El módulo de Carlitz

Matías Alvarado

Pontificia Universidad Católica de Chile

Abril 2021

Objetivo

Trabajaremos para entender la siguiente diapositiva de la sesión 2.

Módulo de Carlitz

Sea $A = \mathbb{F}_q[T], k = \mathbb{F}_q(T), K = k_\infty$ y $\mathbb{C}_\infty$ la completación de la clausura algebraica de K. Sea $\phi\colon A \to k\{\tau\}$, dado por $T \mapsto T + \tau$, $(\phi(T)(x) = Tx + x^q)$.
Su función exponencial es

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{D_n} z^{q^n},$$

donde $D_n = \prod_{i=1}^{n} (T^{q^i} - T)^{q^{n-i}}$.
Además el reticulo asociado a este módulo de Drinfeld es $\lambda \xi_* A$, donde $\xi_* = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right)$ y λ una raíz $(q-1)$-ésima de $-[1]$.

Primer acercamiento a $\mathbb{F}_q[T]$

Observación

$\mathbb{Z}$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$ y además el cuociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es compacto.

Proposición

A es un subanillo discreto de K y además el cuociente K/A es compacto.

Demostración.

- Para $r > 0$, $\#(A \cap \{x \in K : |x| < r\}) < \infty$.
- $K/A \simeq (1/T)\mathbb{F}_q[[1/T]]$.

$\square$

Como procederemos

- El módulo de Carlitz es $C : A \to k\{\tau\}$ tal que $T \mapsto T\tau^0 + \tau$.
- El módulo de Carlitz tiene una función exponencial asociada (exponencial de Carlitz e_C).

Queremos entender la función e_C

Una idea es partir entendiendo los productos finitos de la forma

$$\prod(x - \alpha)$$

Donde α son elementos de un subgrupo finito de un retículo de rango 1 en $\mathbb{C}_\infty$.

Definición

Para $d > 0$, definimos $A(d) = \{\alpha \in A \mid \deg(\alpha) < d\}$.

- $A(d)$ es un $\mathbb{F}_q$-e.v de dimensión d.
- $A = \bigcup_{d \geq 0} A(d)$.

Definición

Definimos la función $e_d(x)$ como

$$e_d(x) = \prod_{\alpha \in A(d)} (x - \alpha)$$

- *$e_d(x)$ es $\mathbb{F}_q$-lineal.*

e_d exprasado como suma

A continuación enunciamos un teorema de Carlitz, en donde se da una expresión para $e_d(x)$.

Teorema (Carlitz)

$$e_d(x) = \prod_{\alpha \in A(d)} (x - \alpha) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} \frac{D_d}{D_i L_{d-i}^{q^i}} x^{q^i};$$

donde

- $[i] = T^{q^i} - T.$
- $D_i = [i] \cdot [i-1]^q \cdots [1]^{q^{i-1}}$ y $D_0 = 1.$
- $L_i = [1] \cdot [2] \cdots [i-1] \cdot [i]$ y $L_0 = 1.$

Demostración.

Se procede por inducción.

- Veamos cuando $d = 1$. Tenemos que

$$e_1(x) = \prod_{\alpha \in A(1)} (x - \alpha) = x^q - x = (-1)\frac{D_1}{D_0 L_{1-0}} x + (-1)^0 \frac{D_1}{D_1 L_{1-1}^q} x^q.$$

- En general tenemos la igualdad,

$$e_d(x) = e_{d-1}^q(x) - D_{d-1}^{q-1} e_{d-1}(x).$$

  - Ambos expresiones son elementos mónicos y del mismo grado en $k[x]$.
  - Ambas expresiones tienen el mismo conjunto de raices, a saber $A(d)$.
    - ⋆ Ambas expresiones se anulan en elementos de $A(d-1)$.
    - ⋆ $\alpha = \zeta h \in A(d) - A(d-1)$. Entonces $(RHS) = e_{d-1}^q(\zeta h) - D_{d-1}^{q-1} e_{d-1}(\zeta h) = \zeta(\underbrace{e_{d-1}^q(h)}_{D_{d-1}^q} - D_{d-1}^{q-1} \underbrace{e_{d-1}(h)}_{D_{d-1}})$.

□

Lema

Sea h un elemento mónico en A de grado d, entonces

$$e_d(h) = D_d.$$

Demostración.

- $e_d(h) = \displaystyle\prod_{\substack{g \text{ mónico} \\ \deg g = d}} g.$
- $\displaystyle\prod_{\substack{g \text{ mónico} \\ \deg g = d}} g = D_d.$

$\square$

La exponencial de Carlitz

La idea es considerar la función $e_d(x)$ cuando $d \to \infty$.

- Para esto, vamos a modificar un poco e_d.
- Es mejor considerar

$$f_d(x) = x \prod_{\alpha \in A(d) - \{0\}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

- ¿Como se compara $e_d(x)$ y $f_d(x)$?
-

$$e_d(x) = f_d(x) \cdot \left(\prod_{\alpha \in A(d) - \{0\}} \alpha \right).$$

Debemos encontrar una expresión para $\left(\prod_{\alpha\in A(d)-\{0\}} \alpha\right)$.

$$\prod_{\alpha\in A(d)-\{0\}} \alpha = (-1)^d (D_0 \cdots D_{d-1})^{q-1} = (-1)^d \frac{D_d}{L_d}.$$

Por lo tanto

$$x \prod_{\alpha\in A(d)} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \frac{L_d}{D_j L_{d-j}^{q^j}} x^{q^j}.$$

Recuerdo

- $[i] = T^{q^i} - T$.
- $D_i = [i] \cdot [i-1]^q \cdots [1]^{q^{i-1}}$ y $D_0 = 1$.
- $L_i = [1] \cdot [2] \cdots [i-1] \cdot [i]$ y $L_0 = 1$.

Elementos auxiliares

$$x \prod_{\alpha \in A(d)} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \frac{L_d}{D_j L_{d-j}^{q^j}} x^{q^j}.$$

Estudiaremos con mayor detención la cantidad $\dfrac{L_d}{L_{d-j}^{q^j}}$.

Para eso introducimos el elemento ξ_d definido como

$$\xi_d = \prod_{j=1}^{d-1} \left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right).$$

- $\xi_d = \dfrac{[1]^{(q^d-1)/(q-1)}}{L_d}$.

⋆ $\beta_d := [1]^{(q^d-1)/(q-1)}$.

⋆ $\xi_* := \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{[j]}{[j+1]}\right)$.

Se tiene la relación $\dfrac{L_d}{L_{d-j}^{q^j}} = \dfrac{\beta_j \xi_{d-j}^{q^j}}{\xi_d}$.

por lo tanto

$$x \prod_{\alpha \in A(d)} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \frac{L_d}{D_j L_{d-j}^{q^j}} x^{q^j}$$

$$= \frac{1}{\xi_d} \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \frac{\beta_j \xi_{d-j}^{q^j}}{D_j} x^{q^j}$$

$$= \frac{1}{\xi_d} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \frac{\beta_j \delta_{d-j}^{q^j}}{D_j} x^{q^j}}_{\xrightarrow{d \to \infty} 0} + \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \frac{\beta_j \xi_*^{q^j}}{D_j} x^{q^j} \right)$$

Para todo $x \in \mathbb{C}_\infty$

$$x \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\xi_*} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\beta_j \xi_*^{q^j}}{D_j} x^{q^j}.$$

Definición

- *λ un raíz $(q-1)$-ésima de $-[1]$ en $\overline{K}$, y $\xi = \xi_C = \lambda \xi_*$.*
- *Dado $x \in \mathbb{C}_\infty$, definimos*

$$e_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j}.$$

Teorema

para todo $x \in \mathbb{C}_\infty$

$$x \prod_{0\neq\alpha\in A} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\xi} \sum \frac{(\xi x)^{q^j}}{D_j} = \frac{1}{\xi} e_C(\xi x).$$

Lema

Sea Λ *el reticulo* $\xi A \subset \overline{K}$. *Entonces para todo* $x \in \mathbb{C}_\infty$, *se tiene*

$$x \prod_{0\neq\alpha\in\Lambda} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = e_C(x).$$

El módulo de Carlitz

Proposición

Dado $x \in \mathbb{C}_\infty$. *Entonces*

$$e_C(Tx) = Te_C(x) + e_C(x)^q.$$

Demostración.

$$e_C(Tx) - Te_C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T^{q^i} - T)}{D_i} x^{q^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{q^i}}{D_{i-1}^q}$$

Entonces

$$e_C(Tx) - Te_C(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{q^i}}{D_{i-1}^q} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{q^i}}{D_i} \right)^q = e_C(x)^q.$$

$\square$

Corolario

Dado $x \in \mathbb{C}_\infty$ y $a \in A$ de grado d, existen $c_1, ..., c_d \in A$ tal que

$$e_C(ax) = ae_C(x) + \sum_{j=1}^{d} c_j e_C(x)^{q^j}.$$

Corolario

Existe un homomorfismo inyectivo $C\colon A \to k\{\tau\}$ de $\mathbb{F}_q$-álgebras tal que

$$e_C(ax) = C(a)(e_C(x)).$$

Definición

Al morfismo anterior lo denominamos **el módulo de Carlitz**.

- De lo que sabemos de módulos de Drinfeld vemos que, $\mathbb{C}_\infty/\xi A \simeq \mathbb{C}_\infty$ como $\mathbb{F}_q$-e.v.

Logaritmo de Carlitz

Objetivo: Encontrar una función analítica "$\log_C$" en torno al origen que sea inversa de la exponencial de Carlitz e_C.

- Esta función debe ser $\mathbb{F}_q$-lineal.
- Aplicando $\log_C$ en la igualdad $e_C(Tx) = Te_C(x) + e_C(x)$ obtenemos

$$Tx = \log_C(Te_C(x)) + \log_C(e_C(x)^q).$$

- Por lo tanto reemplazando x por $\log_C(x)$ obtenemos

$$T\log_C(x) = \log_C(Tx) + \log_C(x^q).$$

Así encontramos una expresión en serie de potencias para $\log_C(x)$.

$$\log_C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{q^i}}{L_i}.$$

Recuerdo: $L_i = [1][2]\cdots[i]$ y $[j] = T^{q^j} - T$.

Módulos de Carlitz sobre campos

Sea L un A-campo con morfismo estructural i y A-caracteristica $\mathfrak{p} \in SpecA$.

Definición (Módulo de Carlitz sobre L)

Definimos el módulo de Carlitz sobre L como el morfismo de anillos $C : A \to L\{\tau\}$ *tal que* $T \mapsto i(T)\tau^0 + \tau$

Clasificaremos los puntos de torsión de C sobre $\overline{L}$

Teorema

- *Sea* $a \in A$ *tal que* $char_A(L) \nmid a$, *entonces* $C[a] \simeq A/(a)$
- *Si* $(f) = char_A(L)$, *entonces* $C[f] = \{0\}$

Torsión en el módulo de Carlitz

Teorema

- *Sea $a \in A$ tal que $char_A(L) \nmid a$, entonces $C[a] \simeq A/(a)$*
- *Si $(f) = char_A(L)$, entonces $C[f] = \{0\}$*

Demostración.

- - Es verdad para elementos $a^n \in A$ con a primo
  - Si $a, b \in A$ coprimos, entonces $C[ab] \simeq C[a] \oplus C[b]$
- $C[f] \simeq A/(f^j)$ para algún j. Contando elementos se concluye.

$\square$