Isogenias de módulos de Drinfeld

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2021/05/05

Recuerdo

- Sea k campo de característica p
- $\mathrm{End}_k(G_a) =$ polinomios aditivos sobre k. Anillo con composición.
- $\mathrm{End}_k(G_a) \simeq k\{\tau\}$ donde $X^{p^j} \mapsto \tau^j$.
- $C =$ curva suave proyectiva sobre $\mathbb{F}_q$, $q = p^f$.
- $A = H^0(C - \{\infty\}, \mathcal{O})$, por ejemplo $A = \mathbb{F}_q[T]$.
- Módulo de Drinfeld sobre k: Morfismo inyectivo de anillo

$$\phi : A \to \mathrm{End}_k(G_a).$$

  Define un funtor $E : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Mod}_A$.
- Característica: kernel de $\partial_0\phi : A \to \mathrm{End}_k(G_a) \to k$.
- Torsión: para $a \in A$ el funtor E_a representado por el esquema $\ker(\phi_a)$.
- **Teorema de la clase pasada.** Si $\mathfrak{a} \subseteq A$ es ideal coprimo con $\mathrm{car}(\phi)$, entonces $E_{\mathfrak{a}}(k^{alg})$ es $A/\mathfrak{a}$-módulo libre de rango $r = \mathrm{rk}(\phi)$.

Ejemplo

$k = \mathbb{F}_p$, $A = \mathbb{F}_p[T]$.
$\phi : A \to \mathrm{End}(G_a)$ determinado por el polinomio aditivo ϕ_T.

Por ejemplo $\phi_T = X - X^{p^2}$. Da un módulo de Drinfeld de rango 2.

- Característica $(T-1)$: $\partial_0 \phi_{T-1} = \partial_0(X - X^{p^2} - X) = \partial_0(-X^{p^2}) = 0$.
- Ejemplo de A-acción: $(2+T) \cdot_\phi \alpha = \phi_{2+T}(\alpha) = 2\alpha + \alpha - \alpha^{p^2}$.
- Con esa acción, cualquier $\mathbb{F}_p$-álgebra R se convierte en un A-módulo. Este es el funtor E.
- $\ker(\phi_T)(R) = \{\alpha \in R : \alpha - \alpha^{p^2} = 0\}$ para cualquier $\mathbb{F}_p$-algebra R.
- $\ker(\phi_T)(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ y $\ker(\phi_T)(\mathbb{F}_p^{alg}) = \mathbb{F}_{p^2}$
- Para $a \in A$, la a-torsión es el esquema $\ker(\phi_a)$, cuyo funtor de puntos se anota E_a. En en ejemplo anterior: $E_T(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ y $E_T(\mathbb{F}_p^{alg}) = \mathbb{F}_{p^2}$.
- T es coprimo con $T-1$. Y en efecto $\mathbb{F}_{p^2}$ es libre de rango 2 sobre $\mathbb{F}_p[T]/T \simeq \mathbb{F}_p$.

Isogenias

$\phi, \phi' : A \to \mathrm{End}_k(G_a)$ módulos de Drinfeld.

Una isogenia $u : \phi \to \phi'$ es un polinomio aditivo $u \in \mathrm{End}_k(G_a)$ tal que $u\phi_a = \phi'_a u$ para todo $a \in A$. O sea, para toda k-álgebra R la función aditiva $u : R \to R$ es A-lineal en con respecto a las A-acciones definidas por ϕ y ϕ'.

Las isogenias se anotan $\mathrm{Hom}(\phi, \phi')$. Para $\phi' = \phi$ se anota $\mathrm{End}(\phi)$.

$\mathrm{End}(\phi)$ es un A-mód. por medio de ϕ: $b \cdot u := \phi_b \circ u$. Esto conmuta con ϕ_a para todo $a \in A$ porque $\phi_a \circ \phi_b = \phi_{ab} = \phi_{ba} = \phi_b \circ \phi_a$

Ejemplo Seguimos con $\phi_T = X - X^{p^2}$ de antes. $u = X^p$ define un endomorfismo de ϕ. Basta chequear en T:

$$X^p \circ \phi_T = X^p - X^{p^3} = \phi_T \circ X^p$$

Teorema clave de las isogenias

Recuerdo. B anillo conm unitario, M un B-mod. Decimos que M es **proyectivo** si toda sec. exacta

$$0 \to P \to Q \to M \to 0$$

escinde.

Teorema. $\mathrm{End}(\phi)$ es un A-módulo proyectivo finitamente generado de rango $\leq r^2$. (En el caso especial $A = \mathbb{F}_q[T]$ es libre.)
Además, si $F = Frac(A)$ y F_∞ la completación, se tiene que $\mathrm{End}(\phi) \otimes_A F_\infty$ es un álgebra de división.
Si $\mathrm{car}(A) = \infty$ entonces $\mathrm{End}(\phi)$ es un A-álgebra conm. de rango $\leq r$.

Idea

Esta estrategia está en los apuntes de Pink, 2021.

- A mano: $\mathrm{End}(\phi)$ es generado por polinomios aditivos de grado $\leq n$ para cierto n, en el caso $A = \mathbb{F}_q[T]$.
- Deducir que $\mathrm{End}(\phi)$ es f.g. en general con un truco de restricción de escalares ($\mathbb{F}_q[T]$ siempre es sub-anillo de A)
- $\mathrm{End}(\phi)$ es f.g. y es libre de torsión sobre el dominio de Dedekind A. Por álgebra conmutativa, es proyectivo.
- Cota para el rango (igual que en el artículo de Drinfeld): sea $\mathfrak{a}$ ideal maximal de A coprimo con $\mathrm{car}(\phi)$. Se chequea que

$$res : \mathrm{End}(\phi) \otimes_A A/\mathfrak{a} \to \mathrm{End}_{A/\mathfrak{a}}((\ker \phi_{\mathfrak{a}})(k^{alg}))$$

  es inyectiva. Aplicar el teorema de la clase pasada.