Moduli analítico de módulos de Drinfeld

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2021/06/02

Recuerdo: Módulos de Drinfeld

- Sea k campo de característica p
- $\mathrm{End}_k(G_a) =$ polinomios aditivos sobre k. Anillo con composición.
- $C =$ curva suave proyectiva sobre $\mathbb{F}_q$, $q = p^f$.
- $A = H^0(C - \{\infty\}, \mathcal{O})$, por ejemplo $A = \mathbb{F}_q[T]$.
- Módulo de Drinfeld sobre k: Morfismo inyectivo de anillo

$$\phi : A \to \mathrm{End}_k(G_a).$$

Define un funtor $E : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Mod}_A$.

Recuerdo: Torsión y estructura de nivel

- Torsión: para $a \in A$ el funtor E_a representado por el esquema $\ker(\phi_a)$.
- Sea $I \subseteq A$ ideal. El funtor E_I es representado por $\cap_a \ker(\phi_a)$ donde a varía en un conjunto finito de generadores de I ("$\cap$" = prod. fibrado).
- $I^{-1} \subseteq F$ es un ideal fraccionario; contiene a A. Entonces $(I^{-1}/A)^r$ es un grupo finito. Si $\phi : A \to \mathrm{End}_k(G_a)$ es un módulo de Drinfeld sobre un campo k y ϕ es de caracterísica coprima con I, entonces $E_I(k^{alg}) \simeq (I^{-1}/A)^r$. Una I-estructura de nivel es "elegir este isomorfismo". Más preciso:
- Sea S un esquema sobre $\mathbb{F}_p$ y sea ϕ un módulo de Drinfeld sobre S. Un I-estructura de nivel para ϕ es[1] un S-isomorfismo de funtores $\alpha : (I^{-1}/A) \to E_I$ sobre S.
- No siempre existe: Por ejemplo, si ϕ sobre k admite una I-estructura de nivel, entonces $E_I(k) \simeq E_I(k^{alg})$, y esto no siempre ocurre.

[1] En realidad es más complicado. La función $A \to O_S$ dada por $a \mapsto \partial_0\phi_a$ define $S \to \operatorname{Spec} A$ y la definición anterior de α se complica cuando la imagen de $S \to \operatorname{Spec} A$ intersecta $\mathbb{V}(I)$.

Recuerdo: Espacio de moduli

- Sea $F_I^r : \mathbf{Sch}_A \to \mathbf{Set}$ el funtor que a un A-esquema S le asocia el conjunto de clases de isomorfismo de pares (ϕ, α) donde ϕ es un módulo de Drinfeld sobre S y α es una I-estructura de nivel en ϕ.
- **Teorema.** Sea $I \subseteq A$ ideal divisible por al menos dos primos. Entonces F_I^r es representable por un A-esquema afín de tipo finito M_I^r: Para todo A-esquema S hay una biyección $F_I^r(S) \simeq M_I^r(S) := Mor_A(S, M_I^r)$ que es funtorial en S.
- **Obs.** si en lugar de trabajar sobre $\mathrm{Spec}\, A$ tusamos $\mathrm{Spec}\, A - \mathbb{V}(I)$ entonces el funtor podría ser representable sin tener que pedir $\#\mathbb{V}(I) \geq 2$.

Recuerdo: Módulos de Drinfeld analíticamente

$\mathbb{C}_\infty$ = completación de la clausura algebraica de F_∞, con $F = Frac(A)$.

- Sea $M \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un retículo de rango r (A-módulo proyectivo discreto). La función
$$e_M(x) = x \cdot \prod_{0 \neq m \in M} \left(1 - \frac{x}{m}\right)$$
converge bien, es $\mathbb{F}_q$-lineal, sobreyectiva y con $\ker(e_M) = M$.
- Obtenemos un isomorfismo $\mathbb{F}_q$-lineal $e_M : \mathbb{C}_\infty / M \to \mathbb{C}_\infty$.
- A actúa en $\mathbb{C}_\infty / M$ por multiplicación escalar. Entonces obtenemos un módulo de Drinfeld ϕ^M de rango $r = \mathrm{rk} M$ sobre $\mathbb{C}_\infty$:
$$\phi_a^M(z) := e_M(a \cdot e_M^{-1}(z))$$
- **Obs.** Dado $\lambda \in \mathbb{C}_\infty^\times$, los módulos ϕ^M y $\phi^{\lambda M}$ son isomorfos.
- **Teorema clase pasada:** Esta construcción da una biyección entre las clases de dilatación de retículos $M \subseteq \mathbb{C}_\infty$ de rango r, y las clases de isomorfismo de módulos de Drinfeld $\phi : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty}(G_a)$ de rango r.

Tema de hoy: versión analítica del espacio de moduli

- Vamos a clasificar clases de dilatación de retículos de rango r por un cierto espacio $\mathbb{C}_\infty$-analítico X. Esto clasificará módulos de Drinfeld sobre $\mathbb{C}_\infty$ y por lo tanto X estará en biyección con $F^r(\mathbb{C}_\infty)$.
- Versión con estructura de nivel. En ese caso $F^r_I(\mathbb{C}_\infty) = M^r_I(\mathbb{C}_\infty)$ así que le estamos dando una estructura analítica al esquema M^r_I.
- Historia análoga: $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h} = GL_2(\mathbb{Z})\backslash(\mathbb{C} - \mathbb{R})$ clasifica $\mathbb{Z}$-retículos de rango 2 en $\mathbb{C}$. Entonces también clasifica curvas elípticas complejas, y eso nos dice que hay una biyección $Y_1(\mathbb{C}) \simeq GL_2(\mathbb{Z})\backslash(\mathbb{C} - \mathbb{R})$. En principio Y_1 es una curva algebraica solamete pero esta biyección le da una buena estructura analítica.

Clasificando funciones inyectivas

Lema

La función $f : \mathbb{C}_\infty^\times \backslash (\mathrm{Hom}_{F_\infty}(F_\infty^r, \mathbb{C}_\infty) - \{0\}) \to \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C}_\infty)$ *dada por* $f(u) = [u(e_1) : \ldots : u(e_j)]$ *es biyectiva. Ella se restringe a una biyección*

$$\mathbb{C}_\infty^\times \backslash Mon_{F_\infty}(F_\infty^r, \mathbb{C}_\infty) \longrightarrow \Omega^r(\mathbb{C}_\infty) := \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C}_\infty) - \bigcup_{H\,\mathrm{hiperplano\,sobre}\,F_\infty} H$$

Dem. Lo primero es claro.
Lo segundo: dado $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in F_\infty^r$, las $u \in \mathrm{Hom}_{F_\infty}(F_\infty^r, \mathbb{C}_\infty)$ que cumplen $0 = u(\mathbf{v}) = v_1 u(e_1) + \ldots + v_n u(e_n)$ son las mismas que cumplen $f(u) \in H_\mathbf{v} := \mathbb{V}(v_1 x_1 + \ldots v_n x_n) \subseteq \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C}_\infty)$. $\square$

Retículos analíticamente

Lema

Sea Y un A-modulo proyectivo de rango r. Entonces tenemos una biyección

$$\mathbb{C}_\infty^\times \backslash Mon_{\mathbb{F}_\infty}(Y \otimes F_\infty, \mathbb{C}_\infty)/GL_A(Y) \to \left\{ \begin{matrix} \textit{retículos en } \mathbb{C}_\infty \\ \textit{isomorfos a } Y \end{matrix} \right\} / \sim$$

- Sea $u : Y \to \mathbb{C}_\infty$. Entonces $M := u(Y) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ es retículo si y solo si $Y \otimes F_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es inyectivo.
- Los retículos $M \subseteq \mathbb{C}_\infty$ se clasifican módulo homotecia: $M \sim M'$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ con $M' = \lambda M$. Esto corresponde a $u \sim \lambda u$.
- La imagen de Y en $Y \otimes \mathbb{F}_\infty$ está únicamente determinada, pero el morfismo $Y \to Y \otimes F_\infty$ no lo está:
  Podemos pre-componer $Y \to Y \otimes F_\infty$ con la acción de $GL_A(Y)$. $\square$

Clasificando módulos de Drinfeld

Sea $\Omega^r(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C}_\infty) -$ hiperplanos sobre $\mathbb{F}_\infty$.
Sea $\mathcal{P}_A^r$ el conjunto de clases de isomorfismo de módulos proyectivos de rango r sobre A. (ej. si $A = \mathbb{F}_q[T]$ entonces $\mathcal{P}_A^r = \{A^r\}$ es un singleton).

Teorema

Las construcciones anteriores dan biyecciones entre los conjuntos:

- $\coprod_{Y \in \mathcal{P}_A^r} \Omega^r(\mathbb{C}_\infty)/GL_A(Y)$
- $\coprod_{Y \in \mathcal{P}_A^r} \mathbb{C}_\infty^\times \backslash Mon_{\mathbb{F}_\infty}(Y \otimes F_\infty, \mathbb{C}_\infty)/GL_A(Y)$
- *Retículos en $\mathbb{C}_\infty$ de rango r módulo homotecia.*
- $F^r(\mathbb{C}_\infty) =$ *Módulos de Drinfeld $\phi : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty}(G_a)$ módulo isomorfismo.*

Aplicación. Teniendo una buena teoría analítica, esto permite calcular la dimensión del espacio de moduli M^r y, más generalmente, M_I^r.
Por ejemplo, los M_I^2 son curvas.

Clasificando módulos de Drinfeld

Hay una versión con I-estructura. En ese caso se usa

- $\mathcal{P}_A^r(I) =$ módulos proyectivos e rango r con I-structura
- El subgrupo de congruencia $GL_A(Y, I) := \ker(GL_A(Y) \to GL_A(Y/IY))$.
  Este grupo actuando en $\Omega^r(\mathbb{C}_\infty)$ es análogo a $\Gamma(N) = \ker(GL_2(\mathbb{Z}) \to GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ actuando en $\mathfrak{h}^\pm := \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
- El funtor F_I^r

Cuando $\#\mathbb{V}(I) \geq 2$ el funtor F_I^r es representable por un A-esquema M_I^r y además obtenemos biyección con $M_I^r(\mathbb{C}_\infty)$:

$$\coprod_{Y \in \mathcal{P}_A^r(I)} \Omega^r(\mathbb{C}_\infty)/GL_A(Y, I) \simeq M_I^r(\mathbb{C}_\infty).$$

Esto es análogo a la siguiente biyección para curvas elípticas

$$\coprod_{\epsilon} \Gamma_\epsilon(N)\backslash\mathfrak{h}^\pm \simeq Y_N(\mathbb{C}), \quad \epsilon \text{ raiz primitiva } N\text{-ésima}.$$