Módulos de Drinfeld analíticamente

Jerson Caro

Mayo 26,2021

Repaso

Sea $M \subset F := (\mathbb{F}_q((1/T)))^{alg}$ un retículo (A-módulo que es finitamente generado y discreto). Se define $e_M : F \to F$ como el siguiente producto

$$e_M(x) = x \cdot \prod_{0 \neq m \in M} \left(1 - \frac{x}{m}\right)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- e_M converge absoluta y uniformemente sobre compactos en todo F porque M es discreto.
- e_M es analítica, dada por una serie de potencias con coeficientes en $L_M := \mathbb{F}_q((1/T))(M)$.
- Como los coeficientes están en L_M, para todo $x \in F$ tenemos $e_M(x) \in L_M(x) \subset F$.

- La función $e_M : F \to F$ es $\mathbb{F}_q$-lineal.
- $\ker(e_M) = M$
- $e_M : F \to F$ es sobreyectiva.
- Obtenemos un isomorfismo $\mathbb{F}_q$-lineal $e_M : F/M \to F$.

Como F/M es A-módulo, ahora F adquiere una nueva estructura de A-módulo. A esto es lo que llamaremos módulo de Drinfeld.
Además demostramos el siguiente resultado:

Proposición 1

Sea L/K_∞ una extensión finita. La categoria de retículos de rango d sobre L es equivalente a la categoria de módulos de Drinfeld de rango d sobre L.

Nuevo Enfoque

Definición

Un subgrupo L del grupo aditivo de un campo completo K es llamado retículo, si $L \cap B(a, r)$ es finito para todo $r > 0$.
Notamos que si L es un retículo $L' := \lambda L$ también lo es, para $\lambda \in K^*$.
Decimos que L' es la dilatación de L por λ.

Definimos sobre un retículo L la función exponencial como antes y satisface las condiciones

- $e_L : K \to K$ converge absoluta y uniformemente en compactos.
- e_L es analítica y tiene un cero simple en cada $\ell \in L$.
- $e_L(x + y) = e_L(x) + e_L(y)$ para todo $x, y \in K$.
- También tenemos $e_{\lambda L}(t) = \lambda e_L(\lambda^{-1} t)$.

Parte I: Caracterización de módulos de Drinfeld sobre C_∞

Definición

Un A-retículo es un retículo $\Gamma \subset C_\infty$ si $a\Gamma \subset \Gamma$ para todo $a \in A$, esto es, Γ es un A-módulo.

Definimos $\phi^\Gamma : A \to \mathrm{End}_{C_\infty}(G_a)$, desde un A-retículo Γ por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "a"] & C_\infty \arrow[r, "e_\Gamma"] \arrow[d, "a"] & C_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\phi_a^\Gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & C_\infty \arrow[r, "e_\Gamma"] & C_\infty \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Las relaciones $\phi_a^{\lambda\Gamma}(e_{\lambda\Gamma}(t)) = e_{\lambda\Gamma}(at)$ y $e_{\lambda L}(t) = \lambda e_L(\lambda^{-1}t)$, implican que

$$\phi_a^{\lambda\Gamma}(\lambda e_\Gamma(\lambda^{-1}t)) = \lambda e_\Gamma(a\lambda^{-1}t),$$

luego $\phi_a^\Gamma = \lambda^{-1}\phi_a^{\lambda\Gamma}\lambda$, en particular ϕ_a^Γ y $\phi_a^{\lambda\Gamma}$ son isomorfos.

Tenemos el siguiente Teorema, analogo a la Proposición 1

Teorema

La función que envía un A-retículo Γ, al homomorfismo de anillos $\phi^\Gamma : A \to \mathrm{End}_{C_\infty}(G_a)$, es una biyección desde el conjunto de clases de dilatación de A-retículos en C_∞, determinado por Γ que son proyectivos de rango r, sobre el conjuntos de clases de isomorfismo de A-módulos afínes ϕ_a sobre C_∞ de rango r con $\partial\phi_a = a$.

- **Proyectivo:** Usamos que Γ es proyectivo para tener el isomorfismo

$$\begin{aligned}\ker(\phi_a^\Gamma) &\cong \ker(\phi_a^\Gamma e_\Gamma)/\Gamma = \ker(e_\Gamma a)/\Gamma \\ &\cong a^{-1}\ker(e_\Gamma)/\Gamma = a^{-1}\Gamma/\Gamma \cong (A/a)^r.\end{aligned}$$

  de aquí que $\deg \phi_a = (A/a)^r$.
- $\partial\phi_a = a$: Viene del hecho que $e_\Gamma(t) = t +$ (términos de grado mayor) y que $\phi_a^\Gamma = \lambda^{-1}\phi_a^{\lambda\Gamma}\lambda$.

Estructura de I-nivel

Definición

Sea Y un A-módulo proyectivo de rango r. Para un ideal no cero $I \subset A$ una estructura de I-nivel es un isomorfismo $\alpha : Y/IY \to (A/I)^r$ de A-módulos (o A/I-módulos libres).

Un isomorfismo $Y/IY \to (A/I)^r$ es equivalente a un isomorfismo $I^{-1}Y/Y \to (I^{-1}/A)^r$ (Al tensorizar por $I^{-1}\otimes_A$).
Si $Y = \Gamma$ es un A-rertículo, del hecho que $\ker(\phi_a^\Gamma) = a^{-1}\Gamma/\Gamma$, luego

$$E_I(C_\infty) = \bigcap_{a\in I} a^{-1}\Gamma/\Gamma = I^{-1}\Gamma/\Gamma,$$

así que tenemos:

Proposición

Usando $E_I(C_\infty) = I^{-1}\Gamma/\Gamma$, tenemos que una estructura de I-nivel sobre el A-módulo afín $E = \phi^\Gamma$ es lo mismo que sobre el A-módulo proyectivo Γ.

Parte II:
Módulos Discretos en Espacios Vectoriales sobre campos locales

Notación

Sea A un subanillo discreto en un campo local K, con campo de fracciones $F \subset K$. Asumimos que K/A es compacto.

Ejemplos

- $A = \mathbb{Z} \subset F = \mathbb{Q} \subset K = \mathbb{R}$.
- $A = O_F \subset F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ con $d > 0$ y $F \subset K = \mathbb{C}$.
- $A = \mathbb{F}_q[t] \subset K = \mathbb{F}_q(t) \subset K = \mathbb{F}_q((t^{-1}))$.
- $A = \mathbb{F}_q[C - \infty] \subset F = \mathbb{F}_q(C - \infty) = \mathbb{F}_q(C) \subset K = F_\infty$, este último es la completación de F en ∞.

Definición

Sea V un K-e.v. con $\dim_K(V) < \infty$. Un subgrupo H de V es discreto si existe una vencindad N' con $H \cap N' = \{0\}$. El rango de H $\mathrm{rk}_A H$, es por defición $\dim_K(K \otimes_A H)$.

Proposición 2

Sea H un A-módulo discreto contenido en un K-espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces

$$\mathrm{rk}_A(H) \leq \dim_K(V).$$

- Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base para $W := K \cdot H \subset V$.
- Tenemos que $L := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_A \subset H \subset W \subset V$.
- Existen N' tal que $H \cap N' = \{0\}$ y N tal que $N + N = N'$.
- $N + L$ es una vecindad de $0 \in V/L$ que intersecta a H/L en 0. Luego H/L es discreto. (Para $x, y \in H$ si $N + x \cap N + y \neq \emptyset$ entonces $x = y$)
- Como W/L es compacto, H/L es finito.
- $n = \dim_F(F \otimes_A L) = \dim_F(F \otimes_A H) = \dim_K(W) \leq \dim_K(V)$.

Proposición 3

Sea H un A-submódulo proyectivo contenido en un K-espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H es discreto en V si y sólo si $\theta : K \otimes_A H \to V$ es inyectivo.

H discreto

- $H \subset \mathrm{Im}(\theta) \subset V$ por Prop. 2 $\mathrm{rk}_A(H) \leq \dim_K(V)$.
- $\mathrm{rk}_A(H) = \dim_K(K \otimes_A H) \geq \dim_K(\mathrm{Im}(\theta))$.

θ es inyectivo

- Existe H' tal que $H \oplus H' \cong A^n$, luego H es discreto en $K \otimes_A H$.
- Como θ es inyectivo, H es discreto en V.

Para recordar

Sea $\mathcal{C}$ la completación de la clausura algebraica de K.

- Para cada A-módulo proyectivo con $\mathrm{rk}_A(P) \leq [\mathcal{C} : K]$ existe un A-monomorfismo $P \to \mathcal{C}$ tal que P es discreto en $\mathcal{C}$ por Proposición 3, pues $K \otimes_A P \to \mathcal{C}$ es inyectivo.
- Por tanto sólo los grupos abelianos libres de rango ≤ 2 pueden ser encajados discretamente en $\mathbb{C}$.
- Mientras que cualquier A-módulo proyectivo puede ser embebido como A-retículo dicreto en C_∞ (Para ejemplos (3) y (4)), pues $[C_\infty : F_\infty] = \infty$.