_1(t), L_2(t), \ldots$ es conservativo, lo cual en nuestro contexto significa que $\mathbb{E}\|X_t\|^2$ es constante para todo $t \geq 0$. Sin embargo, esta propiedad no siempre se cumple; por ejemplo, no todas las soluciones topológicas débiles de (1.1) son conservativas (ver, e.g., [9]). En la Sección 2.4 probamos nuestro segundo teorema, que establece la igualdad $\mathbb{E}\|X_t\|^2 = \mathbb{E}\|X_0\|^2$ cuando X_t es una C-solución variacional de (1.1), asegurando una propiedad ligada fuertemente a la interpretación física del modelo (1.1).

Hipótesis 3 *Adopte la Hipótesis 2 con la Condición H2.4 sustituida por:*

(H3.1) Existe un dominio esencial $\mathcal{D}_2$ de C^2 tal que para todo $x \in \mathcal{D}_2$ y $t \geq 0$:

$$2Re\langle G(t)x, x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 = 0.$$

Además, supondremos que (1.1) *tiene una única C-solución variacional para cualquier dato inicial en $L^2_C(\mathbb{P}, \mathfrak{h})$.*

Teorema 2 *Supongamos que C satisface la Hipótesis 3 y que $X_0 \in L^2_C(\mathbb{P}, \mathfrak{h})$ es $\mathcal{F}_0$-medible. Entonces $(\|X_t\|^2)_{t\in[0,T]}$ es una martingala, en particular para todo $t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}\,\|X_t\|^2 = \mathbb{E}\,\|X_0\|^2 .$$

Nota 2.3 *Similarmente a la Nota 2.2, el Teorema 2 continuará siendo válido si reemplazamos la Condición H3.1 por:*

(H3.1') Existe un dominio esencial $\mathcal{D}_3$ de C tal que para todo $x \in \mathcal{D}_3$ y $t \geq 0$:

$$2Re\left(g_t\left(x, x\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 = 0.$$

2.2. Demostración de la medibilidad de g_t

Lema 2.1 *Supongamos que se cumple la Hipótesis 1. Considere la aplicación g_t definida en la Nota 2.1. Entonces, la función*

$$g_\cdot \circ (\pi_C, \pi_C) : ([0, \infty[\times \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}, \mathcal{B}([0, \infty[\times \mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

es medible.

Demostración Denotaremos provisionalmente como $\|\cdot\|_1$ a la norma de $\mathfrak{h}^2$ $(:= \mathfrak{h} \times \mathfrak{h})$, o sea

$$\|(x, y)\|_1^2 := \|x\|_{\mathfrak{h}}^2 + \|y\|_{\mathfrak{h}}^2$$

para todo $x, y \in \mathfrak{h}$. Además pondremos

$$Grafo(C) := \{(x, Cx) : x \in \mathcal{D}(C)\},$$

que es el grafo de C. Ya que $\mathfrak{h}$ es separable, $(\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}, \|\cdot\|_1)$ es separable y por lo tanto $(Grafo(C), \|\cdot\|_1)$ también lo es. En efecto, sea $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en $(\mathfrak{h}^2, \|\cdot\|_1)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\widetilde{x}_n(m), \widetilde{y}_n(m))$ será un un elemento, en caso de que exista, perteneciente a:

$$B((u_n, v_n), \frac{1}{m}) \cap \{(x, Cx) : x \in \mathcal{D}\left(C^2\right)\}.$$

Definamos a $\mathcal{D}$ como el conjunto formado por todos los elementos $(\widetilde{x}_n(m), \widetilde{y}_n(m))$. Como $\mathcal{D}$ es numerable

$$\mathcal{D} = \{(x_n, Cx_n) : n \in \mathbb{N}\},$$

con $x_n \in \mathcal{D}(C^2)$. Luego $\mathcal{D}$ es denso en $(\{(x, Cx) : x \in \mathcal{D}\,(C^2)\}, \|\cdot\|_1)$. Ya que $\mathcal{D}\,(C^2)$ es un dominio esencial de C, se tiene que $\mathcal{D}$ es denso en $(Grafo(C), \|\cdot\|_1)$.

Para cada $x \in \mathcal{D}(C)$ ponemos

$$\rho_m(x) := \text{mín}\{\|(x, Cx) - (x_k, Cx_k)\|_1 : k = 1, ..., m\}.$$

Del Lema 2.3 obtenemos que la función $\rho_m : (\mathcal{D}(C), \mathcal{B}(\mathcal{D}(C))) \to \mathbb{R}$ es medible, pues ρ_m es un mínimo de funciones medibles. Aquí, $\mathcal{B}(\mathcal{D}(C))$ son los borelianos del espacio formado por $\mathcal{D}(C)$ y la métrica de $\mathfrak{h}$. Para cada $x \in \mathcal{D}(C)$ definamos

$$z_m(x) = x_{k_m}(x),$$

donde

$$k_m(x) = \text{mín}\{k \le m : \rho_m(x) = \|(x, Cx) - (x_k, Cx_k)\|_1\}.$$

Entonces cada $z_m : (\mathcal{D}(C), \mathcal{B}(\mathcal{D}(C))) \to \mathfrak{h}$ es una función medible. En efecto,

$$\begin{aligned} & \{x : z_m(x) = x_j\} \\ = \; & \{x : \rho_m(x) < \|(x_1, Cx_1) - (x, Cx)\|_1\} \cap \ldots \cap \{x : \rho_m(x) < \|(x_{j-1}, Cx_{j-1}) - (x, Cx)\|_1\} \\ & \cap \{x : \rho_m(x) = \|(x_j, Cx_j) - (x, Cx)\|_1\}, \end{aligned}$$

lo que implica

$$\{x \in \mathcal{D}(C) : z_m(x) = x_j\} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(C))\}\,.$$

pues $\rho_m(x)$ y $\|(x_k, Cx_k) - (x, Cx)\|_1$ son funciones medibles. Considere $y \in \mathfrak{h}$ y $r > 0$. Sean $y_1, \ldots, y_p$ los elementos de $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ que pertenecen a $B(y, r)$. Ya que

$$z_m(\mathcal{D}(C)) \subseteq \{x_1, x_2, ..., x_m\},$$

$$z_m^{-1}(B(y, r)) = \bigcup_{j=1}^{p} \{x : z_m(x) = y_j\} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(C)).$$

Entonces $z_m : (\mathcal{D}(C), \mathcal{B}(\mathcal{D}(C))) \to \mathfrak{h}$ es medible, lo que implica que $z_m \circ \pi_C : (\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h}))) \to \mathfrak{h}$ es medible,

De la Condición H1.3 tenemos que para todo $x, y \in \mathcal{D}(C)$,

$$\begin{aligned}\|g_t(x,y) - g_t(z_m(x), z_m(y))\| &\leq \|g_t(x,y) - g_t(z_m(x), y)\| + \|g_t(z_m(x), y) - g_t(z_m(x), z_m(y))\| \\ &\leq K(t)\left(\|x - z_m(x)\|_C \|y\|_C + \|z_m(x)\|_C \|y - z_m(y)\|_C\right) \ .\end{aligned}$$

Como además $\|(z_m(z), Cz_m(z)) - (z, Cz)\|_1 \searrow_{m\to\infty} 0$ cuando $z \in \mathcal{D}(C)$,

$$\|g_t(x,y) - g_t(z_m(x), z_m(y))\| \to_{m\to\infty} 0$$

para todo $x, y \in \mathcal{D}(C)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}g_t\left(\pi_C(x), \pi_C(y)\right) &= \lim_{m\to\infty} g_t\left(z_m\left(\pi_C\left(x\right)\right), z_m\left(\pi_C\left(y\right)\right)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \langle G(t) \circ \pi_{C^2}\left(z_m\left(\pi_C\left(x\right)\right)\right), \pi_{C^2}\left(z_m\left(\pi_C\left(y\right)\right)\right)\rangle.\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{h}$. Entonces, la Condición H1.2 nos lleva a concluir que

$$(t, x, y) \mapsto g_t\left(\pi_C(x), \pi_C(y)\right)$$

es medible. $\square$

2.3. Demostración del Teorema 1

2.3.1. Lemas Previos

Por completitud, comenzaremos recordando tres lemas (Lemas 2.2, 2.3 y 2.4) que fueron probados en [7].

Lema 2.2 *Sea C un operador positivo en $\mathfrak{h}$.Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos el operador acotado $R_n = n(n+C)^{-1}$. Entonces:*

$$\mathcal{D}(C) = \{x \in \mathfrak{h} : (CR_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\} = \{x \in \mathfrak{h} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|CR_n x\| < \infty\}.$$

Demostración Como $-C$ es disipativo y autoadjunto, entonces para todo $x \in \mathcal{D}(C)$ se tiene que

$$CR_n x \longrightarrow_{n\to\infty} Cx. \tag{2.2}$$

(ver, e.g., [19]). En consecuencia, $\mathcal{D}(C) \subseteq \{x \in \mathfrak{h} : (CR_n x)_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{converge}\}$, luego

$$\mathcal{D}(C) \subseteq \{x \in \mathfrak{h} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|CR_n x\| < \infty\},$$

pues $\{x \in \mathfrak{h} : (CR_n x)_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{converge}\} \subseteq \{x \in \mathfrak{h} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|CR_n x\| < \infty\}$.

Ahora, asumamos que $(\|CR_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado. Del Teorema de Banach-Alaoglu, deducimos que existe una subsucesión $(CR_{n_k} x)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a un vector $z \in \mathfrak{h}$. Ya que para cualquier $x \in \mathfrak{h}$ tenemos que $R_n x \to x$, para cualquier $y \in \mathcal{D}(C)$,

$$\langle x, Cy\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle R_{n_k} x, Cy\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle CR_{n_k} x, y\rangle = \langle z, y\rangle.$$

Entonces $x \in \mathcal{D}(C^*)(= \mathcal{D}(C))$ y $C^* x = z$, lo que implica que

$$\{x \in \mathfrak{h} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|CR_n x\| < \infty\} \subseteq \mathcal{D}(C).$$

□

Lema 2.3 *Sea C un operador positivo en $\mathfrak{h}$. Si $L \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C), \mathfrak{h})$, entonces $L \circ \pi_C : (\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h})) \to (\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h}))$ es medible.*

Demostración Sea R_n como en el Lema 2.2. Del lema 2.2 se concluye que $\mathcal{D}(C)$ es un conjunto medible borel en $\mathfrak{h}$ y asi $\pi_C : (\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h})) \to (\mathfrak{h}, \mathcal{B}(\mathfrak{h}))$ es medible. Por otro lado, el rango de R_n es un subespacio de $\mathcal{D}(C)$ y $L \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C), \mathfrak{h})$, luego $LR_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$. Ya que LR_n es continuo, $LR_n \circ \pi_C$ es medible. Combinando el hecho de que $R_n \to_{n\to\infty} I$ con (2.2), se tiene que $LR_n \circ \pi_C \to_{n\to\infty} L \circ \pi_C$, lo cual implica que $L \circ \pi_C$ es medible. □

Nota 2.4 *Cuando L es un operador cerrable en $\mathfrak{h}$, tal que $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(L)$ donde C es un operador positivo, entonces, usando el teorema del grafo cerrado, se puede concluir que $L \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C), \mathfrak{h})$.*

Lema 2.4 (Extensión de la Condición H2.3 de $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}(C^2)$.) *Supongamos que se cumple la Hipótesis 2, salvo H2.4. Sean $x \in \mathcal{D}(C^2)$ y $t \geq 0$. Entonces $L_k(t)x \in \mathcal{D}(C)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y además*

$$2Re\langle C^2 x, G(t)x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)x\|^2 \leq \alpha(t) \|x\|_C^2 . \tag{2.3}$$

Demostración Sea $x \in \mathcal{D}(C^2)$, como $\mathcal{D}_1$ es un dominio esencial de C^2, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_1$ tal que $x_n \to x$ y $C^2 x_n \to C^2 x$, esto es $\|x_n - x\|_{C^2} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. De la Nota 2.4 tenemos que C es relativamente acotado con respecto a C^2. Luego $\|x_n - x\|_C \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, por consiguiente

$$\alpha(t)\,\|x_n\|_C^2 \longrightarrow_{n\to\infty} \alpha(t)\,\|x\|_C^2 \tag{2.4}$$

Además, de la Condición H2.1 se deduce que:

$$\|G(t)\,(x_n - x)\|^2 \le K\,(t)\,\|x_n - x\|_{C^2}^2 \to_{n\to\infty} 0,$$

de donde

$$2Re\langle C^2 x_n, G(t)x_n\rangle \longrightarrow_{n\to\infty} 2Re\langle C^2 x, G(t)x\rangle. \tag{2.5}$$

La Condición H2.3 nos lleva a que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$2Re\langle C^2 x_n, G(t)x_n\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)x_n\|^2 \le \alpha(t)\,\|x_n\|_C^2 . \tag{2.6}$$

Debido a (2.4) y (2.5) obtendríamos (2.3) tomando el límite cuando $n \to \infty$ en (2.6) si probamos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)x\|^2 . \tag{2.7}$$

De (2.5) y la Condición H2.3 se sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)(x_n - x_m)\|^2 \le \alpha(t)\,\|x_n - x_m\|_C^2 - 2Re\langle C^2(x_n - x_m), G(t)(x_n - x_m)\rangle. \tag{2.8}$$

Usando la Condición H2.1 obtenemos

$$\begin{aligned} |Re\langle C^2(x_n - x_m), G(t)(x_n - x_m)\rangle| &\le |\,\langle C^2(x_n - x_m), G(t)(x_n - x_m)\rangle\,| \\ &\le K(t)\,\|x_n - x_m\|_{C^2}^2 . \end{aligned}$$

Así que de (2.8) deducimos que para todo $\epsilon > 0$, existe $N\,(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N\,(\epsilon)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)(x_n - x_m)\|^2 < \epsilon. \tag{2.9}$$

Por lo tanto,

$$\|CL_l(t)(x_n - x_m)\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)(x_n - x_m)\|^2 \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0,$$

luego existe $y \in \mathfrak{h}$ tal que $\|CL_k(t)x_n - y\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Aplicar la Condición H2.2 produce

$$\|L_k(t)x_n - L_k(t)x\| \leq K_k(t)\, \|x_n - x\|_C \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

así que $L_k(t)x_n \longrightarrow_{n\to\infty} L_k(t)x$ y $CL_k(t)x_n \longrightarrow_{n\to\infty} y$. Como C es cerrado se sigue que $L_k(t)x \in \mathcal{D}(C)$ y $CL_k(t)x = y$. Lo que implica que

$$\|CL_k(t)x_n - CL_k(t)x\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Si $n > N(\epsilon)$, tomando límite cuando $m \to \infty$ en (2.9) produce

$$\sum_{k=1}^{j} \|CL_k(t)(x_n - x)\|^2 \leq \epsilon$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, y por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)(x_n - x)\|^2 \leq \epsilon.$$

Lo que implica (2.7), completándose la demostración del lema. $\square$

Ahora extenderemos la Condición H2.4 de $\mathcal{D}_2$ a $\mathcal{D}(C)$.

Lema 2.5 *Bajo las Condiciones H1.3, H2.2 y H2.4, se tiene que*

$$2Re\left(g_t\left(x,x\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 \leq 0$$

para todo $x \in \mathcal{D}(C)$ *y* $t \geq 0$.

Demostración Sea $x \in \mathcal{D}(C)$. Como $\mathcal{D}(C^2)$ es dominio esencial de C, $\mathcal{D}_2$ es un dominio esencial de C, luego existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_2$ tal que $x_n \to x$ y $Cx_n \to Cx$, esto es

$$\|x_n - x\|_C \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Usando la Condición H2.4 obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x_n\|^2 \leq -2Re\left(g_t\left(x_n, x_n\right)\right). \tag{2.10}$$

Aplicando la Condición H1.3 deducimos que

$$\begin{aligned}|g_t(x_n,x_n)-g_t(x,x)| &\leq |g_t(x_n-x,x_n)+g_t(x,x_n-x)| \\ &\leq |g_t(x_n-x,x_n)|+|g_t(x,x_n-x)| \\ &\leq K(t)\{\|x_n-x\|_C\|x_n\|_C+\|x\|_C\|x_n-x\|_C\}\longrightarrow_{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.10) implica

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|L_k(t)x_n\|^2 \leq -2Re\left(g_t(x,x)\right). \tag{2.11}$$

De la Condición H2.2 tenemos que

$$\|L_k(t)x_n-L_k(t)x\|^2 \leq K_k(t)\|x_n-x\|_C^2 \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

de donde

$$\|L_k(t)x_n\|^2 \longrightarrow_{n\to\infty} \|L_k(t)x\|^2 .$$

Luego, el lema de Fatou produce

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|L_k(t)x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\liminf_{n\to\infty}\|L_k(t)x_n\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|L_k(t)x_n\|^2 ,$$

que unido a (2.11) nos lleva a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|L_k(t)x\|^2 \leq -2Re\left(g_t(x,x)\right).$$

□

2.3.2. Ecuaciones aproximadas con coeficientes acotados

En esta Memoria obtendremos la solución X_t de (1.1), en términos de un $L^2(\mathbb{P},\mathfrak{h})$-límite débil de soluciones de una sucesión de ecuaciones de evolución estocásticas, cuyos coeficientes son acotados. Con este fin consideramos el resolvente de $-C^2$,

$$R_n = n(n+C^2)^{-1}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, y la siguiente ecuación de evolución estocástica.

Definición 2.2 *Bajo los supuestos del Teorema 1, esto es, asumiendo la Hipótesis 2, X^n es la única solución continua de:*

$$X_t^n = X_0 + \int_0^t G^n(s) X_s^n ds + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t L_k^n(s) X_s^n dW_s^k, \tag{2.12}$$

donde $G^n(s) = R_n G(s) R_n$, $L_k^n(s) = L_k(s) R_n$ y $n \in \mathbb{N}$.

Nota 2.5 *El rango de R_n es un subespacio de $\mathcal{D}(C^2)$, así que $G^n(t)$ está bien definido. Como $\|R_n\| \leq 1$,*

$$\begin{array}{rcl} \|G^n(t)x\|^2 & = & \|R_n G(t) R_n x\|^2 \\ & \leq & \|R_n\|^2 \|G(t) R_n x\|^2 \\ & \leq & \|G(t) R_n x\|^2 \\ & \leq & K(t) \|R_n x\|_{C^2}^2 \\ & = & K(t)\{\|R_n x\|^2 + \left\|C^2 R_n x\right\|^2\} \\ & \leq & K(t)\{\|x\|^2 + \left\|C^2 R_n\right\|^2 \|x\|^2\} \\ & = & K(t)\{1 + \left\|C^2 R_n\right\|^2\} \|x\|^2 . \end{array}$$

Luego $G^n(t)$ es un operador continuo cuya norma satisface

$$\|G^n(t)\| \leq \sqrt{K(t)\{1 + \|C^2 R_n\|^2\}}.$$

Similarmente, la Condición H2.2 nos lleva a $L_k^n(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$. En efecto, de la Nota 2.4 tenemos que $C \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(C^2), \|\cdot\|_{C^2}), \mathfrak{h})$, luego $CR_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$. Además,

$$\begin{array}{rcl} \|L_k^n(t)x\|^2 & = & \|L_k(t) R_n x\|^2 \\ & \leq & K_k(t) \|R_n x\|_C^2 \\ & = & K_k(t)\{\|R_n x\|^2 + \|C R_n x\|^2\} \\ & \leq & K_k(t)\{\|x\|^2 + \|C R_n\|^2 \|x\|^2\} \\ & \leq & K_k(t)\{1 + \|C R_n\|^2\} \|x\|^2 . \end{array}$$

Por lo tanto $L_k^n(t)$ es un operador continuo y

$$\|L_k^n(t)\| \leq \sqrt{K_k(t)\{1 + \|C R_n\|^2\}}.$$

Combinando las observaciones anteriores con las Condiciones H1.1 y H1.2 concluimos que los procesos $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ están bien definidos.

Esta subsección esta dedicada a las propiedades de la sucesión de procesos $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Las demostraciones de los dos primeros lemas (Lemas 2.6 y 2.7) constituyen versiones ampliadas de las demostraciones de los Lemas 5 y 6 de [7].

Lema 2.6 *Asumamos la Hipótesis 2, sin la Condición H2.3. Considere* $t \geq 0$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left\|X_t^n\right\|^2 \leq \mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2. \tag{2.13}$$

Además para todo $x \in \mathfrak{h}$ *tenemos que*

$$2Re(\langle G^n(t)x, x\rangle) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|L_k^n(t)x\right\|^2 \leq 0. \tag{2.14}$$

Demostración

Sea $x \in \mathfrak{h}$. Ya que el rango de R_n es un subespacio de $\mathcal{D}(C^2) \subseteq \mathcal{D}(C)$, del Lema 2.5 tenemos que

$$2Re((g_t(R_n x, R_n x)) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|L_k(t)R_n x\right\|^2 \leq 0. \tag{2.15}$$

Puesto que R_n es autoadjunto y $R_n x \in \mathcal{D}(C^2)$:

$$\begin{aligned} g_t(R_n x, R_n x) &= \langle G(t)R_n x, R_n x\rangle \\ &= \langle R_n G(t)R_n x, x\rangle \\ &= \langle G^n(t)x, x\rangle. \end{aligned}$$

Como además $L_k(t)R_n x = L_k^n(t)x$, la desigualdad (2.15) nos lleva a (2.14).

Aplicando la fórmula de Itô (ver, e.g., [22]) se deduce que:

$$\begin{aligned} \left\|X_t^n\right\|^2 &= \left\|X_0\right\|^2 + \int_0^t \left(2Re\langle G^n(t)X_s^n, X_s^n\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k^n(t)X_s^n\right\|^2\right) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t 2Re\langle L_k^n(s)X_s^n, X_s^n\rangle dW_s^k. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Usando (2.14) producimos:

$$\left\|X_t^n\right\|^2 \leq \left\|X_0\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t 2Re\langle L_k^n(s)X_s^n, X_s^n\rangle dW_s^k. \tag{2.17}$$

Sea $\tau_j = inf\{t \geq 0 : \|X_t^n\| \geq j\}$. Entonces cada τ_j es un tiempo de parada y $\tau_j \uparrow \infty$ cuando $j \uparrow \infty$. Además,

$$\mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_j} \left(Re\langle L_k^n(s) X_s^n, X_s^n \rangle \right)^2 ds \leq j^4 \int_0^t \|L_k^n(t)\|^2 \, ds \leq j^4 t K_k(t) \left(1 + \|C R_n\|^2 \right),$$

por lo que el proceso

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{\cdot \wedge \tau_j} 2Re\langle L_k^n(s) X_s^n, X_s^n \rangle dW_s^k$$

es una martingala continua de cuadrado integrable (ver, e.g., Teorema 4.12 de [22]). Luego

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \int_0^{t \wedge \tau_j} 2Re\langle L_k^n(s) X_s^n, X_s^n \rangle dW_s^k \right) = 0$$

Así de (2.17) se obtiene que

$$\mathbb{E} \left\| X_{t \wedge \tau_j}^n \right\|^2 \leq \mathbb{E} \|X_0\|^2.$$

Como X_t^n tiene trayectorias continuas, aplicando el lema de Fatou se deduce que

$$\mathbb{E} \|X_t^n\|^2 \leq \liminf_{j \to \infty} \mathbb{E} \left\| X_{t \wedge \tau_j}^n \right\|^2 \leq \mathbb{E} \|X_0\|^2.$$

□

Lema 2.7 *Adoptemos la Hipótesis 2. Si $X_0 \in L_C^2(\mathbb{P}, \mathfrak{h})$, entonces*

$$\mathbb{E} \|C X_t^n\|^2 \leq \exp(t\alpha(t)) (\mathbb{E} \|C X_0\|^2 + t\alpha(t) \mathbb{E} \|X_0\|^2). \tag{2.18}$$

Demostración Sea $x \in \mathfrak{h}$. Entonces $R_n x \in \mathcal{D}(C^2)$. Ya que $C^2 R_n$ es acotado, la Condición H2.1 nos lleva a:

$$\|G(t) R_n x\|^2 \leq K(t) \|R_n x\|_{C^2}^2 \leq K(t) \left(1 + \left\| C^2 R_n \right\|^2 \right) \|x\|^2,$$

luego $G(t) R_n$ es acotado. Como $C R_n$ es acotado, $C G^n(t) = C R_n G(t) R_n$ es acotado, así que

$$\|C G^n(t)\| \leq K(t) \|C R^n\| \left(1 + \left\| C^2 R_n \right\|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Aplicando el Lema 2.4 con $R_n x$ en lugar de x se obtiene:

$$2Re\langle C^2 R_n x, G(t) R_n x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k(t)R_n x\|^2 \leq \alpha(t) \|R_n x\|_C^2 .$$

Entonces para todo $x \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned}
\|CL_k^n(t)x\|^2 &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \|CL_l^n(t)x\|^2 \\
&\leq \alpha(t) \|R_n x\|_C^2 - 2Re\langle C^2 R_n x, G(t)R_n x\rangle \\
&\leq \alpha(t) \|R_n x\|_C^2 + 2\left|\langle C^2 R_n x, G(t)R_n x\rangle\right| \\
&\leq \alpha(t) \|R_n x\|_C^2 + 2\left\|C^2 R_n x\right\| \|G(t)R_n x\| \\
&\leq \alpha(t)\{1 + \|CR_n\|^2\} \|x\|^2 + 2\left\|C^2 R_n\right\| \|G(t)R_n\| \|, x\|^2 ,
\end{aligned}$$

así que $CL_k^n(t)$ es un operador acotado, con

$$\|CL_k^n(t)\| \leq \sqrt{\alpha(t)\left(1 + \|CR_n\|^2\right) + 2\|C^2 R_n\| \|G(t)R_n\|}.$$

Sea $x \in \mathcal{D}(C^2)$. Recordemos que R_n es autoadjunto y que $R_n Cx = CR_n x$, luego

$$\begin{aligned}
\langle Cx, CG^n(t)x\rangle &= \langle Cx, CR_n G(t)R_n x\rangle \\
&= \langle (CR_n)^* Cx, G(t)R_n x\rangle \\
&= \langle R_n C^2 x, G(t)R_n x\rangle \\
&= \langle C^2 R_n x, G(t)R_n x\rangle.
\end{aligned}$$

y así del Lema 2.4 con $R_n x$ en lugar de x se tiene:

$$\begin{aligned}
2Re\langle Cx, CG^n(t)x\rangle + \sum_{k=1}^{n} \|CL_k^n(t)x\|^2 &\leq 2Re\langle Cx, CG^n(t)x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \|CL_k^n(t)x\|^2 \\
&\leq \alpha(t) \|R_n x\|_C^2 \\
&\leq \alpha(t) \|x\|_C^2 .
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{D}(C^2)$ es un dominio esencial de C y $CG^n(t)$, $CL_k^n(t)$ son operadores acotados, un proceso de límite nos permite extender la anterior desigualdad a: para todo $x \in \mathcal{D}(C)$,

$$2Re\langle Cx, CG^n(t)x\rangle + \sum_{k=1}^{n} \|CL_k^n(t)x\|^2 \leq \alpha(t) \|x\|_C^2 . \tag{2.20}$$

Usando (2.13), en el Lema 2.6 se obtiene:

$$\mathbb{E}\left\|CG^n(t)X_t^n\right\|^2 \leq \left\|CG^n(t)\right\|^2 \mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2$$

y

$$\mathbb{E}\left\|CL_k^n(t)X_t^n\right\|^2 \leq \left\|CL_k^n(t)\right\|^2 \mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2,$$

o sea,

$$\mathbb{E}\left\|CG^n(t)X_t^n\right\|^2 \leq K^n(t)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2 \tag{2.21}$$

y

$$E\left\|CL_k^n(t)X_t^n\right\|^2 \leq K_k^n(t)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2. \tag{2.22}$$

En virtud de (2.21) y (2.22), podemos usar las Proposiciones 1.6 y 4.15 de [22], para intercambiar el operador C con la integral de Bochner y la integral de Itô, respectivamente, y establecer que $CX_t^n = Y_t^n$, $\mathbb{P}$-c.s., donde el proceso Y^n está definido por:

$$Y^n = CX_0 + \int_0^{\cdot} CG^n(s)X_s^n ds + \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\cdot} CL_k^n(s)X_s^n dW_s^k.$$

Finalmente, elegimos $\tau_j = inf\{t \geq 0 : \|Y_t^n\| > j\}$. La desigualdad (2.13) implica:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|Re\langle Y_{s\wedge\tau_j}^n, CL_k^n(s)X_s^n\rangle\right|^2 &\leq \mathbb{E}\langle Y_{s\wedge\tau_j}^n, CL_k^n(s)X_s^n\rangle|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\{\left\|Y_{s\wedge\tau_j}^n\right\|^2 \left\|CL_k^n(s)X_s^n\right\|^2\} \\
&\leq \mathbb{E}\{\left\|Y_{s\wedge\tau_j}^n\right\|^2 \left\|CL_k^n(s)\right\|^2 \left\|X_s^n\right\|^2\} \\
&\leq \mathbb{E}\{\left\|Y_{s\wedge\tau_j}^n\right\|^2\} \left\|CL_k^n(s)\right\|^2 \mathbb{E}\{\left\|X_s^n\right\|^2\} \\
&\leq j^2 \left\|CL_k^n(s)\right\|^2 \mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Itô (ver, e.g., [22]) se obtiene:

$$\mathbb{E}\left\|Y_{t\wedge\tau_j}^n\right\|^2 = \mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2 + \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_j}(2Re\langle CG^n(s)X_s^n, Y_s^n\rangle + \sum_{l=1}^{n}\left\|CL_l^n(s)X_s^n\right\|^2)ds.$$

Como $Y_s^n = CX_s^n$ $\mathbb{P}$-c.s. combinando (2.13) con (2.20) se obtiene:

$$\mathbb{E}\left\|Y_{t\wedge\tau_j}^n\right\|^2 \leq \mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2 + \alpha(t)\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}\left\|CX_s^n\right\|^2 ds + t\alpha(t)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2.$$

Ahora, el lema de Fatou nos lleva a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|Y_t^n\right\|^2 &\leq \liminf_{j\to\infty} \mathbb{E}\left\|Y_{t\wedge\tau_j}^n\right\|^2 \\ &\leq \mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2 + t\alpha(t)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2 + \alpha(t)\int_0^t \mathbb{E}\left\|Y_s^n\right\|^2 ds.\end{aligned}$$

Combinando el lema de Gronwall-Bellman, en forma integral, con esta última desigualdad se obtiene (2.18). $\square$

Ahora podemos recuperar el resultado dado en en Lema 7 de [7] a pesar que en nuestro contexto $G(t)$ no es relativamente acotada con respecto a C, con este fin usamos las Condiciones H1.3 y H2.1.

Lema 2.8 *Fijemos $T > 0$. Entonces, bajo las Hipotesis del Teorema 1 tenemos que*

$$\mathbb{E}\left\|X_t^n - X_s^n\right\|^2 \leq K_{T,X_0}(t-s), \tag{2.23}$$

donde $0 \leq s \leq t \leq T$ y K_{T,X_0} es una constante positiva que sólo depende de T y X_0.

Demostración Considere $\tau_j = inf\{t \geq 0 : \|X_t^n\| \geq j\}$. Aplicando la fórmula de Itô a $X_{t\wedge\tau_j}^n - X_{s\wedge\tau_j}^n$, de una manera similar a como se aplicó en la demostración del Lema 2.6, se obtiene:

$$\mathbb{E}\left\|X_{t\wedge\tau_j}^n - X_{s\wedge\tau_j}^n\right\|^2 = \mathbb{E}\int_{s\wedge\tau_j}^{t\wedge\tau_j}\left(2Re\langle G^n(r)X_r^n, X_r^n - X_s^n\rangle + \sum_{l=1}^n \left\|L_l^n X_r^n\right\|^2\right) dr.$$

Usando (2.14), en el Lema 2.6, se deduce que

$$\begin{aligned} & 2Re(\langle X_r^n - X_s^n, G^n(r)X_r^n\rangle) + \sum_{l=1}^n \left\|L_l^n X_r^n\right\|^2 \\ = \;& 2Re(\langle G^n(r)X_r^n, X_r^n - X_s^n\rangle) + \sum_{l=1}^n \left\|L_l^n X_r^n\right\|^2 \\ \leq \;& 2Re(\langle G^n(r)X_r^n, X_r^n\rangle) - 2Re(\langle G^n(r)X_r^n, X_s^n\rangle) + \sum_{l=1}^n \left\|L_l^n X_r^n\right\|^2 \\ \leq \;& -\sum_{l=1}^\infty \left\|L_l^n X_r^n\right\|^2 - 2Re(\langle G^n(r)X_r^n, X_s^n\rangle) + \sum_{l=1}^n \left\|L_l^n X_r^n\right\|^2 \\ \leq \;& -2Re(\langle G^n(r)X_r^n, X_s^n\rangle).\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\mathbb{E}\left\|X^n_{t\wedge\tau_j}-X^n_{s\wedge\tau_j}\right\|^2\leq E\int_{s\wedge\tau_j}^{t\wedge\tau_j}-2Re(\langle G^n(r)X^n_r,X^n_s\rangle)dr.$$

Ya que $X^n_r, X^n_s\in\mathcal{D}(C)$ a.s., aplicando la Condición H1.3 se llega a

$$\begin{aligned}
-2Re(\langle G^n(r)X^n_r,X^n_s\rangle) &\leq 2\left|\langle G^n(r)X^n_r,X^n_s\rangle\right| \\
&= 2\left|\langle G(r)R_nX^n_r,R_nX^n_s\rangle\right| \\
&\leq 2K(r)\left\|R_nX^n_s\right\|_C\left\|R_nX^n_r\right\|_C \\
&\leq 2K(T)\left\|R_nX^n_s\right\|_C\left\|R_nX^n_r\right\|_C \\
&\leq 2K(T)\left\|X^n_s\right\|_C\left\|X^n_r\right\|_C.
\end{aligned}$$

Así, combinando el lema de Fatou con el hecho que X^n tiene trayectorias continuas obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|X^n_t-X^n_s\right\|^2 &\leq \liminf_{j\to\infty}\mathbb{E}\left\|X^n_{t\wedge\tau_j}-X^n_{s\wedge\tau_j}\right\| \\
&\leq 2K(T)\int_s^t\mathbb{E}\{\left\|X^n_s\right\|_C\left\|X^n_r\right\|_C\}dr \\
&\leq 2K(T)\int_s^t\sqrt{\mathbb{E}\left\|X^n_s\right\|^2_C}\sqrt{\mathbb{E}\left\|X^n_r\right\|^2_C}dr. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Los lemas 2.6 y 2.7 producen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|X^n_s\right\|^2_C &= \mathbb{E}\{\left\|X^n_s\right\|^2+\left\|CX^n_s\right\|^2\} \\
&= \mathbb{E}\left\|X^n_s\right\|^2+\mathbb{E}\left\|CX^n_s\right\|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2+\exp(t\alpha(t))(\mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2+t\alpha(t)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2) \\
&\leq \mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2+\exp(T\alpha(T))(\mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2+T\alpha(T)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2).
\end{aligned}$$

De manera similar, se deduce que:

$$\mathbb{E}\left\|X^n_s\right\|^2_C\leq\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2+\exp(T\alpha(T))(\mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2+T\alpha(T)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2).$$

Por lo tanto, (2.24) produce:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\|X^n_t-X^n_s\right\|^2 \\
\leq\ & 2K(T)\int_s^t\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2+\exp(T\alpha(T))(\mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2+T\alpha(T)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2\,dr \\
\leq\ & 2K(T)\left(\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2+\exp(T\alpha(T))(\mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2+T\alpha(T)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2)\right)(t-s),
\end{aligned}$$

obteniéndose la desigualdad deseada con

$$K_{T,X_0} := 2K(T)\left(\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2 + \exp(T\alpha(T))(\mathbb{E}\left\|CX_0\right\|^2 + T\alpha(T)\mathbb{E}\left\|X_0\right\|^2\right).$$

□

2.3.3. Construcción de una solución de (1.1)

A continuación se obtiene una C-solución variacional de (1.1) como límite de una subsucesión de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 2.3 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $(\mathcal{B}_s^{X_0,n})_{s\geq 0}$ la filtración que satisface las condiciones usuales generada por $X_0, W^1, ..., W^n$. Para todo $t \geq 0$, elegimos:*

$$\mathcal{B}_t^{X_0,W} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_t^{X_0,n})$$

y además definimos:

$$\mathcal{B}_{t+}^{X_0,W} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{B}_{t+\varepsilon}^{X_0,W}.$$

Gracias a los resultados de la Subsección 2.3.2 podemos replicar los argumentos empleados en las demostraciones de los Lemas 8 y 9 de [7] para probar los siguientes dos lemas.

Lema 2.9 *Sea $T > 0$. Adopte los supuestos del Teorema 1. Entonces $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(X^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para la cual existe un proceso $(\mathcal{B}_{t+}^{X_0,W})_{t\in[0,T]}$-predecible $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ tal que, para todo $t \in [0,T]$:*

$$X_t^{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} Z_t \quad \textit{débilmente en } L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h}). \tag{2.25}$$

Demostración

Sea $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $L^2((\Omega, \mathcal{B}_T^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h})$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz, junto con Lema 2.8 se obtiene que la familia de funciones complejas $(\mathbb{E}\langle\chi_j, X^n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, para cada $j \in \mathbb{N}$. Usando el Lema 2.6, el teorema de Arzelá-Ascoli y argumentos de diagonalización deducimos que podemos extraer de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión $(X^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(\mathbb{E}\langle\chi_j, X^{n_k}\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en $[0,T]$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Del Lema 2.6, se sigue que $(X_t^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente convergente en $L^2((\Omega, \mathcal{B}_T^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h})$, para todo $t \in [0,T]$. Así, dado que $X_t^{n_k}$ es $\mathcal{B}_t^{X_0,W}$-medible, para cualquier $t \in [0,T]$, existe una v.a. ψ_t que es $\mathcal{B}_t^{X_0,W}$-medible y satisface:

$$X_t^{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} \psi_t \quad \text{débilmente en } L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h}). \tag{2.26}$$

En virtud de (2.26) tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$\langle e_j, X_t^{n_k} \rangle \longrightarrow_{k\to\infty} \langle e_j, \psi_t \rangle \quad \text{débilmente en } L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathbb{C}),$$

donde $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{h}$. Aplicando el Lema 2.8 y, por ejemplo, la relación (1.26) de la Página 137 de [11] llegamos a:

$$\mathbb{E}\,|\langle e_j, \psi_t - \psi_s \rangle|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\,|\langle e_j, X_t^{n_k} - X_s^{n_k} \rangle|^2 \leq K_{T,X_0}(t-s).$$

Entonces $\langle e_j, \psi \rangle$ tiene una versión $B_{t+}^{X_0,W}$-predecible, que denotaremos por $\widetilde{\langle e_j, \psi \rangle}$, ver, e.g., Proposición 3.6 de [22].

Finalmente, definimos $\mathcal{A}$ como el conjunto de todos los $(t, w) \in [0, T] \times \Omega$, tales que $\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\langle e_j, \psi \rangle}_t(w) e_j$ converge cuando $n \to \infty$. Además, elegimos

$$Z_t(w) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\langle e_j, \psi \rangle}_t(w) e_j, & \text{si } (t,w) \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases} .$$

$\square$

Lema 2.10 *Bajo los supuestos del Teorema 1 y usando la notación del Lema 2.9, se tiene que para todo* $t \in [0, T]$*:*

$$\mathbb{E}\,\|Z_t\|^2 \leq \mathbb{E}\,\|X_0\|^2, \tag{2.27}$$

$Z_t \in \mathcal{D}(C)$ $\mathbb{P} - c.s.$ *y*

$$\mathbb{E}\,\|CZ_t\|^2 \leq \exp(t\alpha(t))\{\mathbb{E}\,\|CX_0\|^2 + t\alpha(t)\mathbb{E}\,\|X_0\|^2\}. \tag{2.28}$$

Además, para todo $t \in [0, T]$ *tenemos que*

$$L_l^{n_k} X_t^{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} L_l(t) Z_t \quad \textit{débilmente en } L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h}). \tag{2.29}$$

Demostración Combinando (2.25) con el Lema 2.6 se obtiene (2.27).

Para cada $U \in L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h})$, el teorema de convergencia dominada establece que $R_n U \longrightarrow_{k\to\infty} U$ en $L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h})$, donde $R_n = n(n + C^2)^{-1}$. Así, usando (2.25), se obtiene que

$$\mathbb{E}\langle U, R_{n_k} X_t^{n_k} \rangle = \mathbb{E}\langle R_{n_k} U, X_t^{n_k} \rangle \longrightarrow_{k\to\infty} \mathbb{E}\langle U, Z_t \rangle. \tag{2.30}$$

Para $L \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C), \mathfrak{h})$, definamos $L^n = LR_n$. Puesto que $\|R_n\| \leq 1$ y que $R_n C \subset CR_n$, aplicando el Lema 2.7 y el teorema de Banach-Alaoglu, deducimos que cualquier subsucesión de $(X_t^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $\left(X_t^l\right)_{l\in\mathbb{N}}$, en notación abreviada, tal que $\left(L^l X_t^l\right)_{l\in\mathbb{N}}$ y $\left(CR_l X_t^l\right)_{l\in\mathbb{N}}$ son débilmente convergentes en $L^2((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h})$. Así, por (2.30),

$$(R_l X_t^l, L^l X_t^l, CR_l X_t^l) \text{ converge débilmente en } L^2((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h}^3). \tag{2.31}$$

A su vez, el conjunto $\mathcal{D}(C)\times L(\mathcal{D}(C))\times C(\mathcal{D}(C))$ es cerrado en $\mathfrak{h}^3$, ya que L es acotado con respecto $\|\cdot\|_C$ y C es un operador cerrado. Por lo tanto, el conjunto formado por todas las tripletas $(\eta, L\eta, C\eta)$, con $\eta\in L^2_C((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h})$ es un subespacio cerrado de $L^2((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h}^3)$, luego dicho conjunto es es también cerrado con respecto a la topología débil de $L^2((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h}^3)$, ver, e.g., Problema 1.34 de la Página 138 de [11]. Luego, combinando (2.30) con (2.31) se llega a que $(R_l X_t^l, L^l X_t^l, CR_l X_t^l)$ converge débilmente a (Z_t, LZ_t, CZ_t) en $L^2((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h}^3)$ cuando $l\to\infty$. Lo que implica

$$L^{n_k}X_t^{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} LZ_t \quad \text{débilmente en } L^2((\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}),\mathfrak{h}). \tag{2.32}$$

De la Condición H2.2, podemos elegir $L=L_k(t)$ y obtener(2.29). Eligiendo $L=C$, del Lema 2.7 deducimos (2.28). □

La demostración del próximo lema es completamente nueva.

Lema 2.11 *Adopte los supuestos del Teorema 1 y la notación del Lema 2.9. Considere* $t\in[0,T]$. *Entonces, para todo* $y\in\mathcal{D}(C)$ *y* $\eta\in L^2(\left(\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}\right),\mathbb{C})$ *tenemos que*

$$\mathbb{E}g_t\left(R_{n_k}X_t^{n_k},\eta y\right)\longrightarrow \mathbb{E}g_t\left(Z_t,\eta y\right). \tag{2.33}$$

Demostración

Ya que C es un operador positivo, $(\mathcal{D}(C),\langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ es un espacio de Hilbert, que además es separable porque $\mathfrak{h}$ lo es (ver, e.g., demostración del Lema 2.1). Entonces

$$L^2\left(\left(\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}\right),(\mathcal{D}(C),\langle\cdot,\cdot\rangle_C)\right)$$

es un espacio de Hilbert separable. Ahora definimos el funcional

$$F^t_{\eta,y}: L^2\left(\left(\Omega,\mathcal{B}_t^{X_0,W},\mathbb{P}\right),(\mathcal{D}(C),\langle\cdot,\cdot\rangle_C)\right)\to\mathbb{C}$$

a través de

$$F^t_{\eta,y}(X)=\mathbb{E}\left(g_t\left(\eta y,X\right)\right).$$

Ya que $g_t(\cdot,\cdot)$ es lineal en su segunda componente, $F^t_{\eta,y}$ es un funcional lineal. Además, supongamos que $X_n \longrightarrow_{k\to\infty} X$ en $L^2\left(\left(\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}\right), (\mathcal{D}(C), \langle\cdot,\cdot\rangle_C)\right)$. Luego,

$$\left|F^t_{\eta,y}(X_n) - F^t_{\eta,y}(X)\right| \leq \mathbb{E}\left|g_t(\eta y, X - X_n)\right| \leq \mathbb{E}K(t)\left\|C\eta y\right\|\left\|X - X_n\right\|_C,$$

de donde

$$\left|F^t_{\eta,y}(X_n) - F^t_{\eta,y}(X)\right| \leq K(t)\left\|Cy\right\|\mathbb{E}\{|\eta|\left\|X - X_n\right\|_C\} \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

lo que implica que $F^t_{\eta,y}$ es continuo. O sea, $F^t_{\eta,y}$ es un funcional lineal y continuo del espacio de Hilbert separable $L^2\left(\left(\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}\right), (\mathcal{D}(C), \langle\cdot,\cdot\rangle_C)\right)$ en $\mathbb{C}$. Un teorema de representación de Riesz nos asegura que existe un único Φ perteneciente a $L^2\left(\left(\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}\right), (\mathcal{D}(C), \langle\cdot,\cdot\rangle_C)\right)$ tal que

$$F^t_{\eta,y}(X) = \mathbb{E}\left(\langle\Phi, X\rangle + \langle C\Phi, CX\rangle\right),$$

y entonces

$$F^t_{\eta,y}(X) = \mathbb{E}\langle\Phi, X\rangle + \mathbb{E}\langle C\Phi, CX\rangle,$$

debido a que X, CX, Φ y $C\Phi$ son variables aleatorias $\mathfrak{h}$-medibles, pues la identidad de $(\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C)$ en $\mathfrak{h}$ es una aplicación continua.

Regresando a la demostración del Lema 2.10, tenemos que

$$(R_{n_k}X_t^{n_k}, CR_{n_k}X_t^{n_k}) \longrightarrow (Z_t, CZ_t) \qquad \text{débilmente en } L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathfrak{h}^2).$$

Además, $\pi_C\left(R_{n_k}X_t^{n_k}\right) : (\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}) \to (\mathcal{D}(C), \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ y $\pi_C\left(Z_t\right) : (\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}) \to (\mathcal{D}(C), \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ son medibles (ver, e.g., Proposición 1.6 en la Página 21 de [22]). Por lo tanto

$$\begin{aligned} F^t_{\eta,y}(\pi_C\left(Z_t\right)) &= \left(\mathbb{E}\langle\Phi, \pi_C\left(Z_t\right)\rangle + \mathbb{E}\langle C\Phi, C\pi_C\left(Z_t\right)\rangle\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\mathbb{E}\langle\Phi, \pi_C\left(R_{n_k}X_t^{n_k}\right)\rangle + \mathbb{E}\langle C\Phi, C\pi_C\left(R_{n_k}X_t^{n_k}\right)\rangle\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} F^t_{\eta,y}(\pi_C\left(R_{n_k}X_t^{n_k}\right)), \end{aligned}$$

de donde, al usar la definición de $F^t_{\eta,y}$, se obtiene (2.33). $\square$

Nota 2.6 *Sea $\chi \in L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,m}, \mathbb{P}), \mathbb{C})$, con $t \in [0,T]$. Entonces*

$$\chi = \mathbb{E}(\chi|\mathcal{B}_0^{X_0,m}) + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t H_s^j dW_s^j,$$

donde $H^1, H^2, ..., H^m$ son procesos estocásticos $\mathcal{B}_t^{X_0,m}$-predecibles tales que $H^1, H^2, ..., H^m \in L^2(([0,T]\times\Omega, dt\otimes d\mathbb{P}), \mathbb{C})$.

La demostración del siguiente lema utiliza los argumentos usados en le demostración del Lema 10 de [7].

Lema 2.12 *Consideremos la sucesión* $(X^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *y* χ *dados en el Lema 2.9 y Nota 2.6, respectivamente. Bajo las Hipótesis del Teorema 1,*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\langle\sum_{l=1}^{n_k}\int_0^t L_l^{n_k}(s)X_s^{n_k}dW_s^l,\chi x\rangle = \mathbb{E}\langle\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^t L_l(s)\pi_C(Z_s)dW_s^l,\chi x\rangle \tag{2.34}$$

para cada $x\in\mathfrak{h}$.

Demostración De acuerdo al Lema 2.5,

$$2Re\left(g_t\left(x,x\right)\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k(t)x\right\|^2\leq 0$$

para todo $x\in\mathcal{D}(C)$ y $t\geq 0$, Por la Condición H1.3 y la Nota 2.1 se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k(t)x\right\|^2\leq -2Re\left(g_t\left(x,x\right)\right)\leq 2\left|\left(g_t\left(x,x\right)\right)\right|\leq K(t)\left\|x\right\|_C^2,$$

o sea para todo $x\in\mathcal{D}(C)$ y $t\geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k(t)x\right\|^2\leq K(t)\left\|x\right\|_C^2. \tag{2.35}$$

Sean $H^1,H^2,...,H^m$ los procesos señalados en la Nota 2.6. Usando el Lema 2.6, propiedades de la integral estocástica y el teorema de Fubini se tiene que para todo $n\geq m$:

$$\mathbb{E}\chi\langle\sum_{l=1}^{n}\int_0^t L_l^{n}(s)X_s^{n}dW_s^l,x\rangle = \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \mathbb{E}H_s^l\langle L_l^n(s)X_s^n,x\rangle ds.$$

Debido a (2.29), para $l\in\{1,...,m\}$ tenemos que:

$$\mathbb{E}H_s^l\langle L_l^{n_k}(s)X_s^{n_k},x\rangle\longrightarrow_{k\to\infty}\mathbb{E}H_s^l\langle L_l(s)\pi_C(Z_s),x\rangle.$$

Como $\|R_n\|\leq 1$ y $R_nC\subset CR_n$, combinando los Lemas 2.6 y 2.7 con el teorema de convergencia dominada se obtiene que

$$\int_0^t \mathbb{E}H_s^l\langle L_l^{n_k}(s)X_s^{n_k},x\rangle ds\longrightarrow_{k\to\infty}\int_0^t \mathbb{E}H_s^l\langle L_l(s)\pi_C(Z_s),x\rangle ds,$$

donde $l = 1, ..., m$. Así,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\langle \sum_{l=1}^{n_k} \int_0^t L_l^{n_k}(s) X_s^{n_k} dW_s^l, \chi x\rangle = \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \mathbb{E} H_s^l \langle L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle ds. \tag{2.36}$$

Combinando los Lemas 2.6 y 2.7 con la Condición H2.2 se deduce que:

$$\sum_{l=1}^{m} \int_0^t \mathbb{E} H_s^l \langle L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle ds = \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}\chi \int_0^t \langle L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle dW_s^l$$

cuando $n \geq m$. Gracias a (2.35) tenemos que

$$\sum_{l=1}^{n} \int_0^t L_l(s)\pi_C(Z_s) dW_s^l \longrightarrow_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t L_l(s)\pi(Z_s) dW_s^l \text{ en } L^2(\mathbb{P}, \mathfrak{h}).$$

Por lo tanto

$$\sum_{l=1}^{m} \int_0^t \mathbb{E} H_s^l \langle L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle ds = \mathbb{E}\chi \langle \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle dW_s^l.$$

Luego, aplicando (2.36) llegamos a

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\langle \sum_{l=1}^{n_k} \int_0^t L_l^{n_k}(s) X_s^{n_k} dW_s^l, \chi x\rangle = \mathbb{E}\chi \langle \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle dW_s^l.$$

□

Lema 2.13 *Sea $T > 0$. Asumamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1 y que Z es descrito como en el Lema 2.9. Entonces, para todo $t \in [0, T]$ y $x \in \mathcal{D}(C)$ tenemos que*

$$\langle Z_t, x\rangle = \langle X_0, x\rangle + \int_0^t g_s\left(\pi_C(Z_s), x\right) ds + \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s)\pi_C(Z_s), x\rangle dW_s^k. \tag{2.37}$$

Demostración Considere $x \in \mathfrak{h}$ y $\chi \in L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,m}, \mathbb{P}), \mathbb{C})$. Sea $(X^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada en el Lema 2.9. De acuerdo al Lema 2.12 tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\langle \sum_{l=1}^{n_k} \int_0^t X_s^{n_k} dW_s^l, \chi x\rangle = \mathbb{E}\langle \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t L_l(s)\pi_C(Z_s) dW_s^l, \chi x\rangle. \tag{2.38}$$

De la definición de $g_s(\cdot,\cdot)$ tenemos que

$$\langle G^{n_k}(s)X_s^{n_k}, x\rangle = \langle G(s)R_{n_k}X_s^{n_k}, R_{n_k}x\rangle = g_s\left(R_{n_k}X_s^{n_k}, R_{n_k}x\right).$$

Como $R_n \longrightarrow_{n\to\infty} I$, de (2.33) obtenemos

$$E\{\langle G^{n_k}(s)X_s^{n_k}, x\rangle \mathbb{E}[\chi|\mathcal{B}_s^{X_0,W}]\} \longrightarrow_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_s\left(\pi_c(Z_s), x\right)\mathbb{E}[\chi|\mathcal{B}_s^{X_0,W}]\}.$$

Combinando los Lemas 2.6 y 2.7 con el teorema de convergencia dominada deducimos que

$$\int_0^t \mathbb{E}\{\langle G^{n_k}(s)X_s^{n_k}, x\rangle \mathbb{E}[\chi|\mathcal{B}_s^{X_0,W}]\}ds \longrightarrow_{k\to\infty} \int_0^t \mathbb{E}\{g_s\left(\pi_c(Z_s), x\right)\mathbb{E}[\chi|\mathcal{B}_s^{X_0,W}]\}ds,$$

pues $\mathbb{E}[\chi|\mathcal{B}_s^{X_0,W}] \in L^2(\mathbb{P},\mathbb{C})$. Luego

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \mathbb{E}\langle G^{n_k}(s)X_s^{n_k}, \chi x\rangle ds = \int_0^t \mathbb{E}g_s\left(\pi_c(Z_s), \chi x\right) ds. \tag{2.39}$$

De (2.25), (2.38) y (2.39), empleando la definición de X^n obtenemos que

$$\mathbb{E}\chi\langle Z_t, x\rangle = \mathbb{E}\chi\left(\langle X_0, x\rangle + \int_0^t g_s\left(\pi_C(Z_s), x\right) ds + \sum_{l=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_l(s)\pi_C(Z_s), x\rangle dW_s^l\right). \tag{2.40}$$

Aplicando un teorema de las clases monótonas, ahora extendemos el rango de válidez de (2.40) de $\chi \in L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,m}, \mathbb{P}), \mathbb{C})$ a $\chi \in L^2((\Omega, \mathcal{B}_t^{X_0,W}, \mathbb{P}), \mathbb{C})$ acotado. $\square$

2.3.4. Fórmula de Itô

Lema 2.14 *Asumamos que se cumple la Hipótesis 1. Sea $(X_t)_{t\in[0,T]}$ una C-solución variacional de (1.1) en $[0,T]$ con dato inicial X_0. Entonces, $\mathbb{P}$-c.s. para todo $t \in [0,T]$ tenemos que*

$$\begin{aligned} \|X_t\|^2 &= \|X_0\|^2 + \int_0^t \left(2Re\left(g_s\left(X_s, X_s\right)\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty}\|L_k(s)X_s\|^2\right) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t 2Re\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle dW_s^k. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Con vistas a demostrar el Lema 2.14 recordemos primeramente el concepto de tripleta de Gelfand. Supongamos que V es un espacio de Banach tal que $V \subseteq \mathfrak{h}$ de manera continua y densa, donde $\mathfrak{h}$ es un espacio de Hilbert complejo separable. Entonces, sus espacios duales $\mathfrak{h}^*$ y V^* satisfacen $\mathfrak{h}^* \subseteq V^*$ de manera continua y densa también. Usando el teorema de representación de Riesz identificamos a $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$, luego

$$V \subseteq \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^* \subseteq V^*$$

de manera continua y densa. Llamaremos a $(V, \mathfrak{h}, V^*)$ una tripleta de Gelfand.

Generalizando directamente a espacios de Hilbert complejos una fórmula de Itô bien conocida, ver, e.g., Teorema 4.2.5 de [23], llegamos a:

Teorema 3 *Sea $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; \mathfrak{h})$. Consideremos el I-proceso de Wiener cilíndrico W sobre el espacio de Hilbert separable U. Supondremos que $Y \in L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes \mathbb{P}; V^*)$ y $Z \in L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes \mathbb{P}; L_2(U, \mathfrak{h}))$ son progresivamente medibles. Definimos el proceso estocástico continuo $(X_t)_{t \in [0,T]}$ con valores en V^* a través de*

$$X_t := X_0 + \int_0^t Y(s)ds + \int_0^t Z(s)dW(s)$$

para todo $t \in [0,T]$. Asumamos que existe $\hat{X} \in L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes \mathbb{P}, V)$ tal que $X = \hat{X}$ $dt \otimes \mathbb{P}$-c.d. Entonces, $(X_t)_{t \in [0,T]}$ es un proceso adaptado con valores en $\mathfrak{h}$ que es continuo y satisface:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0,T]} \|X_t\|_{\mathfrak{h}}^2 \right) < \infty.$$

Además, se cumple la siguiente fórmula de Itó para la norma al cuadrado de X_t: para todo $t \in [0,T]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} - c.s. \qquad \|X_t\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \|X_0\|_{\mathfrak{h}}^2 + \int_0^t \left(2Re\left({}_{V^*}\langle Y(s), \bar{X}(s) \rangle_V \right) + \|Z(s)\|_{L_2(U,\mathfrak{h})}^2 \right) ds \\ &\quad + \int_0^t 2Re\langle X(s), Z(s)dW_s \rangle_{\mathfrak{h}}, \end{aligned}$$

donde $\bar{X}$ es cualquier $dt \otimes \mathbb{P}$-versión progresivamente medible de $\hat{X}$.

Demostración del Lema 2.14

Consideremos la tripleta de Gelfand de referencia $(V, \mathfrak{h}, V^*)$ dada por $V = (\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C)$ y $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Como C es autoadjunto, $\overline{\mathcal{D}(C)} = \mathfrak{h}$. Además para todo $v \in \mathcal{D}(C)$ tenemos que

$\|v\| \leq \|v\|_C$. En consecuencia, la inclusión canónica $(\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C) \to (\mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es continua y por lo tanto nuestra tripleta de Gelfand está bien definida.

Elijamos

$$Y(s) := g_s(X_s, \cdot).$$

De la Nota 2.1 se tiene que para todo $v \in V$,

$$|Y_s(v)| = |g_s(X_s, v)| \leq K(s) \|X_s\|_C \|v\|_C.$$

Ya que $g_s(\cdot, \cdot)$ es lineal en la segunda componente, tenemos que $Y(s) \in V^*$. Además,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{E} \|Y(s)\|_{V^*}^2 \, ds &\leq \int_0^T (K(s))^2 \mathbb{E} \|X_s\|_C^2 \, ds \\
&= \int_0^T (K(s))^2 \left(\mathbb{E} \|X_s\|^2 + \mathbb{E} \|CX_s\|^2 \right) ds \\
&\leq \int_0^T (K(s))^2 \left(\mathbb{E} \|X_0\|^2 + \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E} \|CX_t\|^2 \right) ds \\
&\leq T(K(T))^2 \left(\mathbb{E} \|X_0\|^2 + \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E} \|CX_t\|^2 \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Y \in L^2([0, T] \times \Omega, dt \otimes \mathbb{P}; V^*)$.

Por otro lado, introducimos el espacio auxiliar:

$$U := l_2(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\},$$

y consideramos una base ortonormal $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de U. Para todo $v \in U$, definimos

$$Z(s)(v) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle p_k, v \rangle_U L_k(s) X_s.$$

Luego, Z toma valores en $L_2(U, \mathfrak{h})$ y $Z \in L^2([0, T] \times \Omega, dt \otimes \mathbb{P}; L_2(U, \mathfrak{h}))$. En efecto, combinando el Lema 2.5 con (2.35) deducimos que

$$\begin{aligned}
\|Z(s)\|_{L_2(U, \mathfrak{h})}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|Z(s)(p_k)\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(s) X_s\|^2 \\
&\leq -2Re\left(g_s(X_s, X_s)\right) \\
&\leq 2K(T) \|X_s\|_C^2,
\end{aligned}$$

de donde se concluye nuestra afirmación.

Finalmente, definimos

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} W_t^k p_k,$$

donde W^k es la sucesión de movimientos brownianos independientes a valores reales dados en (1.1). Entonces, $(W_t)_t$ es un I-proceso de Wiener cilíndrico con valores en U.

Identificando X_t con $\langle X_t, \cdot \rangle$ ahora podemos escribir

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y(s)ds + \int_0^t Z(s)dW_s.$$

Ya que $X \in L^2([0,T] \times \Omega, dt \times \mathbb{P}; V)$, aplicando el Teorema 3 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|X_t\|^2 &= \|X_0\|^2 + \int_0^t \left((2Re\left(g_s\left(X_s, X_s\right)\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(s)X_s\|^2 \right) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t 2Re\langle L_k(s)X_s, X_s \rangle dW_s^k. \end{aligned}$$

□

2.3.5. Demostración Teorema 1

Demostración [Unicidad]

Supongamos que Z_t e Y_t son dos soluciones C-variacionales de (1.1), ambas con dato inicial X_0, entonces el proceso $\Delta_t := Z_t - Y_t$, satisface:

$$\Delta_t = \int_0^t g_s\left(\Delta_s, \cdot\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t L_k(s)\Delta_s dW_s^k.$$

Del Lema 2.5 se deduce que

$$2Re\left(g_s\left(\Delta_s, \Delta_s\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(s)\Delta_s\|^2 \leq 0.$$

Luego, aplicando el Lema 2.14 llegamos a

$$\|\Delta_t\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t 2Re\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s \rangle dW_s^k. \tag{2.42}$$

A continuación probaremos que (2.42) nos lleva a que Δ_t es indistingible de cero. Con este fin, definimos $\tau_n := \text{ínf}\{t \in [0,T] : \|\Delta_t\| > n\} \wedge T$. Tenemos que $\tau_n \uparrow T$ y cada τ_n es un tiempo de parada. Ya que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^{\tau_n} \sum_{k=1}^{\infty} 4Re^2(\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle)ds &\leq 4\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\tau_n} |\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle|^2 \, ds \\
&\leq 4\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\tau_n} \|\Delta_s\|^2 \|L_k(s)\Delta_s\|^2 \, ds \\
&\leq 4n^2\mathbb{E}\int_0^{\tau_n}\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(s)\Delta_s\|^2 \, ds \\
&\leq 4n^2\mathbb{E}\int_0^{\tau_n} K(T)\,\|\Delta_s\|_C^2 \, ds \\
&\leq 4n^2K(T)\mathbb{E}\int_0^{T} \|\Delta_s\|_C^2 \, ds \\
&\leq 4n^2K(T)T\mathbb{E}\{\|\Delta_s\|_C^2\} < \infty,
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle dW_s^k\right)_{t\in[0,T]} \tag{2.43}$$

es una martingala, ver, e.g., Teorema 4.12 de [22]. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle dW_s^k\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle dW_s^k|\mathcal{F}_0\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por (2.42),

$$\|\Delta_{t\wedge\tau_n}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle dW_s^k.$$

Entonces

$$\mathbb{E}\left(\|\Delta_{t\wedge\tau_n}\|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)\Delta_s, \Delta_s\rangle dW_s^k\right) = 0.$$

Como consecuencia, $\mathbb{E}\,\|\Delta_{t\wedge\tau_n}\|^2 = 0$ y así $\Delta_{t\wedge\tau_n} = 0$, $\mathbb{P}$-c.s. En vista de que $\tau_j(\omega) = T$ cuando $j > \text{máx}\{\|\Delta_t(\omega)\| : t \in [0,T]\}$, se tiene:

$$\mathbb{P}(\Delta_t \neq 0) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\Delta_{t\wedge\tau_n} \neq 0) = 0.$$

Lo cual prueba que el proceso Δ_t es indistingible del cero, y por lo tanto demuestra la unicidad de la solución. $\square$

Demostración [Existencia]

Para todo $N \in \mathbb{N}$ definimos el proceso estocástico $(Z_t^N)_{t\in[0,T]}$ con valores en el espacio dual de $(\mathcal{D}(C), \|\cdot\|_C)$ a través de

$$Z_t^N := \langle X_0, \cdot\rangle + \int_0^t \left(g_s\left(\pi_C(Z_s), \cdot\right)\right) ds + \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_l(s)\pi_C(Z_s), \cdot\rangle dW_s,$$

donde $t \in [0, N]$ y Z_s es descrito en el Lema 2.9. Empleando el Teorema 3 deducimos que Z_t^N tiene una versión con valores en $\mathfrak{h}$ que es continua, abusando de la notación llamaremos a esta versión Z_t^N, por ende $Z_t^N = \langle Z_t^N, \cdot\rangle$. Del Lema 2.13 tenemos que Z^N es una versión continua de Z, luego para todo $t \in [0, N]$ y $x \in \mathcal{D}(C)$,

$$\langle Z_t^N, x\rangle = \langle X_0, x\rangle + \int_0^t g_s\left(\pi_C(Z_s^N), x\right) ds + \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s)\pi_C(Z_s^N), x\rangle dW_s^k.$$

Más aún, Z^N es la única C-solución variacional de (1.1) en $[0, N]$.

Sea Ω_0 el conjunto de todos los $w \in \Omega$, que verifican:

$$Z_t^{N+1}(w) = Z_t^N(w)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in [0, N]$. Luego $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Para todo $t \in [0, N]$ con $N \in \mathbb{N}$ definimos

$$X_t(w) = Z_t^N(w),$$

cuando $w \in \Omega_0$, y $X \equiv 0$ en el complemento de Ω_0. Entonces X es la única C-solución variacional de (1.1) en $[0, \infty[$. $\square$

2.4. Demostración del Teorema 2

Primero extenderemos la Condición H1.3' de $\mathcal{D}_3$ a $\mathcal{D}(C)$.

Lema 2.15 *Bajo las Condiciones H1.3, H2.2 y H3.1', se tiene que*

$$2Re\left(g_t\left(x, x\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 = 0$$

para todo $x \in \mathcal{D}(C)$ *y* $t \geq 0$.

Demostración Fijemos $x \in \mathcal{D}(C)$ y $t \geq 0$. Como $\mathcal{D}_2$ es un dominio esencial de C, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{D}_2$ tal que $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} x$ y $Cx_n \longrightarrow_{n\to\infty} Cx$, luego

$$\|x_n - x\|_C \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Usando la Condición H3.1' obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x_n\|^2 = -2Re\left(g_t\left(x_n, x_n\right)\right) \tag{2.44}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la Condición H1.3 deducimos

$$\begin{aligned} \left|g_t\left(x_n, x_n\right) - g_t\left(x, x\right)\right| &\leq \left|g_t\left(x_n - x, x_n\right) + g_t\left(x, x_n - x\right)\right| \\ &\leq \left|g_t\left(x_n - x, x_n\right)\right| + \left|g_t\left(x, x_n - x\right)\right| \\ &\leq K(t)\{\|x_n - x\|_C \|x_n\|_C + \|x\|_C \|x_n - x\|_C\} \longrightarrow_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.44) implica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x_n\|^2 = -2Re\left(g_t\left(x, x\right)\right). \tag{2.45}$$

De (2.35) tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)\left(x - x_n\right)\|^2 \leq K(t)\left\|\left(x - x_n\right)\right\|_C^2 \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Usando la desigualdad de Minkowski deducimos

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x_n\|^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2\right)^{1/2} \right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)\left(x - x_n\right)\|^2\right)^{1/2},$$

por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2.$$

Aplicando (2.45) se llega a

$$2Re\left(g_t\left(x, x\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(t)x\|^2 = 0.$$

□

Demostración del Teorema 2

El Lema 2.14 establece que

$$\begin{aligned}\|X_t\|^2 &= \|X_0\|^2 + \int_0^t \left(2Re\left(g_s\left(X_s, X_s\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(s)X_s\|^2 \right) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t 2Re\langle L_k(s)X_s, X(s)\rangle dW_s^k,\end{aligned} \tag{2.46}$$

luego el Lema 2.15 nos lleva a

$$\|X_t\|^2 = \|X_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t 2Re\langle L_k(s)X_s, X(s)\rangle dW_s^k. \tag{2.47}$$

Consideremos

$$\tau_n := \text{ínf}\{t \in [0,T] : \|X_t\| > n\} \wedge T.$$

Entonces, τ_n es un tiempo de parada y $\tau_n \uparrow T$. De (2.47) tenemos

$$\|X_{t\wedge\tau_n}\|^2 = \|X_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)X_s, X(s)\rangle dW_s^k. \tag{2.48}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\int_0^{\tau_n} \sum_{k=1}^{\infty} 4Re^2(\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle) ds &\leq 4\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau_n} |\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle|^2 ds \\ &\leq 4\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau_n} \|X_s\|^2 \|L_k(s)X_s\|^2 ds \\ &\leq 4n^2\mathbb{E} \int_0^{\tau_n} \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k(s)X_s\|^2 ds \\ &\leq 4n^2\mathbb{E} \int_0^{\tau_n} K(T) \|X_s\|_C^2 ds \\ &\leq 4n^2 K(T)\mathbb{E} \int_0^{T} \|X_s\|_C^2 ds \\ &\leq 4n^2 K(T)T\mathbb{E}\left(\|X_s\|_C^2\right) < \infty,\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} 2Re\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle dW_s^k\right)_{t\in[0,T]} \tag{2.49}$$

es una martingala continua de cuadrado integrable, Usando ahora (2.48) deducimos que $\left(\|X_{t\wedge\tau_n}\|^2\right)_{t\in[0,T]}$ es una martingala para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego

$$\mathbb{E}\,\|X_{t\wedge\tau_n}\|^2 = \mathbb{E}\,\|X_0\|^2\,. \tag{2.50}$$

Aplicando el Teorema 3 deducimos que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|X_t\|^2\right)<\infty.$$

Por consiguiente, combinando (2.50) con el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$\mathbb{E}\,\|X_t\|^2 = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,\|X_{t\wedge\tau_n}\|^2 = \mathbb{E}\,\|X_0\|^2\,. \tag{2.51}$$

Consideremos $0\le s\le t$. Aplicando el Lema de Fatou se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\|X_t\|^2|\mathcal{F}_s\right) &\le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\|X_{t\wedge\tau_n}\|^2|\mathcal{F}_s\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\|X_{s\wedge\tau_n}\|^2\\
&= \|X_s\|^2\,.
\end{aligned}$$

Entonces $\left(\|X_t\|^2\right)_{t\in[0,T]}$ es una supermartingala, lo cual unido a (2.51) implica que $\left(\|X_t\|^2\right)_{t\in[0,T]}$ es una martingala. $\square$

Capítulo 3

Ecuación no lineal de Schrödinger estocástica

3.1. Resultado Principal

Este capítulo aborda la formulación variacional de la ecuación no lineal de Schrödinger estocástica (1.6). En particular, lidiaremos con el buen posicionamiento del problema:

- Encontrar el proceso estocástico predecible Y tal que:

$$\begin{aligned}\langle Y_t, x\rangle = {} & \langle Y_0, x\rangle + \int_0^t g_s\left(Y_s, x\right) ds \\ & + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} Re\langle L_k(s)Y_s, Y_s\rangle \langle L_k(s)Y_s, x\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} Re^2\langle L_k(s)Y_s, Y_s\rangle\langle Y_s, x\rangle \right) ds \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \left(\langle L_k(s)Y_s, x\rangle - Re\langle L_k(s)Y_s, Y_s\rangle\langle Y_s, x\rangle\right) dW_s^k\end{aligned} \tag{3.1}$$

  para todo $t \geq 0$ y x perteneciente a cierto subconjunto denso en $\mathfrak{h}$. Aquí, g_s es como en la Nota 2.1

Precisaremos ahora, el concepto que usamos de solución variacional regular de (1.6).

Definición 3.1 *Asumamos la Hipótesis 1. Sea* $\mathbb{I} = [0, \infty[$ *ó* $[0, T]$*, con* $T > 0$*. Diremos que* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{I}}, \mathbb{Q}, (Y_t)_{t\in\mathbb{I}}, (W_t^k)_{t\in\mathbb{I}}^{k\in\mathbb{N}})$ *es una C-solución variacional de* (1.6)*, con distribución inicial* θ *en* $\mathbb{I}$ *si y solo si:*

- *Con respecto a la base estocástica* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$*, los procesos* $W^1, W^2, \ldots$ *son movimientos Brownianos independientes con valores reales.*

- $(Y_t)_{t\in\mathbb{I}}$ *es un proceso continuo y adaptado sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$ *con valores en* $\mathfrak{h}$*, tal que la ley de* Y_0 *coincide con* θ *y*

$$\mathbb{Q}(\|Y_t\| = 1, \forall t \in \mathbb{I}) = 1.$$

- *Para todo* $t \in \mathbb{I}$ *se tiene que* $Y_t \in \mathcal{D}(C)$ $\mathbb{Q}$*-c.s. y*

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E} \|CY_s\|^2 < \infty.$$

- $\mathbb{Q}$*-c.s., para todo* $t \in \mathbb{I}$ *y* $x \in \mathcal{D}(C)$ *se satisface:*

$$\begin{aligned} \langle Y_t, x\rangle &= \langle Y_0, x\rangle + \int_0^t g_s\left(\pi_C\left(Y_s\right), x\right) ds \\ &+ \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} Re\langle L_k(s)\circ \pi_C\left(Y_s\right), Y_s\rangle \langle L_k(s)\circ \pi_C\left(Y_s\right), x\rangle\right) ds \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} Re^2\langle L_k(s)\circ \pi_C\left(Y_s\right), Y_s\rangle\langle Y_s, x\rangle\right) ds \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \left(\langle L_k(s)\circ\pi_C\left(Y_s\right), x\rangle - Re\langle L_k(s)\circ \pi_C\left(Y_s\right), Y_s\rangle\langle Y_s, x\rangle\right) dW_s^k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para abreviar, diremos que $(\mathbb{Q}, (Y_t)_{t\in\mathbb{I}}, (W_t)_{t\in\mathbb{I}})$ *es una C-solución variacional de (1.6).*

En la Sección 3.2 probamos el siguiente resultado, que nos asegura que (3.1) tiene una única solución $C-$variacional.

Teorema 4 *Supongamos que* C *satisface la Hipótesis 3. Asumamos que* θ *es una medida de probabilidad sobre* $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ *tal que* $\theta(\mathcal{D}(C) \cap \{x \in \mathfrak{h} : \|x\|\} = 1) = 1$ *y*

$$\int_{\mathfrak{h}} \|Cx\|^2 \theta(dx) < \infty.$$

Entonces (1.6) tiene una única C-solución variacional $(\mathbb{Q}, (Y_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0})$ *con distribución inicial* θ*. Además, para todo* $t \geq 0$ *tenemos que:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \|CY_t\|^2 \leq \exp(t\alpha(t))\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \|CY_0\|^2 + t\alpha(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \|Y_0\|^2\}. \tag{3.3}$$

3.2. Demostración del Teorema 4

3.2.1. Construcción de una C-solución de (3.2)

Proposición 3.1 *Asumamos las hipótesis del Teorema 4. Sea* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *una C-solución variacional de (1.1), donde* X_0 *se distribuye de acuerdo a* θ *y* $T>0$*. Definamos*

$$\mathbb{Q} = \|X_T\|^2 \cdot \mathbb{P}.$$

Además, para todo $t \in [0,T]$ *ponemos*

$$Y_t = \begin{cases} X_t/\|X_t\| & si\ X_t \neq 0 \\ 0 & si\ X_t = 0 \end{cases}$$

y

$$B_t^k = W_t^k - \int_0^t \frac{1}{\|X_s\|^2} d[W^k, \|X\|^2]_s \tag{3.4}$$

con $k \in \mathbb{N}$*. Entonces* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}, (Y_t)_{t\in[0,T]}, (B_t^k)_{t\in[0,T]}^{k\in\mathbb{N}})$ *es una C-solución variacional de (1.6) con distribución inicial* θ*.*

Demostración

Como en la demostración del Teorema 2, aplicando los Lemas 2.14 y 2.15 deducimos que

$$\|X_t\|^2 = \|X_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t 2Re\langle L_k(s)X_s, X(s)\rangle dW_s^k, \tag{3.5}$$

que unido a (3.4) nos lleva a

$$B_t^k = W_t^k - \int_0^t \frac{2Re\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle}{\|X_s\|^2} ds. \tag{3.6}$$

Del Teorema 2 sabemos que $(\|X_t\|^2)_{t\in[0,T]}$ es una $\mathbb{P}$-martingala. Ya que $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$ y la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ con respecto a $\mathbb{P}$ es $\|X_T\|^2$, aplicando el teorema Girsanov-Meyer, ver, e.g., Sección III.8 de [24] o Sección 8.1 de [25], obtenemos que $\left(B_t^k\right)_{t\in[0,T]}$ es una $\mathbb{Q}$-martingala local, que además es continua. Puesto que

$$[B^j, B^l]_t = \begin{cases} 1, & \text{si } j = l \\ 0, & \text{si } j \neq l \end{cases},$$

empleando el teorema de Levy, ver, e.g., [24], deducimos que $B^1, B^2, ...$ son movimientos brownianos reales independientes sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q})$.

Reemplazando (3.6) en (3.5) se obtiene que

$$\begin{aligned}\|X_t\|^2 &= \|X_0\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \frac{4}{\|X_s\|^2} Re^2\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t 2Re\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle dB_s^j,\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\|X_t\|^2 &= \|X_0\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \|X_s\|^2 \frac{4Re^2\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^4} ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \|X_s\|^2 \frac{2Re\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^2} dB_s^j.\end{aligned} \tag{3.7}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Definamos

$$H_t := \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \frac{2Re\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^2} dB_s^j$$

para $t \in [0, T]$. Entonces $(H_t)_{t\in[0,T]}$ es una $\mathbb{Q}$-martingala continua de cuadrado integrable, pues debido a (2.35) y a la Definición 2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 4\frac{Re^2\langle X_s, L_k(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^4} ds\right) &\leq 4\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|L_k(s)X_s\|^2}{\|X_s\|^2} ds\right) \\ &\leq 4K(T)\int_0^T \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\frac{\|X_s\|_C^2}{\|X_s\|^2}\right) ds \\ &= 4K(T)\int_0^T \mathbb{E}\left(\frac{\|X_s\|_C^2}{\|X_s\|^2}\|X_s\|^2\right) ds \\ &\leq 4K(T)\int_0^T \left(\mathbb{E}\|X_s\|_C^2\right) ds < \infty.\end{aligned}$$

Ahora, (3.7) se convierte en

$$\|X_t\|^2 = \|X_0\|^2 + \int_0^t \|X_s\|^2 d([H, H] + H)_s,$$

que es una ecuación diferencial estocástica con solución:

$$\begin{aligned} \|X_t\|^2 &= \exp\left(H_t + [H,H]_t - \frac{1}{2}[[H,H] + H, [H,H] + H]_t\right)\|X_0\|^2 \\ &= \exp\left(H_t + \frac{1}{2}[H,H]_t\right)\|X_0\|^2. \end{aligned}$$

ver, e.g, Teorema 37, Página 84 de [24]. Por lo tanto,

$$\|X_t\|^{-1} = \exp\left(-\frac{1}{2}H_t - \frac{1}{4}[H,H]_t\right)\|X_0\|^{-1}. \tag{3.8}$$

Ya que

$$-\frac{1}{2}H_t - \frac{1}{4}[H,H]_t = -\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \frac{Re\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^2}dB_s^j - \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \frac{Re^2\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^4}ds,$$

combinando (3.8) con el Teorema 37 de la Página 84 de [24] deducimos que $(\|X_t\|^{-1})_{t\in[0,T]}$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\|X_t\|^{-1} = \|X_0\|^{-1} + \int_0^t \|X_s\|^{-1} d\widetilde{H}_s,$$

con

$$\widetilde{H}_t = -\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \frac{Re\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^2}dB_s^j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \frac{Re^2\langle X_s, L_j(s)X_s\rangle}{\|X_s\|^4}ds.$$

O sea

$$\begin{aligned} \|X_t\|^{-1} &= \|X_0\|^{-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \|X_s\|^{-1}\frac{Re^2\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle}{\|X_s\|^4}ds \\ &\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \|X_s\|^{-1}\frac{Re\langle L_k(s)X_s, X_s\rangle}{\|X_s\|^2}dB_s^k. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Fijemos $x \in \mathcal{D}(C)$. Ya que $(\langle X_t, x\rangle)_{t\in[0,T]}$ y $(\|X_t\|^{-1})_{t\in[0,T]}$ son semimartingalas, aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle X_t, x\rangle \|X_t\|^{-1} &= \langle X_0, x\rangle \|X_0\|^{-1} + \int_0^t \langle X_s, x\rangle d(\|X_s\|^{-1}) \\ &\quad + \int_0^t \|X_s\|^{-1} d(\langle X_s, x\rangle) + [\langle X, x\rangle, \|X\|^{-1}]_t, \end{aligned} \tag{3.10}$$

ver, e.g., Corolario 2, Página 68 de [24].

Como

$$\langle X_t, x\rangle = \langle X_0, x\rangle + \int_0^t g_s\left(X_s, x\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s) X_s, x\rangle dW_s^k,$$

de (3.6) se deduce que

$$\begin{aligned} \langle X_t, x\rangle &= \langle X_0, x\rangle + \int_0^t g_t\left(X_t, x\right) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(t) X_t, x\rangle dB_t^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(t) X_t, x\rangle \frac{2Re\langle L_k(t) X_t, X_t\rangle}{\left\|X_t\right\|^2} dt. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando (3.9) y (3.11) convertimos (3.10) en

$$\begin{aligned} \langle X_t, x\rangle \left\|X_t\right\|^{-1} &= \langle X_0, x\rangle \left\|X_0\right\|^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle X_s, x\rangle \left\|X_s\right\|^{-1} \frac{Re^2\langle L_k(s) X_s, X_s\rangle}{\left\|X_s\right\|^4} ds \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle X_s, x\rangle \left\|X_s\right\|^{-1} \frac{Re\langle L_k(s) X_s, X_s\rangle}{\left\|X_s\right\|^2} dB_s^k \\ &+ \int_0^t g_s\left(X_s, x\right) \left\|X_s\right\|^{-1} ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left\|X_s\right\|^{-1} \langle L_k(s) X_s, x\rangle dB_s^k \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left\|X_s\right\|^{-1} \langle L_k(s) X_s, x\rangle \frac{2Re\langle L_k(s) X_s, X_s\rangle}{\left\|X_s\right\|^2} ds \\ &- \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left\|X_s\right\|^{-1} \langle L_k(s) X_s, x\rangle \frac{Re\langle L_k(s) X_s, X_s\rangle}{\left\|X_s\right\|^2} ds. \end{aligned}$$

Luego, de la definición de Y_t obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle Y_t, x\rangle =& \langle Y_0, x\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle Y_s, x\rangle Re^2\langle L_k(s) Y_s, Y_s\rangle ds \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle Y_s, x\rangle Re\langle L_k(s) Y_s, Y_s\rangle dB_s^k + \int_0^t g_s\left(Y_s, x\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s) Y_s, x\rangle dB_s^k \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_k(s) Y_s, x\rangle 2Re\langle L_k(s) Y_s, Y_s\rangle ds - \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k(s) Y_s, x\rangle Re\langle L_k(s) Y_s, Y_s\rangle ds. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
\langle Y_t, x\rangle =& \langle Y_0, x\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \langle Y_s, x\rangle Re^2\langle L_k(s)Y_s, Y_s\rangle ds \\
& - \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \langle Y_s, x\rangle Re\langle L_k(s)Y_s, Y_s\rangle dB_s^k + \int_0^t g_s\left(Y_s, x\right) ds \\
& + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_k(s)Y_s, x\rangle dB_s^k + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_k(s)Y_s, x\rangle Re\langle L_k(s)Y_s, Y_s\rangle ds,
\end{aligned}
$$

de donde se concluye que $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ satisface (3.2). $\square$

3.2.2. Unicidad de la C-solución variacional de 1.6

Notación 3.1 *Sea E un espacio normado. En lo que sigue, $C([0,T],E)$ denota el espacio de las funciones continuas sobre $[0,T]$ con valores en E, provisto de la norma uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$. Además denotamos por $C([0,T],\mathbb{R}^{\infty})$ el producto cartesiano $\prod_{k=1}^{\infty} C([0,T],\mathbb{R})$ provisto de la métrica:*

$$
d((f^k)_{k\in\mathbb{N}}, (g^k))_{k\in\mathbb{N}} := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \min\{1, \left\|f^k - g^k\right\|_{\infty}\}.
$$

La siguiente proposición establece la unicidad de C-solución variacional de (1.6) en el sentido débil, cuando I es un intervalo acotado.

Proposición 3.2 *Adopte los supuestos del Teorema 4. Sea $(\mathbb{Q}, X_t, (B_t^k)^{k\in\mathbb{N}})_{t\in[0,T]}$ como en la Proposición 3.1. Si $(\widetilde{\mathbb{Q}}, (\widetilde{X}_t)_{t\in[0,T]}, (\widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]})$ es una C-solución variacional de (1.6) con distribución inicial θ, entonces $(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]}$ y $(X_t, B_t)_{t\in[0,T]}$ tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.*

Demostración Comenzamos observando que

$$
\mathcal{B}(C([0,T],\mathbb{R}^{\infty})) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}(C([0,T],\mathbb{R})).
$$

Luego $(B_t^k)_{t\in[0,T]}^{k\in\mathbb{N}}$ y $(\widetilde{B}_t^k)_{t\in[0,T]}^{k\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias que toman valores en $C([0,T],\mathbb{R}^{\infty})$. Ya que $C([0,T],\mathbb{R}^{\infty})$ es un espacio polaco (métrico, completo y separable), por medio de argumentos clásicos podemos reducir nuestra demostración al caso $X_0 = x$ y $\widetilde{X}_0 = x$ con $x \in$

$\mathcal{D}(C)$ y $\|x\| = 1$, ver, e.g., Proposición IX.1.4 de [25]. Para abordar este caso, consideramos el espacio

$$\Theta := C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathbb{R}^{\infty}),$$

provisto de la topología producto usual, y para cada $k = 1,2,3$ definimos

$$Z^k(f) = f^k,$$

donde $f = (f^1, f^2, f^3) \in \Theta$.

Siguiendo la construcción de Yamada-Watanabe, ver, e.g., demostración del Teorema IV.1.1 de [10] o prueba del Teorema IX.1.7 de [25], tenemos que existe una medida de probabilidad μ sobre $\mathcal{B}(\Theta)$ con las siguientes propiedades:

- $\mu \circ (Z^1, Z^3)^{-1} = \mathbb{Q} \circ (X, B)^{-1}$ y $\mu \circ (Z^2, Z^3)^{-1} = \widetilde{\mathbb{Q}} \circ (\widetilde{X}, \widetilde{B})^{-1}$.
- $(Z_t^3)_{t\in[0,T]}$ es una sucesión de movimientos brownianos reales independientes sobre $(\Theta, \mathcal{B}, (\mathcal{B}_t)_{t\in[0,T]}, \mu)$, donde $(\Theta, \mathcal{B}, \mu)$ es el completamiento de $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \mu)$ y para cada $t \in [0,T]$ se elige

  $$\mathcal{B}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma\left(\widetilde{B}_{(t+\varepsilon)\wedge T} \cup \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) = 0\}\right)$$

  con

  $$\widetilde{B}_s = \rho_s^{-1}\left(\mathcal{B}\left(C([0,T],\mathfrak{h})\right)\right) \otimes \rho_s^{-1}\left(\mathcal{B}\left(C([0,T],\mathfrak{h})\right)\right) \otimes \rho_s^{-1}\left(\mathcal{B}\left(C([0,T],\mathbb{R}^{\infty})\right)\right).$$

  Aquí, para cualquier $t \in [0,T]$ se define la aplicación $\rho_t : E \to E$ como

  $$(\rho_t f)(s) = f(s \wedge t)$$

  para todo $f \in E$ y $s \in [0,T]$, siendo $E = C([0,T],\mathfrak{h})$ ó $E = C([0,T],\mathbb{R}^{\infty})$.

Una de las consecuencias de que $\mu \circ (Z^1, Z^3)^{-1} = \mathbb{Q} \circ (X, B)^{-1}$ es que

$$\left\|Z_t^1\right\|_{\mathfrak{h}} = 1.$$

En efecto, consideremos la función $F : C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathbb{R}^{\infty}) \to \mathfrak{h}$ definida como

$$F(f,g) = \|f(t)\|.$$

F es continua, y por lo tanto medible. Como $(\mathbb{Q}, X_t, (B_t^k)^{k\in\mathbb{N}})_{t\in[0,T]}$ es C-solución variacional de (1.6), $\mathbb{Q}(\|X_t\|) = 1$, luego

$$\begin{aligned}\mu(\left\|Z_t^1\right\| = 1) &= \int_\Theta \mathbf{1}_{\{1\}}(F(Z^1, Z^3))d\mu \\ &= \int_\Theta \mathbf{1}_{\{1\}} \circ F \quad d\mu \circ (Z^1, Z^3)^{-1} \\ &= \int_\Theta \mathbf{1}_{\{1\}} \circ F \quad d\mathbb{Q} \circ (X, B)^{-1} \\ &= \mathbb{Q}(\|X_t\| = 1) = 1,\end{aligned}$$

lo cual prueba que, efectivamente $\|Z_t^1\|_{\mathfrak{h}} = 1$ μ-c.s. Similarmente, usando que $\mu\circ(Z^2, Z^3)^{-1} = \widetilde{\mathbb{Q}} \circ (\widetilde{X}, \widetilde{B})^{-1}$ llegamos a que

$$\left\|Z_t^2\right\|_{\mathfrak{h}} = 1.$$

Más aún, ya que la distribución de (Z^j, Z^3), con $j = 1, 2$, coincide con la distribución de una C-solución variacional de (1.6) tenemos que (Z^j, Z^3) es una C-solución variacional de (1.6), ver, e.g., Teoremas 8.3 y 8.6 de [18] o Ejercicio IV.5.16 de [25]. Luego

$$\begin{aligned}\langle Z_t^j, y\rangle) = \langle x, y\rangle + \sum_{k=1}^\infty \int_0^t \left(\langle L_k(s)Z_s^j, y\rangle - Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle Z_s^j, y\rangle\right) d(Z^3)_s^k + \int_0^t g_s\left(Z_s^j, y\right) ds \\ + \sum_{k=1}^\infty \left(Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle L_k(s)Z_s^j, y\rangle - \frac{1}{2}Re^2\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle Z_s^j, y\rangle\right) ds \qquad (3.12)\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathcal{D}(C)$.

En lo que sigue, j es igual a 1 ó 2. Combinando la Definición 3.1 con (2.35) deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu \int_0^T \sum_{k=1}^\infty 4Re^2 \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle ds &\leq 4\mathbb{E}_\mu \int_0^T \sum_{k=1}^\infty \left| \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle \right|^2 ds \\
&\leq 4\mathbb{E}_\mu \int_0^T \sum_{k=1}^\infty \left\| L_k(s) Z_s^j \right\|^2 \left\| Z_s^j \right\|^2 ds \\
&\leq 4\mathbb{E}_\mu \int_0^T \sum_{k=1}^\infty \left\| L_k(s) Z_s^j \right\|^2 ds \\
&\leq 4K(T)\mathbb{E}_\mu \int_0^T \left\| Z_s^j \right\|_C^2 ds \\
&\leq 4K(T) \int_0^T \mathbb{E}_\mu \left\| Z_s^j \right\|_C^2 ds < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el proceso $(H_t)_{t\in[0,T]}$ dado por

$$H_t = -\sum_{k=1}^\infty \int_0^t 2Re \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle d(Z^3)_s^k$$

es una martingala continua de cuadrado integrable, ver, e.g., Teorema 4.12 de [22].

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seleccionamos

$$T_n^j = inf\{t \in [0,T] : \int_0^t \left\| C Z_s^j \right\|^2 ds > n\} \wedge T.$$

Luego, T_n^j es un tiempo de parada y

$$[H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_t \leq 4K(T)T(1+n^2). \tag{3.13}$$

En efecto, de (2.35) obtenemos:

$$\begin{aligned}
[H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_t &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s) 4Re^2 \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle ds \\
&\leq \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s) 4 \left\| L_k(s) Z_s^j \right\|^2 \left\| Z_s^j \right\|^2 ds \\
&= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s) 4 \left\| L_k(s) Z_s^j \right\|^2 ds \\
&\leq 4K(T) \int_0^t \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s) \left\| Z_s^j \right\|_C^2 ds \\
&= 4K(T) \int_0^{t \wedge T_n^j} \left(1 + \left\| C Z_s^j \right\|^2 \right) ds \leq 4K(T)\{T + Tn^2\},
\end{aligned}$$

ver, e.g., Lema 2.4.3 de [23] o Teorema 4.12 de [22].

Para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos:

$$W_t^{k,j} = (Z^3)_t^k + \int_0^{t \wedge T_n^j} 2Re \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle ds. \tag{3.14}$$

Por (3.13), de acuerdo al criterio de Novikov $\left(\exp \left(H_t^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_t / 2 \right) \right)_{t \in [0,T]}$ es una martingala uniformemente integrable, ver, e.g., Proposición VIII.1.15 de [25]. Entonces, aplicando el teorema de Girsanov, ver, e.g., Teorema VIII.1.7 de [25], obtenemos que $(W_t^{k,j})_{t \in [0,T]}^{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de movimientos brownianos independientes a valores reales sobre $(\Theta, \mathcal{B}, (\mathcal{B}_t)_{t \in [0,T]}, \mu^j)$, con

$$\mu^j = \exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T / 2) \cdot \mu.$$

Sustituyendo (3.14) en (3.12) se llega a que para todo $y \in \mathcal{D}(C)$,

$$\begin{aligned}
(\langle Z_t^j, y \rangle)^{T_n^j} &= \langle x, y \rangle + \int_0^{t \wedge T_n^j} \left(g_s \left(Z_s^j, y \right) + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} Re^2 \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle \langle Z_s^j, y \rangle \right) ds \\
&\quad - \int_0^{t \wedge T_n^j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} Re \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle \langle L_k(s) Z_s^j, y \rangle \right) ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge T_n^j} \left(\langle L_k(s) Z_s^j, y \rangle - Re \langle L_k(s) Z_s^j, Z_s^j \rangle \langle Z_s^j, y \rangle \right) dW_s^{k,j}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Para cualesquiera $t \in [0,T]$, definimos

$$\eta_t = \exp(-H_t/2 + [H,H]_t/4).$$

Luego

$$Y_t - \frac{1}{2}[Y,Y]_t = -\frac{1}{2}H_t + \frac{1}{4}[H,H]_t,$$

donde

$$Y_t := -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t Re^2\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle ds + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle dW_s^{k,j}.$$

Usando el Teorema II.37 de [24] llegamos a que

$$\eta_t = 1 + \int_0^t \eta_s dY_s$$

para todo $t \in [0,T]$. Por lo tanto,

$$\eta_t^{T_n^j} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s Re^2\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle ds + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle dW_s^{k,j}. \quad (3.16)$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, ver, e.g., Corolario 2 en la Página 68 de [24], deducimos que para todo $y \in \mathcal{D}(C)$,

$$\langle Z^j\eta, y\rangle_t^{T_n^j} = \langle x, y\rangle + \int_0^{t\wedge T_n^j}\langle Z_s^j, y\rangle d\eta_s + \int_0^{t\wedge T_n^j}\eta_s d(\langle Z_s^j, y\rangle) + [\langle Z^j, y\rangle, \eta]_t^{T_n^j}. \quad (3.17)$$

De (3.15) y (3.16) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge T_n^j}\langle Z_s^j, y\rangle d\eta_s &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j}\eta_s\langle Z_s^j, y\rangle Re^2\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j}\eta_s\langle Z_s^j, y\rangle Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle dW_s^{k,j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s d(\langle Z_s^j, y\rangle) &= \int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s g_s\left(Z_s^j, y\right) ds \\ &+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s Re^2\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle Z_s^j, y\rangle ds \\ &-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle L_k(s)Z_s^j, y\rangle ds \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s\langle L_k(s)Z_s^j, y\rangle dW_s^{k,j} \\ &-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle Z_s^j, y\rangle dW_s^{k,j}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[\langle Z^j, y\rangle, \eta]_t^{T_n^j} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s\langle L_k(s)Z_s^j, y\rangle Re\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle ds \\ &-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} \eta_s Re^2\langle L_k(s)Z_s^j, Z_s^j\rangle\langle Z_s^j, y\rangle ds.\end{aligned}$$

Así, reemplazando en (3.17) se obtiene que

$$\langle Z^j\eta, y\rangle_t^{T_n^j} = \langle x, y\rangle + \int_0^{t\wedge T_n^j} g_s\left(\left(Z_s^j\eta_s\right)^{T_n^j}, y\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j}\langle L_k(s)\left(Z^j\eta_s\right)^{T_n^j}, y\rangle dW_s^{k,j}. \quad (3.18)$$

Ya que $\left(\exp\left(H_t^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_t/2\right)\right)_{t\in[0,T]}$ es una μ-martingala uniformemente integrable, aplicando el teorema de detención opcional, ver, e.g., Teorema II.3.2 de [25], obtenemos que para todo $s\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}_\mu(\exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T/2)|\mathcal{B}_{s\wedge T_n^j}) = \exp(H_{s\wedge T_n^j}^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_{s\wedge T_n^j}/2).$$

Luego

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\mu^j} \int_0^{t\wedge T_n^j} \left\| C(Z^j\eta)_s^{T_n^j} \right\|^2 ds \\
= & \ \mathbb{E}_{\mu^j} \int_0^t \mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 ds \\
= & \int_0^t \mathbb{E}_\mu \left(\mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T/2) \right) ds \\
= & \int_0^t \mathbb{E}_\mu \left(\mathbb{E}_\mu \left(\mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T/2) | \mathcal{B}_{s\wedge T_n^j} \right) \right) ds \\
= & \int_0^t \mathbb{E}_\mu \left(\mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \mathbb{E}_\mu \left(\exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T/2) | \mathcal{B}_{s\wedge T_n^j} \right) \right) ds \\
= & \int_0^t \mathbb{E}_\mu \left(\mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \exp(H_{s\wedge T_n^j}^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_{s\wedge T_n^j}/2) \right) ds.
\end{aligned}
$$

Como $\eta_s^2 = \exp\left(-H_s + [H,H]_s/2\right)$, de la definición de T_n^j obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^j} \int_0^{t\wedge T_n^j} \left\| C(Z^j\eta)_s^{T_n^j} \right\|^2 ds &= \int_0^t \mathbb{E}_\mu \left(\mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \right) ds \\
&= \mathbb{E}_\mu \int_0^t \left(\mathbf{1}_{[0,T_n^j]}(s) \left\| C Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \right) ds \leq n.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

De manera similar se deduce que $\mathbb{E}_{\mu^j} \left\| (Z^j\eta)_s^{T_n^j} \right\|^2 = 1$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^j} \left\| (Z^j\eta)_s^{T_n^j} \right\|^2 &= \mathbb{E}_\mu \left(\eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T/2) \right) \\
&= \mathbb{E}_\mu \left(\eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \mathbb{E}_\mu \left(\exp(H_T^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_T/2) | \mathcal{B}_{s\wedge T_n^j} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_\mu \left(\eta_{s\wedge T_n^j}^2 \left\| Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \exp(H_{s\wedge T_n^j}^{T_n^j} - [H^{T_n^j}, H^{T_n^j}]_{s\wedge T_n^j}/2) \right) \\
&= \mathbb{E}_\mu \left(\left\| Z_{s\wedge T_n^j}^j \right\|^2 \right) = 1.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

La última igualdad es consecuencia de que μ-c.s. $\left\| Z_t^j \right\| = 1$ para todo $t \in [0,T]$.

Sea $(\varphi_t^j(x))_{t\in[0,T]}$ la C-solución variacional de (1.1) con dato inicial x, donde la base estocástica subyacente es $(\Theta, \mathcal{B}, (\mathcal{B}_t)_{t\in[0,T]}, \mu^j)$. De (3.18) tenemos que

$$\langle Z^j\eta - \varphi^j, y\rangle_t^{T_n^j} = \int_0^t \mathbf{1}_{]0,T_n^j]} g_s\left(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j, y\right) ds + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}\langle L_k(s)\left(Z^j\eta_s - \varphi_s^j\right), y\rangle dW_s^{k,j}$$

para todo $y \in \mathcal{D}(C)$. Procediendo como en la demostración del Lema 2.14, usamos la fórmula de Itô recordada en el Teorema 3 para obtener

$$\begin{aligned}\left\|Z^j_{t\wedge T_n^j} - \varphi^j_{t\wedge T_n^j}\right\|^2 &= \int_0^{t\wedge T_n^j}\left(2Re\ g_s\left(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j, Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j)\right\|^2\right) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} 2Re\langle L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j), Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j\rangle dW_s^{k,j}. \qquad (3.21)\end{aligned}$$

Con este fin, aplicamos el Teorema 3 con $Y(s) = \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s) g_s\left(Z^j\eta - \varphi^j, \cdot\right)$,

$$Z(s)(p_k) = \mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s) L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j)$$

y $W_s = \sum_{k=1}^{\infty} W_s^{k,j} p_k$, siendo $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $l_2(\mathbb{C})$. Ya que Z_s^j y φ_s^j pertenecen μ^j-c.s. al dominio de C, del Lema 2.15 tenemos que

$$2Re\left(g_s\left(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j, Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j)\right\|^2 = 0.$$

Por lo tanto, (3.21) se convierte en

$$\left\|Z^j_{t\wedge T_n^j} - \varphi^j_{t\wedge T_n^j}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge T_n^j} 2Re\langle L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j), Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j\rangle dW_s^{k,j}. \qquad (3.22)$$

Sea $S_m^j := \text{ínf}\{t \in [0,T] : \left\|\varphi_t^j\right\| \geq m \text{ y } \left\|Z_t^j\eta_t\right\| \geq m\}$. Entonces cada S_m^j es un tiempo de parada y $S_m^j \uparrow T$ cuando $m \to \infty$. Además, de (2.35) deducimos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mu^j}\int_0^T\left(\mathbf{1}_{S_m^j\wedge T_n^j}(s)\sum_{k=1}^{\infty} Re^2\langle L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j), Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j)\rangle\right) ds \\ &\leq \mathbb{E}_{\mu^j}\int_0^T\left(\mathbf{1}_{S_m^j\wedge T_n^j}(s)\sum_{k=1}^{\infty}\left\|L_k(s)(Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j)\right\|^2\left(\left\|Z_s^j\eta_s\right\| + \left\|\varphi_s^j\right\|\right)^2\right) ds \\ &\leq 4m^2 K(T)\mathbb{E}_{\mu^j}\int_0^T\left(\mathbf{1}_{S_m^j\wedge T_n^j}(s)\left\|Z_s^j\eta_s - \varphi_s^j\right\|_C^2\right) ds.\end{aligned}$$

De (3.19) y (3.20) obtenemos

$$\mathbb{E}_{\mu^j}\int_0^T\left(\mathbf{1}_{S_m^j\wedge T_n^j}(s)\sum_{k=1}^{\infty}Re^2\langle L_k(s)(Z_s^j\eta_s-\varphi_s^j),Z_s^j\eta_s-\varphi_s^j)\rangle\right)ds<\infty,$$

lo que implica que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge S_m^j}\mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s)2Re\langle L_k(s)(Z_s^j\eta_s-\varphi_s^j),Z_s^j\eta_s-\varphi_s^j)\rangle dW_s^{k,j}\right)_{t\in[0,T]}$$

es una μ_j-martingala de cuadrado integrable, ver, e.g., Teorema 4.12 de [22]. Por consiguiente,

$$\mathbb{E}_{\mu^j}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge S_m^j}\mathbf{1}_{]0,T_n^j]}(s)2Re\langle L_k(s)(Z_s^j\eta_s-\varphi_s^j),Z_s^j\eta_s-\varphi_s^j)\rangle dW_s^{k,j}\right]=0,$$

y (3.22) nos lleva a

$$\mathbb{E}_{\mu^j}\left\|Z_{t\wedge T_n^j}\eta_{t\wedge T_n^j\wedge S_m^j}-\varphi^j_{t\wedge T_n^j\wedge S_m^j}\right\|^2=0.$$

Por lo tanto μ^j-c.s. para todo $t\in[0,T]$,

$$(Z^j\eta)_{t\wedge T_n^j\wedge S_m^j}=\varphi^j_{t\wedge T_n^j\wedge S_m^j}(x),$$

porque $Z^j\eta$ y φ tienen trayectorias continuas. Tomando límite cuando $m\to\infty$ encontramos que

$$(Z^j\eta)_{t\wedge T_n^j}=\varphi^j_{t\wedge T_n^j}(x)\qquad\qquad \mu^j-c.s. \tag{3.23}$$

para todo $t\in[0,T]$.

Ya que $\mathbb{E}_\mu\int_0^T\left\|CZ_t^j\right\|^2dt<\infty$, de (2.35) obtenemos que

$$\mu(H_{T_n^j}-[H,H]_{T_n^j}=+\infty)=0,$$

lo que implica que $\eta_{T_n^j}>0$ μ-c.s., luego μ es absolutamente continua con respecto a μ^j. Por consiguiente, (3.23) nos lleva a

$$(Z^j\eta)_{t\wedge T_n^j}=\varphi^j_{t\wedge T_n^j}(x)\qquad\qquad \mu-c.s. \tag{3.24}$$

para todo $t\in[0,T]$. Usando nuevamente que $\mathbb{E}_\mu\int_0^T\left\|CZ_t^j\right\|^2dt<\infty$ obtenemos que

$$\eta_t>0\qquad\qquad \mu-c.s.$$

para todo $t \in [0,T]$. Así que (3.24) produce:

$$\int_0^t \left\| C\frac{\varphi_s^j}{\left\|\varphi_s^j(x)\right\|}\right\|^2 ds = \int_0^t \left\|CZ_s^j\right\|^2 ds \tag{3.25}$$

para cualquier $t \leq T_n^j$.

Como $\mu(\int_0^T \|CZ_s^j\|^2 ds = +\infty) = 0$, la función $t \mapsto \int_0^t \|CZ_s^j\|^2$ es continua μ-c.s. Luego, $\mu(T_n^j = T \vee \int_0^{T_n^j} \|CZ_s^j\|^2 ds = n) = 1$. Aplicando (3.25) se deduce que

$$\int_0^{T_n^j} \left\| C\frac{\varphi_s^j}{\left\|\varphi_s^j(x)\right\|}\right\|^2 ds = n$$

en $T_n^j < T$. Además, de (3.25) se obtiene $\int_0^t \|C\varphi_s^j / \|\varphi_s^j(x)\|\|^2 ds < n$ cuando $t < T_n^j$. Entonces

$$T_n^j = \text{ínf}\{t \in [0,T] : \int_0^t \left\| C\frac{\varphi_s^j}{\left\|\varphi_s^j(x)\right\|}\right\|^2 ds \geq n\} \wedge T \qquad\qquad \mu - c.s. \tag{3.26}$$

De la unicidad en el sentido trayectorial de las C-soluciones variacionales de (1.1) tenemos que

$$\mu^1 \circ (\varphi^1(x), W^{\cdot,1})^{-1} = \mu^2 \circ (\varphi^2(x), W^{\cdot,2})^{-1}$$

sobre $\mathcal{B}(C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathbb{R}^\infty))$, ver, e.g., Teorema IX.1.7 de [25]. Entonces, usando (3.26) concluimos que

$$(\left\|\varphi^1_{T_n^1}(x)\right\|^2 \cdot \mu^1) \circ (\varphi^1(x), W^{\cdot,1}, T_n^1)^{-1} = (\left\|\varphi^2_{T_n^2}(x)\right\|^2 \cdot \mu^2) \circ (\varphi^2(x), W^{\cdot,2}, T_n^2)^{-1}. \tag{3.27}$$

sobre $\mathcal{B}(C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathbb{R}^\infty) \times [0,T])$. Del hecho que

$$\left\|\varphi^j_{T_n^j}(x)\right\|^2 = (\eta_{T_n^j})^2 = \exp\left(-H_{T_n^j} + [H,H]_{T_n^j}/2\right)$$

podemos ver que , luego (3.27) se convierte en

$$\mu \circ (\varphi^1(x), W^{\cdot,1}, T_n^1))^{-1} = \mu \circ (\varphi^2(x), W^{\cdot,2}, T_n^2))^{-1}.$$

De (3.14) y (3.24) ahora obtenemos que

$$\mu \circ ((Z^1)^{T_n^1}, Z^3)^{-1} = \mu \circ ((Z^2)^{T_n^2}, Z^3)^{-1}.$$

Debido a que $\mathbb{E}_\mu\left(\int_0^T \|CZ_s^j\|^2 ds\right) < \infty, T_n^j \nearrow_{n\to\infty} T$ μ-c.s. Tomando limite cuando $n \to \infty$ se deduce que $\mu \circ (Z^1, Z^3)^{-1} = \mu \circ (Z^2, Z^3)^{-1}$ sobre $\mathcal{B}(C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathbb{R}^\infty) \times [0,T])$. Entonces, $\mathbb{Q} \circ (X,B)^{-1} = \widetilde{\mathbb{Q}} \circ (\widetilde{X}, \widetilde{B})^{-1}$ sobre $\mathcal{B}(C([0,T],\mathfrak{h}) \times C([0,T],\mathbb{R}^\infty) \times [0,T])$. $\square$

3.2.3. Demostración del Teorema 3

Usando las dos proposiciones anteriores concluimos rápidamente la prueba del nuestro teorema.

Demostración [del Teorema 3.]

Usando la Proposición 2 probamos directamente la unicidad en ley de la solución C-variacional de (1.6) con distribución inicial θ, definida en el intervalo de tiempo $[0, +\infty[$.

Si $n \in \mathbb{N}$, aplicando la Proposición 1 tenemos que existe una C-solución variacional $(\mathbb{P}_n, (X_t^n)_{t\in[0,n]}, (B_t^{\cdot,n})_{t\in[0,n]})$ de (1.6) con distribución inicial θ, definida en el intervalo de tiempo $[0, n]$. Aquí, $(X^n, B^{\cdot,n})$ toma valores en $C([0, n], \mathfrak{h}) \times C([0, n], \mathbb{R}^\infty)$. Elegimos

$$\Omega = C([0, +\infty], \mathfrak{h}) \times C([0, +\infty], \mathbb{R}^\infty)$$

y $\mathcal{F}^0 = \mathcal{B}(\Omega)$. Para todo $A \in \mathcal{B}(C([0, n], \mathfrak{h}) \times C([0, n], \mathbb{R}^\infty))$, definimos:

$$\mathbb{Q}_n(\pi_n^{-1}(A)) = \mathbb{P}_n((X^n, B^n) \in A),$$

donde $\pi_n : \Omega \to C([0, n], \mathfrak{h}) \times C([0, n], \mathbb{R}^\infty)$ es dado por $\pi_n(\omega) = (\omega_t)_{t\in[0,n]}$. Entonces, $\mathbb{Q}_n$ es una medida de probabilidad sobre $\pi_n^{-1} (\mathcal{B}(C([0, n], \mathfrak{h}) \times C([0, n], \mathbb{R}^\infty)))$.

Para todo $(w_1, w_2) \in \Omega$, con $w_1 \in C([0, +\infty], \mathfrak{h})$ y $w_2 \in C([0, +\infty], \mathbb{R}^\infty)$, definimos

$$X_t(w_1, w_2) = w_1(t) \quad \text{y} \quad B_t(w_1, w_2) = w_2(t).$$

Ahora, elegimos $\mathcal{F}_t^0 = \sigma((X_s, B_s) : s \leq t)$, luego

$$\mathcal{F}_n^0 = \pi_n^{-1} (\mathcal{B}(C([0, n], \mathfrak{h}) \times C([0, n], \mathbb{R}^\infty))) .$$

De la Proposición 2 obtenemos que $(\mathbb{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia consistente de medidas de probabilidad. Como $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ es un espacio medible éstandar, existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}^0$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ tal que $\mathbb{Q}^0$ restringido a $\mathcal{F}_n^0$ coincide con $\mathbb{Q}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ver, e.g., Página 176 de [10]. Sea $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$ la completación de $(\mathcal{F}^0, \mathbb{Q}^0)$ y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la aumentación usual de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Usando la Proposición 1, se tiene que $(\mathbb{Q}, (X_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0})$ es una C-solución variacional de (1.6) con distribución inicial θ sobre $[0, +\infty[$, ver, e.g., Teoremas 8.3 y 8.6 de [18]. □

Bibliografía

[1] A. Barchielli and M. Gregoratti. *Quantum trajectories and measurements in continuous time: the diffusive case*, volume 782 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, 2009.

[2] A. Barchielli and A.S. Holevo. Constructing quantum measurement processes via classical stochastic calculus. *Stochastic Process. Appl.*, 58:293–317, 1995.

[3] A. Bassi, D. Dürr, and M. Kolb. On the long time behavior of free stochastic Schrödinger evolutions. *Rev. Math. Phys.*, 22:55–89, 2010.

[4] V. P. Belavkin. A new wave equation for a continuous nondemolition measurement. *Phys. Lett. A.*, 140:355–358, 1989.

[5] H.P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems.* Oxford University Press, 2002.

[6] F. Fagnola and Carlos M. Mora. Comunicación personal.

[7] F. Fagnola and Carlos M. Mora. Stochastic schrödinger equations with unbounded coefficients. Preprint.

[8] J. Gough and A. Sobolev. Continuous measurement of canonical observables and limit stochastic Schrödinger equations. *Phys. Rev. A*, 69:032107, 2004.

[9] A.S. Holevo. On dissipative stochastic equations in a Hilbert space. *Probab. Theory Related Fields*, 104:483–500, 1996.

[10] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North-Holland, 1981.

[11] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators. Corrected printing of the second edition.* Springer, 1980.

[12] C.M. Mora. Regularity of solutions to quantum master equations: a stochastic approach. *Ann. Probab.* To appear.

[13] C.M. Mora. Numerical simulation of stochastic evolution equations associated to quantum Markov semigroups. *Math. Comp.*, 73:1393–1415, 2004.

[14] C.M. Mora. Numerical solution of conservative finite-dimensional stochastic Schrödinger equations. *Ann. Appl. Probab.*, 15:2144–2171, 2005.

[15] C.M. Mora. Heisenberg evolution of quantum observables represented by unbounded operators. *J. Funct. Anal.*, 255:3249–3273, 2008.

[16] C.M. Mora and R. Rebolledo. Regularity of solutions to linear stochastic Schrödinger equations. *Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics*, 10:237–259, 2007.

[17] C.M. Mora and R. Rebolledo. Basic properties of non-linear stochastic Schrödinger equations driven by Brownian motions. *Ann. Appl. Probab.*, 18:591–619, 2008.

[18] M. Ondreját. Uniqueness for stochastic evolution equations in banach spaces. *Dissertationes Math.*, 426, 2004.

[19] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, 1983.

[20] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrŽdinger equation: the diffusive case. *Ann. Probab.*, 36:2332–2353, 2008.

[21] I.C. Percival. *Quantum state diffusion.* Cambridge University Press, 1998.

[22] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge University Press, 1992.

[23] C. Prévôt and M. Röckner. *A concise course on stochastic partial differential equations*, volume 1905 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007.

[24] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, 2005.

[25] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, 1999.

[26] B.L. Rozovskii. *Stochastic evolution systems. Linear theory and applications to nonlinear filtering.* Kluwer, 1990.

[27] K.P. Singh and J.M. Rost. Femtosecond photoionization of atoms under noise. *Phys. Rev. Letters*, 76:063403, 2007.

[28] K.P. Singh and J.M. Rost. Optimal stochastic enhancement of photoionization. *Phys. Rev. A*, 98:160201, 2007.