# Repaso de módulos de Drinfeld y motivación de sus espacios de moduli

Jerson Caro

April 7, 2021

# Contenido

# Parte I:
# Versión Analítica

# Notación

Denotamos por $A = \mathbb{F}_q[T]$ y $K = \mathbb{F}_q(T)$ su campo de fracciones. Salvo equivalencia los valores absolutos son asociados a

$$\{f \in A \colon f \text{ irreducible}\} \cup \{1/T\},$$

como sigue: Para $f \in A$ irreducible, definimos $\nu_f : K \to \mathbb{Z}$ su valuación, así

$$|x|_f = q^{-\nu_f(x)}$$

mientras que el valor absoluto asociado a $1/T$ es

$$|x|_\infty = q^{\deg(x)}$$

el cuál también es no-Arquimediano.

$K_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ es completo, no es algebraicamente cerrado, y además $A$ es discreto allí pues para todo $B > 0$ el siguiente conjunto es finito:

$$\{x \in A : |x|_\infty \leq B\} = \{x \in A : \deg(x) \leq \log_q(B)\}.$$

Denotamos por $F = (K_\infty)^{alg}$ el cuál es algebraicamente cerrado, de grado infinito sobre $K_\infty$, y no es completo con respecto al valor absoluto extendido desde $K_\infty$.

### Definición

- Un retículo $M \subset F$ es un $A$-módulo que es finitamente generado y discreto.
- Tenemos que $M_{tor} = (0)$ porque $M$ está contenido en un campo. Así que $M \cong A^{t_M}$ como $A$-módulos donde $t_M = \mathrm{rk}_A(M)$.
- Como $M$ es f.g., el campo intermedio $L_M = K_\infty(M) \subset F$ es finito sobre $K_\infty$. Así que es completo.
- Un morfismo entre retículos $M_1$ y $M_2$ sobre $L$ es un elemento $\alpha \in L$ tal que $\alpha M_1 \subset M_2$.

### Ejemplos

- $M = A \subset K_\infty \subset F$ es un retículo. Cumple $t_M = 1$ y $L_M = K_\infty$.
- $M = A[\sqrt[n]{T}]$ es un retículo de rango $n$. Es discreto pues de nuevo

$$\{x \in M : |x|_\infty \leq B\},$$

es finito. Cumple $L_M = K_\infty(\sqrt[n]{T})$. En particular, en $F$ hay retículos de cualquier rango.

Sea $M \subset F$ un retículo. Se define $e_M : F \to F$ como el siguiente producto

$$e_M(x) = x \cdot \prod_{0 \neq m \in M} \left(1 - \frac{x}{m}\right)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $e_M$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos en todo $F$ porque $M$ es discreto.
- $e_M$ es analítica, dada por una serie de potencias con coeficientes en $L_M$.
- Como los coeficientes están en $L_M$, para todo $x \in F$ tenemos $e_M(x) \in L_M(x) \subset F$.

- La función $e_M : F \to F$ es $\mathbb{F}_q$-lineal.
- $\ker(e_M) = M$
- $e_M : F \to F$ es sobreyectiva.
- Obtenemos un isomorfismo $\mathbb{F}_q$-lineal $e_M : F/M \to F$.

Como $F/M$ es $A$-módulo, ahora $F$ adquiere una nueva estructura de $A$-módulo. A esto es lo que llamaremos módulo de Drinfeld.

# Parte II:
# Versión Algebraica

Sea $L/K_\infty$ una extensión finita. Sea $\tau : L \to L$ el endomorfismo definido por $\tau(a) = a^q$. Así definimos $L\{\tau\}$ el anillo de polinomios no conmutativo vía la relación $\tau \cdot a = a^q \cdot \tau$. Definimos los siguientes morfismos

- $\epsilon : L \to L\{\tau\}$ e $i : A \to K$ las inclusiones respectivas, y
- $D : L\{\tau\} \to L$ definido por $D(\sum_{i=0}^n a_i\tau^i) = a_0$.
- $\deg : L\{\tau\} \to \mathbb{Z}$ dada por $\deg\left(\sum_{i=0}^n a_i\tau^i\right) = q^n$ y $\deg 0 = 0$.

### Definición

Un $A$-módulo de Drinfeld sobre $L$ es un homomorfismo de anillos $\phi : A \to L\{\tau\}$ tal que $i = D \circ \phi$ y $\phi \neq \epsilon \circ i$ (Esto implica en particular que $\phi(A) \not\subset L$, $\phi$ define una acción de $A$ en $L$, en este caso $\phi(T) = T + \sum_{i=1}^n a_i\tau^i$ con $a_n \neq 0$).

Siempre $\phi$ será inyectivo. Si no, su núcleo sería no trivial y usando que todo campo dentro de $L\{\tau\}$ esta contenido en $L$, tenemos una contradicción.

# Rango y Morfismos

### Proposición

Existe un número positivo $d$ tal que $\deg \phi(a) = |a|^d$ para todo $a \in A$. Como $\phi$ esta determinado por la imagen de $T$, el rango de $\phi$ será $\log_q(\deg \phi(T))$.

Dado un $A$-modulo de Drinfeld $\phi$ sobre $L$, y dado $a \in A$ se define un punto de $a$-torsión en $L$ como un punto $x \in L$ tal que $\phi(a)(x) = 0$. **Al conjunto de puntos de $a$-torsión lo denotamos por $\phi[a]$.**

### Observación

Si $a \in A \setminus \{0\}$, tenemos que $\phi[a](L^{alg}) \cong (A/(a))^d$ entonces el rango es un número entero y el número de puntos de orden $a$ está acotado por $|a|^d$.

### Definición

Un morfismo entre los módulos de Drinfeld (lo llamaremos isogenias) $\phi_1 : A \to L\{\tau\}$ y $\phi_2 : A \to L\{\tau\}$ es un elemento $\alpha \in L\{\tau\}$ tal que $\alpha\phi_1(a) = \phi_2(a)\alpha$ para todo $a \in A$.

### Ejemplo

Un módulo de Drinfeld $\phi$ de rango 2 sobre $F$ debe ser de la forma $\phi(T) = T + a(\phi)\tau + b(\phi)\tau^2$ donde $\{a(\phi), b(\phi)\} \subset F$ y $b(\phi) \neq 0$. Veamos la acción de $1 + T \in A$ en $1 - T^2 \in F$ vía $\phi$

$$\begin{aligned}(1 + T) \cdot (1 - T^2) &= (1 + T + a(\phi)\tau + b(\phi)\tau^2) \cdot (1 - T^2) \\ &= (1 + T)(1 - T^2) + (1 - T^{2q})a(\phi) + (1 - T^{2q^2})b(\phi)\end{aligned}$$

# Parte III:
# Equivalencia entre las dos Versiones

### Proposición

Sea $L/K_\infty$ una extensión finita. La categoria de retículos de rango $d$ sobre $L$ son equivalentes y la categoria de módulos de Drinfeld de rango $d$ sobre $L$.

### Prueba

($\Longrightarrow$) Sea $M$ un retículo sobre $L$. Debemos encontrar la acción de $A$ en $L^{alg}$ tal que $a \cdot e_M(z) = e_M(az)$. Notamos que los ceros de la funciones analíticas $e_M(az)$ con $\prod_{\beta \in (1/a)M/M}(e_M(z) - e_M(\beta))$ tienen los mismos ceros. Entonces una es un múltiplo de la otra, es decir, $e_M(az) = P_a(e_M(z))$, donde $P_a$ tiene grado $|a|^d$ y pertenece a $L\{\tau\}$. Definimos entonces $\phi : A \to L\{\tau\}$ por $\phi(a) = P_a$.

**Proposición**

Sea $L/K_\infty$ una extensión finita. La categoria de retículos de rango $d$ sobre $L$ son equivalentes y la categoria de módulos de Drinfeld de rango $d$ sobre $L$.

($\Longleftarrow$) Ahora sea $\phi$ un $A$-módulo de Drinfeld. Entonces existe $f \in L\{\{\tau\}\}$ tal que $fa = \phi(a)f$, para todo $a \in A$. Esta función f es analítica. Definimos el retículo $M \subset L^{alg}$ como el núcleo de $f$. Como $(1/a)M/M \cong (A/(a))^d$ se tiene que $M$ es un retículo de rango $d$.
Morfismos de módulos de Drinfeld se corresponden también con morfismos de retículos.

# Parte IV:
# Espacios de Moduli

Recordamos que un módulo de Drinfeld $\phi$ de rango 2 sobre $F$ es dado por su valor en $T$ y debe ser de la forma $\phi(T) = T + a(\phi)\tau + b(\phi)\tau^2$ donde $\{a(\phi), b(\phi)\} \subset F$ y $b(\phi) \neq 0$.

- Para parametrizar estos módulos podemos parametrizar retículos de rango 2 sobre $F$.
- Para parametrizar retículos basta con tomar bases de la forma $(1, \alpha)$, con $\alpha \in \Omega := (F \setminus K_\infty)$
- Hacemos actuar $GL_2(A)$ para evitar la dependencia de la base, como sigue para $z \in \Omega$ y $\gamma \in GL_2(A)$.

$$\gamma \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- Módulos de Drinfeld de rango 2 definidos sobre $F$ módulo isomorfismos se puede parametrizar por $GL_2(A) \setminus \Omega$.

### Definición

Definimos el siguiente grupo de congruencia

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(A) : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

donde $n \in A$ es un polinomio mónico no cero.

Definimos análogamente a curvas modulares sobre $\mathbb{Q}$, $Y_0(n) := \Gamma_0(n) \setminus \Omega$ y su compactificación $X_0(n)$ obtenida al adjuntar las finitas cúspides $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{P}_1(K)$. Finalmente, tenemos el siguiente Teorema análogo a curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$.

### Teorema

Sea $E$ una curva eliptica sobre $K$ de conductor $n \cdot \infty$ teniendo reducción multiplicativa split en $\infty$. Existe un morfismo no constante $X_0(n) \to E$ definido sobre $K$.

Gracias.