MASAS Y GEOMETRÍA DE TRIÁNGULOS

MARIO PONCE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
P. UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

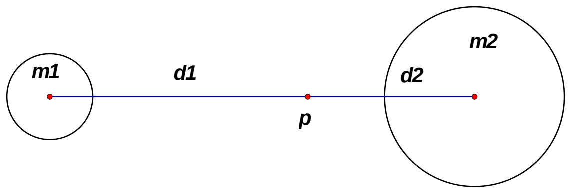
1. Resumen

A partir del principio de las palancas, desarollado por Arquímides se establece una relación entre masas distribuidas en los vértices de un tringulo y puntos importantes en él. Se demuestra la existencia de baricentro y otros puntos del triángulo utilizando el principio de equilibro de masas.

2. Punto de equilibrio

El *punto de equilibrio* p de dos masas m_1, m_2 se encuentra en la línea que une ambas masas y debe de satisfacer la *ecuación de equilibrio*

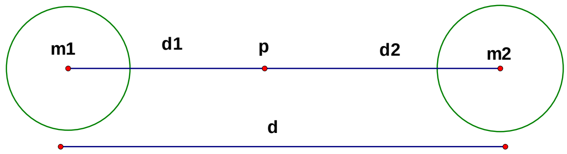
$$\boxed{d_1 \cdot m_1 = d_2 \cdot m_2}$$



donde d_1, d_2 son las correspondientes distancias de p a a cada una de las masas. El punto de equilibrio resulta ser único. En general las masas, que son objetos de formas arbitrarias, se suponen concentradas en lo que se llama su centro de masa. Luego, en lo que resta de este trabajo supondremos que las masas son puntuales.

Por ejemplo, si se tienen dos masas iguales a una distancia d entonces el punto de equilibrio está determinado por la ecuación $d_1 \cdot m = d_2 \cdot m$, igualdad que nos dice que $d_1 = d_2$, es decir, el punto de equilibrio se encuentra exactamente en la mitad del trazo que une sus centros de masa, como era de esperarse.

Sociedad de Matemáticas de Chile, Olimpíada Nacional 2008.

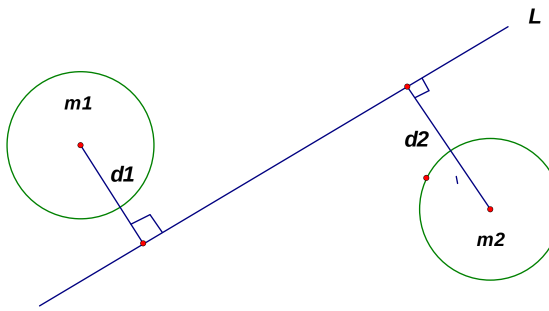


3. Eje de equilibrio

En el caso de masas ubicadas en el plano, diremos que una recta L es un *Eje de Equilibrio* del sistema compuesto por dos masas m_1,m_2 si se cumple la ecuación de equilibrio siguiente

$$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2,$$

donde d_1, d_2 corresponden a las distancias de cada masa a la recta L.

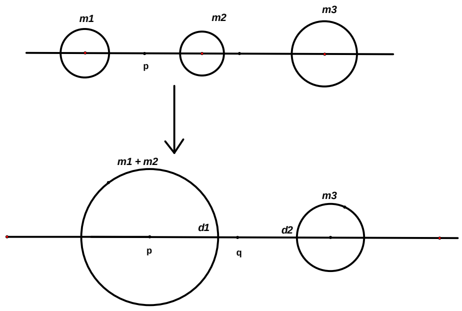


Para cada dirección del plano hay una única recta de equilibrio paralela a esta dirección y que cumple con la igualdad. Es decir, para cada dirección existe un eje de equilibrio del sistema en esa dirección.

4. Propiedad asociativa de los puntos de equilibrio

El punto de equilibrio de un sistema de tres masas se puede hallar juntando dos de las masas y ubicándolas en su punto de equilibrio, que se encuentra en la la recta que une los centros de las masas. Así obtenemos un sistema con dos masas que tiene el mismo punto equilibrio que el original. En resumen, el problema se reduce a un sistema de dos masas el cual ya sabemos trabajar.

En la recta. Se juntan dos masas que formam una nueva masa que se ubica en el punto de equilibrio de ellas dos y luego se procede a encontrar el punto de equilibrio del nuevo sistema.

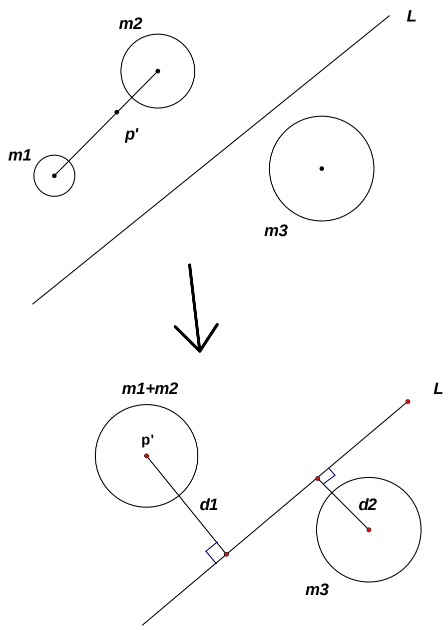


p es el punto de equilibrio entre m_1 y m_2, q es el punto de equilibrio de las 3 masas.

$$\boxed{d_1(m_1 + m_2) = d_2 m_3}$$

Se puede probar que no importa como se asocien las masas, el punto de equilibrio queda invariante. En otras palabras, se satisface la propiedad asociativa de los puntos de equilibrio.

En el plano. En la figura $L =$ es eje de equilibrio de las 3 masas, p' es el punto de equilibrio de las masas m_1 y m_2.



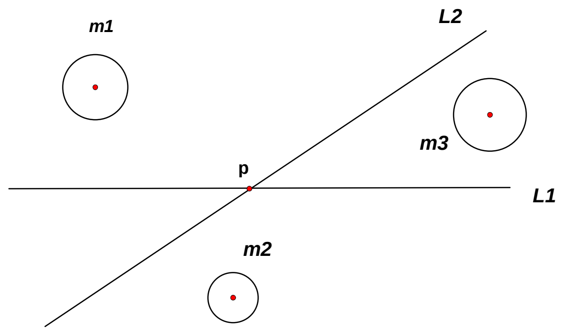
Entonces, debe cumplirse que $d_1(m_1 + m_2) = d_2 m_3$.

En resumen, un eje de equilibrio de un sistema de tres masas se puede hallar juntando dos de ellas en un punto de equilibrio. Así obtenemos un sistema con dos masas. Un eje de equilibrio para este sistema también es un eje de equilibrio para el sistema con tres masas.

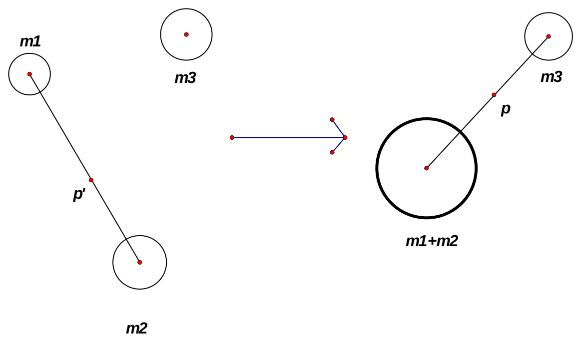
5. Punto de equilibrio en el plano

Un punto p es un Punto de Equilibrio para un sistema con tres (o más) masas en el plano si es el punto de intersección de cualquier par de ejes de equilibrio. Este punto único. En la figura,

L_1,L_2 son Ejes de equilibrio.
p' = Punto de equilibrio entre m_1 y m_2
p = Punto de equilibrio entre una masa $(m_1 + m_2)$ colocada en p' y m_3. Coincide con el punto de equilibrio del sistema.

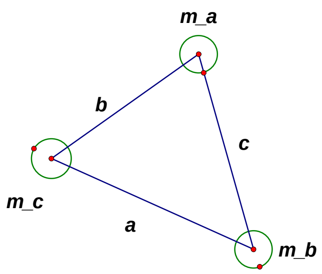


Método para hallar el punto de equilibrio en el plano.



6. Triángulos y puntos de equilibrio

Dado cualquier triángulo $\triangle ABC$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, pretendemos encontrar algunos puntos “interesantes”del triángulo como el punto de equilibrio de algún sistema de masas m_A, m_B, m_C ubicadas en los respectivos vértices.



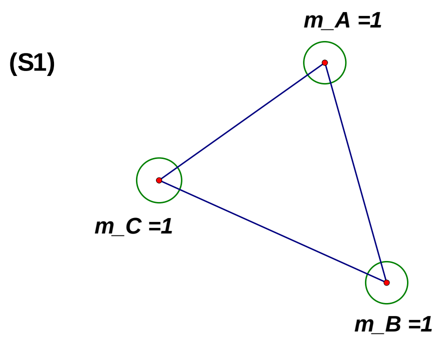
El siguiente Lema nos dice que esta pretensión es absolutamente razonable y nos deja como única dificultad el hecho de encontrar los valores correctos para las masas.

Lema 1. *Sea P un punto del interior o del perímetro del triángulo $\triangle ABC$. Entonces existe una manera de distribuir masas m_A, m_B, m_c en los vértices de manera que P sea el punto de equilibrio del sistema.*

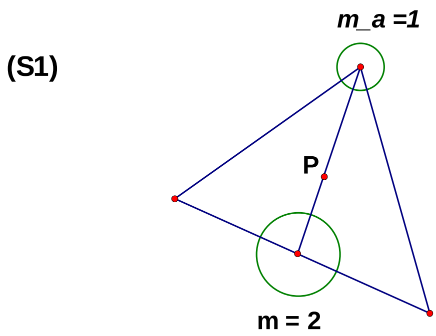
Demostración. Notemos que si $P = A$, basta tomar $m_A = 1$, $m_B = m_C = 0$. Analogamente obtenemos los otros vértices. Un argumento de continuidad nos permite concluir lo aseverado en el lema. Por ejemplo, si el punto P está sobre el lado AB, basta con aumentar progresivamente el valor de la masa m_B para correr el punto de equilibrio en la dirección del vértice B hasta alcanzar la posición de P $\square$

A continuación distinguiremoa algunos puntos clásicos de un triángulo a partir del cálculo de puntos de equilibrios para un sistemas de tres masas en el plano.

6.1. **Baricentro o centro de gravedad.** Consideremos el sistema S_1 de masas siguiente:



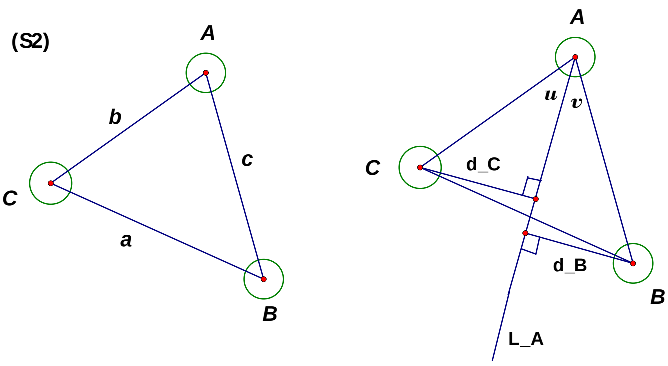
Como las masas son iguales en cada vértice, su punto de equilibrio los calcularemos asociando de a dos masas a la vez. El punto de equilibrio de dos masas (que pesan lo mismo) se encuentra en el punto medio del lado que los une.



El punto de equilibrio P del sistema $\mathbf{S_1}$ está entonces ubicado sobre la recta que une al vértice no considerado y el punto medio del lado opuesto, es decir, sobre la transversal de gravedad correspondiente (que resulta ser un Eje de equilibrio del sistema). Haciendo esto con los otros lados obtenemo que el punto de equilibrio P del sistema está ubicado sobre las tres transversales de gravedad del triángulo, luego estas tres transversales son concurrentes y P coincide con este punto, llamado *Baricentro* del triángulo $\triangle ABC$.

Note que de la Ecuación de Equilibrio se obtiene que el baricentro P divide a la transversal de gravedad en razón $2:1$, pues esa es la razón entre las masas.

6.2. **Incentro.** Consideremos el sistema $\mathbf{S_2}$ de masas:

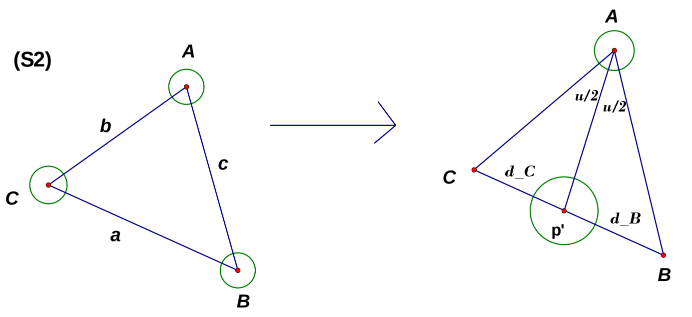


donde $m_A = a, m_B = b, m_C = c$. Busquemos un eje de equilibrio que pase por el vértice A. Llamemos u, v a los ángulos en los cuales este eje divide al ángulo $\angle CAB$. Debe tenerse que $m_C \cdot d_C = m_B \cdot d_B$, lo que equivalentemente significa

$$c \cdot b \operatorname{sen}(u) = b \cdot c \operatorname{sen}(v) \Longrightarrow \operatorname{sen}(u) = \operatorname{sen}(v) \Longrightarrow u = v = \frac{\angle CAB}{2}.$$

Concluimos que el eje L_A bisecta el ángulo $\angle CAB$ y coincide con la bisectriz que pasa por el vértice A. análogamente, las tres bisectrices del triángulo son ejes de equilibrio del sistema. Luego son concurrentes en el punto de equilibrio del sistema: el llamado *incentro*.

Observemos que si intentamos encontrar el punto de equilibrio del sistema $\mathbf{S_2}$ usando el método de asociación de masas obtenemos una demostración alternativa del Teorema de la Bisectriz.



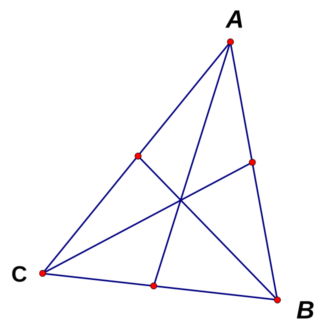
Ubicamos una masa $c+b$ en el punto de equilibrio P' de mC y m_B. Este punto verifica $m_C{\cdot}d_C = m_B{\cdot}d_B$ o equivalentemente

$$c \cdot d_C = b \cdot d_B \Longleftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{d_B}{d_C}.$$

Ya sabemos que el eje de equilibrio $\overline{AP}'$ es la bisectriz del ángulo $\angle CAB$. Luego la bisectriz del ángulo $\angle CAB$ corta al lado CB en razón $\frac{c}{b}$.

7. Teorema de Ceva

En general, dado un triángulo $\triangle ABC$, a cualquier línea que pasa por un vértice y corta al lado opuesto se le llama "ceviana"o "transversal". Dadas tres transversales pasando por A, B, y C respectivamente, nos preguntamos si existe un punto P en el interior del triángulo que pertenezca a las tres transversales. Dicho de otra manera, nos preguntamos si las tres transversales son "concurrentes":



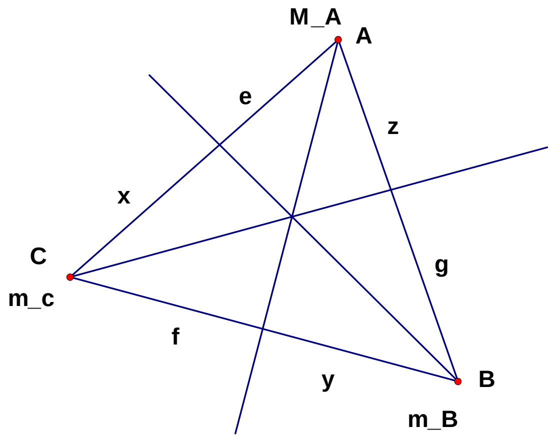
En términos se sistemas de masas, podemos plantear el problema de la siguiente manera:

¿Existe ó no una distribución de masas para los vértices del triángulo de tal forma que las transversales consideradas sean ejes de equilibrio del sistema resultante?

Supongamos que las tres transversales son concurrentes. El Lema 1 asegura que existe una distribución de masas m_A, m_B, m_C de manera tal que el punto de equilibrio coincida con el punto de intersección de las transversales y por lo tanto las transversales resultan ser ejes de equilibrio del sistema. Si aplicamos el método asociativo para encontrar los ejes tenemos que: reemplazando las masas m_B y m_C por una gran masa $(m_B + m_C)$ en el punto de equilibrio de estas dos, vemos que la transversal por A corta al lado $\overline{CB}$ en segmentos de largo f e y. Además se debe satisfacer la ecuación de equilibrio

$$\boxed{m_C \cdot f = m_B \cdot y}$$

Análogamente obtenemos que $\boxed{m_B \cdot g = m_A \cdot z}$ $\boxed{m_A \cdot e = m_C \cdot x}$



Multiplicando estas tres ecuaciones tenemos que

$$m_c \cdot m_B \cdot m_A \cdot f \cdot g \cdot c = m_B \cdot m_A \cdot m_c \cdot y \cdot z \cdot x \Leftrightarrow \frac{f \cdot g \cdot e}{y \cdot z \cdot x} = 1\,.$$

En otras palabras, si tres transversales son concurrentes entonces los segmentos en que dividen los lados opuestos verifican la relación de *Ceva*

$$\frac{f \cdot g \cdot e}{y \cdot z \cdot x} = 1.$$

Supongamos inversamente que sabemos que las tres transvesales verifican que los segmentos en que dividen a los lados opuestos correspondientes satisfacen la relación de Ceva $\frac{f \cdot g \cdot e}{y \cdot z \cdot x} = 1$. Queremos averiguar a partir de ello que las transversales son concurrentes. Para esto proporcionaremos un sistema de masas adecuado.

Elijamos

$$\begin{cases} m_A &= x \cdot y \cdot z = e \cdot f \cdot g \\ m_B &= e \cdot f \cdot z \\ m_C &= e \cdot y \cdot z \end{cases}$$

y formemos el sistema de masas resultante. El eje de equilibrio que pasa por A pasa también por el punto de equilibrio entre las masas m_B y m_C, dividiendo al lado $\overline{BC}$ en segmentos d_B, d_c. La ecuación de equilibrio nos dice que

$$m_c \cdot d_c = m_B \cdot d_B \Rightarrow e \cdot y \cdot z \cdot d_c = e \cdot f \cdot z \cdot d_B$$

Entonces,

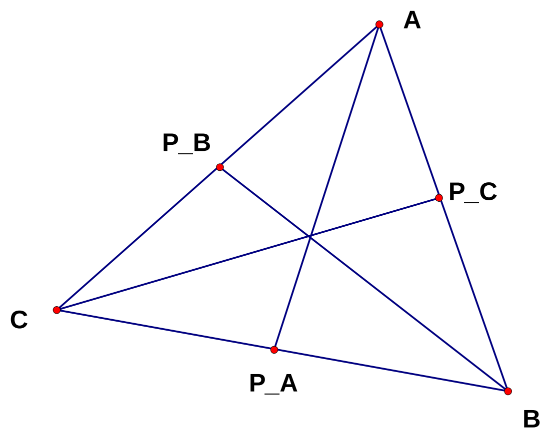
$$\frac{d_c}{d_b} = \frac{f}{y} \Rightarrow \begin{cases} d_c = f \\ d_B = y \end{cases}$$

Por lo tanto la transversal por A coincide con el eje de equilibrio del sistema por A. Análogamente obtenemos que los tres ejes de equilibrio coinciden con las tres transversales, luego las tres transversales concurren en el punto de equilibrio del sistema.

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado clásico sobre transversales concurrentes

Teorema 1 (Teorema de Ceva)**.** *sea un triángulo* $\triangle ABC$*. Considere tres puntos* $P_A \in \overline{BC}$, $P_B \in \overline{CA}$, $P_c \in \overline{AB}$ *respectivamente. Las tres transversales* AP_A, AP_B *y* AP_c *son concurrentes si y sólo si se verifica la relación*

$$\frac{\overline{AP_B} \cdot \overline{CP_A} \cdot \overline{BP_c}}{\overline{P_bC} \cdot \overline{P_AB} \cdot \overline{P}_CA} = 1.$$



Observación. Note que las distribuciones de masas dadas en las secciones previas son casos particulares de este método. Otro de los puntos más clásicos y conocidos en el triángulo es aquel en que se encuentran las tres alturas de un triángulo, el *ortocentro*. Dejamos como desafío para el lector hallar el sistema de masas adecuado para que este punto clásico aparezca como punto de equilibrio del sistema.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, P. UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, CASILLA 306, SANTIAGO, CHILE

E-mail address: mponcea@mat.puc.cl