Formas modulares de Drinfeld

Matías Alvarado

Pontificia Universidad Católica de Chile

Junio 2021

¿Qué hemos hecho y hacia dónde vamos?

- Hemos estudiado módulos de Drinfeld.
  - Desde el punto de vista algebraico, analítico, etc.
  - Sobre esquemas.
  - Espacios de moduli.

Vamos a...

- Demostrar modularidad
  - Curvas elípticas.
  - Curvas modulares.
  - Formas modulares.

Parametrización de módulos de Drinfeld sobre $\mathbb{C}_\infty$

- $\mathcal{P}_A^r = \{A\text{-mods. proyectivos de rango } r\}/\simeq$
- $\Omega^r = \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C}_\infty) - \{\text{Hiperplanos } k_\infty\text{-racionales}\}$
- $GL(Y,I) = \ker\left(\mathrm{GL}(Y) \to \mathrm{GL}(Y/IY)\right)$
- $\displaystyle\bigcup_{\mathcal{P}_A^r(I)} \Omega^r/GL(Y,I) \simeq M_I^r(\mathbb{C}_\infty)$
- En el caso clásico tenemos

$$X(N) = \bigcup X_\zeta(N)$$

Ejemplo $X(T)$ sobre $\mathbb{F}_q(T)$

- $X(T) = \Omega^2/\Gamma(T)$, $\Gamma(T) = \mathrm{GL}(A^2, (T))$
  - Cúspides:
    - $\mathrm{SL}_2(A)$ actúa en $\mathbb{P}^1(k)$
    - $\#\mathrm{Cusp}\,(X(T)) = \#\,(\Gamma(T)\backslash \mathrm{SL}_2(A)/H)$
    - $H = \mathrm{Stab}(\infty)$
    - $\#\mathrm{Cusp}\,(X(T)) = q + 1$
  - Género:
    - $X(T) \to X(1) = \mathbb{P}^1$
    - $g(X(T)) = 0$
- $X(T) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_\infty) - \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$

Formas modulares

Definición (Forma modular)

Una función $f : \Omega^2 \to \mathbb{C}_\infty$ *que cumple:*

- $f(\gamma \cdot z) = \det \gamma^{-\ell}(cz + d)^k f(z)$.
- f *es holomorfa.*
- f *es holomorfa en las cúspides.*

es una **forma modular de peso** k **y tipo** ℓ *para* Γ.

El espacio de formas modulares de este tipo se denota por $M_{k,\ell}(\Gamma)$

- $M_k := M_{k,0}$
- $M(\Gamma) = \bigoplus_{k,\ell} M_{k,\ell}(\Gamma)$

Algunos comentarios

- ¿Qué significa que f sea holomorfa?
- ¿Qué significa que f sea holomorfa en las cúspides?
    - Encontrar parámetro locales en las cúspides
        - ★ caso clásico: $q = e^{2\pi i z}$ es p. local de ∞ en $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}}$
    - $\infty \in \Gamma\backslash\mathbb{P}^1(K)$
    - $$\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, a \in \mathfrak{a}\right\} \subset \mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$$
- $t_\infty(z) = \bar{\pi}^{-1} e_{\mathfrak{a}}^{-1}(z)$

Observaciones sobre formas modulares

- Consideremos
$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \Gamma$$
Supongamos que γ es de orden m. Si $k \neq 2\ell (\text{mod } m)$, entonces $M_{k,\ell} = 0$.
  - $f(z) = f(\gamma z) = \alpha^{k-2\ell} f(z)$
- $M_k(GL_2(A)) = 0$ si $k \neq 0 (\text{mod } q-1)$
- En el caso clásico $M_k\left(SL_2(\mathbb{Z})\right) = 0$ para k impar

Ejemplos

- $E_k(z) = \sum_{(a,b)\in A^2-\{0\}} (az+b)^{-k}$

Sobre $\mathbb{F}_q[T]$, consideramos $\Lambda_z = Az \oplus A$

- $\phi_T^z = T + g\tau + \Delta\tau^2 = T + g(z)\tau + \Delta(z)\tau^2$
- ¿Como es $\phi_T^{\gamma z}$?
- Debemos estudiar las exponenciales e_{Λ_z} y $e_{\Lambda_{\gamma z}}$
- $e_{\Lambda_{\gamma z}}(t) = \dfrac{1}{cz+d} e_{\Lambda_z}((cz+d)t)$
- $\phi^{\Lambda_{\gamma z}} = \phi^{(cz+d)^{-1}\Lambda_z}$
- $\phi^{\Lambda_{\gamma z}} = (cz+d)^{-1}\phi^{\Lambda_z}(cz+d)$
- $g(\gamma z) = (cz+d)^{q-1} g(z)$
- $\Delta(\gamma z) = (cz+d)^{q^2-1}\Delta(z)$

g y Δ son formas modulares de peso $q-1$ y q^2-1 respectivamente.

Caso de curvas elípticas:

- $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$
- g_2 y g_3 son series de Eisenstein.
- $j(z) = 1728 \dfrac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27 g_3(z)^2} = 1728 \dfrac{g_2(z)^3}{\Delta(z)}$
- j es una función modular
- j parametriza curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$

Caso de módulos de Drinfeld:

- También exite una función j.
- $j(z) = \dfrac{g^{q+1}(z)}{\Delta(z)}$
- j es una función modular
- j clasifica módulos de Drinfeld de rango 2 sobre $\mathbb{C}_\infty$

Relación entre formas modulares y curvas modulares

- **Caso clásico:**
  - $S_2(\Gamma) \simeq H^0(\overline{\Gamma\backslash\mathfrak{h}}, \Omega^1)$
  - $dz = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dq}{q}$, $q = e^{2\pi i z}$
- **Caso de formas modulares de Drinfeld**
  - $dz = -\dfrac{1}{\bar{\pi}}\dfrac{dq_\infty}{q_\infty^2}$
$$\frac{dq(z)}{dz} = \frac{-\bar{\pi}e'(\bar{\pi}z)}{e(\bar{\pi}z)^2} = \frac{-\bar{\pi}}{e(\bar{\pi}z)^2} = -\bar{\pi}q_\infty^2$$
  - $H^0(\overline{\Gamma\backslash\Omega^2}, \Omega^1_{X/k}) \simeq S^2_{k,0}(\Gamma)$ (formas doblemente cuspidales)

Operadores de Hecke

En el caso clásico:

- los operadores de Hecke se pueden ver como $\Lambda \to \sum \Lambda'$
- Esto se traspasar al lenguaje de formas modulares

Caso de módulos de Drinfeld:

- el operador $T_{\mathfrak{n}}$ actúa en reticulos
- $\Lambda \to \sum \Lambda'$, $\Lambda/\Lambda' \simeq A/\mathfrak{m} \times A/\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{n}$.
- si $\mathfrak{p} = (P)$, entonces
  $(T_{\mathfrak{p}} f)(z) = P^{k-1} f(Pz) + \frac{1}{P} \sum_{b \in A, \deg b < \deg P} f((z+b)/P)$
- $T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = T_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{q}}$
- $T_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}^2} + q^{\deg(P)k-1}$

Operadores de Hecke

Caso clásico:

- Relación entre coeficientes de Fourier de f y $T_n f$
- $c_1(T_n f) = c_n(f)$
- Hay un pairing perfecto

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_k \times M_k &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (T_n, f) &\longmapsto c_1(T_n f), \end{aligned}$$

Caso módulos de Drinfeld:

- Existe relación entre los coeficientes de Fourier.
- Podriamos considerar el pairing

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_k \times M_k &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (T_{\mathfrak{n}}, f) &\longmapsto c_1(T_{\mathfrak{n}} f), \end{aligned}$$

pero no se sabe si es perfecto.

Algunas formas propias

- Series de Eisenstein:

$$T_{\mathfrak{p}} E_k = P^{k-1} E_k$$

- Funciones coeficientes:
  - $T_{\mathfrak{p}} \Delta = P^{q-2} \Delta$
  - $T_{\mathfrak{p}} g = P^{q-2} g$
- En el caso clásico los valores propias definen forma propia
- En el caso de mod. Drinfeld es un problema abierto si el dato **valores propios** + **peso** determina únicamente la forma propia.

Formas modulares de rango superior

- Formas modulares asociadas a módulos de Drinfeld de rango 2.
- ¿Existen formas modulares para rango superior?
- Gekeler: *On Drinfeld modular forms of higher rank* (2017-)
  - Propiedades de Δ
  - Prop. de $|f|$ y relación con $\mathcal{BT}$
  - Fórmula de valencia
  - Construcción de compatificaciones $\overline{M^r(N)}$