Módulos de Drinfeld sobre esquemas y espacios de moduli

Matías Alvarado

Pontificia Universidad Católica de Chile

Mayo 2021

Ideas a seguir

- Hemos estudiado módulos de Drinfeld (sobre campos)

$$A \to K\{\tau\}.$$

- Clasificar módulos de Drinfeld.
- Plantear "buenos" problemas de moduli.
- Definir módulos de Drinfeld sobre esquemas.
- Agregar estructura de nivel para obtener representabilidad.
- Estudiar propiedades geométricas del espacio de moduli.

Módulos de Drinfeld geométricamente

¿Que es un módulo de Drinfeld sobre un campo K?

- Podemos pensarlo como un morfismo de anillos

$$\phi\colon A \to K\{\tau\}.$$

- En realidad es un morfismo

$$\phi\colon A \to \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_{a,K}),$$

  es decir una acción de A en el grupo aditivo sobre K.

A-esquemas

Usaremos las siguientes definiciones y notaciones

- Un A-esquema es un esquema S con un morfismo $\gamma^*\colon S \to \mathrm{Spec}A$.
- Este tiene un morfismo de anillos asociado $\gamma\colon A \to \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.
- Trabajaremos con pares $(G, \phi)_S$, donde G es un S-esquema en grupo, y ϕ es un homomorfismo de anillos

$$\phi\colon A \to \mathrm{End}_S(G).$$

Módulos de Drinfeld sobre esquemas

Definición

Un par $(G, \phi)_S$ *es una A-módulo de Drinfeld de rango r sobre S si:*

- *G es localmente isomorfo a* $\mathbb{G}_{a,S}$ *sobre S. (G es un line bundle)*
- *Para todo abierto afín* $U \simeq SpecB$*, de S, existe un isomorfismo de esquemas en grupo,*

$$\psi_U : G_U \to \mathbb{G}_{a,U},$$

tal que para todo $a \in A \setminus \{0\}$*,*

$$\psi_U \circ \phi_a \circ \psi_U^{-1} = \sum_{n \geq 0} b_n(a) \tau^n \in B\{\tau\},$$

con $b_0(a) = \gamma(a), b_d(a) \in B^\times$*,* $b_n(a)$ *nilpotente en B para* $n > d$ *y* $d = -r \cdot ord_\infty(a) \deg(\infty)$.

Observación

Existe una única manera de definir una derivada

$$\partial_0\colon End_S(G) \to \Gamma(S, \mathcal{O}_S),$$

que localmente coincide con el valor en el origen. Esta derivada cumple con

$$\partial_0 \circ \phi = \gamma.$$

Definición

Al morfismo $\gamma\colon S \to SpecA$ *se le llama la* **caracteristica** *de* $(G, \phi)_S$.

Con la siguiente proposición encontramos una solucion para evitar los nilpotentes

Proposición

Sea $\beta = \sum_{i=0}^{n} b_i\tau^i \in B\{\tau\} \simeq End_B(\mathbb{G}_a)$*,*

- β *es automorfismo de* $\mathbb{G}_a$ *si y solo* $b_0 \in B^\times$*, y* b_i *nilpotentes para* $i > 0$*.*
- *Suponiendo que* $b_d \in B^\times$*, y* b_i *nilpotente para* $i > d$*, entonces existe*

$$\alpha = \sum_{i \geq 0} a_i\tau^i \in Aut_B(\mathbb{G}_a),$$

con $a_0 = 1$*, tal que*

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \sum_{i=0}^{d} c_i\tau^i,$$

donde $c_d \in B^\times$*.*

Interpretación como haces invertibles

- Sea $(G, \phi)_S$ un mód. Drinfeld.
- G se ve como un line bundle.
- Existe $\mathcal{L}$ un haz invertible asociado a G.
- La propiedad que define a ϕ se interpreta como:
  - $\phi_a = \sum_{n=0}^{d} \beta_n(a)\tau^n$.
  - $\beta_n(a)\tau^n$ es endomorfismo de $\mathcal{L}$.
  - $\tau^n \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{\otimes q^n}$, loc. def. por $b \mapsto b^{\otimes q^n}$y $\beta_n(a) \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{\otimes(1-q^n)})$.
  - con la prop, $\beta_0(a) = \gamma(a)$ y $\beta_d(a)$ loc. invertible.

Torsión

Dado G, H esquemas en grupo, y $\varphi\colon G \to H$ un morfismo de esquemas en grupos, entonces, $\ker \varphi$ es un subesquema en grupo de G.

Definición

Sea (G, ϕ) un A-modulo de Drinfeld sobre S, y $a \in A \setminus \{0\}$ entonces el esquema de a-torsión se define como $ker(\phi_a)$, que es un subesquema en grupo de G. A este esquema lo denotaremos por G_a.

Definición

Si (G, ϕ) es un A-módulo de Drinfeld sobre S, y sea $I \subset A$, un ideal, entonces definimos por punto de I-torsión G_I como

$$G_I = \bigcap \ker(\phi_b),$$

Donde la intersección corre en un conjunto de generadores b de I.

"Funtorialidad"

Sea $f\colon S' \to S$ un morfismo de esquemas. Si $(G, \phi)_S$ es un A-mod. Drinfeld sobre S, entonces podemos obtener un A-mod. Drinfeld sobre S' tomando $(G', \phi')_{S'}$, donde

- $G' = G \times_S S'$
- ϕ'_a se obtiene del cambio de base de $\phi_a\colon G \to G$ por S'

Ejemplo

Si B es un DVR con campo de fracciones K y campo residual k, $S = SpecB$, y $(G, \phi)_S$ un A-mód. Drinfeld sobre S, entonces los morfismos $i\colon SpecK \to S$ y $j\colon Speck \to S$, inducen módulos de Drinfeld $i^*(L, \phi)$ y $j^*(L, \phi)$ en K y k, respectivamente.

Morfismos

Sea S un esquema y $(G, \phi)_S$ y $(G', \phi')_S$ mód. Drinfeld sobre S, entonces un morfismo

$$\psi\colon (G', \phi')_S \to (G, \phi)_S,$$

es un morfismo de S esquemas en grupo $\psi\colon G' \to G$ compatible con ϕ y ϕ', es decir,

$$\psi \circ \phi'_a = \phi_a \circ \psi \text{ para todo } a \in A$$

Observación

- *Morfismos no triviales entre módulos de Drinfeld existen si y solo si estos tienen el mismo rango*
- *cada elemento en $A^\times$ define un automorfismo de A-mods. Drinfeld $(G, \phi)_S$*

Problemas de moduli

Primero consideremos el siguiente problema de moduli.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^r \colon (SCh/A) &\longrightarrow Sets \\ S &\mapsto \mathcal{M}^r(S), \end{aligned}$$

Donde, $\mathcal{M}^r(S)$ es el conjunto de clase de isomorfismos de módulos de Drinfeld sobre S.

¿Es $\mathcal{M}^r$ representable?

El functor $\mathcal{M}^r$ no es representable.

¿Como arreglar este problema?

Estructuras de nivel

Definición

Sea $n \subset A$ un ideal, entonces una **estructura de nivel** *n en $(G, \phi)_S$ es un homomorfismos de A-módulos*

$$\iota\colon \left(n^{-1}/A\right)^r \to G(S)$$

que induzca una igualdad de divisores de Cartier $G_n = \sum_{\alpha \in (n^{-1}/A)^r} [\iota(\alpha)]$.

Definición

Un módulo de Drinfeld con una estructura de nivel lo denotaremos por $(G, \phi, \iota)_S$.

Definición

Morfismo de módulos de Drinfeld con estructura de nivel.

Nuevo problema de moduli

Consideramos el problema de moduli

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^r(n)\colon (SCh/A) &\longrightarrow Sets \\ S &\mapsto \mathcal{M}^r(n)(S), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}^r(n)(S)$ denota el conjunto de clase de isomorfismos de A-módulos de Drinfeld sobre S con estructura de nivel n.

Observación

Sean $0 \neq m \subset n \subset A$*, entonces existe un morfismo de functores*

$$\mathcal{M}^r(m) \to \mathcal{M}^r(n)$$

que es inducido por el morfismo canónico $n^{-1}/A \to m^{-1}/A$

Representabilidad

¿Es $\mathcal{M}^r(n)$ representable?

Ejemplo ($\mathcal{M}^2(T)$)

El functor $\mathcal{M}^2(T)$ **NO es representable**.

- *Existen objetos con automorfismos no triviales.*
- $\mathbb{F}_q[T] \to \mathbb{F}_q\{\tau\}$, $T \mapsto \tau^2$.
- *Estructura de nivel dada por el morfismo trivial ι_0,*

$$\iota_0 \colon \left(T^{-1}A/A\right)^2 \to \mathbb{F}_q.$$

- *Elementos de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ dan automorfismos de (G, ϕ, ι_0).*
- *Por lo tanto $\mathcal{M}^2(T)$ no es representable.*

Observación

Similarmente, $\mathcal{M}^r(T)$ no es representable.

Existencia del espacio de moduli

Definición

Un ideal $n \subset A$ se dice **admisible** *si $\#V(n) \geq 2$.*

Teorema

Sea $n \subset A$ un ideal admisible, entonces

- *$\mathcal{M}^r(n)$ es representable por un A-esquema afín $M^r(n)$ de tipo finito y dimensión $r-1$ sobre A.*
- *$M^r(n)$ es un $\mathbb{F}_q$-esquema suave de dimensión r, y el morfismo $M^r(n) \to SpecA$ es suave sobre $SpecA \setminus V(n)$.*
- *El morfismo $M^r(m) \to M^r(n)$ inducido por la transformación natural $\mathcal{M}^r(m) \to \mathcal{M}^r(n)$ es finito y plano.*