Puntos de División e Isogenias en módulos de Drinfeld

Jerson Caro

April 30, 2021

Notación y Repaso

Sea k un campo de característica $p > 0$.

- Recordamos que tenemos el isomorfismo $\theta : \mathrm{End}_k(G_a) \to k\{\tau\}$.
- Definimos $\deg : \mathrm{End}_k(G_a) \to \mathbb{Z}$ y $d : k\{\tau\} \to \mathbb{Z}$ $[\deg(\phi) = p^{d(\widetilde{\phi})}]$.
- Definimos $ht : \mathrm{End}_k(G_a) \to \mathbb{Z}$ y $ht : k\{\tau\} \to \mathbb{Z}$ $[ht(\phi) = ht(\widetilde{\phi})]$.
- Definimos $\partial_0 : \mathrm{End}_k(G_a) \to k$ y $\partial : k\{\tau\} \to k$ $[\partial_0(\phi) = \partial(\widetilde{\phi})]$.
- Un módulo de Drinfeld sobre un campo k para la curva punteada (C, ∞) sobre $\mathbb{F}_p$ es un homomorfismo de anillos $\phi : A \to \mathrm{End}_k(G_a)$, tal que $\theta \circ \phi(A) \not\subset k$.

Notación y Repaso

- A un módulo de Drinfeld le asociamos un funtor

$$E : Alg_k \to Mod_A.$$

- **Rango:** Existe $r > 0$ tal que $\deg(\phi_a) = \#(A/a)^r$ para todo $a \in A$, este número se conoce como rango del módulo de Drinfeld.
- **Característica:**

$$\mathrm{char}(\phi) = \begin{cases} \infty & \text{si } \partial_0 \circ \phi \text{ es inyectivo} \\ \nu & \text{si } A \cap \mathfrak{m}_\nu = \ker(\partial_0 \circ \phi) \end{cases}$$

- Sea k campo con $k = \overline{k}$. Notamos que para un polinomio aditivo $f : G_a(k) \to G_a(k)$ entonces $\deg(f) = p^{ht(f)} \# \ker(f)$. Vemos que $\partial_0 a \neq 0$ implica que $\deg(f) = \# \ker(f)$.

Parte I:
Puntos de División

Un funtor $G : C \to Sets$ es un subfuntor de F si: (a) Para todos todos los objetos c de C, $G(c) \subset F(c)$, and (b) Para toda flecha $f : c' \to c$ de C, $G(f)$ es la restricción de $F(f)$ a $G(c)$.

Definición

Para $a \in A$ definimos el subfuntor $E_a \subset E$ de puntos de a-división como $\ker(\phi_a)$. Para un ideal $I \subset A$ el subfuntor $E_I \subset E$ de puntos de I-división es $\bigcap_{a \in I} E_a$.

Observaciones:

- Si $I = (a_1, \dots, a_m)$ entonces $E_I = E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_m}$.
- Se tiene que $E_I = E$ si y sólo si $I = 0$.
- R una k-álgebra, el submódulo $E_I(R)$ son los $x \in E(R)$ tales que $ax = 0$ para todo $a \in I$. E_I se puede ver como un funtor

$$E_I : \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Mod}_{A/I}$$

- Para una variedad abeliana $A/\mathbb{Q}$ con $\dim A = g$, para $n \in \mathbb{Z}$ que

$$A[n](\overline{\mathbb{Q}}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g},$$

en el caso de característica $p > 0$, se tiene el mismo resultado si $p \nmid n$.
- $A = \mathbb{F}_p[T]$, definimos ϕ por $\phi(X) = X + X^{p^2}$.
Para $a = T$ tenemos que $E_a(\overline{k}) = \ker(\phi_a) = \mathbb{F}_{p^2} \subset G_a(\overline{k})$, que es un $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p[T]/T$-módulo libre de rango 2.
- Vamos a mostrar que el rango de un módulo de Drinfeld es un entero y que para a primo a $\mathrm{char}(\phi)$, $E_a(\overline{k})$ es un A/a-módulo libre de rango r.

Lema

Sea V un DVR, π un uniformizador y L un V/π^{2m}-módulo. $\pi_L : L \to L$

(a) Tenemos que $2\ell(\ker(\pi_L^m)) \geq \ell(L)$. **($\ell(L)$ denota su longitud).**

(b) Para L no cero, la igualdad en (a) se cumple si y sólo si L es un V/π^{2m}-módulo libre, y en este caso $\ker(\pi_L^m)$ es un V/π^m-módulo libre.

- Vemos que $L \cong \bigoplus_j V/\pi^{i_j}$, donde $0 \leq i_j \leq 2m$.
- Para $L = V/\pi^i$, tenemos que

$$\ker(\pi_L^m) = \begin{cases} V/\pi^i & \text{de longitud } i \text{ para } i \leq m \\ \pi^{i-m}(V/\pi^i) & \text{de longitud } m \text{ para } m \leq i \end{cases}$$

- Luego $2\ell(\ker(\pi_L^m)) = 2\inf\{i, m\} \geq i = \ell(L)$. Para (b) si L es libre $i = 2m$ sii $2\ell(\ker(\pi_L^m)) = \ell(N)$ y $\pi^m(V/\pi^{2m}) \cong V/\pi^m$ como V/π^m-módulos.

Teorema

Si $\phi : A \to \mathrm{End}_k(G_a)$ es un monomorfismo de anillos, entonces ϕ es un módulo de Drinfeld de rango $r > 0$ para un entero r. Mas aún para un ideal I primo relativo a la característica de ϕ, el A/I-módulo $E_I(\overline{k})$ es libre de rango r.

- Existe $r > 0$ tal que $\deg(\phi_a) = \#(A/a)^r$ para todo $0 \neq a \in A$.
- Si $\partial_0\phi_a \neq 0$, entonces $\deg \phi_a = \#E_a(\overline{k})$ y también

$$\#E_{a^2}(\overline{k}) = \deg(\phi_{a^2}) = \deg(\phi_a)^2 = \#E_a(\overline{k})^2.$$

- Sea π un irreducible, primo char(ϕ) y parámetro uniformi. de $A_{\mathfrak{p}} = V$.
- Aplicando el Lema al V/π^{2m}-módulo $E_{\pi^{2m}}(\overline{k})$ nos dice que $E_{\pi^m}(\overline{k})$ es un A/π^m-módulo libre, y como

$$\#E_{\pi^m}(\overline{k}) = \deg(\phi_{\pi^m}) = \#(A/\pi^m)^r,$$

luego r es un entero.

- Como A es un dominio de Dedekind, si $I \neq 0$, cada ideal de A/I es principal.
- Sea $a \neq 0$ primo a $\mathrm{char}(\phi)$, luego $(a) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_g^{e_g}$, luego
$$\mathrm{Spec}\ A/(a) = \{(\overline{\pi_1}), \cdots, (\overline{\pi_g})\},$$
con $(\overline{\pi_i}) = \overline{\mathfrak{p}_i}$ y π_i irreducible en A.
- Luego $E_a(\overline{k}) = \bigoplus_{i=1}^{g} E_{\pi^{m_i}}(\overline{k})$ (descomposición en componentes primarias). Como $E_{\pi^m}(\overline{k})$ es un A/π^m-módulo libre de rango r así lo es $E_a(\overline{k})$ como $A/(a)$-módulo.
- Sea $I \neq 0$ primo a $\mathrm{char}(\phi)$ *(como el class group esta generado por los ideales primos)*, existe $J \subset A$ con $A = I + J$ y $IJ = (a)$ primo a $\mathrm{char}(\phi)$.
- Luego $A/a \cong A/I \oplus A/J$ y $E_a = E_I \oplus E_J$ como funtores. Como $E_a(\overline{k})$ es un A/a-módulo libre de rango r, queda que $E_I(\overline{k})$ es un A/a-módulo libre de rango r.

$\nu(\pi) = 1$ con $\nu = \mathrm{char}(\phi)$

- Sea E un módulo de Drinfeld de rango r y $\mathrm{char}(\phi) = \nu \neq \infty$. Consideramos ahora el A/π^n-módulo $E_{\pi^n}(\overline{k})$ donde $\nu(\pi) = 1$.
- Aquí $\partial_0 \phi_{\pi^i} = 0$, para todo i. Sea h la altura de ϕ_π, luego $\deg(\phi_\pi) = p^h \# E_\pi(\overline{k})$ y mas generalmente

$$\deg(\phi_{\pi^n}) = \deg(\phi_\pi)^n = (p^h \# E_\pi(\overline{k}))^n = p^{nh} \# E_{\pi^n}(\overline{k}).$$

- Aplicando de nuevo el Lema, tenemos que $E_{\pi^n}(\overline{k})$ es un A/π^n módulo libre de rango $r - h < r$.

Definición

La altura de un módulo de Drinfeld E de característica $\nu \neq \infty$ es la altura de ϕ_π donde π es un irreducible con $\nu(\pi) = 1$

Sea E un módulo de Drinfeld de rango r y $\mathrm{char}(\phi) = \nu$. Sea h su altura cuando $\nu \neq \infty$. Para un irreducible π de A, sea A_π la localización de A en π. Tenemos el isomorfismo

$$\varinjlim_n E_{\pi^n}(\overline{k}) \cong \begin{cases} (F/A_\pi)^r & \text{para } \pi \text{ primo a la característica,} \\ (F/A_\pi)^{r-h} & \text{para } \nu(\pi) = 1. \end{cases}$$

como A_π-módulos.

Parte II: Isogeneas

Isogeneas Separables

Una isogenea $u : \phi \to \phi'$ es separable si $u(X) = b_0 X + b_1 X^p + \ldots + b_s X^{p^s}$ y $b_0 \neq 0$.

- u esta determinado por $\ker(u)(\overline{k})$ el A-submódulo finito de $E(\overline{k})$ salvo una constante.
- Un A-submódulo finito $H \subset E(\overline{k})$, formamos $P_H(X) = \prod_{h \in H}(X - h)$, existe un único A-módulo de Drinfeld ϕ' tal que $\phi'_a P_H = P_H \phi_a$ para todo $a \in A$.
- Como $\ker(u)(\overline{k})$ es finito existe $0 \neq a \in A$, tal que $a \cdot \ker(u)(\overline{k}) = 0$, entonces existe v una isogenea separable con kernel $u(\ker(\phi_a)(\overline{k}))$, luego $vu = \phi_a$.
- Si $u : \phi \to \phi'$ y $w : \phi \to \phi''$ isogeneas separables con $w(\ker(u)(\overline{k})) = 0$, luego existe una isogenea separable $v : \phi' \to \phi''$ con $w = vu$ y $\ker(v)(\overline{k}) = u(\ker(w)(\overline{k}))$.

Isogeneas Puramente Inseparables

Estas isogeneas son aquellas de la forma $\tau^i \in k\{\tau\}$ o $X \mapsto X^{p^i}$.

- El hecho que $\phi_a \tau^i = \tau^i \phi_a$, es equivalente a que los coeficientes de ϕ_a estan en $\mathbb{F}_{p^i}$.
- Se sigue que solo puede existir una isogenea de este tipo sólo si $\mathrm{char}(\phi) = \nu \neq \infty$, y en este caso p^i es una potencia de $q_\nu = \#\,\mathbb{F}(\nu)$.

El objetivo de la próxima charla será demostrar:

Teorema

Sea E un modulo de Drinfed sobre un campo k con $\overline{k} = k$ de rango r.

(1) $\mathrm{End}(E)$ es un A-módulo proyectivo de rango $\leq r^2$, y

(2) $\mathrm{End}_k(E) \otimes_A F_\infty$ es un campo en el que $\mathrm{End}(E)$ se incluye como un A-módulo de este espacio normado sobre F_∞.