Primeros Aspectos Algebraicos de Módulos de Drinfeld

Matías Alvarado

Marzo 2021

En la sesión anterior

- Tomamos k un campo de funciones, y un lugar "∞".
- A el anillo de funciones regulares fuera de ∞.
- Tomamos retículos Λ en extensiones finitas de k_∞.
- Asociamos una función "exponencial" e_Λ.
- e_Λ induce un isomorfismo de $\mathbb{F}_q$-e.v entre $\overline{L}/\Lambda$ y $\overline{L}$.
- Traspasando la acción de A en el cuociente obtenemos una nueva acción de A en $\overline{L}$.

Punto de vista algebraico

Si B es una $\mathbb{F}_q$-álgebra, entonces τ denota el endomorfismo $b \to b^q$.
Consideramos el anillo de "polinomios" $B\{\tau\}$, tal que $\tau b = b^q \tau$ (polinomios torcidos).
Tenemos dos morfismos:

- $\epsilon \colon B \to B\{\tau\}$ (la inclusión)
- $D \colon B\{\tau\} \to B$ (la derivada en cero)

· k campo global de característica p.

· ∞ un lugar de k.

· A el anillo de funciones regulares fuera de ∞.

Definición

Un A-campo es un campo K con un morfismo de anillos $i \colon A \to K$.

Definición

La A-característica de un A-campo K es el ideal $\ker i \in SpecA$, denotado por $Char_A K$.

Módulos de Drinfeld desde el enfoque algebraico

Definición

*Un A-**módulo de Drinfeld** sobre K es un homomorfismo de anillos $\phi\colon A \to K\{\tau\}$ tal que $i = D \circ \phi$ y $\phi \neq \epsilon \circ i$.*

Ejemplo

$A = \mathbb{F}_q[T]$, $K = \mathbb{F}_q(T)$ y $\phi\colon A \to K\{\tau\}$ dado por $T \mapsto T + \tau$.

Proposición

ϕ es inyectiva.

Demostración.

Si $\ker\phi$ es no trivial, entonces $\ker\phi$ es un ideal primo de A. tenemos que $A/\ker\phi \simeq \phi(A)$. Como k es campo de funciones, entonces $dimA = 1$, por lo tanto $\ker\phi$ es maximal. Así $\phi(A)$ es campo, es decir $\phi(A) \subset \epsilon(K)$, lo cual implica $\phi = \epsilon \circ i$, lo que no es posible. $\square$

A un módulo de Drinfeld ϕ podemos asociarle un **rango**. Para eso definimos la siguiente función.

Definición

Definimos la función $\deg\colon K\{\tau\} \to \mathbb{Z}$ *dado por* $\deg\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\tau^i\right) = q^n$ *y* $\deg 0 = 0$.

Proposición

Existe un número positivo d tal que $\deg \phi(a) = |a|^d$ *para todo $a \in A$.*

Proposición

Existe un número positivo d tal que $\deg \phi(a) = |a|^d$ para todo $a \in A$. A este número d le llamamos el rango del módulo ϕ.

Demostración.

Tenemos que la función $\deg \phi$ cumple con

- $\deg \phi(ab) = \deg \phi(a) \deg \phi(b)$.
- $\deg \phi(a + b) \leq \text{máx}\{\deg \phi(a), \deg \phi(b)\}$.
- $\deg \phi(a) = 0$ si y solo si $a = 0$.
- $\deg \phi(a) \geq 1$ para todo $a \in A \setminus \{0\}$.
- Existe $a \in A$ con $\deg \phi(a) > 1$.

Entonces $\deg \phi$ se extiende a un valor absoluto no trivial en k. Este valor absoluto debe ser ∞. Así existe d tal que

$$\deg \phi(a) = |a|^d$$

$\square$

Ejemplo

Para módulos de Drinfeld sobre $\mathbb{F}_q[T]$ *basta especificar la imagen de* T*, y el rango de* ϕ *será* $\log_q(\deg \phi(T))$.

Definición

Dado un A*-modulo de Drinfeld* ϕ *sobre un campo* K*, y dado* $a \in A$ *se define un punto de* a*-torsión en* K *como un punto* $x \in K$ *tal que* $\phi(a)(x) = 0$*. Al conjunto de puntos de* a*-torsión lo denotamos por* $\phi[a]$.

Observación

- *Si* $a \in A \setminus \{0\}$*, entonces el número de puntos de orden* a *está acotado por* $|a|^d$.
- *En caso que* $char_A(K) = 0$*, en caso que* $\phi[a](\overline{K}) \simeq (A/(a))^d$.
- *El rango es un número entero.*

Morfismos de módulos de Drinfeld

Definición

Un morfismo entre los módulos de Drinfeld $\phi_1 \colon A \to K\{\tau\}$ *y* $\phi_2 \colon A \to K\{\tau\}$ *es un elemento* $\alpha \in K\{\tau\}$ *tal que* $\alpha\phi_1(a) = \phi_2(a)\alpha$ *para todo* $a \in A$.

Observación

Para referirnos a morfismos entre módulos de Drinfeld hablamos de **isogenias**.

Observación

Si ϕ_1 *y* ϕ_2 *son isogenos, entonces tienen el mismo rango.*

El punto de vista analítico nuevamente

Notación:

- L/k_∞ extensión finita.
- Un retículo sobre L es una A-submódulo discreto en L^{sep}, invariante por la acción de $\mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$.
- Un morfismo entre retículos Λ_1 y Λ_2 sobre L es un elemento $\alpha \in L$ tal $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$.

Objetivo: Demostrar la siguiente equivalencia entre categorías.

Proposición

La categoria de módulos de Drinfeld de rango d sobre L y la categoria de retículos de rango d sobre L son equivalentes.

La función exponencial

Sea Λ un retículo de dimensión d sobre L. Definimos la función exponencial de Λ como:

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$$

El producto converge uniforme sobre cada bola centrada en cero, por lo tanto e_Λ define una función entera.

Queremos ver que e_Λ es $\mathbb{F}_q$-lineal.

Lema

Sea G un subgrupo finito de L^{sep} y sea $g(z) = \prod_{\alpha \in G}(z - \alpha)$, entonces $g(z+w) = g(z) + g(w)$.

Demostración.

$g(z+w) - g(z) - g(w)$ se anula para $z \in G$ o $w \in G$, luego $g(w)g(z) | (g(z) + g(w) + g(z+w))$. Comparando grados, deducimos que $g(z+w) = g(z) + g(w)$. $\square$

Lema

Sea G un subgrupo finito de L^{sep} y sea $g(z) = \prod_{\alpha \in G}(z - \alpha)$, entonces $g(cz) = cg(z)$ para $c \in \mathbb{F}_q$.

Demostración.

$$g(cz) = \prod_{\alpha \in G}(cz - \alpha) = c^{\# G} \prod_{\alpha \in G}(z - \alpha/c) = cg(z)$$

$\square$

Proposición

La función exponencial e_Λ de un retículo Λ es $\mathbb{F}_q$-lineal.

Demostración.

El retículo Λ se escribe como unión creciente de $\mathbb{F}_q$-e.v. $\square$

La exponencial e_Λ induce un isomorfismo (de $\mathbb{F}_q$-espacios vectoriales) entre $\overline{L}/\Lambda$ y $\overline{L}$.
vía este isomorfismo la estructura de A-módulo en el cuociente $\overline{L}/\Lambda$ se pasa a un estructura de A-módulo en $\overline{L}$.
¿Como es esta estructura de A-módulo?
Debemos encontrar la acción de A en $\overline{L}$ tal que $a.e_\Lambda(z)$ sea igual a $e_\Lambda(az)$.
Comparamos $e_\Lambda(az)$ con $\displaystyle\prod_{\beta\in(1/a)\Gamma/\Gamma}(e_\Lambda(z)-e_\Lambda(\beta))$

- Ambas son funciones analíticas.
- Ambas tienen los mismos ceros.
- Una es un múltiplo de la otra.
- $e_\Lambda(az)=P_a(e_\Lambda(z))$.
- P_a tiene grado $|a|^d$.
- $P_a\in L\{\tau\}$.

De este modo a un **retículo** le asociamos un **módulo de Drinfeld**.

Partamos ahora con un A-módulo de Drinfeld ϕ. Entonces existe $f \in L\{\tau\}$ tal que

$$fa = \phi(a)f, \text{ para todo } a \in A.$$

Esta función f es analítica.
$\Lambda \subset L^{sep}$ su núcleo, que es invariante por la acción de $\mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$.
Observando que

$$(1/a)\Lambda/\Lambda \simeq (A/(a))^d$$

Concluimos que Λ es un retículo de rango d.
Morfismos de módulos de Drinfeld se corresponden también con morfismos de retículos.

Ejemplos

Ejemplo (Módulo de Carlitz)

Sea $A = \mathbb{F}_q[T]$, *y* $\phi\colon \mathbb{F}_q[T] \to k\{\tau\}$, *dado por* $T \mapsto T + \tau$, $(\phi(T)(x) = Tx + x^q)$. $\deg \phi_T = q = |T|^1$.
Su función exponencial es

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]!} z^{q^n},$$

donde $[n]! = \prod_{i=1}^{n} (T^{q^i} - T)$

Ejemplo

Existe un único A-módulo de Drinfeld de rango 1 sobre $K = \widehat{\overline{k_\infty}}$

Ejemplo de dimensión 2

Podemos parametrizar (salvo isomorfismo) los A-módulos de Drinfeld de rango 2 sobre K.

- Parametrizar módulos es equivalente a parametrizar retículos.
- Para parametrizar retículos basta con tomar bases de la forma $(1, \alpha)$.
- Hacemos actuar $GL_2(A)$ para evitar la dependencia de la base.
- Módulos de Drinfeld módulo isomorfismos se puede parametrizar por

$$GL_2(A)\backslash(K - k_\infty).$$