

N° D'ORDRE :

**UNIVERSITÉ PARIS XI  
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THÈSE

présentée

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

Par

Mario PONCE

COURBES INVARIANTES POUR LES DYNAMIQUES  
HOLOMORPHES FIBRÉES

Soutenue le 22 juin 2007 devant la commission d'examen :

|              |                 |                    |
|--------------|-----------------|--------------------|
| M. FAYAD     | Bassam          | Examineur          |
| M. GAMBAUDO  | Jean-Marc       | Examineur          |
| M. KRIKORIAN | Raphaël         | Rapporteur         |
| M. SIBONY    | Nessim          | Examineur          |
| M. YOCCOZ    | Jean-Christophe | Directeur de thèse |



*a Jorge A. y Priscilla Z.*



## Remerciements

Je voudrai d'abord exprimer mes plus sincères remerciements à mon directeur Jean-Christophe Yoccoz. L'expérience (et la chance) d'avoir eu pendant tous ces années le soutien d'un mathématicien comme lui est difficile à décrire en quelques mots. Sans doutes, je lui doit presque la totalité de ce qui est de bon dans ce travail. Il m'a proposé un sujet de recherche à la fois intrigant et passionnant. Ses constantes idées, ses conseils avisés et sa disposition à répondre toutes mes questions de nature assez diverse (des maths à la grammaire française), vont sûrement marquer très positivement ma personnalité comme chercheur. Qu'il trouve ici ma profonde gratitude.

Je remercie chaleureusement Raphaël Krikorian et Stefano Marmi d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je tiens à remercier vivement Bassam Fayad, Jean-Marc Gambaudo et Nessim Sibony de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury.

L'achèvement d'une thèse marque aussi l'achèvement d'une longue étape de formation mathématique. J'ai eu toujours la chance d'avoir le soutien et l'encouragement de plusieurs personnes, je profite de cette occasion pour leur remercier : Jacinto Larenas, Rafael Labarca, Rafael Correa, Manfredo do Carmo, Giovanni Forni, et tant d'autres à qui je doit beaucoup.

Je souhaite remercier à tous les membres de l'équipe de Topologie et Dynamique du labo d'Orsay. D'une façon spéciale, à Pierre Pansu pour son important accueil ces jours difficiles lors de mon arrivé en France, aux secrétaires Martin Justin et Valerie Lavigne pour son sourire, gentillesse et surtout efficacité qui nous facilitent tellement la vie administrative. Aux doctorants du labo, bien spécialement aux thésards du bureau 106.

La comunidad latina hace que el labo de matemáticas guarde un sabor "familiar", gracias Ricardo, Eduardo, Ana, Lisandro, Héctor, Octavio, Jesús, Cristian, Natalia... por tantos momentos agradables. No osaré listar a todos los chilenos y afines que nos han acompañado y han hecho más grata nuestra estadía en Francia, *gracias totales*.

Je tient à remercier a tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de mes travaux de recherche. J'ai reçu des conseils, j'ai profité de discussions fructifères avec plusieurs personnes. Je garde une grande gratitude envers Andrés Navas pour son soutien constant.

Cette thèse à été co-financée par la bourse *Master Investigación y Doctorado 2003-2007* décernée par CONICYT-Chile–Ambassade de France au Chili, et la CAF Essonne.

Terminar mi tesis de doctorado es, evidentemente, un momento importante en mi vida. Este y tantos otros se deben sin duda al trabajo, cariño y entrega de mis padres, gracias, pero gracias por todo.

Alison , me es difícil simplemente agradecerle, pues la maravillosa experiencia de estar juntos me hace sentir que esta tesis es fruto de nuestros esfuerzos compartidos. Gracias amada esposa por tu apoyo incondicional, por desplazar tus intereses en beneficio de los míos y por la humildad de aceptar que este trabajo lleve injustamente solo mi nombre.



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Introduction  | ix        |
| <b>I Dynamique locale d'une transformation holomorphe fibrée</b>              | <b>1</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Conditions arithmétiques . . . . .  | 3         |
| 1.1.1 Conditions arithmétiques sur un nombre réel . . . . .                   | 3         |
| 1.1.2 Conditions arithmétiques sur une paire . . . . .                        | 5         |
| 1.2 Équations cohomologiques . . . . .  | 7         |
| 1.3 Dynamiques holomorphes fibrées . . . . .                                  | 9         |
| 1.3.1 Courbes invariantes . . . . .   | 10        |
| 1.3.2 Formes Normales . . . . .   | 13        |
| <b>2 Stabilité autour d'une courbe invariante</b>                             | <b>15</b> |
| 2.1 Courbes stables, tubes invariants . . . . .                               | 16        |
| 2.1.1 Stabilité autour d'une courbe attractive . . . . .                      | 17        |
| 2.1.2 Stabilité autour d'une courbe répulsive . . . . .                       | 24        |
| 2.2 Linéarisation et stabilité . . . . .                                      | 25        |
| 2.2.1 Linéarisation autour d'une courbe attractive . . . . .                  | 26        |
| 2.2.2 Linéarisation autour d'une courbe répulsive . . . . .                   | 29        |
| 2.2.3 Linéarisation et stabilité autour d'une courbe indifférente . . . . .   | 29        |
| 2.3 Le Théorème de Siegel pour les dynamiques holomorphes fibrées analytiques | 36        |
| 2.4 Existence d'orbites stables . . . . .                                     | 36        |
| <b>II Persistance de courbes invariantes</b>                                  | <b>45</b> |
| <b>3 Persistance des courbes invariantes</b>                                  | <b>47</b> |
| 3.1 Persistance d'une courbe attractive . . . . .                             | 48        |
| 3.2 Persistance d'une courbe répulsive . . . . .                              | 48        |
| 3.3 Persistance d'une courbe indifférente . . . . .                           | 49        |
| 3.3.1 Une résonance . . . . .   | 49        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.2    | Présentation formelle du problème comme une question de petits diviseurs . . . . .   | 50         |
| 3.3.3    | Familles à un paramètre complexe . . . . .   | 51         |
| <b>4</b> | <b>Cas infiniment différentiable</b>   | <b>55</b>  |
| 4.1      | Le Théorème des Fonctions Implicites de Hamilton . . . . .   | 57         |
| 4.1.1    | Bons Espaces de Fréchet . . . . .  | 58         |
| 4.1.2    | Théorème des Fonctions Implicites . . . . .  | 59         |
| 4.2      | Les bons espaces de Fréchet $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$ . . . . .   | 59         |
| 4.2.1    | Opérateurs de lissage et approximation sur $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$ . . . . .  | 60         |
| 4.3      | Preuve du Théorème 4.3 . . . . .   | 60         |
| 4.3.1    | Correction du nombre de rotation transversal . . . . .   | 64         |
| 4.3.2    | Le Théorème 4.3 sous la forme d'un problème de fonction implicite . . . . .  | 66         |
| 4.4      | Preuve du Théorème 4.2, un argument de transversalité . . . . .  | 68         |
| <b>5</b> | <b>Cas analytique</b>  | <b>73</b>  |
| 5.1      | Quelques résultats d'analyse . . . . .   | 73         |
| 5.2      | Le problème . . . . .  | 75         |
| 5.3      | Deux lemmes techniques . . . . .   | 76         |
| 5.4      | Un processus itératif . . . . .  | 78         |
| 5.4.1    | Choix du paramètre $\aleph$ et les largeurs de bande . . . . .   | 78         |
| 5.4.2    | Description de l'algorithme . . . . .  | 79         |
| 5.4.3    | Initialisation de l'algorithme . . . . .   | 83         |
| 5.4.4    | Mise en œuvre du pas itératif . . . . .  | 84         |
| 5.4.5    | Estimations par rapport au paramètre . . . . .   | 93         |
| 5.4.6    | Quatrième partie, coupure dans l'ensemble des paramètres . . . . .   | 97         |
| 5.4.7    | Convergence de la méthode . . . . .  | 100        |
| 5.4.8    | Modification de la première étape et la taille de $\varepsilon$ . . . . .  | 101        |
| 5.5      | Une procédure préalable et fin de la démonstration . . . . .   | 103        |
| 5.5.1    | Un zéro simple pour $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}$ . . . . .   | 107        |
| 5.6      | Une version paramétrée du Théorème de la persistance des courbes invariantes pour les dynamiques holomorphes fibrées . . . . . | 109        |
| 5.6.1    | L'application $\bar{t}_s$ . . . . .  | 110        |
| 5.6.2    | Les fonctions $(u_{0,t}^{n,i})^s$ pour $n^* \leq n < \bar{n}$ . . . . .  | 110        |
| 5.6.3    | Une étape $n \geq \bar{n}$ quelconque . . . . .  | 110        |
| 5.7      | Preuve du Théorème de Siegel pour les dynamiques holomorphes fibrées analytiques . . . . .                                     | 111        |
| <b>A</b> | <b>Fonctions de classe <math>C^\infty</math> à fibres holomorphes</b>  | <b>117</b> |
| <b>B</b> | <b>Lemme d'inversion uniforme</b>  | <b>119</b> |
|          | <b>Références</b>  | <b>121</b> |



# Introduction

Ce travail est consacré à l'étude des transformations fibrées de la forme

$$F(\theta, z) = (\theta + \alpha, f_\theta(z))$$

définies dans le produit  $\mathbb{T}^1 \times U$ , où  $\alpha$  est un nombre réel irrationnel et  $U$  est un ouvert du plan complexe. Nous disons qu'il s'agit de *dynamiques holomorphes fibrées* car nous supposons que les fonctions  $f_\theta : U \rightarrow \mathbb{C}$  sont holomorphes. Nous supposons toujours que  $(\theta, z) \mapsto f_\theta(z)$  est continu. Nous serons aussi amenés à considérer le cas  $C^\infty$  où cette application est de classe  $C^\infty$  et le cas analytique : il existe alors  $\delta > 0$  tel que l'application  $(\theta, z) \mapsto f_\theta(z)$  est définie et holomorphe dans le produit  $B_\delta \times U$ , où  $B_\delta$  est la bande

$$B_\delta = \{\theta \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \mid |\operatorname{Im}(\theta)| < \delta\}$$

Ce type de transformations s'inscrit dans le cadre plus général des *produits croisés* (skew-products) et par sa nature et l'allure des phénomènes que nous traitons dans cette thèse, on devrait en particulier les regarder comme proches des homéomorphismes du cercle fibrés sur une rotation irrationnelle.

L'article de M. Herman [Her83b] pose les bases de l'étude des homéomorphismes fibrés en définissant le nombre de rotation fibré. Plus récemment cette étude a été relancée notamment par les travaux de G.Keller, T. Jäger et J. Stark (voir [Sta03], [JK06], [JS06]), qui ont établi en particulier une classification à la Poincaré de telles dynamiques basée sur les propriétés des nombres de rotation associés et l'existence de courbes invariantes.

Dans sa thèse de doctorat O. Sester [Ses97] (voir aussi [Ses99]) a étudié la dynamique des polynômes fibrés, en généralisant les notions classiques d'ensemble de Julia, fonction de Green et de la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot dans l'espace de paramètres. Les travaux de M. Jonsson (voir [Jon99], [Jon00]) sont aussi une référence importante sur la dynamique fibrée des transformations rationnelles. La reducibilité des cocycles quasiperiodiques est un important sujet d'étude qui doit être considéré au moment de regarder les dynamiques fibrées au dessus d'une rotation irrationnelle (voir [Kri99], [AK06]).

Dans ce travail nous nous intéresserons tout particulièrement à l'existence et l'étude des courbes continues qui sont invariantes par la dynamique de  $F$ , c'est-à-dire, des courbes continues  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$  vérifiant l'équation

$$F(\theta, u(\theta)) = (\theta + \alpha, u(\theta + \alpha))$$

Ces objets généralisent le concept de point fixe du cas non fibré. Nous allons tout d'abord faire un petit rappel sur les principaux résultats de la dynamique locale d'un germe holomorphe  $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  au voisinage du point fixe (voir [CG93]).

Lorsque le module de la dérivée  $|g'(0)|$  est plus petit que 1 nous disons que l'origine est un point fixe *attractif*. Quand  $|g'(0)| > 1$  il s'agit d'un point fixe *répulsif* et si  $|g'(0)| = 1$  nous disons que c'est un point fixe *indifférent*. Dans le cas attractif il existe effectivement un ouvert contenant l'origine, appelé bassin d'attraction, dont les points convergent vers l'origine sous itération positive par  $g$ . Le cas répulsif se ramène au cas attractif via l'inverse du germe. Dans les deux cas la dynamique de  $g$  est conjuguée à la dynamique linéaire  $z \mapsto g'(0)z$  dans un voisinage de l'origine (on dit que  $g$  est *linéarisable*). Dans le cas indifférent, nous écrivons  $g'(0) = e^{2\pi i\gamma}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Nous disons que le point fixe est *rationnel* ou *irrationnel* si  $\gamma$  l'est. Dans le cas irrationnel nous avons le Théorème de Siegel-Brjuno-Yoccoz (voir [Sie42], [Bru71], [Yoc95])

**Théorème 1** *Si  $\gamma$  vérifie la condition de Brjuno, alors  $g$  est linéarisable. D'autre part, si  $\gamma$  ne vérifie pas la condition de Brjuno alors le polynôme quadratique  $P_\gamma(z) = e^{2\pi i\gamma}z + z^2$  n'est pas linéarisable.*

La condition  $\mathbb{B}$  de Brjuno peut se définir à l'aide de la suite  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  des dénominateurs des fractions partielles du nombre irrationnel  $\gamma$

$$\mathbb{B} = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty \right\}$$

Cet ensemble est de mesure totale au sens de Lebesgue. Lorsque  $g$  n'est pas linéarisable, le panorama de la dynamique locale autour du point fixe vient se compléter par le Théorème des Hérissons de Pérez-Marco (voir [PM97])

**Théorème 2** *Il existe un ensemble compact connexe plein contenant strictement l'origine qui est complètement invariant par  $g$ .*

Ceci est une version très simplifiée de ce joli théorème. On voit ainsi que dans une certaine mesure la dynamique locale autour du point fixe est gouvernée par les caractéristiques (infinitésimales) du point fixe.

Cette thèse est divisée en deux parties. La première contient une étude de la dynamique d'une transformation holomorphe fibrée pour des points qui sont proches d'une courbe invariante continue. Nous obtenons des résultats qui nous permettent de contrôler cette dynamique locale à partir de certaines données associées à la courbe, de façon analogue au cas non fibré.

Nous nous intéressons ensuite à la persistance d'une courbe (et ses caractéristiques infinitésimales) par des perturbations fibrées de la transformation originale. Nous nous

restreindrons à un cas spécial (mais particulièrement intéressant) de courbes invariantes, celles de degré nul. Nous verrons que dans ce cas le problème de la persistance de la courbe invariante se présente comme un problème de *petits diviseurs* (les articles [Arn63a], [Bos86], [Her87], [Mar], [Yoc92] sont une bonne référence pour ce type de problèmes). En regardant la forme des équations cohomologiques et la nature des petits diviseurs qui apparaissent, on dit qu'il s'agit un problème de petits diviseurs en dimension *intermédiaire*. Des équations similaires apparaissent lors de l'étude de la persistance des tores invariants isotropes dans systèmes hamiltoniens (ver [Mos67], [Eli88]), dans la détermination des fonctions propres des flots spéciaux sur des rotations irrationnelles (voir [GP]) et dans l'étude des cocycles associés à l'équation de Schrödinger discrète (voir [R80], [Kri99]). Le résultat principal de cette thèse consiste à établir que le phénomène de la persistance d'une courbe invariante (indifférente de degré nul) est de codimension 1 complexe sous certaines hypothèses arithmétiques sur les nombres de rotation associés à la courbe.

Nous introduisons à présent quelques notations avant de détailler le contenu de chacune des parties qui composent cette thèse. Nous associons à une courbe invariante continue  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$  son multiplicateur

$$\kappa(u) = \exp \left( \int_{\mathbb{T}^1} \log |\partial_z f_\theta(u(\theta))| d\theta \right)$$

Selon que  $\kappa(u)$  est plus petit, plus grand ou égal à 1 nous disons que la courbe est attractive, répulsive ou indifférente. Le degré  $deg(u)$  de la courbe est défini comme étant le degré topologique de l'application  $\partial_z f_\theta(u(\theta))$ . Dans le cas indifférent et sous l'hypothèse de degré nul, nous définissons le nombre de rotation transversal comme étant

$$\rho_{tr}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \log \partial_z f_\theta(u(\theta)) d\theta$$

Nous disons que  $F$  est *linéarisable* s'il existe un changement de coordonnées  $H$  à fibres holomorphes défini autour de la courbe et une fonction  $A : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , les deux étant de la même classe de différentiabilité que  $F$ , tels que  $H$  conjugue  $F$  à la transformation

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto (\theta + \alpha, A(\theta)z) \end{aligned}$$

dans un voisinage de la courbe. Soient  $\kappa \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  définis par l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{T}^1} \log \left( e^{-2\pi i n \theta} \partial_z f_\theta(u(\theta)) \right) d\theta = \kappa + 2\pi i \beta$$

Nous allons distinguer quelques cas : Si  $A(\theta) = \kappa e^{2\pi i n \theta} e^{2\pi i \beta}$  nous disons que  $F$  est *fortement linéarisable*. Si  $|A(\theta)| = \kappa$  pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$  ( $B_\delta$  dans le cas analytique) nous disons que  $F$  est *linéarisable en module*. Dans les autres cas nous disons que  $F$  est *faiblement linéarisable*.

**Remarque 1** *Quand  $F$  est linéarisable et  $|A(\theta)| \leq 1$  pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$  ( $B_\delta$  dans le cas analytique) on peut assurer l'existence d'un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant la courbe, dont les fibres sont biholomorphes au disque  $\mathbb{D}$ , et  $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ , donc un tube ouvert invariant. Ceci n'est pas nécessairement le cas quand on a seulement une linéarisation faible et  $\kappa = 1$ , car on pourrait avoir des sommes de Birkhoff qui ne sont pas bornées supérieurement.*

La première partie de cette thèse est composée par les chapitres 1 et 2. Le premier est un petit chapitre de préliminaires où nous définissons de façon rigoureuse les objets qui interviennent dans ce travail.

Dans le chapitre 2, nous commençons par traiter le cas facile d'une courbe invariante attractive. Appelons voisinage tubulaire un ouvert de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{C}$  contenant la courbe dont les fibres sont des disques. Nous montrons qu'une courbe invariante attractive possède un voisinage tubulaire dont les points convergent vers la courbe par itération positive. Une courbe invariante répulsive devienne une courbe attractive pour la transformation inverse  $F^{-1}$ , et on a donc le résultat correspondant dans le cas d'une courbe répulsive.

**Proposition 0.1** *Si  $\kappa(u) \neq 1$  alors  $F$  est linéarisable faiblement dans un voisinage de la courbe.*

Nous nous intéressons ensuite dans le cas indifférent au lien entre l'existence d'un voisinage tubulaire invariant et la possibilité de linéariser en module la dynamique autour de la courbe invariante. Nous montrons en fait que ces deux concepts sont équivalents en généralisant au cas fibré un résultat simple et classique du cas non fibré.

**Proposition 0.2** *Si  $\kappa(u) = 1$  et il existe un tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  qui contient la courbe alors  $F$  est linéarisable en module dans  $\mathcal{U}$  (en classe  $C^0$  et analytique).*

Nous montrons ensuite dans le cas analytique une version fibrée du Théorème de linéarisation de Siegel [Sie42]

**Théorème 3** *Soit  $F$  une dynamique holomorphe fibrée de classe analytique sur la bande  $B_\delta$  et  $u : B_\delta \rightarrow \mathbb{C}$  une courbe invariante indifférente, de degré nul et dont le nombre de rotation transversal est  $\varrho_{\text{tr}}(u) = \beta$ . Si la paire  $(\alpha, \beta)$  vérifie la condition diophantienne  $\mathbb{C}\mathbb{D}_{\geq 1}(c_0, \tau)$ , pour certains  $c_0 > 0, \tau \geq 0$ , alors il existe un tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  qui contient la courbe  $u$  où la dynamique de  $F$  est fortement linéarisable.*

La preuve de ce théorème est une adaptation d'une preuve classique due à Moser du Théorème de linéarisation de Siegel (voir [KH95]). Soit  $c_0 > 0$  et  $\tau \geq 0$ , la condition arithmétique  $\mathbb{C}\mathbb{D}_{\geq 1}(c_0, \tau)$  est définie par

$$\mathbb{C}\mathbb{D}_{\geq 1}(c_0, \tau) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \|n\alpha + j\beta\| \geq \frac{c_0}{(j + |n|)^{2+\tau}} \forall (n, j) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \right\}$$

Nous finissons l'étude locale de la dynamique autour d'une courbe invariante en prouvant une version fibrée du Théorème des hérissos de Pérez-Marco :

**Théorème 4 (des Hérissons fibrés)** *Soit  $F$  une dhf avec une courbe invariante  $u$  indifférente. Soit  $\mathcal{U}$  un tube ouvert contenant  $u$  dont ses fibres sont des domaines de Jordan. On suppose que  $\overline{\mathcal{U}_\theta}$  dépend continument de  $\theta$  et que  $F$  et  $F^{-1}$  définissent des dhf injectives au voisinage de  $\overline{\mathcal{U}}$ . Il existe alors un ensemble compact et connexe  $K \subset \overline{\mathcal{U}}$  tel que*

- i)  $\text{graph}(u) \subset K$ .*
- ii)  $F(K) = F^{-1}(K) = K$ , c'est à dire,  $K$  est un ensemble complètement invariant par  $F$ .*
- iii)  $K \cap \partial\mathcal{U} \neq \emptyset$ .*

La deuxième partie contient les résultats majeurs de cette thèse. Elle est composée par les chapitres 3, 4 et 5. Le chapitre 3 est consacré dans un premier temps à bien poser le problème de la persistance de la courbe invariante pour des perturbations fibrées de la dynamique. Même si dans la littérature il existe des outils très puissants pour aborder la persistance de variétés *normalement hyperboliques* (voir [HPS77]), nous proposons une démonstration élémentaire de la persistance d'une courbe non indifférente qui repose sur le résultat suivant :

*Si  $F$  est une dhf qui vérifie une hypothèse de contraction en un point alors il existe une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  continue et invariante. En plus, cette courbe invariante est attractive et attire tout l'ensemble  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$  dans le futur.*

Nous terminons ce chapitre en établissant le caractère arithmétique du problème dans le cas d'une courbe indifférente. Nous présentons la nature des petits diviseurs et les équations cohomologiques qui en résultent. Le qualificatif de *problème de petits diviseurs en dimension intermédiaire* vient du fait que l'équation cohomologique qui apparaît est une équation tordue de la forme

$$\psi(\theta + \alpha) - e^{2\pi i\beta}\psi(\theta) = \phi(\theta)$$

Cette équation ne correspond pas aux équations cohomologiques classiques qui se présentent dans les problèmes de petits diviseurs 1-dimensionnels (difféomorphismes du cercle, points fixes indifférents) ou dans les problèmes  $d \geq 2$  dimensionnels (tores KAM).

Le chapitre 4 contient l'énoncé et la preuve du théorème de la persistance des courbes invariantes indifférentes dans le cas  $C^\infty$ . Nous montrons que sous une hypothèse diophantienne sur les nombres de rotation associés à la courbe, celle ci est persistante par des petites perturbations de la transformation originale en codimension 1 complexe, c'est à dire, que pour toute famille à un paramètre complexe de perturbations vérifiant une hypothèse adéquate de transversalité, il existe un élément de la famille qui possède une courbe invariante indifférente avec le même nombre de rotation transversal que la courbe originale. Nous utilisons la notation

$$f_s(\theta, z) = \rho_{0,s}(\theta) + (e^{2\pi i\beta} + \rho_{1,s}(\theta))z + \rho_s(\theta, z) \quad (1)$$

pour chaque élément d'une famille de  $dhf$  où  $s \in \mathbb{C}$  est un paramètre. La fonction  $\rho_s(\theta, \cdot)$  s'annule à l'ordre 2 en  $z = 0$  et représente donc les termes d'ordres supérieurs. L'espace  $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$  est l'espace de Banach des fonctions holomorphes du disque unité  $\mathbb{D}$  qui sont bornées. L'énoncé précis est

**Théorème 5** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie l'hypothèse  $\mathbb{CD}_1$  et pour toutes constantes  $L > 1, M > 1, T > 1$  il existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  qui dépend de  $L, M, T, (\alpha, \beta)$ , un nombre naturel  $r \geq 2$  qui dépend de la paire  $(\alpha, \beta)$  et une constante positive universelle  $C$  tels que, si une famille  $C^\infty$  à un paramètre complexe  $\{f_s\}_{s \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  de fonctions  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}^1$  vers  $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$  vérifie pour un certain  $\varepsilon$  dans  $(0, \tilde{\varepsilon}]$*

- $\|\rho_{0,s}\|_r \leq \varepsilon$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon) \subset \Sigma$
- $\|\rho_{1,s}\|_r \leq \varepsilon$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon) \subset \Sigma$
- $\left[ \int_{\mathbb{T}^1} \partial_s \rho_{1,t} \Big|_{s=0}(\theta) d\theta \right] \cdot v > L^{-1}$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$  avec  $|v| = 1$ .
- $\|\rho_s\|_r \leq M$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon) \subset \Sigma$
- $\|\partial_s^2 \rho_{1,s}\|_0 + \|\partial_s \rho_s\|_0 \leq T$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon)$

alors il existe un paramètre  $s^*$  dans le disque  $D(0, 2CL\varepsilon)$  et une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  de classe  $C^\infty$  qui est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F_{s^*}(\theta, z) = (\theta + \alpha, f_{s^*}(\theta, z))$ , de degré nul et son nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(u) = \beta$ .

Notons que nous obtenons une estimation explicite sur la taille du paramètre qui produit la courbe invariante. Nous disons qu'une paire  $(\alpha, \beta)$  vérifie la condition diophantienne  $\mathbb{CD}_1$  si  $\alpha$  vérifie une condition diophantienne et il existe  $c_0 > 0, \tau \geq 0$  tel que pour  $n \in \mathbb{Z}$  on ait

$$\|n\alpha - \beta\| \geq \frac{c_0}{|n|^{1+\tau}}$$

Le fait que la condition diophantienne  $\mathbb{CD}_1$  soit exactement la condition optimale pour résoudre l'équation cohomologique associée nous permet de montrer que ce théorème est optimal vis-à-vis de la condition arithmétique dans le cas  $C^\infty$ .

**Proposition 0.3** *Soit  $\alpha \in \mathbb{CD}$  et  $\beta$  tel que la paire  $(\alpha, \beta)$  ne satisfait pas la condition diophantienne  $\mathbb{CD}_1$ . Pour tous  $\varepsilon > 0, r$  dans  $\mathbb{N}$  il existe une fonction  $a : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  et de norme  $C^r$  plus petite que  $\varepsilon$  telle que la famille à un paramètre complexe*

$$F_t(\theta, z) = (\theta + \alpha, ta(\theta) + t\lambda z)$$

*vérifie que pour tout  $t$  dans  $\mathbb{C}$  la dynamique holomorphe fibrée  $F_t$  ne possède aucune courbe invariante de classe  $C^\infty$  avec  $\beta$  comme nombre de rotation transversal.*

La preuve du Théorème 5 est basée sur l'application d'un théorème de fonctions implicites (celui de Hamilton pour les espaces de Fréchet, voir [Ham82], [Bos86], [Féj04]), ce qui occupe presque la totalité du chapitre 4. On conclut en utilisant un argument de transversalité.

Le chapitre 5 démarre avec l'énoncé analogue du Théorème 5 dans le cas analytique, où nous utilisons la même notation que dans (1) pour les  $dhf$ .

**Théorème 6** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie la condition de Brjuno  $\mathbb{B}_1$ , pour toutes constantes positives  $L > 1, M, T$  et  $\delta$  ils existe  $\varepsilon^*(L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)) > 0$  et une constante positive  $K_R(L, M, T, \delta, (\alpha, \beta))$  tels que si pour un certain  $\varepsilon$  dans  $(0, \varepsilon^*]$  la famille analytique  $\{F_t\}_{t \in \Sigma}$  vérifie qu'il existe un disque  $D(t_0, K_R \varepsilon) \subset \Sigma$  tel que*

$$L > \left| \partial_t \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}(\theta) d\theta \Big|_{t=t_0} \right| > L^{-1}$$

et pour tout  $t$  dans  $D(t_0, K_R \varepsilon)$

$$\begin{cases} \|\rho_{0,t}\|_{B_\delta} \leq \varepsilon \\ \|\rho_{1,t}\|_{B_\delta} \leq \varepsilon \\ \|\partial_z^2 \rho_t\|_{B_\delta, \mathbb{D}} \leq M \\ \|\partial_t \partial_z \rho_t\|_{B_\delta, \mathbb{D}} + \|\partial_t^2 \rho_{1,t}\|_{B_\delta} \leq T \end{cases}$$

alors il existe un paramètre  $\bar{t}$  dans  $D(t_0, K_R \varepsilon)$  tel que  $F_{\bar{t}}$  possède une courbe invariante  $u$ , analytique sur la bande  $B_{\frac{\delta}{2}}$ , de degré nul et dont le nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(u) = \beta$ . De plus, la taille de  $u$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

La condition arithmétique de Brjuno  $\mathbb{B}_1$  est définie par

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \mid \alpha \in \mathbb{B} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log \Gamma_{\alpha, \beta}(2^n)}{2^n} < \infty \right\}$$

où  $\Gamma_{\alpha, \beta}(N) = \sup_{0 \leq |n| \leq N} \|n\alpha - \beta\|^{-1}$ . Dans ce cas la condition arithmétique qui apparaît n'est pas la condition optimale de l'équation linéarisée. Nous montrons ce théorème par la méthode KAM classique des conjugaisons successives (méthode de Newton). Ceci étant, pour obtenir la condition de Brjuno nous sommes obligés de sacrifier de façon considérable la vitesse de convergence de la méthode, qui s'avère seulement linéaire (au contraire d'une vitesse exponentielle pour les applications classiques de la méthode). La condition de Brjuno se manifeste sous la forme d'une accumulation finie de pertes de largeurs de bande. Une situation similaire se présente dans la stabilité des points fixes elliptiques pour des transformations analytiques du plan qui préservent l'aire (voir [R02]). Ce chapitre se termine par une version à paramètres du théorème précédent, qui pourrait s'avérer utile dans les applications.

Deux courts appendices complètent ce texte.





# Première partie

## Dynamique locale d'une transformation holomorphe fibrée



# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre nous allons d'abord rappeler quelques définitions classiques sur les conditions arithmétiques, nous allons introduire des conditions arithmétiques adaptées aux problèmes de ce travail et aussi nous traiterons des équations linéaires dites *cohomologiques* qui font appel aux conditions arithmétiques. Ce chapitre est complété par la définition des *dynamiques holomorphes fibrées* qui sont le sujet central de ce travail.

### 1.1 Conditions arithmétiques

Soit  $x$  un nombre réel. On pose

$$\|x\| = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - p|$$

la distance au plus proche entier (ou bien la distance à l'origine 0 dans  $\mathbb{T}^1$  mesurée sur le cercle, si nous considérons  $x$  dans  $\mathbb{T}^1$ ).

#### 1.1.1 Conditions arithmétiques sur un nombre réel

Un traitement plus complet peut se trouver dans plusieurs textes, dont [Lan66], [Cas57], [Sch80]. Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^1 \setminus \mathbb{Q}$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Nous définissons le *plus petit diviseur* de  $\alpha$  jusqu'à l'ordre  $N$  comme étant

$$\Gamma_\alpha(N) = \max_{0 < |n| \leq N} \|n\alpha\|^{-1}$$

Ces petits diviseurs peuvent être très bien décrits en termes des dénominateurs des réduites de la fraction continue de  $\alpha$ . Soient  $q_0 = 1, q_1, q_2, \dots$  ces dénominateurs. Cette séquence jouit de la propriété des meilleure approximation de l'origine par des multiples de  $\alpha$ , c'est-à-dire qu'on a

$$q_{n+1} = \min \{k > q_n \mid \|k\alpha\| < \|q_n\alpha\|\}$$

pour tout  $n \geq 1$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $q_k \leq N < q_{k+1}$ . On a donc que

$$\Gamma_\alpha(N) = \|q_k\alpha\|^{-1}$$

Soient  $c > 0$ ,  $\tau \geq 0$ . Nous définissons les conditions arithmétiques suivantes

$$\mathbb{CD}(c, \tau) = \left\{ \alpha \in \mathbb{T}^1 \setminus \mathbb{Q} \mid \forall N \geq 1 \quad \|N\alpha\| \geq \frac{c}{N^{1+\tau}} \right\}$$

$$\mathbb{CD}(\tau) = \bigcup_{c>0} \mathbb{CD}(c, \tau)$$

$$\mathbb{CD} = \bigcup_{\tau \geq 0} \mathbb{CD}(\tau)$$

$$\mathbb{B} = \left\{ \alpha \in \mathbb{T}^1 \setminus \mathbb{Q} \mid \sum_{N \geq 1} \frac{\log \Gamma_\alpha(N)}{N^2} < \infty \right\}$$

Si  $\alpha$  appartient à  $\mathbb{CD}$  on dit que  $\alpha$  vérifie une condition diophantienne. Si  $\alpha$  appartient à  $\mathbb{B}$  on dit que  $\alpha$  vérifie la condition de Brjuno (d'après A. Brjuno, voir [Bru71]). En termes de la séquence  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  des dénominateurs des réduites de  $\alpha$ , ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\alpha \in \mathbb{CD}(\tau) \iff q_{n+1} = O(q_n^{1+\tau}) \quad (1.1)$$

$$\alpha \in \mathbb{CD} \iff \log q_{n+1} = O(\log q_n) \quad (1.2)$$

$$\alpha \in \mathbb{B} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty \quad (1.3)$$

Au §8 de l'article de H.Rüssmann [Rö2], on trouve un traitement complet de la condition de Brjuno et cette équivalence. Les autres équivalences sont classiques. Ces équivalences permettent de construire des nombres (via leur fraction continue) qui rendent les inclusions suivantes des inclusions strictes

$$\mathbb{CD} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{T}^1$$

Pour tout  $\tau > 0$  l'ensemble  $\mathbb{CD}(\tau)$  est de mesure pleine au sens de Lebesgue. Les inclusions ci-dessus impliquent que les ensembles  $\mathbb{CD}$  et  $\mathbb{B}$  le sont aussi. D'autre part, les ensembles  $\mathbb{CD}(\tau)$ ,  $\mathbb{CD}$ ,  $\mathbb{B}$  peuvent s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés et d'intérieur vide, ce qui implique que ces ensembles sont petits du point de vue de la topologie (catégorie de Baire).

**Lemme 1.1 (Rüssmann [Rö2])**  $\alpha$  appartient à  $\mathbb{B}$  si et seulement si

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\log \Gamma_\alpha(2^n)}{2^n} < \infty$$

**Preuve.** Pour tout  $n \geq 2$  on a

$$\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} < \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$$

on a donc

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} < \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i^2} < \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} < \frac{1}{2^n}$$

Comme  $\Gamma_\alpha(\cdot)$  est croissante (au sens large) on a

$$\frac{1}{2} \frac{\log \Gamma_\alpha(2^n)}{2^n} \leq \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{\log \Gamma_\alpha(i)}{i^2} \leq 2 \frac{\Gamma_\alpha(2^{n+1})}{2^{n+1}}$$

ce qui nous permet de conclure ■

### 1.1.2 Conditions arithmétiques sur une paire

Soient  $\alpha, \beta$  des nombres réels. On suppose que  $\alpha$  est un nombre irrationnel. Nous disons que la paire  $(\alpha, \beta)$  est rationnelle s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $k\alpha \equiv \beta \pmod{1}$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Quand la paire  $(\alpha, \beta)$  n'est pas rationnelle, nous disons que  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}^2$  et définissons les *plus petits diviseurs* jusqu'à l'ordre  $N$  comme étant

$$\Gamma_{\alpha, \beta}(N) = \max_{0 \leq |n| \leq N} \|n\alpha - \beta\|^{-1}$$

qui représente la qualité des approximations de  $\beta$  par des multiples de  $\alpha$ . Soient  $c > 0, \tau \geq 0$ . Nous définissons les conditions arithmétiques suivantes

$$\begin{aligned} \mathbb{CD}_1(c, \tau) &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}^2 \mid \alpha \in \mathbb{CD} \text{ et } \forall N \in \mathbb{Z} \quad \|N\alpha - \beta\| \geq \frac{c}{N^{1+\tau}}\} \\ \mathbb{CD}_1(\tau) &= \bigcup_{c>0} \mathbb{CD}_1(c, \tau) \\ \mathbb{CD}_1 &= \bigcup_{\tau \geq 0} \mathbb{CD}_1(\tau) \\ \mathbb{CD}_{\geq 1}(c, \tau) &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}^2 \mid \forall N \in \mathbb{Z}, j \geq 0 \quad \|N\alpha - j\beta\| \geq \frac{c}{(|N|+j)^{2+\tau}}\} \\ \mathbb{CD}_{\geq 1}(\tau) &= \bigcup_{c>0} \mathbb{CD}_{\geq 1}(c, \tau) \\ \mathbb{CD}_{\geq 1} &= \bigcup_{\tau \geq 0} \mathbb{CD}_{\geq 1}(\tau) \\ \mathbb{B}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}^2 \mid \alpha \in \mathbb{B} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{\log \Gamma_{\alpha, \beta}(n)}{n^2} < \infty\} \end{aligned}$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{CD}$ . Nous définissons la condition arithmétique  $\mathbb{CD}_1^\alpha(c, \tau)$  comme étant l'ensemble de tous les  $\beta$  dans  $\mathbb{T}^1$  tels que la paire  $(\alpha, \beta)$  appartient à  $\mathbb{CD}_1(c, \tau)$ . De façon analogue nous définissons  $\mathbb{CD}_1^\alpha(\tau), \mathbb{CD}_1^\alpha$ , etc., et  $\mathbb{B}_1^\alpha$  lorsque  $\alpha \in \mathbb{B}$ .

**Lemme 1.2** *Pour tout  $\tau > 0$  l'ensemble  $\mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$  est de mesure pleine.*

**Preuve.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous allons montrer que le complémentaire  $\mathbb{T}^1 \setminus \mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$  peut être couvert par des intervalles dont la somme des longueurs est au plus  $\varepsilon$ . Soit  $\beta \notin \mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$ . Il existe alors une suite infinie  $\{n_i\}_{i \geq 0}$  de nombres entiers tels qu'on ait

$$\|n_i \alpha - \beta\| < \frac{1}{|n_i|^{1+\tau}}$$

ce qui implique que

$$\beta \in \left( n_i \alpha - \frac{1}{|n_i|^{1+\tau}}, n_i \alpha + \frac{1}{|n_i|^{1+\tau}} \right) \subset \mathbb{T}^1$$

ou dit autrement, si pour  $n \in \mathbb{Z}$  nous notons les intervalles

$$I_n = \left( n\alpha - \frac{1}{|n|^{1+\tau}}, n\alpha + \frac{1}{|n|^{1+\tau}} \right)$$

, pour tout  $N \geq 0$  l'ensemble  $\mathbb{T}^1 \setminus \mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$  est couvert par l'union  $\cup_{|n|>N} I_n$ . On choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{n>N} \frac{2}{n^{1+\tau}} < \frac{\varepsilon}{2}$  et la preuve suit ■

**Lemme 1.3** *L'ensemble  $\mathbb{CD}_1^\alpha(c, \tau)$  est un fermé d'intérieur vide.*

**Preuve.** Immédiate car son complémentaire est l'union  $\cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$  des intervalles  $I_n = \left( n\alpha - \frac{c}{|n|^{1+\tau}}, n\alpha + \frac{c}{|n|^{1+\tau}} \right)$  ■

Les ensembles  $\mathbb{CD}_1^\alpha(\tau), \mathbb{CD}_1^\alpha$  s'écrivent comme réunions dénombrables d'ensembles du type  $\mathbb{CD}_1^\alpha(c, \tau)$ , et donc ils sont petits au sens topologique, en particulier leur complémentaire est dense dans le cercle. On peut dire des choses analogues pour les autres conditions diophantiennes que nous venons de définir ci-dessus. Soient  $M > 0, N \in \mathbb{N}$ . Posons

$$\mathbb{B}_1^\alpha|_N^M = \left\{ \beta \in \mathbb{T}^1 \setminus \{n\alpha\}_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n=1}^N \frac{\log \Gamma_{\alpha, \beta}(n)}{n^2} \leq M \right\}$$

Ces ensembles sont fermés et leur intersection  $\cap_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_1^\alpha|_N^M$  est donc un fermé d'intérieur vide. On a que

$$\mathbb{B}_1^\alpha = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \left\{ \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_1^\alpha|_N^M \right\}$$

et donc  $\mathbb{B}_1^\alpha$  est un ensemble maigre au sens de Baire. L'ensemble  $\mathbb{B}_1^\alpha$  est de mesure pleine d'après l'inclusion

$$\mathbb{CD}_1^\alpha \subset \mathbb{B}_1^\alpha \tag{1.4}$$

qui a un sens même quand  $\alpha$  n'appartient pas à  $\mathbb{CD}$  mais seulement à  $\mathbb{B}$ . On peut montrer aussi que cette dernière inclusion est stricte.

**Lemme 1.4** *La paire  $(\alpha, \beta)$  appartient à  $\mathbb{B}_1$  si et seulement si*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\log \Gamma_{\alpha, \beta}(2^n)}{2^n} < \infty$$

**Preuve.** Analogue à la preuve du Lemme 1.1 ■

## 1.2 Équations cohomologiques

Dans cette section nous allons rappeler des faits bien connus sur l'équation cohomologique, nous renvoyons le lecteur aux textes [Her79], [KH95], [KR01] pour un traitement plus complet.

Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Soit  $\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue de moyenne  $\int_{\mathbb{T}^1} \phi(\theta) d\theta$  nulle pour la mesure de Lebesgue  $d\theta$  du cercle. Nous cherchons une solution continue  $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  à l'équation *cohomologique classique*

$$\psi(\theta + \alpha) - \psi(\theta) = \phi(\theta) \quad (1.5)$$

Notons que la condition sur la moyenne de  $\phi$  est nécessaire. Une éventuelle solution ne sera pas unique, puisque en ajoutant une constante nous obtenons d'autres solutions. Cependant, deux solutions à cette équation diffèrent seulement d'une constante. L'un des principaux outils pour traiter cette équation est le

**Théorème 1.5 (Gottschalk-Hedlund)** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace métrique compact,  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une transformation continue et minimale. Soit  $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que les sommes de Birkhoff vérifient*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^n g \circ f^i(x_0) \right| < \infty$$

*pour un certain  $x_0 \in \mathcal{X}$ . Il existe alors une solution continue  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  à l'équation*

$$h \circ f - h = g$$

Ainsi, l'équation (1.5) peut se résoudre pour les fonctions  $\phi$  qui vérifient la condition sur les sommes de Birkhoff sur un point. Il se présente notamment deux difficultés. D'abord, la condition sur les sommes de Birkhoff n'est pas toujours facile à vérifier, et de plus, le Théorème ci-dessus ne nous fournit pas des informations sur la taille de la solution  $\psi$  par rapport à la taille de  $\phi$ , ce qui sera demandé souvent lors des processus itératifs de la méthode de Newton. Cependant, si on ajoute quelques hypothèses de régularité sur le membre du côté droite de l'équation (1.5) et sur le nombre  $\alpha$  nous pouvons obtenir des résultats adéquats.

Supposons que  $\phi$  est de classe  $C^\infty$ , sa série de Fourier

$$\mathcal{F}(\phi)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{\phi}(n) e^{2\pi i n \theta} \quad , \quad \hat{\phi}(n) = \int_{\mathbb{T}^1} \phi(\theta) e^{-2\pi i n \theta} d\theta$$

coïncide avec  $\phi$  (on a convergence uniforme de toutes les dérivées). Soit  $\psi$  une solution de classe  $C^\infty$  à l'équation (1.5). On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi \circ R_\alpha - \psi) &= \mathcal{F}(\phi) \\ \hat{\psi}(n)(e^{2\pi i n \alpha} - 1) &= \hat{\phi}(n) \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Ceci nous suggère (et oblige) à définir une solution par la formule

$$\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{\phi}(n)}{e^{2\pi i n \alpha} - 1} e^{2\pi i n \theta} \quad (1.6)$$

Notons que la valeur de la moyenne  $\int_{\mathbb{T}^1} \psi(\theta) d\theta$  n'est pas fixée à priori et nous choisissons la normalisation  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Même si  $\phi$  est de classe  $C^\infty$ , et donc ses coefficients de Fourier décroissent convenablement, la présence du facteur  $(e^{2\pi i n \alpha} - 1)^{-1}$ , qui peut devenir très grand si  $n\alpha$  s'approche d'un entier, peut faire que cette série ne corresponde pas à celle d'une fonction de classe  $C^\infty$ . Plus précisément on a l'inégalité

$$4\|n\alpha\| \leq |e^{2\pi i n \alpha} - 1| \leq 2\pi\|n\alpha\| \quad (1.7)$$

On voit ainsi que les conditions arithmétiques de  $\alpha$  apparaissent dans la discussion.

**Proposition 1.6** *Si  $\alpha \in \mathbb{C}\mathbb{D}$  et  $\phi$  est de classe  $C^\infty$  alors la série (1.6) définit une solution de classe  $C^\infty$  à l'équation (1.5). Si  $\alpha \notin \mathbb{C}\mathbb{D}$  alors il existe  $\phi$  de classe  $C^\infty$  telle que la série (1.6) n'est même pas une distribution.*

**Proposition 1.7** *Si  $\alpha \in \mathbb{B}$  et  $\phi$  est analytique sur une bande  $B_\delta$  alors la série (1.6) définit une solution à l'équation (1.5) analytique sur la bande  $B_\delta$ . Ceci étant la condition  $\alpha \in \mathbb{B}$  n'est pas optimale au sens de la proposition précédente.*

**Remarque 2** *Dans le cas analytique, la bande  $B_\delta$  peut se décomposer en l'union des cercles*

$$\mathbb{T}_s^1 = \{\theta \in B_\delta \mid \text{Im}(\theta) = s\}$$

pour  $s \in (-\delta, \delta)$ . La moyenne de  $\phi$  calculée sur chaque cercle  $\mathbb{T}_s^1$  doit être nulle. Par homotopie cette intégrale est constante sur chaque cercle, alors il suffit de la calculer sur n'importe lequel de ces cercles. D'autre part, supposons que la moyenne de  $\phi$  ne s'annule pas. Pour chaque  $s \in (-\delta, \delta)$  il existe un nombre complexe  $m_s$  tel que l'équation

$$\psi(\theta + \alpha) - \psi(\theta) = \phi - m_s$$

peut se résoudre. Par homotopie le nombre  $m_s$  est indépendant de  $s$ .

**Équation cohomologique tordue** Supposons  $\alpha$  irrationnel. Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Soit  $\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Nous considérons l'équation *cohomologique tordue elliptiquement*

$$\psi(\theta + \alpha) - e^{2\pi i \beta} \psi(\theta) = \phi(\theta) \quad (1.8)$$

En appliquant la méthode des séries de Fourier nous obtenons la série

$$\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{\phi}(n)}{e^{2\pi i n \alpha} - e^{2\pi i n \beta}} e^{2\pi i n \theta} \quad (1.9)$$



Nous voyons que cette fois les petits diviseurs qui apparaissent sont de la forme  $\|n\alpha - \beta\|$ , et ainsi les conditions arithmétiques sur la paire  $(\alpha, \beta)$  entrent dans la discussion. Notons cependant que si la paire  $(\alpha, \beta)$  n'est pas rationnelle, la série (1.9) définit tous les coefficients de Fourier de la solution (ce qui ne se passait pas dans le cas de l'équation cohomologique classique pour le coefficient d'ordre 0).

**Proposition 1.8** *Si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}\mathbb{D}_1$  et  $\phi$  est de classe  $C^\infty$  alors la série (1.9) définit une solution de classe  $C^\infty$  à l'équation (1.8). Si  $\beta \notin \mathbb{C}\mathbb{D}_1^\alpha$  alors il existe  $\phi$  de classe  $C^\infty$  telle que la série (1.9) n'est même pas une distribution. De plus, étant donné  $\varepsilon > 0, r \in \mathbb{N}$  on peut choisir  $\phi$  de façon que sa taille  $C^r$  soit plus petite que  $\varepsilon$ .*

**Proposition 1.9** *Si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{B}_1$  et  $\phi$  est analytique sur une bande  $B_\delta$  alors la série (1.9) définit une solution à l'équation (1.8) analytique sur la bande  $B_\delta$ . Ceci étant la condition  $\alpha \in \mathbb{B}_1$  n'est pas optimale au sens de la proposition précédente.*

**Remarque 3** *Parfois dans ce travail nous rencontrerons des équations cohomologiques semblables à celles que nous venons de voir, mais dont le membre de droite est un polynôme trigonométrique. Ceci simplifie les choses car dans ce cas la série donnant la solution devient elle-même un polynôme trigonométrique.*

## 1.3 Dynamiques holomorphes fibrées

Dans ce travail nous allons considérer des transformations continues de la forme

$$\begin{aligned} F : \mathbb{T}^1 \times U &\longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto (\theta + \alpha, f_\theta(z)) \end{aligned}$$

où  $U \subset (\mathbb{C}, 0)$  est un voisinage de l'origine dans le plan complexe,  $f_\theta : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe injective (univalente) pour chaque paramètre  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et  $\alpha$  est un nombre irrationnel. Nous appelons à une telle transformation  $F$  une *dynamique holomorphe fibrée au dessus du cercle* et la notons désormais par  $dhf$ . Une dépendance plus différentiable en la variable  $\theta$  des fonctions  $f_\theta$  sera souvent utilisée. Ces transformations sont un cas particulier des dynamiques du type *produits croisés (skew product)* et nous allons adopter la notation usuelle pour la deuxième composante de la transformation et pour ces itérés

$$\begin{aligned} \Pi_2 F(\theta, z) &= f(\theta, z) = f_\theta(z) \\ \Pi_2(F^n(\theta, z)) &= f^n(\theta, z) = f_\theta^n(z) \end{aligned}$$

Nous décrivons quelles sont exactement les types de régularité qu'on traitera dans ce travail.

**La classe  $C^0$ .** Formée par des  $dhf$  sans d'autres hypothèses de régularité que celles ci-dessus.

**La classe  $C^\infty$ .** Nous disons qu'une *dhf*  $F$  est de classe  $C^\infty$  si la fonction  $f$  associée est de classe  $C^\infty$  à deux variables. On désignera les problèmes et résultats de cette classe par le cas  $C^\infty$ .

**La classe analytique.** Soit  $\delta$  un nombre réel positif. Nous disons qu'une *dhf*  $F$  est analytique sur la bande

$$B_\delta = \{\theta \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \mid |\operatorname{Im}(\theta)| < \delta\}$$

si la fonction  $f : B_\delta \times U \rightarrow \mathbb{C}$  associée est une fonction holomorphe à deux variables. On désignera les problèmes et résultats de cette classe par le cas *analytique*.

**Remarque 4** *On pourrait considérer des dynamiques holomorphes fibrées où la transformation sur la base est un homeomorphisme minimal du cercle préservant l'orientation (un difféomorphisme  $C^\infty$  (analytique) dans le cas  $C^\infty$  (analytique)). Mais cette plus grande généralité n'est qu'apparente car une conjugaison sur la base (sous l'hypothèse arithmétique appropriée dans le cas  $C^\infty$  ou analytique) nous ramène au cas considéré. En effet soit  $r$  un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation, et soit  $h$  la linéarisation donnée par les Théorèmes de Herman ou Yoccoz selon le cas ( $C^\infty$ ,  $C^\omega$ , voir [Her79], [Yoc84], [Yoc02]). Le changement de coordonnées donné par  $H(\theta, z) = (h(\theta), z)$  nous ramène donc au cas  $r(\theta) = \theta + \alpha$ .*

### 1.3.1 Courbes invariantes

La notion de point fixe ou de point périodique pour une transformation fibrée au dessus d'une rotation minimale n'a aucun sens (car  $\alpha$  est un nombre irrationnel). L'extension naturelle de ce concept dans notre cadre est celle d'une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  invariante, c'est à dire une courbe *continue* qui satisfait l'équation

$$F(\theta, u(\theta)) = (\theta + \alpha, u(\theta + \alpha)) \quad (1.10)$$

Dans ce travail nous allons nous intéresser aux courbes invariantes de la même classe de différentiabilité que la transformation considérée. Nous verrons que jusque à un certain point cette notion généralise celle de point fixe pour le cas non fibré. Pour commencer, nous allons définir 3 données associées à une courbe invariante  $u$  :

**Le multiplicateur d'une courbe invariante.** Nous considérons le nombre réel positif suivant

$$\kappa(u) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}^1} \log |\partial_z f_\theta(u(\theta))| d\theta\right)$$

que nous allons appeler *multiplicateur moyen* de la courbe. Rappelons que nous supposons  $F$  injective et que  $\partial_z f_\theta$  ne s'annule donc pas.

Quand le multiplicateur  $\kappa(u)$  est plus petit que 1 nous disons qu'il s'agit d'une courbe invariante *attractive*. Quand  $\kappa(u)$  est plus grand que 1 nous disons qu'il s'agit d'une courbe invariante *répulsive*. Dans les deux cas la dénomination sera bien justifiée par des résultats dynamiques (voir sections 2.1.1, 2.1.2). Nous désignons le cas  $\kappa(u) = 1$  comme une courbe invariante *indifférente*.

**Le degré d'une courbe invariante.** Soit  $g : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  une fonction continue. Nous disons que  $g$  est de degré  $\deg(g) = n$  dans  $\mathbb{Z}$  si l'image paramétrée  $g(\mathbb{T}^1)$  fait  $n$  tours autour de l'origine du plan complexe (comptés algébriquement). Par exemple, pour  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , la fonction continue  $e_n : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  définie par

$$e_n(\theta) = e^{2\pi i n \theta}$$

est de degré  $\deg(e_n) = n$ . La proposition élémentaire suivante (voir [Lim81]) sert à calculer le degré d'une fonction continue

**Proposition 1.10** *Soient  $g, \tilde{g} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  des fonctions continues, alors*

- i) *Si  $g$  et  $\tilde{g}$  sont homotopes via une homotopie qui ne passe pas par zéro alors  $\deg(g) = \deg(\tilde{g})$ .*
- ii) *Si  $\tilde{g}$  est de classe  $C^1$ , le degré de  $\tilde{g}$  peut se calculer par la formule*

$$\deg(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\tilde{g}'}{\tilde{g}}$$

- iii) *L'application  $\deg$  est un homomorphisme, c'est à dire*

$$\deg(g\tilde{g}) = \deg(g) + \deg(\tilde{g})$$

*ainsi en particulier la fonction  $e_{-n}g$  est de degré nul lorsque  $\deg(g) = n$ .*

- iv) *Quand  $\deg(g) = 0$  nous pouvons définir de façon continue la fonction  $\log g : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ .*

Nous définissons le degré  $\deg(u)$  d'une courbe invariante comme étant le degré de la fonction  $\partial_z f_\theta(u(\theta))$ .

**Le nombre de rotation transversal.** Soit  $n = \deg(u)$  comme défini ci-dessus. Nous définissons le nombre réel  $\varrho_{tr}(u)$  dans  $\mathbb{T}^1$  à l'aide de l'égalité

$$\int_{\mathbb{T}^1} \log \left( e_{-n}(\theta) \partial_z f_\theta(u(\theta)) \right) d\theta = \log \kappa(u) + 2\pi i \varrho_{tr}(u) \quad (1.11)$$

Les théorèmes principaux de ce travail portent sur des courbes invariantes indifférentes de degré nul. Dans ce cas nous pouvons donner une interprétation dynamique au nombre  $\varrho_{tr}(u)$  comme étant la vitesse moyenne de rotation autour de la courbe, puisqu'on a alors

$$\varrho_{tr}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \log \partial_z f_\theta(u(\theta)) d\theta$$

Nous appelons dans ce cas  $\varrho_{tr}(u)$  le *nombre de rotation transversal* de la courbe.

Par exemple la  $dhf$  donné par  $F(\theta, z) = (\theta + \alpha, e^{2\pi i \beta} z)$  avec  $\beta$  un nombre réel dans l'intervall  $[0, 1)$ , est la plus simple mais pas la moins intéressante. La courbe  $u = \{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  est continue, invariante, de degré nul, indifférente et  $\varrho_{tr}(u) = \beta$ .

### Invariance des données de la courbe par conjugaison fibrée

Soit  $H(\theta, z) = (\theta, h(\theta, z))$  une transformation continue où  $h(\theta, \cdot)$  est une fonction holomorphe injective (univalente) de façon à que  $H$  soit un changement de coordonnées dans un voisinage de la courbe invariante. Soit  $\tilde{u}(\theta) = h^{-1}(\theta, u(\theta))$  la courbe invariante associée à la  $dhf$   $\tilde{F} = H^{-1} \circ F \circ H$ . On a que

$$\begin{aligned} \partial_z \tilde{f}_\theta(\tilde{u}(\theta)) &= \partial_z h_{\theta+\alpha}^{-1} \left( f_\theta(h_\theta(\tilde{u}(\theta))) \right) \partial_z f_\theta(h_\theta(\tilde{u}(\theta))) \left( \partial_z h_\theta(\tilde{u}(\theta)) \right) \\ &= \left( \partial_z h_{\theta+\alpha}(\tilde{u}(\theta + \alpha)) \right)^{-1} \partial_z f_\theta(u(\theta)) \left( \partial_z h_\theta(\tilde{u}(\theta)) \right) \end{aligned}$$

Soit  $m = \deg(\partial_z h_\theta(\tilde{u}(\theta)))$ . Le degré de la courbe invariante  $\tilde{u}$  est

$$\deg(\tilde{u}) = -m + n + m = n$$

puisque  $\deg$  est un homomorphisme. Donc le degré de la courbe invariante est invariant par conjugaison fibrée. On peut calculer

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^1} \log \left( e_{-n}(\theta) \partial_z \tilde{f}_\theta(\tilde{u}(\theta)) \right) d\theta &= \int_{\mathbb{T}^1} \log \left( e_{-n}(\theta) \partial_z f_\theta(u(\theta)) \right) d\theta + \\ &+ \int_{\mathbb{T}^1} \log \frac{\partial_z h_\theta(\tilde{u}(\theta))}{\partial_z h_{\theta+\alpha}(\tilde{u}(\theta + \alpha))} d\theta \\ &= \log \kappa(u) + 2\pi i \varrho_{tr}(u) + \\ &+ \int_{\mathbb{T}^1} \log \frac{e_{-m}(\theta) \partial_z h_\theta(\tilde{u}(\theta))}{e_{-m}(\theta + \alpha) \partial_z h_{\theta+\alpha}(\tilde{u}(\theta + \alpha))} d\theta + \\ &+ \int_{\mathbb{T}^1} \log e_m(\theta) e_{-m}(\theta + \alpha) d\theta \\ &= \log \kappa(u) + 2\pi i (\varrho_{tr}(u) - m\alpha) \end{aligned}$$

La ligne ci-dessus nous permet de dire que le multiplicateur  $\kappa(\tilde{u})$  est égal à  $\kappa(u)$  et donc est invariant par conjugaison fibrée. On voit que via une conjugaison fibrée de la forme  $H(\theta, z) = (\theta, e_m(\theta)z)$  le nombre  $\varrho_{tr}(u)$  change par  $-m\alpha$ . Quand le degré  $\deg(u) = 0$  nous allons permettre seulement des changements de coordonnées de degré nul. Dans ce cas on voit que le nombre de rotation transversal  $\varrho_{tr}(u)$  est bien défini.

**Remarque 5** *Dans le cas analytique, supposons que la courbe invariante  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique. Elle possède donc une extension holomorphe (encore notée par  $u$ ) à valeurs dans  $U$  sur une bande  $B_{\delta'}$ , pour un certain  $0 < \delta' \leq \delta$ . Par continuation analytique de l'équation de la courbe invariante (1.10) on a que pour chaque  $s$  dans  $(-\delta', \delta')$  la restriction de  $u$  au cercle*

$$\mathbb{T}_s^1 = \{\theta \in B_\delta \mid \text{Im}(\theta) = s\}$$

*est une courbe invariante. Le degré de cette courbe est indépendant de  $s$  (par homotopie), de même que le multiplicateur et le nombre  $\varrho_{tr}(u)$ , par la formule de Cauchy, car les cercles sur lesquels on intègre la formule (1.11) sont homotopes.*

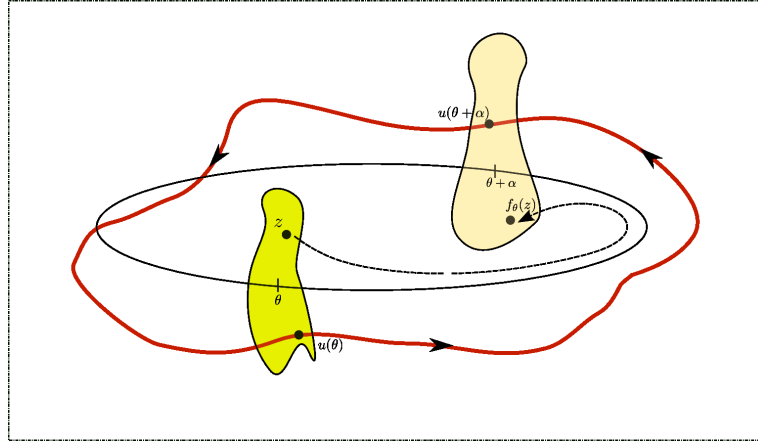


FIG. 1.1 –

### 1.3.2 Formes Normales

Nous disons qu'une  $dhf$   $F$  peut s'écrire sous *forme normale* s'il existe un changement de coordonnées de la même classe de différentiabilité que  $F$ ,  $H(\theta, z) = (\theta, h_\theta(z))$  défini dans un voisinage de la section nulle  $\{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  avec  $h_\theta$  une fonction holomorphe pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ , de façon que la conjugaison  $H^{-1} \circ F \circ H$  s'écrive sous la forme

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, Ae_n(\theta)z + \rho(\theta, z))$$

pour un certain  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , un certain nombre complexe non nul  $A$  et une fonction  $\rho$  dans la même classe de différentiabilité que  $F$ . Nous demandons que  $\rho$  représente les termes d'ordre supérieur, donc  $\rho(\theta, \cdot)$  doit être une fonction holomorphe dans un disque autour de l'origine et qui s'annule jusqu'à l'ordre 2 en  $z = 0$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Dans ce cas  $F$  possède une courbe invariante  $u_0 = H(\{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1})$  dont le multiplicateur est  $\kappa(u_0) = |A|$  et le degré est  $\deg(u_0) = n$ . Quand le module  $|A| = 1$ ,  $A$  s'écrit sous la forme  $A = e^{2\pi i \beta}$  avec un nombre réel  $\beta$  dans  $[0, 1)$ . Si  $n = 0$  et  $\deg(\partial_z h_\theta(0)) = 0$  le nombre de rotation transversal de la courbe est  $\varrho_{tr}(u_0) = \beta$ .

Inversement, soit  $F$  une dynamique holomorphe fibrée avec une courbe invariante  $\{u_0(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  dans la même classe de différentiabilité que  $F$  et de degré  $\deg(u_0) = n$ . Si nous pouvons résoudre l'équation cohomologique

$$\frac{u_1(\theta + \alpha)}{u_1(\theta)} = A^{-1} e^{-n}(\theta) \partial_z f_\theta(u_0(\theta)) \quad (1.12)$$

pour un certain nombre complexe non nul  $A$ , avec  $u_1$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , qui ne s'annule pas et dans la même classe de différentiabilité que  $F$ , alors en faisant le changement de coordonnées

$$H(\theta, z) = (\theta, u_0(\theta) + u_1(\theta)z)$$

nous obtiendrons une forme normale  $N_F$  pour  $F$ . Dans le cas particulier d'une courbe invariante  $u_0$  indifférente, de degré nul et nombre de rotation transversal  $\varrho_{tr}(u_0) = \beta$ , si on

peut résoudre l'équation cohomologique

$$\frac{u_1(\theta + \alpha)}{u_1(\theta)} e^{2\pi i \beta} = \partial_z f_\theta(u_0(\theta)) \quad (1.13)$$

avec  $u_1$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , qui ne s'annule pas, de degré nul et dans la même classe de différentiabilité que  $F$ , alors en faisant le même changement de coordonnées  $H$  ci-dessus nous obtiendrons pour  $F$  la forme normale

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, e^{2\pi i \beta} z + \rho(\theta, z))$$

Bien entendu, l'ouvert  $U_{N_F}$  où est définie cette forme normale n'est pas le même que l'ouvert  $U$  où est définie  $F$ ; dans le cas analytique la bande de définition peut aussi être différente pour la forme normale. On note que les équations (1.12), (1.13) peuvent être résolues sous hypothèse de différentiabilité soit  $C^\infty$  soit analytique, en supposant simplement les bonnes hypothèses arithmétiques sur le nombre  $\alpha$ . Lors du cas seulement continue, dans certaines situations ces équations seront résolues à l'aide du Théorème de Gottschalk-Hedlund (voir section 1.2).

La discussion précédente nous permet donc de dire que la dynamique holomorphe fibrée autour d'une courbe invariante peut être vue, à la résolution d'une équation cohomologique près, comme une dynamique fibrée par des germes holomorphes qui fixent l'origine, avec un multiplicateur bien précis, au dessus d'une rotation irrationnelle du cercle.

# Chapitre 2

## Stabilité autour d'une courbe invariante

Pour fixer les idées nous allons supposer dans ce chapitre que nos  $dhf$  sont continues et définies sur un voisinage du produit  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$ , où  $\mathbb{D}$  représente le disque unité ouvert du plan complexe.

Nous allons commencer par quelques résultats très simples. Soit  $F$  une  $dhf$  et soit  $L$  l'ensemble de tous les points de  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$  qui ne sortent pas de  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$  dans le futur, c'est à dire, l'ensemble

$$L = \bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}})$$

qui est un ensemble compact. Pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  nous notons  $L_\theta$  la fibre de l'ensemble  $L$  au-dessus de  $\theta$ , c'est à dire

$$L_\theta = \Pi_2((\{\theta\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cap L)$$

D'après la définition de l'ensemble  $L$  il suit que  $F(L) \subset L$ , d'où on conclut que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  on a

$$f_\theta(L_\theta) \subset L_{\theta+\alpha}$$

**Lemme 2.1** *Si  $L \neq \emptyset$  alors  $L_\theta \neq \emptyset$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ .*

**Preuve.** La projection  $\Pi_1 L$  de  $L$  sur le cercle  $\mathbb{T}^1$  est compacte et invariante par la rotation irrationnelle  $R_\alpha$  qui est minimale ce qui implique que  $\Pi_1 L = \mathbb{T}^1$  ■

Par la suite nous allons supposer que  $L$  n'est pas vide. On dit qu'un ensemble compact  $K$  de  $\mathbb{C}$  est *plein* si son complémentaire dans la sphère de Riemann est connexe.

**Lemme 2.2** *Pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  les composantes connexes de l'ensemble  $L_\theta$  sont des compacts pleins.*

**Preuve.** Sinon, il existe  $\tilde{\theta}$  dans  $\mathbb{T}^1$  et un point  $\tilde{z}$  qui appartient à une composante connexe bornée du complémentaire de  $L_{\tilde{\theta}}$ . Pour tout  $n \geq 0$  il existe alors une courbe  $\gamma_n$  entourant  $\tilde{z}$  telle que les images de  $\{\tilde{\theta}\} \times \gamma_n$  par  $F^j$ ,  $j \leq n$ , soient contenues dans  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$ . Par le principe du maximum, les images de  $(\tilde{\theta}, \tilde{z})$  par  $F^j$ ,  $j \leq n$  sont aussi contenues dans  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$ . Comme ceci est vrai pour tout  $n$ , on a que  $z$  appartient à  $L_{\tilde{\theta}}$ , une contradiction ■

## 2.1 Courbes stables, tubes invariants

Dans le cas non fibré l'existence d'un ouvert invariant autour du point fixe assure la linéarisation du germe considéré. Dans le cas des  $dhf$ , l'existence d'un certain type d'ouvert autour de la courbe invariante sera ce qui nous fournira une information très précieuse sur le comportement de la dynamique de  $F$  autour de cette courbe.

On dit que la  $dhf$   $F$  possède un *tube ouvert invariant* s'il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}$  qui vérifie

i)  $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$

ii) La fibre  $\mathcal{U}_\theta$  au-dessus du point  $\theta$  est un disque topologique (biholomorphe au disque  $\mathbb{D}$  d'après le Théorème d'uniformisation de Riemann) pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ .

Nous disons que une courbe invariante  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  est une *courbe stable* s'il existe un tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  qui la contient, c'est-à-dire, que  $u(\theta) \in \mathcal{U}_\theta$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . On associe à un tel ouvert  $\mathcal{U}$  une famille de fonctions uniformisantes  $\{h_\theta\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  vérifiant que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  la fonction  $h_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{U}_\theta$  est un biholomorphisme, avec  $h_\theta(0) = u(\theta)$  et  $h'_\theta(0)$  est un nombre réel positif. Ce choix est toujours possible (et unique d'ailleurs) car les uniformisations sont définies à une transformation de Möbius près. Avant de continuer, nous voulons rappeler un concept qui nous sera utile

**Le rayon conforme.** Soit  $\Omega$  une région simplement connexe bornée du plan complexe (un disque topologique, ou dorénavant *région*) qui contient l'origine et soit  $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  le biholomorphisme vérifiant  $h(0) = 0$  et  $h'(0) > 0$ . Le nombre réel positif  $h'(0)$  est appelé le *rayon conforme de  $\Omega$*  et sera noté par  $R(\Omega)$ .

**Lemme 2.3** Soient  $\Omega', \Omega$  deux régions qui contiennent l'origine telles que  $\Omega' \subset \Omega$ . Alors

$$R(\Omega') \leq R(\Omega) \quad (2.1)$$

et on a l'égalité si et seulement si  $\Omega' = \Omega$ .

**Preuve.** Soient  $h_\Omega, h_{\Omega'}$  les uniformisations de  $\Omega$  et  $\Omega'$  vérifiant que  $h_\Omega(0) = h_{\Omega'}(0) = 0$  et  $h'_\Omega(0) > 0, h'_{\Omega'}(0) > 0$ . La composition  $H = h_\Omega^{-1} \circ h_{\Omega'} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  vérifie  $H(0) = 0$  et  $H'(0) = h'_\Omega(0)^{-1} h'_{\Omega'}(0)$ . Le Lemme de Schwartz assure que  $H'(0) \leq 1$  avec l'égalité si et seulement si  $H$  est un automorphisme du disque ce qui implique directement le lemme ■

Si  $\Omega$  ne contient pas l'origine, nous pouvons marquer un point dans  $\Omega$  et calculer son rayon conforme par rapport à ce point. La proposition précédente reste vraie en considérant des régions centrées dans ce point marqué.

En revenant à la discussion de la dynamique holomorphe fibrée avec un tube invariant  $\mathcal{U}$  et une courbe invariante  $u$  dans son intérieur, le fait que le graphe  $\{(\theta, u(\theta))\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  soit un ensemble compact et que  $\mathcal{U}$  soit un ouvert borné, nous permettent de dire qu'il existe un rayon positif et fini  $R_{in}$  tel que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  on a  $D(u(\theta), R_{in}) \subset \mathcal{U}_\theta \subset \mathbb{D}$ . Ceci implique

**Lemme 2.4** Il existe une constante  $W > 1$  tel que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  le rayon conforme  $R(\mathcal{U}_\theta)$  de  $\mathcal{U}_\theta$  calculé par rapport à  $u(\theta)$  vérifie  $W^{-1} < R(\mathcal{U}_\theta) < W$ .



Nous définissons les sommes de Birkhoff de  $u$  au point  $\theta$ , et les notons  $S_u^n(\theta)$ , par

$$S_u^n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \log |\partial_z f_{\theta+i\alpha}(u(\theta+i\alpha))|$$

**Lemme 2.5** *Il existe une constante  $B_+ > 0$  telle que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et pour tout  $n \geq 0$  la somme de Birkhoff  $S_u^n(\theta)$  est majorée par  $B_+$ .*

**Preuve.** Soit  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Nous définissons les fonctions  $\tilde{f}_\theta^n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  par

$$\tilde{f}_\theta^n(z) = h_{\theta+n\alpha}^{-1} \left( f_\theta^n(h_\theta(z)) \right)$$

Le Lemme de Schwartz appliqué à ces fonctions nous dit que  $|\partial_z \tilde{f}_\theta^n(0)| \leq 1$ . Ceci signifie que

$$h'_{\theta+n\alpha}(0)^{-1} \left( \prod_{i=0}^{n-1} |\partial_z f_{\theta+i\alpha}(u(\theta+i\alpha))| \right) h'_\theta(0) \leq 1$$

d'où on peut conclure directement en prenant le log des deux cotés et en appliquant le Lemme 2.4 ■

**Corollaire 2.6** *Le multiplicateur de  $u$ ,  $\kappa(u)$  est plus petit ou égal à 1.*

**Preuve.** Soit  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Comme la rotation  $R_\alpha$  est uniquement ergodique sur le cercle car  $\alpha$  est irrationnel, les moyennes  $\frac{1}{n} S_u^n(\theta)$  convergent uniformément vers  $\int_{\mathbb{T}^1} \log |\partial_z f_\theta(u(\theta))| d\theta$  quand  $n$  tend vers l'infini. Le lemme précédent nous dit alors que

$$\log \kappa(u) = \int_{\mathbb{T}^1} \log |\partial_z f_\theta(u(\theta))| d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_u^n(\theta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_+}{n} = 0 \quad \blacksquare$$

### 2.1.1 Stabilité autour d'une courbe attractive

Nous allons traiter ici le cas  $\kappa(u) < 1$ , c'est à dire, le cas d'une courbe attractive. Nous justifions d'abord cette dénomination.

#### Une courbe attractive est attractive

Soit  $F$  une  $dhf$  et  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  une courbe invariante attractive.

**Proposition 2.7** *Il existe un tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  autour de la courbe  $u$  tel que tout point dans cet ouvert tende vers la courbe dans le futur avec la dynamique de  $F$ .*

**Preuve.** Nous pouvons supposer que  $u = \{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  en conjugant par une translation fibrée. Nous avons alors

$$\int_{\mathbb{T}^1} \log |\partial_z f_\theta(0)| d\theta < 0$$

Comme la rotation  $R_\alpha$  est uniquement ergodique, il existe  $n^*$  tel que  $|\partial_z f_\theta^{n^*}(0)| \leq 1/2$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Il existe alors un rayon  $r > 0$  tel qu'on ait

$$|f_\theta^{n^*}(z)| \leq \frac{2}{3}|z|$$

pour  $|z| \leq r$ ,  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . On prend

$$\mathcal{U} = \bigcap_{0 \leq n < n^*} F^{-n}(\mathbb{T}^1 \times D_r)$$

où  $D_r$  est le disque de rayon  $r$  et centré en  $z = 0$ . L'ouvert  $\mathcal{U}$  a les propriétés voulues (les fibres sont des disques topologiques par le principe du maximum) ■

Le Théorème d'uniformisation de Riemann assure parmi d'autres choses, qu'un disque topologique  $D$  peut être doté d'une (unique) métrique  $d_D$  à courbure négative constante égale à  $-1$ , en tirant en arrière la métrique de Poincaré du disque  $\mathbb{D}$  via l'uniformisation choisie. Le lemme suivant est une version générale du Lemme de Schwartz-Pick (voir [Kra90])

**Lemme 2.8** *Soient  $W > 1$  une constante et  $D$  un disque topologique dont le rayon conforme vérifie*

$$W^{-1} < R(D) < W \tag{2.2}$$

*alors il existe une constante  $C = C(W)$  telle qu'on ait*

$$C^{-1}|z| < d_D(z, 0) < C|z| \tag{2.3}$$

*pour  $d_D(z, 0) < 1$ . Soient  $D, D'$  deux disques topologiques. Si  $g : D \rightarrow D'$  est une fonction holomorphe alors*

*i)  $g$  est une contraction au sens large dans les métriques induites  $d_D, d_{D'}$ , c'est-à-dire, pour tous  $z_1, z_2$  dans  $D$  on a*

$$g^*(d_{D'}) \leq d_D \tag{2.4}$$

$$\text{dist}_{D'}(g(z_1), g(z_2)) \leq \text{dist}_D(z_1, z_2) \tag{2.5}$$

*où  $\text{dist}_D, \text{dist}_{D'}$  sont les distances induites pour les métriques hyperboliques  $d_D, d_{D'}$  respectivement.*

*ii) Si  $g$  envoie  $D$  de façon compacte dans  $D'$ , c'est à dire, si on a l'inclusion  $\overline{g(D)} \subset D'$ , alors  $g$  est une contraction stricte dans les métriques induites, autrement dit, il existe une constante  $c$  positive et plus petite que 1, telle que pour tous  $z_1, z_2$  dans  $D$  on a que  $g$  est une  $c$ -contraction*

$$g^*(d_{D'}) \leq c d_D \tag{2.6}$$

$$\text{dist}_{D'}(g(z_1), g(z_2)) \leq c \text{dist}_D(z_1, z_2) \tag{2.7}$$

**Proposition 2.9** *Soit  $u$  une courbe invariante attractive et  $\mathcal{U}$  un tube ouvert invariant qui la contient. Alors  $\mathcal{U}$  est contenu dans le bassin d'attraction de la courbe  $u$ .*

**Preuve.** On peut supposer que  $u = \{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$ . La Proposition 2.7 et le lemme précédent nous disent qu'il existe  $s > 0$  et  $n^*$  tel qu'on ait, pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$

$$d_{\mathcal{U}_\theta}(z, 0) \leq s \implies d_{\mathcal{U}_{\theta+n^*\alpha}}(f_\theta^{n^*}(z), 0) \leq \frac{s}{2}$$

On a alors, pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ ,

$$d_{\mathcal{U}_\theta}(z, 0) \geq s \implies d_{\mathcal{U}_{\theta+n^*\alpha}}(f_\theta^{n^*}(z), 0) \leq d_{\mathcal{U}_\theta}(z, 0) - \frac{s}{2}$$

puisque pour tout  $\theta$  la fonction holomorphe  $f_\theta : \mathcal{U}_\theta \rightarrow \mathcal{U}_{\theta+\alpha}$  est une contraction au sens large. Ceci permet de conclure car les distance hyperboliques sont comparables pour différents  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  ■

Nous allons consacrer les prochains paragraphes à montrer une sorte de réciproque pour les résultats que nous venons de voir. Plus précisément on traitera une situation dans laquelle la seule existence d'un tube ouvert invariant avec une propriété plutôt faible de contraction implique l'existence d'une courbe invariante attractive dans son intérieur. Ce résultat sera d'un grand intérêt lors du chapitre consacré à la persistance de courbes invariantes par des petites perturbations de la dynamique.

### Un tube qui est contracté possède une courbe invariante

Soit  $F$  une dhf définie sur un voisinage du produit  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$  et vérifiant

i)  $F(\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$

ii) Il existe un point  $\tilde{\theta} \in \mathbb{T}^1$  tel que  $f_{\tilde{\theta}}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}$ .

Cette dernière hypothèse implique que la fonction holomorphe  $f_{\tilde{\theta}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est une contraction stricte dans la métrique de Poincaré du disque  $\mathbb{D}$ . On dit dans ce cas que  $F$  vérifie l'hypothèse de contraction forte en un point.

Le but des arguments qui suivent est de montrer que sous ces hypothèses il existe forcément une courbe invariante dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}$ , et qu'en plus il s'agit d'une courbe attractive.

**Lemme 2.10** *Soit  $F$  une dhf qui vérifie l'hypothèse de contraction forte en un point, alors pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  le diamètre (mesuré dans la métrique de Poincaré) de l'ensemble  $K_\theta^n = f_{\theta-n\alpha}^n(\overline{\mathbb{D}})$  tend vers zero de façon uniforme en  $\theta$  quand  $n$  tend vers l'infini. Plus précisément il existe des constantes  $C, c > 0$  telles qu'on ait*

$$\text{diam}_{\mathbb{D}}(K_\theta^n) \leq Cc^n \tag{2.8}$$

pour tout  $n > 0$ .

**Preuve.** Il suffit de noter qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  autour de  $\tilde{\theta}$  tel que  $f_\theta$  est une  $\tilde{c}$ -contraction, pour un constante  $\tilde{c}$  dans  $(0, 1)$  pour tout  $\theta$  dans cet intervalle, car  $F$  est continue par rapport à la variable  $\theta$ . Pour les  $\theta$  qui ne sont pas dans cet intervalle la fonction  $f_\theta$  est un contraction au sens large et donc ne grandit pas le diamètre des ensembles. Ceci et l'unique ergodicité de la rotation  $R_\alpha$  impliquent le lemme ■

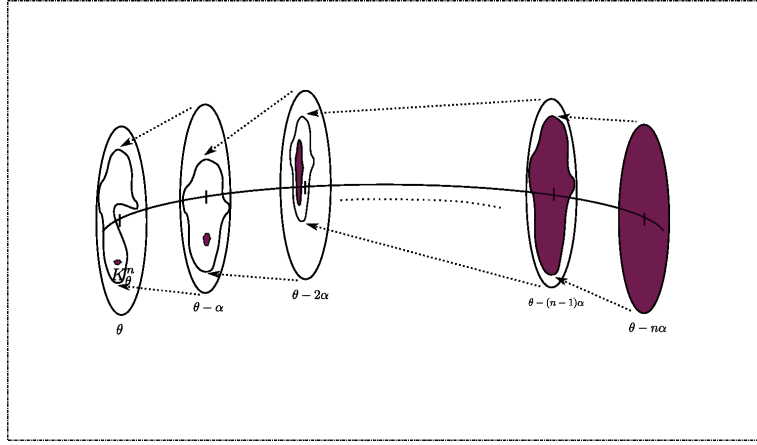


FIG. 2.1 –

La définition des ensembles compacts  $K_\theta^n$  implique que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  on a  $K_\theta^{n+1} \subset K_\theta^n$  (voir Figure 2.1.1), donc leur intersection  $\bigcap_{n \geq 0} K_\theta^n$  n'est pas vide et est formée d'un seul point d'après (2.8). On obtient ainsi une fonction  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  qui vérifie  $f_\theta(u(\theta)) \in K_{\theta+\alpha}^n$  pour tout  $n \geq 0$  ce qu'implique  $f_\theta(u(\theta)) = u(\theta + \alpha)$ . La courbe ainsi obtenue est donc invariante. Elle est continue car est la limite uniforme de la suite de courbes continues définies par les itérés de la section nulle  $\{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$

$$u_n(\theta) = f_{\theta - n\alpha}^n(0)$$

D'après la contraction exponentielle garantie par le Lemme 2.10, il existe  $n^* > 0$  et  $\hat{c} \in (0, 1)$  tel qu'on ait, pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$

$$|\partial_z f_\theta^{n^*}(u(\theta))| \leq \hat{c} \quad (2.9)$$

Ceci nous permet majorer les sommes de Birkhoff  $S_u^{kn^*}(\theta) < 0$  pour tout  $k \geq 0$  et tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Ceci et l'unique ergodicité de la rotation  $R_\alpha$  nous permettent d'estimer le signe de l'intégrale  $\int_{\mathbb{T}^1} \log |\partial_z f_\theta(u(\theta))| d\theta < 0$ . On a ainsi montré

**Proposition 2.11** *Si  $F$  est une dhf qui vérifie l'hypothèse de contraction forte en un point alors il existe une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  continue et invariante. En plus, cette courbe invariante est attractive et attire tout l'ensemble  $\mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$  dans le futur.*

En utilisant l'argument de la convergence uniforme nous montrons la

**Proposition 2.12** *Si  $F$  est une dhf de classe analytique sur la bande  $B_\delta$  qui vérifie l'hypothèse de contraction forte en un point du cercle  $\mathbb{T}^1$ , alors il existe une courbe invariante analytique  $u : B_{\delta'} \rightarrow \mathbb{D}$ , ( $0 < \delta' \leq \delta$ ). En plus, cette courbe invariante est attractive et attire tout l'ensemble  $B_{\delta'} \times \mathbb{D}$  dans le futur.*

Nous pouvons appliquer l'argument qui permet d'élargir la contraction forte dans un rectangle  $(I \times (-\delta', \delta')) \subset B_\delta$  pour un nombre positif  $\delta' \in (0, \delta]$  et profiter du fait que sous l'hypothèse d'analyticité les courbes  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sont analytiques sur la bande  $B_\delta$ .

**Cas  $C^\infty$ .** Quand la  $dhf$   $F$  est de classe  $C^\infty$  il est possible de montrer que la courbe invariante donnée par la Proposition 2.11 est elle aussi de classe  $C^\infty$ .

**Proposition 2.13** *Si  $F$  est une dhf de classe  $C^\infty$  qui vérifie l'hypothèse de contraction forte en un point alors la courbe invariante  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  est de classe  $C^\infty$ .*

Il est clair d'après sa définition que le point  $u(\theta)$  reste inchangé si on considère au lieu de  $F$  n'importe quel itéré positif  $F^N$  dans la construction des compacts  $K_\theta^n$ . Donc si nous montrons que la courbe invariante associée à un itéré positif  $F^N$  de  $F$  est de classe  $C^\infty$  nous aurons montrée que celle associée à  $F$  (qui est la même) est de classe  $C^\infty$ . Ceci et la contraction exponentielle (2.8) nous permettent de supposer qu'il existe  $c \in (0, 1)$ ,  $r > 0$  tels qu'on ait

$$|\partial_z f_\theta(z)| \leq c \quad (2.10)$$

pour tout  $z$  dans le disque  $D(u(\theta), r)$ , pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . La preuve de la Proposition 2.13 passe par quelques lemmes techniques et par un résultat classique sur les équations cohomologiques hyperboliquement tordues sur des rotations irrationnelles.

### Une équation cohomologique hyperboliquement tordue.

**Lemme 2.14** *Soient  $\Phi, P : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions de classe  $C^r$ , ( $r \geq 1$ ), et une constante  $c \in (0, 1)$ , telles qu'on ait  $|P(\theta)| < c$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Soit  $T = R_\gamma$  la rotation d'angle  $\gamma$ . Alors l'équation cohomologique tordue*

$$\Psi(T\theta) - P(\theta)\Psi(\theta) = \Phi(\theta) \quad (2.11)$$

a une unique solution  $\Psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , qui est de classe  $C^r$ .

**Preuve.** L'unicité sort du fait que la seule solution bornée à l'équation

$$\tilde{\Psi}(T\theta) - P(\theta)\tilde{\Psi}(\theta) = 0$$

est  $\tilde{\Psi} \equiv 0$ , puisque cette fonction doit vérifier pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et pour tout  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(T\theta) &= \tilde{\Psi}(T^{-n}\theta) \prod_{j=0}^{n-1} P(T^{-j}\theta) \\ |\tilde{\Psi}(T\theta)| &\leq \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\tilde{\Psi}(\theta)| c^{n+1} \end{aligned}$$

Si une solution  $\Psi$  pour l'équation (2.11) existe, elle doit vérifier

$$\begin{aligned} \Psi(\theta) &= \Phi(T^{-1}\theta) + P(T^{-1}\theta)\Psi(T^{-1}\theta) \\ &= \Phi(T^{-1}\theta) + P(T^{-1}\theta)\{\Phi(T^{-2}\theta) + P(T^{-2}\theta)\Psi(T^{-2}\theta)\} \\ &\vdots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(T^{-j}\theta) \left( \prod_{i=1}^{j-1} P(T^{-i}\theta) \right) \end{aligned}$$

Nous définissons donc la fonction  $\Psi$  comme étant cette série. Plus précisément, pour  $n \geq 1$  on pose

$$\Psi_n(\theta) = \sum_{j=1}^n \Phi(T^{-j}\theta) \left( \prod_{i=1}^{j-1} P(T^{-i}\theta) \right) \quad (2.12)$$

Cette série converge absolument et uniformément car on a que

$$|\Psi_n(\theta)| \leq \sum_{j=1}^n \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\Phi(\theta)| c^j < \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\Phi(\theta)|}{1-c} < \infty$$

pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . On a donc que  $\Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n$  est bien de classe  $C^0$  et vérifie l'équation (2.11) car

$$\begin{aligned} \Psi(T\theta) &= \Phi(\theta) + P(\theta) \sum_{j=2}^{\infty} \Phi(T^{-j}T\theta) \left( \prod_{i=2}^{j-1} P(T^{-i}T\theta) \right) \\ &= \Phi(\theta) + P(\theta) \sum_{j=2}^{\infty} \Phi(T^{-(j-1)}\theta) \left( \prod_{i=2}^{j-1} P(T^{-(i-1)}\theta) \right) \\ &= \Phi(\theta) + P(\theta) \sum_{\tilde{j}=1}^{\infty} \Phi(T^{-\tilde{j}}\theta) \left( \prod_{\tilde{i}=1}^{\tilde{j}-1} P(T^{-\tilde{i}}\theta) \right) \\ &= \Phi(\theta) + P(\theta)\Psi(\theta) \end{aligned}$$

Soit  $s$  dans  $\{1, \dots, r\}$  et  $n > s$ . En rappelant que  $T$  est une isométrie on a que

$$\begin{aligned} \partial_{\theta}^s \Psi_n(\theta) &= \partial_{\theta}^s \Psi_s(\theta) + \sum_{j=s+1}^n \partial_{\theta}^s \left\{ \Phi(T^{-j}\theta) \left( \prod_{i=1}^{j-1} P(T^{-i}\theta) \right) \right\} \\ |\partial_{\theta}^s \Psi_n(\theta)| &\leq \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\partial_{\theta}^s \Psi_s(\theta)| + K(s, \Phi, P) \sum_{j=1}^{n-s} c^j \end{aligned}$$

où la constante  $K(s, \Phi, P) > 0$  dépend de  $s, \Phi, P$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $s$ , ce qui montre que la fonction  $\Psi$  est de classe  $C^r$  ■

On reprend la preuve de la Proposition 2.13 avec le

**Lemme 2.15** *La famille de fonctions  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  est équicontinue.*

**Preuve.** Soit  $\delta_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  un module continuité de la courbe  $u$ , c'est à dire, que pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute paire  $\theta_1, \theta_2$  dans  $\mathbb{T}^1$  avec  $|\theta_1 - \theta_2| < \delta_u(\varepsilon)$  on ait  $|u(\theta_1) - u(\theta_2)| < \varepsilon$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et un nombre naturel  $N > 0$  tel que  $\text{diam}_{\mathbb{D}}(K_{\theta}^N) \leq \varepsilon/3$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Ceci est possible d'après l'estimation exponentielle (2.8). Pour toute paire de points  $\theta_1, \theta_2$  dans  $\mathbb{T}^1$  qui vérifient  $|\theta_1 - \theta_2| < \delta_u(\varepsilon/2)$  nous avons alors que

$$|u_n(\theta_1) - u_n(\theta_2)| \leq |u_n(\theta_1) - u(\theta_1)| + |u(\theta_1) - u(\theta_2)| + |u_n(\theta_2) - u(\theta_2)| < \varepsilon$$

pour tout  $n \geq N$ . Comme toute famille finie de fonctions absolument continues est équicontinue, la famille  $\{u_n\}_{0 \leq n < N}$  l'est. Soit  $\tilde{\delta}(\varepsilon)$  un module d'équicontinuité de telle famille, c'est à dire, que pour tous  $\theta_1, \theta_2$  dans  $\mathbb{T}^1$  dont sa distance  $|\theta_1 - \theta_2| < \tilde{\delta}(\varepsilon)$  vérifie  $|u_n(\theta_1) - u_n(\theta_2)| \leq \varepsilon$  pour tout  $0 \leq n < N$ . Nous définissons le module d'équicontinuité de toute la famille  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  par

$$\delta(\varepsilon) = \min \left( \tilde{\delta}(\varepsilon), \delta_u(\varepsilon/3) \right) \quad \blacksquare \quad (2.13)$$

Nous définissons maintenant une nouvelle famille de fonctions continues  $\{v_n : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \geq 0}$  par

$$v_n(\theta) = \partial_\theta u_n(\theta) \quad (2.14)$$

La définition de  $u_n$  donne directement que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  on a

$$u_n(\theta) = f_{\theta-\alpha}(u_{n-1}(\theta - \alpha))$$

ce qui implique que  $v_n$  vérifie pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$

$$v_n(\theta) = \partial_\theta f_{\theta-\alpha}(u_{n-1}(\theta - \alpha)) + \partial_z f_{\theta-\alpha}(u_{n-1}(\theta - \alpha))v_{n-1}(\theta - \alpha) \quad (2.15)$$

**Lemme 2.16** *La famille  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  est uniformément bornée.*

**Preuve.** Soit  $\bar{n}$  tel que pour tout  $n > \bar{n}$  on ait  $|u_n(\theta) - u(\theta)| < r$ . Soient

$$K = \sup_{(\theta, z) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}} |\partial_\theta f_\theta(z)| \quad , \quad \tilde{K} = \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |v_{\bar{n}}(\theta)|$$

On peut itérer la relation (2.15) et obtenir une série pour  $v_n$ , d'où on a pour  $n > \bar{n}$  et pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$

$$|v_n(\theta)| \leq \sum_{i=0}^{n-\bar{n}-1} K c^i + c^{n-\bar{n}} \tilde{K} < \frac{K}{1-c} + \tilde{K} = \hat{K} < \infty \quad \blacksquare$$

**Lemme 2.17** *La famille de fonctions  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  est équicontinue.*

**Preuve.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est de classe  $C^\infty$  les deux familles de fonctions formées par  $\partial_z f_{\theta-\alpha}(u_n(\theta - \alpha))$ ,  $\partial_\theta f_{\theta-\alpha}(u_n(\theta - \alpha))$  respectivement, sont équicontinues. Soient  $\delta_z(\varepsilon)$ ,  $\delta_\theta(\varepsilon)$  ses modules d'équicontinuité et soit  $\delta_1(\varepsilon)$  le module d'équicontinuité de la famille finie  $\{v_n\}_{1 \leq n \leq \bar{n}}$ . Nous notons

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \delta_1(\varepsilon), \delta_\theta \left( \frac{1-c}{2} \varepsilon \right), \delta_z \left( \frac{1-c}{2} \varepsilon \hat{K}^{-1} \right) \right\} \quad (2.16)$$

et nous redéfinissons si nécessaire  $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ . Nous allons montrer inductivement que  $v_n$  a le même module de continuité que  $v_{\bar{n}}$ , pour tout  $n \geq \bar{n}$ . Supposons donc que pour tout

$j$  dans  $\{\bar{n}, \dots, n-1\}$  la fonction  $v_j$  admet  $\delta(\varepsilon)$  comme module de continuité. Soient  $\theta_1, \theta_2$  dans  $\mathbb{T}^1$  tels que  $|\theta_1 - \theta_2| < \delta(\varepsilon)$ . On a

$$\begin{aligned} |v_n(\theta_1) - v_n(\theta_2)| &\leq \left| \partial_\theta f_{\theta_1 - \alpha}(u_{n-1}(\theta_1 - \alpha)) - \partial_\theta f_{\theta_2 - \alpha}(u_{n-1}(\theta_2 - \alpha)) \right| \\ &\quad + \left| \partial_z f_{\theta_1 - \alpha}(u_{n-1}(\theta_1 - \alpha)) \left( v_{n-1}(\theta_1 - \alpha) - v_{n-1}(\theta_2 - \alpha) \right) \right| \\ &\quad + \left| v_{n-1}(\theta_2 - \alpha) \left( \partial_z f_{\theta_1 - \alpha}(u_{n-1}(\theta_1 - \alpha)) + \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. - \partial_z f_{\theta_2 - \alpha}(u_{n-1}(\theta_2 - \alpha)) \right) \right| \\ &\leq \frac{1-c}{2} \varepsilon + c\varepsilon + \hat{K} \left( \frac{1-c}{2} \varepsilon \hat{K}^{-1} \right) \\ &\leq \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Lemme 2.18** *La fonction  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  est de classe  $C^1$ .*

**Preuve.** Le Théorème d'Ascoli appliqué à la famille  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  assure qu'il existe une fonction continue  $\tilde{v} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  et une sous-suite  $\{v_{n_j}\}_{j \geq 0}$  de telle famille qui converge de façon uniforme vers  $\tilde{v}$ . En nous rappelant que  $v_{n_j} = \partial_\theta u_{n_j}$  et que  $u_{n_j}$  converge uniformément vers  $u$  quand  $j$  tend vers l'infini, on peut conclure que  $u$  est différentiable et que

$$\partial_\theta u = \lim_{j \rightarrow \infty} \partial_\theta u_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} v_{n_j} = \tilde{v} \quad \blacksquare$$

On pourrait montrer aussi avec un peu de travail que  $v_n$  converge uniformément vers  $\tilde{v}$ , mais cela ne donne pas des nouvelles informations sur la classe de différentiabilité de  $u$ .

Nous allons finir la preuve de la Proposition 2.13 en appliquant le Lemme 2.14. On prend  $\gamma = \alpha$ ,  $\Phi(\theta) = \partial_\theta f_\theta(u(\theta))$  et  $P(\theta) = \partial_z f_\theta(u(\theta))$ . On sait déjà que  $u$  est différentiable, donc on peut dériver par rapport à  $\theta$  l'équation de la courbe invariante et obtenir que  $\partial_\theta u$  vérifie l'équation (2.11). Le Lemme 2.14 peut s'appliquer. Il nous dit que  $\partial_\theta u$  est la seule solution de l'équation cohomologique et en plus qu'est de la même classe de différentiabilité que les fonctions  $\Phi, P$ , qui correspond à la classe de différentiabilité de  $u$ , donc cette classe n'est autre que  $C^\infty$ , ce qui conclut la preuve  $\blacksquare$

**Remarque 6** *Dans la Proposition 2.11 nous ne pouvons pas affaiblir l'hypothèse de contraction stricte  $f_\theta(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}$ . En fait, si nous considérons la dynamique donnée par la transformation parabolique  $f_\theta(z) = z + z^2$ , pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ , on a que le disque ouvert  $\mathcal{D} = D(-1/8, 1/8)$  est envoyé strictement, mais pas compactement, dans lui même par  $f_\theta$ . Cependant, tout le tube ouvert  $\mathbb{T}^1 \times \mathcal{D}$  est attiré vers la courbe invariante parabolique  $u = \{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  qui ne se trouve pas à l'intérieur du tube  $\mathbb{T}^1 \times \mathcal{D}$ .*

## 2.1.2 Stabilité autour d'une courbe répulsive

Nous allons traiter ici le cas le cas d'une courbe répulsive. On suppose que  $F$  est une  $dhf$  et  $u$  une courbe invariante répulsive ( $\kappa(u) > 1$ ). Comme  $F$  est injective et continue il



existe un rayon positif  $r$  tel qu'on peut inverser chaque fonction  $f_\theta$  sur un disque de rayon  $r$  centré au point  $u(\theta)$  (d'après le Lemme d'inversion uniforme, voir l'Annexe B). Ceci implique que  $F$  est inversible dans un voisinage tubular de la courbe invariante, et que son inverse  $F^{-1}$  est une  $dhf$  (car  $F$  est injective), avec la rotation  $R_{-\alpha}$  comme transformation sur la base. La courbe  $u^{-1}(\theta) := u(\theta)$  est invariante par  $F^{-1}$  et son multiplicateur est  $\kappa(u^{-1}) = \kappa(u)^{-1} < 1$ . On a donc que  $u$  devient une courbe attractive vue comme courbe invariante de l'inverse de  $F$ . En utilisant le résultat pour les courbes attractives qu'on vient de voir on montre

**Proposition 2.19** *Il existe un tube ouvert  $\mathcal{U}$  autour de la courbe  $u$  tel que tout point dans cet ouvert tend vers la courbe dans le passé sous la dynamique de  $F$ .*

## 2.2 Linéarisation et stabilité

Sous certaines hypothèses sur les données associées à une courbe invariante nous allons obtenir une forme normale *la plus simple possible*. Plus précisément soit  $F$  une  $dhf$  et soit  $u$  une courbe invariante de la même classe de différentiabilité que  $F$ . Nous disons que  $F$  est *linéarisable* s'il existe un changement de coordonnées  $H$  à fibres holomorphes défini autour de la courbe et une fonction  $A : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , les deux étant de la même classe de différentiabilité que  $F$ , tels que  $H$  conjugue  $F$  à la transformation

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto (\theta + \alpha, A(\theta)z) \end{aligned}$$

dans un voisinage de la courbe. Soient  $\kappa \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  définis par l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{T}^1} \log \left( e^{-2\pi i n \theta} \partial_z f_\theta(u(\theta)) \right) d\theta = \kappa + 2\pi i \beta$$

Nous allons distinguer quelques cas : Si  $A(\theta) = \kappa e^{2\pi i n \theta} e^{2\pi i \beta}$  nous disons que  $F$  est *fortement linéarisable*. Si  $|A(\theta)| = \kappa$  pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$  ( $B_\delta$  dans le cas analytique) nous disons que  $F$  est *linéarisable en module*. Dans les autres cas nous disons que  $F$  est *faiblement linéarisable*.

Dans les paragraphes qui suivent nous allons montrer quelques relations entre l'existence d'un tube ouvert invariant et la possibilité de linéariser une dynamique holomorphe fibrée dans un tel ouvert. L'existence d'une courbe invariante à l'intérieur du tube invariant sera le point clé d'une telle relation, car cette courbe joue le rôle d'un centre autour duquel la dynamique s'organise. Ces résultats sont inspirés par le fait que dans le contexte des germes holomorphes qui fixent l'origine du plan complexe, le problème de linéarisation est équivalent à la stabilité dynamique de l'origine vu comme point fixe (voir [PM92]).

Soit  $F$  une  $dhf$  avec une courbe invariante  $u$ . Moyenant une conjugaison par translation, nous allons considérer dorénavant des  $dhf$  qui s'écrivent sous la forme

$$F(\theta, z) = \left( \theta + \alpha, \rho_1(\theta)z + \rho_2(\theta)z^2 + \rho_3(\theta)z^3 + \dots \right) \quad (2.17)$$

avec les fonctions  $\rho_i : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  continues pour tout  $i \geq 1$  et de façon que le rayon de convergence de la série de  $f_\theta$  ci-dessus soit minoré par un nombre positif pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . En général nous allons montrer que  $F$  est conjuguée à la dynamique linéaire triviale  $\Lambda_{\rho_1}$ , et donc sera soit fortement ou en module linéarisable si *au préalable* nous pouvons doter la fonction  $\rho_1$  de la propriété adéquate en résolvant une équation cohomologique.

### 2.2.1 Linéarisation autour d'une courbe attractive

Supposons que la courbe  $u$  soit attractive ( $0 < \kappa < 1$ ). La Proposition 2.7 assure l'existence d'un tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  qui est attiré dans le futur par la courbe  $u$ .

D'abord nous introduisons une conjugaison qui rapproche le module de la dérivée  $\rho_1$  de sa valeur moyenne  $\kappa$ . Plus précisément, soit  $l : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme trigonométrique qui vérifie

$$i) \int_{\mathbb{T}^1} l(\theta) d\theta = \log \kappa$$

$$ii) \left| \log |\rho_1(\theta)| - l(\theta) \right| < \log \frac{1+\kappa^{-1/2}}{2} \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{T}^1.$$

Soit  $\tilde{u}_1 : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de moyenne nulle à l'équation cohomologique

$$\tilde{u}_1(\theta) - \tilde{u}_1(\theta + \alpha) = \log \kappa - l(\theta) \quad (2.18)$$

Cette solution existe et est un polynôme trigonométrique car  $l$  est un polynôme trigonométrique et  $\alpha$  est irrationnel. En fait, quand on applique la méthode des coefficients des séries de Fourier il n'y pas de petits dénominateurs (voir la section 1.2 du chapitre 1 pour un traitement plus complet). Soit  $u_1(\theta) = e^{\tilde{u}_1(\theta)}$ . En conjuguant  $F$  par  $H(\theta, z) = (\theta, u_1(\theta)z)$  nous obtenons

$$|\partial_z(H^{-1} \circ F \circ H)_\theta(0)| = \frac{u_1(\theta)}{u_1(\theta + \alpha)} |\rho_1(\theta)| \quad (2.19)$$

$$= \kappa \frac{|\rho_1(\theta)|}{e^{l(\theta)}} < \frac{\kappa + \kappa^{1/2}}{2} < 1 \quad (2.20)$$

pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Quitte à faire une conjugaison comme ci-dessus, nous pouvons donc supposer que  $|\rho_1(\theta)| < \frac{\kappa + \kappa^{1/2}}{2}$  et que les fonctions  $f_\theta(\cdot)$  sont définies et holomorphes dans un disque  $D_R$ , pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ .

La proposition qui suit sera montrée par une technique tout à fait classique dans le cadre des germes holomorphes qui fixent l'origine (voir [CG93]), et qui s'adapte sans difficulté à notre cas. Nous énonçons aussi les versions en classe de différentiabilité supérieure car leurs démonstrations se font au même temps.

**Proposition 2.20** *Soit  $F$  une dhf avec une courbe invariante  $u$  attractive. Il existe un changement de coordonnées continu  $\Phi$  défini dans un voisinage de la courbe invariante qui linéarise  $F$  faiblement.*

**Proposition 2.21** *Si  $F$  et la courbe invariante  $u$  sont de classe analytique sur la bande  $B_\delta$ , alors il existe un changement de coordonnées  $\Phi$  de classe analytique sur une bande  $B_\delta$ , défini sur un voisinage de la courbe invariante qui linéarise  $F$  faiblement. En plus si  $\alpha$  satisfait la condition de Brjuno, on peut choisir  $\Phi$  de façon à linéariser  $F$  fortement.*

**Proposition 2.22** *Si  $F$  est de classe  $C^\infty$  alors il existe un changement de coordonnées  $\Phi$  de classe  $C^\infty$ , défini dans un voisinage de la courbe invariante qui linéarise  $F$  faiblement. En plus si  $\alpha$  satisfait une condition diophantienne, on peut choisir  $\Phi$  de façon à linéariser  $F$  fortement.*

**Preuve.** Nous allons considérer d'abord le cas  $C^0$ . Nous définissons une fonction continue  $\phi : \mathbb{T}^1 \times D_R \rightarrow \mathbb{C}$  à fibres holomorphes par l'égalité

$$f_\theta(z) = \rho_1(\theta)z\{1 + \phi(\theta, z)z\}$$

Soit  $\{g^n : \mathbb{T}^1 \times D_R \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \geq 1}$  la suite de fonctions continues à fibres holomorphes définies par

$$g_\theta^n(z) = \left( \prod_{i=0}^{n-1} \rho_1(\theta + i\alpha) \right)^{-1} f_\theta^n(z)$$

On a que

$$\begin{aligned} f_\theta^{n+1}(z) &= \rho_1(\theta + n\alpha) f_\theta^n(z) \{1 + \phi(\theta + n\alpha, f_\theta^n(z)) f_\theta^n(z)\} \\ g_\theta^{n+1}(z) &= g_\theta^n(z) \{1 + \phi(\theta + n\alpha, f_\theta^n(z)) f_\theta^n(z)\} \\ &= z \prod_{j=0}^n \{1 + \phi(\theta + j\alpha, f_\theta^j(z)) f_\theta^j(z)\} \end{aligned}$$

On pose aussi

$$\log(1 + \phi(\theta, z)z) = z\psi(\theta, z)$$

Ainsi la fonction  $\psi : \mathbb{T}^1 \times D_R \rightarrow \mathbb{C}$  est continue, à fibres holomorphes et bornée. Nous voulons montrer qu'il existe un rayon  $r > 0$  tel que la suite  $\{g^n\}_{n \geq 1}$  converge uniformément en classe  $C^0$  sur  $\mathbb{T}^1 \times D_r$  vers une fonction  $g : \mathbb{T}^1 \times D_r \rightarrow \mathbb{C}$ . Pour cela il suffit de montrer que la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi(\theta + j\alpha, f_\theta^j(z)) f_\theta^j(z) \quad (2.21)$$

converge de façon absolue et uniforme. Or la courbe est attractive et il existe donc un rayon  $r > 0$  et une constante  $c \in (0, 1)$  tels que

$$|f_\theta^n(z)| \leq c^n$$

pour tout  $(\theta, z) \in \mathbb{T}^1 \times D_r$  et tout  $n$  suffisamment grand. La série (2.21) converge alors en classe  $C^0$  sur  $\mathbb{T}^1 \times D_r$ , et à son tour la suite  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  converge uniformément donc vers une fonction continue  $g : \mathbb{T}^1 \times D_r \rightarrow \mathbb{C}$  à fibres holomorphes.

Dans le cas analytique cette convergence uniforme implique que  $g : B_\delta \times D_r \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique car est la limite uniforme des fonctions analytiques  $g_n$ .

Dans le cas  $C^\infty$  nous voulons aussi montrer que la série (2.21) converge uniformément en classe  $C^\infty$ . Soient  $a, b$  des nombres entiers positifs. Il nous faut montrer que la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \partial_\theta^a \partial_z^b \{ \psi(\theta + j\alpha, f_\theta^j(z)) f_\theta^j(z) \} \quad (2.22)$$

converge de façon absolue et uniforme sur  $\mathbb{T}^1 \times D_r$ . Comme  $\psi$  est de classe  $C^\infty$  il existe des constantes  $K_{a,b}$  telles que

$$|\partial_\theta^{a'} \partial_z^{b'} \psi(\theta, z)| < K_{a,b} \quad (2.23)$$

pour tous  $a' \leq a, b' \leq b$  et  $(\theta, z) \in \mathbb{T}^1 \times D_r$ . Afin d'obtenir la convergence de (2.22) il suffit de montrer qu'il existe une constante  $\eta \in (0, 1)$  et des constantes  $C_{a,b} > 0$  telles que

$$|\partial_\theta^a \partial_z^b f_\theta^j(z)| \leq \eta^j C_{a,b} \quad (2.24)$$

pour tout  $(\theta, z) \in \mathbb{T}^1 \times D_r$  et pour tout  $j$  suffisamment grand. Pour cela on écrit

$$f_\theta^j(z) = z \left( \prod_{i=0}^{j-1} \rho_1(\theta + i\alpha) \right) \left( \prod_{s=0}^{j-1} e^{\psi(\theta + s\alpha, f_\theta^s(z)) f_\theta^s(z)} \right)$$

et on voit que (2.24) suit d'après (2.23) et la majoration

$$|\rho_1(\theta)| \leq \frac{\kappa + \kappa^{1/2}}{2} < 1$$

pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ .

Ainsi, dans les trois cas  $C^0$ ,  $C^\infty$  et analytique, la fonction limite  $g$  est de classe  $C^0$ ,  $C^\infty$  ou analytique respectivement. La fonction  $g$  est à fibres holomorphes et en plus on a  $g_\theta(0) = 0, \partial_z g_\theta(0) = 1$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  ( $B_\delta$  dans le cas analytique). Le Lemme d'inversion uniforme s'applique (voir l'Annexe B) et  $g$  est donc inversible dans un voisinage tubulaire de la courbe invariante. L'inverse  $g^{-1}$  a la même classe de différentiabilité que  $g$ . Nous posons

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta, z) &= (\theta, g_\theta^n(z)) \\ \Phi(\theta, z) &= (\theta, g_\theta(z)) \end{aligned}$$

D'après la définition on a que

$$\begin{aligned} \Phi_n \circ F &= \left( \theta + \alpha, \left( \prod_{i=0}^{n-1} \rho_1(\theta + \alpha + i\alpha) \right)^{-1} f_{\theta+\alpha}^n(f_\theta(z)) \right) \\ &= \left( \theta + \alpha, \rho_1(\theta) \left( \prod_{i=0}^n \rho_1(\theta + i\alpha) \right)^{-1} f_\theta^{n+1}(z) \right) \\ &= \Lambda_{\rho_1} \circ \Phi_{n+1} \end{aligned}$$

alors à la limite la fonction  $\Phi$  vérifie que

$$F = \Phi^{-1} \circ \Lambda_{\rho_1} \circ \Phi$$

On conclut donc que  $\Phi$  est bien une conjugaison dans un voisinage tubulaire de la courbe entre  $F$  et  $\Lambda_{\rho_1}$ . Ainsi la conjugaison  $\Phi$  linéarise  $F$  faiblement. Dans le cas  $C^\infty$  ou analytique et sous une hypothèse arithmétique adéquate ( $\alpha \in \mathbb{C}\mathbb{D}$  ou  $\alpha \in \mathbb{B}$ ), nous pouvons résoudre au préalable une équation cohomologique pour obtenir une forme normale pour  $F$  avec  $\rho_1(\theta) = \kappa e^{2\pi i\beta} e_{\bar{n}}(\theta)$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  ( $\theta$  dans  $B_\delta$ ) ■

### 2.2.2 Linéarisation autour d'une courbe répulsive

Supposons que la courbe  $u$  est répulsive ( $1 < \kappa$ ). On peut inverser  $F$  dans un petit voisinage tubulaire de la courbe invariante, et de cette façon la courbe  $u$  devient invariante et attractive pour la dynamique  $F^{-1}$ , son multiplicateur vaut  $\kappa^{-1}$ . Soit  $\Phi$  la conjugaison donnée par la Proposition 2.20. Donc on a

$$\begin{aligned} (\Phi \circ F^{-1} \circ \Phi^{-1})^{-1} &= \Lambda_{\rho_1^{-1}}^{-1} \\ \Phi \circ F \circ \Phi^{-1} &= \Lambda_{\rho_1} \end{aligned}$$

dans un petit voisinage tubulaire de la section nulle. On montre ainsi

**Proposition 2.23** *Soit  $F$  une dhf avec une courbe invariante  $u$  répulsive. Il existe un changement de coordonnées continu  $\Phi$  défini dans un voisinage de la courbe invariante qui linéarise  $F$  faiblement.*

**Proposition 2.24** *Si  $F$  et la courbe invariante  $u$  sont de classe analytique sur la bande  $B_\delta$ , alors il existe un changement de coordonnées  $\Phi$  de classe analytique sur la bande  $B_\delta$ , défini sur un voisinage de la courbe invariante qui linéarise  $F$  faiblement. En plus si  $\alpha$  satisfait la condition de Brjuno,  $\Phi$  linéarise  $F$  fortement.*

**Proposition 2.25** *Si  $F$  est de classe  $C^\infty$  alors il existe un changement de coordonnées  $\Phi$  de classe  $C^\infty$ , défini dans un voisinage de la courbe invariante qui linéarise  $F$  faiblement. En plus si  $\alpha$  satisfait une condition diophantienne,  $\Phi$  linéarise  $F$  fortement.*

### 2.2.3 Linéarisation et stabilité autour d'une courbe indifférente

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la stabilité d'une courbe invariante indifférente ( $\kappa(u) = 1$ ) implique que la dynamique autour de cette courbe est bien comprise, plus précisément, linéarisable en module dans un petit voisinage autour de la courbe. Nous fixons, et notons  $\mathcal{U}$ , un tube ouvert invariant associé à la stabilité de la courbe.

**Remarque 7** *Au contraire de ce qui se passe dans le cas d'un tube qui est contracté, la seule hypothèse de l'existence d'un tube ouvert invariant n'assure pas l'existence d'une courbe invariante dans son intérieur comme le montre la dynamique holomorphe fibrée donnée par l'application constante  $f_\theta(z) = A(z)$  où  $A : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est un automorphisme hyperbolique du disque.*

Nous rappelons la définitions des sommes de Birkhoff associées à une courbe invariante  $S_u^n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \log |\partial_z f_{\theta+i\alpha}(u(\theta + i\alpha))|$  et le fait que quand il existe un tube ouvert invariant contenant la courbe ces sommes sont majorées uniformément. Quand la courbe est indifférente nous pouvons montrer en plus le

**Lemme 2.26** *Il existe  $\tilde{\theta}$  dans  $\mathbb{T}^1$  et une constante  $B_- < 0$  tel que les sommes de Birkhoff  $S_u^n(\tilde{\theta})$  sont minorées par  $B_-$  pour tout  $n \geq 1$ .*

**Preuve.** On raisonne par l'absurde. Etant donné  $l < 0$  il existe pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  un plus petit nombre naturel  $n_l(\theta) > 0$  tel que  $S_u^{n_l(\theta)}(\theta) < l$ .

On affirme qu'il existe dans ce cas un nombre naturel  $N_l > 0$  tel que  $n_l(\theta) < N_l$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Sinon, il devrait exister une suite  $\{\theta_j\}_{j \geq 1}$  telle que  $n_l(\theta_j) > j$  pour tout  $j \geq 1$ . Soit dans ce cas  $\bar{\theta}$  un point d'accumulation de cette suite. Comme les sommes de Birkhoff sont continues par rapport à  $\theta$ , il existe un intervalle ouvert  $I_{\bar{\theta}}$  autour de  $\bar{\theta}$  tel que  $S_u^{n(\bar{\theta})}(\theta) < l$  pour tout  $\theta$  dans cet intervalle. Il existe aussi  $\bar{j} > n(\bar{\theta})$  tel que  $\theta_{\bar{j}}$  est dans  $I_{\bar{\theta}}$ , donc  $S_u^{n(\bar{\theta})}(\theta_{\bar{j}}) < l$  ce qui contredit la définition de  $\theta_{\bar{j}}$ .

On sait d'après le Lemme 2.5 qu'il existe  $B_+ > 0$  telle que  $S_u^n(\theta) < B_+$ . Nous posons  $l = -2B_+$ ,  $N = N_l$ ,  $n(\theta) = n_l(\theta)$ . On affirme que pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  la somme de Birkhoff  $S_u^N(\theta)$  est  $< l/2$ , car

$$S_u^N(\theta) = S_u^{n(\theta)}(\theta) + S_u^{N-n(\theta)}(\theta + n(\theta)\alpha) < l + B_+ = l/2 < 0$$

ceci contredit le fait que  $S_u^N$  est de moyenne nulle ■

Nous avons en main tout ce qu'il faut pour appliquer le Théorème de Gottschalk-Hedlund (voir Théorème 1.5), à l'équation cohomologique

$$\tilde{u}_1(\theta + \alpha) - \tilde{u}_1(\theta) = \log |\rho_1(\theta)| \quad (2.25)$$

Nous posons  $u_1 = \exp(\tilde{u}_1)$ . En effectuant le changement de coordonnées

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta, u_1(\theta)z)$$

nous obtenons la forme normale pour  $F$

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, \tilde{\rho}_1(\theta)z + \tilde{\rho}_2(\theta)z^2 + \dots)$$

avec  $|\tilde{\rho}_1(\theta)| = 1$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Ceci nous permet supposer que  $F$  s'écrit sous la forme (2.17) avec  $|\rho_1(\theta)| = 1$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ , et la courbe invariante correspond à la section nulle  $\{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$ . Le tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  est un voisinage de cette section.

**Lemme 2.27** *Soit  $\Omega$  une région (simplement connexe) du plan complexe qui contient l'origine et soit  $R(\Omega)$  son rayon conforme. Il existe une suite de régions  $\{\Omega_n\}_{n \geq 2}$  qui contiennent l'origine telle que*

- i)  $\Omega_n \subset \Omega$  pour tout  $n \geq 2$ .
- ii)  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$  pour tout  $n \geq 2$ .
- iii)  $\bigcup_{n \geq 2} \Omega_n = \Omega$
- iv) Pour tout compact  $\Delta \subset \Omega$  il existe un nombre naturel  $n_\Delta \geq 2$  tel que  $\Delta \subset \Omega_{n_\Delta}$ .
- v) La suite des rayons conformes  $\{R(\Omega_n)\}_{n \geq 2}$  est strictement croissante et converge vers  $R(\Omega)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

**Preuve.** Soit  $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  une uniformisation de la région  $\Omega$ , c'est à dire, un biholomorphisme qui vérifie  $h(0) = 0, h'(0) = R(\Omega) > 0$ . Pour  $n \geq 2$  on pose  $\Omega_n = h(D_{1-1/n})$  ■

D'après ce lemme on associe à chaque  $\mathcal{U}_\theta$  une suite  $\{\Omega_n(\theta)\}_{n \geq 2}$  de régions qui contiennent l'origine et qui approchent par l'intérieur l'ouvert  $\mathcal{U}_\theta$  ainsi que son rayon conforme. Pour  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  nous notons par  $R(\theta)$  le rayon conforme de la région  $\mathcal{U}_\theta$  (par rapport à l'origine).

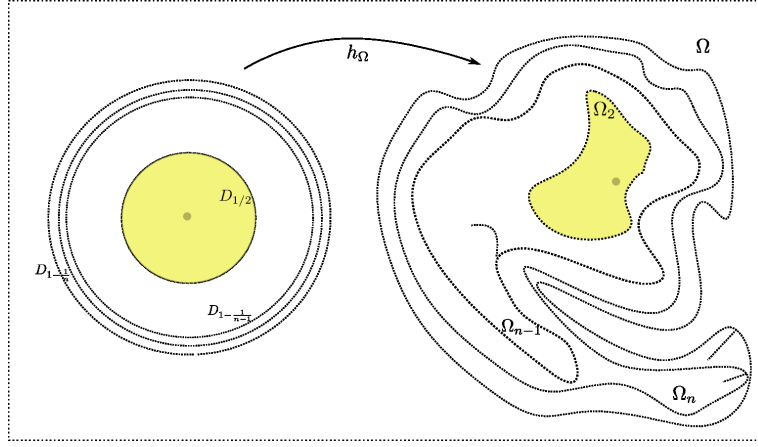


FIG. 2.2 –

**Lemme 2.28** *La fonction  $R : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est semi-continue inférieurement.*

**Preuve.** Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\tilde{\theta}$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Soit  $n^* \geq 2$  de façon que  $R(\Omega_{n^*}(\tilde{\theta})) > R(\tilde{\theta}) - \varepsilon$ . Comme  $\mathcal{U}$  est un ouvert, il existe un intervalle  $I_{\tilde{\theta}}$  autour de  $\tilde{\theta}$  tel que pour tout  $s$  dans cet intervalle, l'ouvert  $\mathcal{U}_s$  contient le compact  $\overline{\Omega_{n^*}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}})}$  (il suffit pour cela noter que ce compact est à une distance non nulle du complémentaire de  $\mathcal{U}$ ). On a

$$R(s) > R(\Omega_{n^*}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}})) > R(\tilde{\theta}) - \varepsilon \quad \blacksquare$$

**Lemme 2.29** *Le rayon conforme  $R(\theta)$  est indépendant de  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ .*

**Preuve.** Comme  $R : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est s.c.i., il existe  $\tilde{\theta}$  dans  $\mathbb{T}^1$  qui atteint le minimum de  $R$ . D'après l'inclusion

$$f_{\tilde{\theta}-\alpha}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}-\alpha}) \subset \mathcal{U}_{\tilde{\theta}}$$

on en déduit que

$$R\left(f_{\tilde{\theta}-\alpha}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}-\alpha})\right) \leq R(\tilde{\theta})$$

La fonction  $f_{\theta}$  préserve le rayon conforme des régions qui contiennent l'origine car  $|\rho_1(\theta)| = 1$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ , donc on a

$$R\left(f_{\tilde{\theta}-\alpha}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}-\alpha})\right) = R(\tilde{\theta} - \alpha)$$

ce qui implique l'égalité

$$R(\tilde{\theta} - \alpha) = R(\tilde{\theta})$$

d'après la minimalité de  $R(\tilde{\theta})$ . En repetant cet argument nous obtenons que  $R(\tilde{\theta} - n\alpha) = R(\tilde{\theta})$  pour tout  $n \geq 0$ . Ceci conclut la demonstration car une fonction semicontinue inférieurement qui atteint son minimum sur un ensemble dense est constante  $\blacksquare$

Nous définissons  $R_F^{\mathcal{U}}$  comme étant le rayon conforme de n'importe quelle des régions  $\mathcal{U}_{\theta}$ .

**Noyau de Caratheodory.** Ce petit rappel est tiré presque à l'identique de [Pom75]. Soit  $\{O_n\}_{n \geq 0}$  une suite de régions qui contiennent l'origine. Le *noyau*  $\nabla(\{O_n\})$  de la suite est défini comme étant l'union de l'origine et de l'ensemble des points  $z$  dans  $\mathbb{C}$  qui vérifient la propriété suivante

- ( $\star$ ) Il existe une région  $\Omega$  qui contient l'origine et le point  $z$ , de façon que  $\Omega \subset O_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand.

Le noyau  $\nabla(\{O_n\})$  peut éventuellement être réduit à l'origine. Dans tout autre cas il s'agit d'une région qui contient l'origine.

**Convergence au sens des noyaux.** On dit qu'une suite de régions  $\{O_n\}_{n \geq 0}$  converge *au sens des noyaux* vers une région  $O$  si toute sous-suite de  $\{O_n\}$  a la région  $O$  comme noyau.

**Théorème 2.30 (Caratheodory)** Soit  $\{f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \geq 0}$  une suite de fonctions univalentes, avec  $f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0$  pour tout  $n \geq 0$  et soit  $O_n = f_n(\mathbb{D})$ . Soit  $O$  une région. Alors la suite de régions  $\{O_n\}$  converge au sens des noyaux vers  $O$  si et seulement si la suite  $\{f_n\}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$ . De plus, dans ce cas, la limite  $f$  est une représentation conforme de  $O$ . De plus, pour tout compact  $K \subset O$ ,  $K$  est contenu dans  $O_n$  pour tout  $n$  assez grand et  $f_n^{-1}|_K$  converge uniformément vers  $f^{-1}|_K$ .

Nous voulons appliquer ce théorème aux régions  $\mathcal{U}_\theta$ , et pour cela le lemme suivant nous sera très utile

**Lemme 2.31** Soit  $\{\theta_n\}_{n \geq 0}$  une suite de points du cercle qui converge vers un point  $\tilde{\theta}$ . Le noyau de la suite de régions  $\{\mathcal{U}_{\theta_n}\}$  est égal à  $\mathcal{U}_{\tilde{\theta}}$ . En particulier la suite  $\{\mathcal{U}_{\theta_n}\}$  converge au sens des noyaux vers  $\mathcal{U}_{\tilde{\theta}}$ .

**Preuve.** Soit  $\nabla$  le noyau de la suite  $\{\mathcal{U}_{\theta_n}\}$ . Montrons que  $\mathcal{U}_{\tilde{\theta}} \subset \nabla$ . Soit  $z$  dans  $\mathcal{U}_{\tilde{\theta}}$ . Soit  $n^* \geq 2$  tel que  $z$  appartient à  $\Omega_{n^*}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}})$ . Comme  $\mathcal{U}$  est un ouvert, il existe un intervalle  $I_{\tilde{\theta}}$  autour de  $\tilde{\theta}$  tel que si  $s \in I_{\tilde{\theta}}$  alors  $\Omega_{n^*}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}}) \subset \mathcal{U}_s$ , d'où on tire que la région  $\Omega_{n^*}(\mathcal{U}_{\tilde{\theta}})$  est contenue dans  $\mathcal{U}_{\theta_n}$  pour tout  $n$  assez grand. Ceci garantit que  $z$  appartient au noyau  $\nabla$  des régions  $\mathcal{U}_{\theta_n}$ , c'est à dire, que

$$\mathcal{U}_{\tilde{\theta}} \subset \nabla \quad (2.26)$$

En particulier on voit que ce noyau  $\nabla$  n'est pas réduit à l'origine. Il est borné car les ouverts  $\mathcal{U}_\theta$  sont uniformément bornés. Son rayon conforme vérifie

$$R(\nabla) \geq R(\tilde{\theta}) = R_F^{\mathcal{U}} \quad (2.27)$$

Montrons que  $\nabla = \mathcal{U}_{\tilde{\theta}}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\tilde{n} \geq 2$  tel que (cf. Lemme 2.27)

$$R(\nabla) > R(\Omega_{\tilde{n}}(\nabla)) > R(\nabla) - \varepsilon$$

D'après la définition du noyau, pour tout point  $z$  qui appartient au compact  $\overline{\Omega_{\tilde{n}}(\nabla)}$  il existe une région  $\Omega_z$  qui contient l'origine, le point  $z$  lui même et qui est contenue dans toutes les



régions  $\mathcal{U}_{\theta_n}$  pour  $n$  assez grand. En passant par un sous-recouvrement fini de  $\overline{\Omega_{\tilde{n}}(\nabla)}$  par des régions  $\Omega_z$ , on voit que pour tout  $n$  assez grand le compact  $\overline{\Omega_{\tilde{n}}(\nabla)}$  est contenu dans  $\mathcal{U}_{\theta_n}$  car les régions qui le recouvrent le sont. Ceci implique que pour  $n$  assez grand

$$R_F^{\mathcal{U}} = R(\theta_n) > R(\Omega_{\tilde{n}}(\nabla)) > R(\nabla) - \varepsilon$$

d'où on conclut que le rayon conforme  $R_F^{\mathcal{U}} \geq R(\nabla)$  car l'inégalité ci-dessus a lieu pour tout  $\varepsilon > 0$ . En utilisant (2.27), (2.26) nous avons donc les égalités

$$R_F^{\mathcal{U}} = R(\nabla) \quad , \quad \mathcal{U}_{\tilde{\theta}} = \nabla$$

Comme toute sous-suite de  $\{\theta_n\}$  converge elle aussi vers  $\tilde{\theta}$ , toute sous-suite des régions  $\{\mathcal{U}_{\theta_n}\}$  a le même noyau  $\nabla = \mathcal{U}_{\tilde{\theta}}$  ■

Nous pouvons énoncer et prouver maintenant la principale proposition de cette section

**Proposition 2.32** *Il existe un homéomorphisme  $\Phi : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{U}$ , qui s'écrit sous la forme  $\Phi(\theta, z) = (\theta, \phi_\theta(z))$ , où chaque fonction  $\phi_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{U}_\theta$  est un biholomorphisme. La fonction  $\Phi$  linéarise  $F$  en module.*

**Preuve.** Soit  $\{h_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{U}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$  la famille des fonction uniformisantes associée à l'ouvert  $\mathcal{U}$ , avec  $h'_\theta(0) > 0$ , et soit  $\Phi : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{U}$  la fonction (bijective) définie par

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta, h_\theta(z)) \tag{2.28}$$

D'après le Lemme 2.31 et le Théorème 2.30,  $\Phi$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}$  sur  $\mathcal{U}$ .

Soit  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . La fonction  $l_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  définie par

$$l_\theta(z) = \Pi_2 \left( \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(\theta, z) \right) = h_{\theta+\alpha}^{-1} \left( f_\theta(h_\theta(z)) \right) \tag{2.29}$$

est holomorphe, univalente et vérifie

$$\begin{aligned} l_\theta(0) &= 0 \\ l'_\theta(0) &= (h'_{\theta+\alpha}(0))^{-1} \rho_1(\theta) h'_\theta(0) \\ &= (R_F^{\mathcal{U}})^{-1} \rho_1(\theta) R_F^{\mathcal{U}} \\ &= \rho_1(\theta) \end{aligned}$$

Comme  $|\rho_1(\theta)| = 1$ , le Lemme de Schwartz implique que  $l_\theta(z) = \rho_1(\theta)z$ , et cela pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Nous voyons alors finalement que pour tout point  $(\theta, z)$  dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}$  on a

$$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(\theta, z) = (\theta + \alpha, \rho_1(\theta)z) = \Lambda_{\rho_1}(\theta, z) \quad \blacksquare$$

**Tube ouvert invariant dans le cas analytique.** Nous disons qu'une courbe invariante  $u : B_\delta \rightarrow \mathbb{C}$  pour une  $dhf$   $F : B_\delta \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe analytique a un *tube ouvert invariant*  $\mathcal{U}$  si l'ensemble  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $B_\delta \times \mathbb{D}$  contenant la courbe et dont chaque fibre  $\mathcal{U}_\theta$ ,  $\theta \in B_\delta$ , est biholomorphe au disque  $\mathbb{D}$ .

### Linéarisation et stabilité dans le cas analytique

Supposons que la  $dhf$   $F$  et la courbe invariante indifférente sont de classe analytique sur la bande  $B_\delta$ . Nous nous proposons de montrer dans ce paragraphe que la linéarisation de  $F$  est aussi analytique. Plus précisément sous ces hypothèses nous montrerons la

**Proposition 2.33** *Il existe un tube ouvert  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  voisinage de la courbe invariante, un rayon  $r > 0$  et un changement de coordonnées biholomorphe  $\Phi : B_\delta \times D_r \rightarrow \mathcal{U}'$  qui linéarise  $F$  faiblement. De plus, si le nombre  $\alpha$  vérifie la condition de Brjuno  $\mathbb{B}$  alors  $\Phi$  linéarise  $F$  fortement.*

**Preuve.** Comme la courbe invariante  $u$  (qu'on suppose être la section nulle  $\{z \equiv 0\}_{\theta \in B_\delta}$ ) est contenue dans l'ouvert  $\mathcal{U}$ , il existe un rayon  $r' > 0$  tel que  $D_r \subset \mathcal{U}_\theta$  pour tout  $\theta$  dans  $B_\delta$ . L'ouvert  $\mathcal{U}$  est borné et invariant, donc il existe une constante  $R > 0$  telle que  $|f_\theta(z)| \leq R$  pour tout  $n \geq 0$  et pour tout point  $(\theta, z)$  dans  $\mathcal{U}$ . Considérons maintenant la famille de fonctions holomorphes  $\{g_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \geq 0}$  définies par

$$g_n(\theta, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=0}^{i-1} \rho_1(\theta + j\alpha) \right)^{-1} f_\theta^i(z) \quad (2.30)$$

Ces fonctions sont uniformément bornées sur l'ensemble  $\mathcal{U}$  car  $|g_n(\theta, z)| \leq R$  pour tout point  $(\theta, z)$  dans  $\mathcal{U}$ . Soient  $\delta' \in (0, \delta/2)$  et  $r'' \in (0, r'/2)$ . Les inégalités de Cauchy, soit en perdant sur le rayon ou soit en perdant sur la largeur de la bande, selon le cas, nous permettent de dire qu'il existe une constante positive  $C = C(\delta', r'')$  telle que pour tout  $n \geq 0$  on a que

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in B_\delta, z \in D_{r-r'}} |\partial_z g_n(\theta, z)| &\leq C \\ \sup_{\theta \in B_{\delta-\delta'}, z \in D_r} |\partial_\theta g_n(\theta, z)| &\leq C \end{aligned}$$

Donc les fonctions  $g_n|_{\overline{B_{\delta-\delta'} \times D_{r'-r''}}}$  sont uniformément lipchitz pour tout  $n \geq 0$ , ce qui implique en particulier que la famille de fonctions  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  restreintes à  $\overline{B_{\delta-\delta'} \times D_{r'-r''}}$  est équicontinue. Le Théorème d'Ascoli nous dit donc qu'il existe une sous-suite  $\{g_{n_i}\}_{i \geq 0}$  qui converge uniformément sur  $\overline{B_{\delta-\delta'} \times D_{r'-r''}}$  vers une fonction  $\tilde{g}$ . Cette fonction  $\tilde{g}$  est holomorphe sur  $B_{\delta-\delta'} \times D_{r'-r''}$  car est la limite uniforme des fonctions holomorphes  $g_{n_i}$ . Elle vérifie aussi pour tout  $\theta$  dans  $B_{\delta-\delta'}$  que

$$\tilde{g}(\theta, 0) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_{n_i}(\theta, 0) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \partial_z \tilde{g}(\theta, 0) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \partial_z g_{n_i}(\theta, 0) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{s=1}^{n_i} \left( \prod_{j=0}^{s-1} \rho_1(\theta + j\alpha) \right)^{-1} \prod_{j=0}^{s-1} \partial_z f_{\theta+j\alpha}^i(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ceci et le fait que  $\tilde{g}$  soit continue nous permettent d'inverser la fonction  $\tilde{g}(\theta, \cdot)$  dans un disque  $D_r$  de taille uniforme pour tout  $\theta$  dans  $B_{\delta-\delta'}$ . Nous définissons pour  $n \geq 0$  les fonctions  $\Phi_n(\theta, z) = (\theta, g_n(\theta, z))$ . On voit alors que la fonction limite  $\Phi : B_{\delta-\delta'} \times D_r \rightarrow \Phi(B_{\delta-\delta'} \times D_r)$  donnée par

$$\Phi(\theta, z) = (\theta, \tilde{g}(\theta, z)) \quad (2.31)$$

est biholomorphe. Soit  $(\theta, z)$  un point dans  $B_{\delta-\delta'} \times D_r$  et  $i \geq 0$ . Nous avons que la composition vérifie

$$\begin{aligned} \Phi_{n_i} \circ F(\theta, z) &= \left( \theta + \alpha, \frac{1}{n_i} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left( \prod_{j=0}^{s-1} \rho_1(\theta + \alpha + j\alpha) \right)^{-1} f_{\theta+\alpha}^s(f(\theta, z)) \right) \\ &= \left( \theta + \alpha, \rho_1(\theta) g_{n_i}(\theta, z) - \frac{\rho_1(\theta) f(\theta, z)}{n_i} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_i} \left( \prod_{j=1}^{n_i} \rho_1(\theta + j\alpha) \right)^{-1} f_{\theta}^{n_i+1}(z) \right) \end{aligned}$$

On aura à la limite alors que

$$\Phi \circ F = \Lambda_{\rho_1} \circ \Phi$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\delta' \in (0, \delta/2)$ , par continuation analytique on a que  $\Phi$  est définie et biholomorphe sur  $B_{\delta} \times D_r$ .

Si nous ajoutons l'hypothèse arithmétique de Brjuno sur le nombre  $\alpha$ , on peut résoudre l'équation cohomologique adéquate (voir section 1.3.2) et obtenir une forme normale pour  $F$  avec  $\rho_1(\theta) = e_{\bar{n}}(\theta) \kappa e^{2\pi i \beta}$  pour tout  $\theta \in B_{\delta}$  et donc la fonction  $\Phi$  linéarise  $F$  fortement ■

**Remarque 8** *Au contraire du cas d'un tube ouvert invariant qui est contracté, dans le cas d'une courbe indifférente le tube n'a pas la propriété de régularisation de la courbe, c'est-à-dire, même quand la dhf est différentiable (classe  $C^\infty$  ou analytique), la courbe peut être seulement de classe  $C^0$  si le nombre de rotation sur la base est bien approché par des rationnels. Plus précisément, considérons la dhf donnée par*

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, a(\theta) + z)$$

où  $a(\theta)$  est de classe analytique. L'équation de la courbe invariante s'écrit

$$a(\theta) + u(\theta) = u(\theta + \alpha) \quad (2.32)$$

Si nous choisissons le nombre  $\alpha$  d'une façon convenable l'équation ci-dessus a une solution  $u : B_{\delta} \rightarrow \mathbb{C}$  qui est continue mais n'est pas de classe  $C^1$ . Le tube  $\mathcal{U} = \mathbb{D} + \text{graph}(u)$  est invariant et ouvert car  $u$  est continue.

## 2.3 Le Théorème de Siegel pour les dynamiques holomorphes fibrées analytiques

Nous pouvons montrer un théorème de linéarisation beaucoup plus fort dans le cas d'une courbe invariante indifférente de degré nul de classe analytique pour une  $dhf$  de classe analytique. En fait, nous pouvons montrer une version du Théorème de linéarisation de Siegel adaptée au cas fibré. Ce résultat s'appuie seulement sur des propriétés arithmétiques des nombres de rotation associés à la courbe et pas sur les propriétés *a priori* sur la dynamique, comme celles demandées dans l'énoncé de la Propositions 2.32 (la stabilité de la courbe). On sait d'après Yoccoz [Yoc95] que dans le cas non fibré la condition de Brjuno sur le multiplicateur s'avère optimale. Le résultat que nous présentons ici ne prétend pas être optimal vis à vis de la condition arithmétique. Nous montrerons que sous une hypothèse arithmétique adéquate (cf. section 1.1 du chapitre 1) la dynamique locale autour d'une telle courbe est gouvernée par ses nombres de rotation. Nous énonçons ainsi le résultat de linéarisation

**Théorème 2.34** *Soit  $F$  une dhf de classe analytique sur la bande  $B_\delta$  et  $u : B_\delta \rightarrow \mathbb{C}$  une courbe invariante indifférente, de degré nul et dont son nombre de rotation transversal est  $\rho_{tr}(u) = \beta$ . Si la paire  $(\alpha, \beta)$  vérifie la condition diophantienne  $\mathbb{C}\mathbb{D}_{\geq 1}(c_0, \tau)$  pour certains  $c_0 > 0$ ,  $\tau \geq 0$ , alors il existe un tube ouvert invariant  $\mathcal{U}$  qui contient la courbe  $u$  où la dynamique de  $F$  est linéarisable fortement. La conjugaison entre  $F$  et la dynamique linéaire associée est analytique sur la bande  $B_{4\delta/5}$*

Autrement dit, il existe un rayon  $r > 0$  et un biholomorphisme  $H : B_{4\delta/5} \times D_r \rightarrow \mathcal{U}$  qui met la dynamique de  $F$  sous la forme

$$H^{-1} \circ F \circ H(\theta, z) = (\theta + \alpha, e^{2\pi i \beta} z)$$

Ceci étant, la preuve de ce théorème sera donnée à la fin du chapitre 5, car la technique de démonstration qu'on utilise sera à ce moment très bien maîtrisée et la preuve sera donc plus naturelle.

## 2.4 Existence d'orbites stables

Nous venons de voir que quand il existe un tube invariant autour d'une courbe invariante indifférente alors nous avons en gros une connaissance de la dynamique autour de la courbe. De façon équivalente, quand la dynamique est très bien comprise, disons linéarisable en module, l'existence d'un tel tube est immédiate. Dans cette section nous considérons le cas où un tel tube n'existe pas. Nous nous demandons s'il existe encore des orbites proches de la courbe invariante et autres que celles situées sur la courbe, bien entendu, qui restent dans le futur (et dans le passé) confinées autour de la courbe invariante. On appelle ces orbites des *orbites stables*. L'objectif de cette section est de généraliser les résultats de Pérez-Marco dans le cas non fibré. Nous devons avertir le lecteur que cette tâche n'est

accomplie que de façon partielle. Tous les outils que nous allons utiliser dans cette section ont été soit développés, soit inspirés par Pérez-Marco dans son article [PM97]. Certaines des démonstrations seront donc délibérément omises. Rappelons le résultat principal de [PM97]

**Théorème 2.35 (des Hérissons de Pérez-Marco)** *Soit  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$  un difféomorphisme holomorphe local avec un point fixe indifférent à l'origine,  $\lambda = e^{2\pi i\beta}$ ,  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $U$  un domaine de Jordan (l'intérieur d'une courbe de Jordan) autour de l'origine. On suppose que  $f$  et  $f^{-1}$  sont définies et univalentes dans un voisinage de  $\bar{U}$ . Il existe alors un ensemble  $K \subset \bar{U}$  compact, connexe et plein qui contient l'origine tel que*

- i)  $K \cap \partial U \neq \emptyset$ .*
- ii) L'ensemble  $K$  est complètement invariant, c'est à dire*

$$f(K) = f^{-1}(K) = K$$

Le point *i)* assure qu'un tel compact ne se réduit pas seulement à l'origine et en plus est *grand* car il touche le bord du domaine. Le point *ii)* nous dit que même dans le cas non linéarisable il existe des orbites (beaucoup d'ailleurs, s'accumulant à l'origine et sur le bord du domaine) qui restent autant dans le futur que dans le passé confinées dans  $U$ .

Dans un premier temps, nous allons étendre, de façon partielle, le Théorème des Hérissons de Pérez-Marco pour une composition  $f_p \circ \dots \circ f_1$ . Nous disons que le  $p$ -tuple de transformations holomorphes  $(f_1, \dots, f_p)$  est une *bonne chaîne* pour le  $p$ -tuple d'ensembles ouverts  $(U_1, \dots, U_p)$  si pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  on a

- i)  $U_i$  est un ouvert de Jordan (l'intérieur d'une courbe de Jordan) contenant l'origine.*
- ii)  $f_i$  est un difféomorphisme holomorphe local fixant l'origine,  $\partial_z f_i(0) = e^{2\pi i\beta_i}$ ,  $\beta_i \in \mathbb{T}^1$ .*
- iii)  $f_i$  est définie et univalente dans un voisinage de  $\bar{U}_i$  et  $f_i^{-1}$  est définie et univalente dans un voisinage de  $\bar{U}_{i+1}$ , où  $U_{p+1} = U_1$ .*

Pour fixer les idées nous allons faire les démonstrations pour  $p = 2$ , même si les arguments sont valables sans aucun changement pour le cas général. Soit alors  $(f_1, f_2)$  une bonne chaîne pour la paire  $(U_1, U_2)$ . Nous posons  $f = f_2 \circ f_1$  un difféomorphisme holomorphe local avec un point fixe indifférent dont le multiplicateur est  $e^{2\pi i(\beta_1 + \beta_2)}$ .

**Remarque 9** *Comme la fonction  $f = f_2 \circ f_1$  est holomorphe, il peut arriver que son domaine maximal de définition  $\text{dom}(f)$  soit plus grand que l'ensemble  $\text{dom}(f_2) \cap f_1(\text{dom}(f_1))$  où la composition est à priori définie, à cause de l'extension analytique. Dans les arguments qui suivent nous allons considérer les compositions comme étant définies seulement là où chaque fonction qui la compose peut s'appliquer et pas comme l'extension analytique de  $f$ .*

**Construction fondamentale.** Soient  $K_1 \subset \bar{U}_1$  et  $K_2 \subset \bar{U}_2$  des ensembles compacts, connexes et pleins vérifiant

$$f_1(K_1) = K_2 = f_2^{-1}(K_1), \quad f_2(K_2) = K_1 = f_1^{-1}(K_2)$$

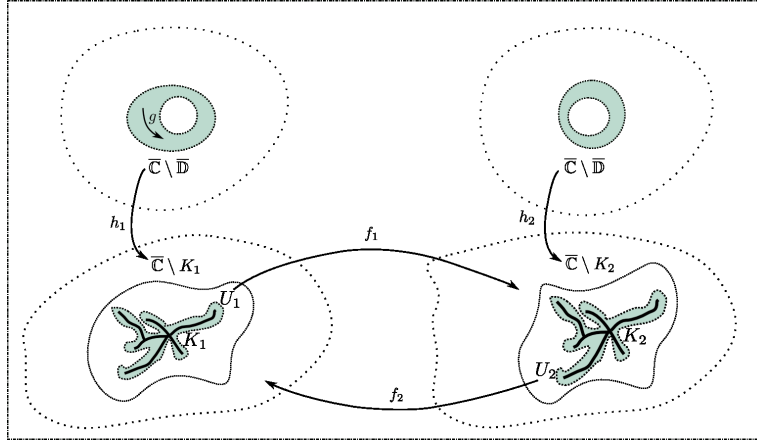


FIG. 2.3 – Esquisse de la construction fondamentale

On associe à de tels compacts un difféomorphisme analytique du cercle. Plus précisément soit  $h_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_1$  une uniformisation vérifiant  $h_1(\infty) = \infty$  et  $h_2$  définie de façon analogue pour  $K_2$ . La composition

$$h_1^{-1} \circ f_2 \circ h_2 \circ h_2^{-1} \circ f_1 \circ h_1 = h_1^{-1} \circ f \circ h_1$$

est un difféomorphisme holomorphe  $g$  défini dans un ouvert annulaire contenu dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , dont un des bords est  $\mathbb{T}^1 = \partial\mathbb{D}$ . Le Théorème d'extension de Carathéodory assure qu'un tel difféomorphisme s'étend continument à un difféomorphisme sur le bord  $\mathbb{T}^1$ . Le principe de réflexion de Schwartz permet d'étendre  $g$  à un ouvert annulaire autour de  $\mathbb{T}^1$ , ce qui produit un difféomorphisme holomorphe de cet anneau, qui préserve le cercle, donc un difféomorphisme analytique du cercle.

**Cas linéarisable.** Soit  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  un nombre qui vérifie une condition diophantienne. D'après le Théorème de Siegel (voir [Sie42])  $f$  est linéarisable dans un voisinage du point fixe  $z = 0$ . Soit  $S(f) \subset U_1$  le domaine maximal de linéarisation de  $f$  dans  $U_1$ , soit  $K_1 = \overline{S(f)}$  le compact obtenu par remplissage de la fermeture de  $S(f)$  et soit  $K_2 = f_1(K_1)$ . Supposons que  $\partial U_1 \cap K_1 = \partial U_2 \cap K_2 = \emptyset$ , c'est à dire, que  $K_1$  et  $K_2$  sont relativement compacts dans  $\overline{U_1}, \overline{U_2}$  respectivement. Nous appliquons la construction fondamentale à  $K_1$  et  $K_2$  pour obtenir un difféomorphisme analytique du cercle  $g$ .

**Lemme 2.36** *Sous les hypothèses ci-dessus le difféomorphisme du cercle  $g$  a pour nombre de rotation  $\varrho(g) = \beta$ .*

**Preuve.** Nous suivons un argument de [PM97]. Soit  $\{\Omega_n^1\}_{n \geq 0}$  une suite de régions dans  $S(f)$  tel que

- i)  $\overline{\Omega_n^1} \subset \Omega_{n+1}^1$  pour tout  $n \geq 0$ .
- ii)  $\bigcup_{n \geq 0} \Omega_n^1 = S(f)$ .
- iii)  $\overline{\Omega_n^1}$  est complètement invariant pour  $f$ .

Une telle suite peut s'obtenir comme l'image de disques de rayons croissant par l'application linéarisante de  $f$ . Nous définissons aussi la suite  $\{\Omega_n^2\}_{n \geq 0}$  par  $\Omega_n^2 = f_1(\Omega_n^1)$  qui vérifie des propriétés analogues d'exhaustion sur l'ensemble  $f_1(S(f))$ . Soit  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  la suite de difféomorphismes analytiques du cercle obtenue en appliquant la construction fondamentale à  $\overline{\Omega_n^1}$  et  $\overline{\Omega_n^2}$ . Comme  $g_n$  est linéarisable pour tout  $n \geq 0$  (car  $\overline{\Omega_n^1} \subset S(f)$ ) nous avons que  $\varrho(g_n) = \beta$  pour tout  $n \geq 0$ . Soient  $h_i^n$  les uniformisations de  $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_n^i}$  pour tout  $n \geq 0$  et  $i$  dans  $\{1, 2\}$ . Par définition de  $K_1$  la suite  $\{\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_n^i}\}_{n \geq 0}$  converge au sens des noyaux vers  $\nabla(\{\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_n^i}\}_{n \geq 0}) = \mathbb{C} \setminus K_i$ , pour  $i$  dans  $\{1, 2\}$ . Ceci implique que les difféomorphismes holomorphes  $g_n$  sont définis dans un même voisinage annulaire  $A$  de  $\mathbb{T}^1$  pour tout  $n$  assez grand. Soit  $C \subset A$  une courbe homotope et extérieure à  $\mathbb{T}^1$ . Soit  $C'$  sa réflexion par rapport à  $\mathbb{T}^1$ . Le Théorème des noyaux de Carathéodory implique que

$$g_n|_C = (h_1^n)^{-1} \circ f \circ h_1^n|_C \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g|_C = h_1 \circ f \circ h_1$$

de façon uniforme dans  $C$ . Nous avons le même résultat sur  $C'$ , donc en appliquant le principe du maximum à l'anneau compact  $A'$  dont les bords sont  $C$  et  $C'$ , on a que  $g_n|_{A'} \rightarrow g|_{A'}$  uniformément, d'où on tire que  $\varrho(g) = \beta$  car  $\varrho(g_n) = \beta$  pour tout  $n \geq 0$  ■

Le Théorème de linéarisation global de difféomorphismes analytiques du cercle (voir [Her79], [Yoc02]) implique alors que  $g$  est linéarisable dans un voisinage annulaire de  $\mathbb{T}^1$ . En transportant cet anneau par  $h_1$  et en le recollant avec  $K_1$  nous obtenons un domaine  $S'$  de linéarisation dans  $U_1$  plus grand que  $S(f)$ , ce qui contredit sa définition. Nous montrons de cette façon que forcément dans l'un des ouverts  $U_i$ ,  $i$  dans  $\{1, 2\}$ , le compact  $K_i$  rencontre le bord. Nous avons ainsi montré la

**Proposition 2.37** *Soit  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  une bonne chaîne pour les ouverts  $(U_1, \dots, U_p)$ . Supposons que la somme des nombres de rotation  $\beta = \sum_i \beta_i$  vérifie une condition diophantienne et soit  $S(f) \subset U_1$  le domaine maximal de linéarisation de  $f = f_p \circ \dots \circ f_1$  dans  $U_1$ . Considérons les ensembles compacts, connexes et pleins donnés par  $K_1 = \widehat{S(f)}$ ,  $K_2 = f_1(K_1), \dots, K_p = f_{p-1}(K_{p-1})$ . Il existe alors un indice  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $K_i \cap \partial U_i \neq \emptyset$ .*

Le but des paragraphes qui suivent est d'enlever l'hypothèse de linéarisation sur  $f$ . Plus précisément nous montrerons la

**Proposition 2.38** *Soit  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  une bonne chaîne pour les ouverts  $(U_1, \dots, U_p)$ . Il existe des ensembles compacts, connexes et pleins  $K_1 \subset \overline{U_1}, K_2 \subset \overline{U_2}, \dots, K_p \subset \overline{U_p}$  vérifiant*

$$f_i(K_i) = K_{i+1} \quad , \quad f_i^{-1}(K_{i+1}) = K_i$$

*pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, p\}$ , et un indice  $i^*$  de manière que  $K_i$  touche le bord de  $U_i$ , c'est à dire, tel que  $K_i \cap \partial U_i \neq \emptyset$ .*

La preuve de la proposition ci-dessus s'obtient en montrant que la conclusion est une propriété fermée et dense dans un espace approprié. Pour cela nous avons besoin de quelques résultats sur les ensembles compacts.

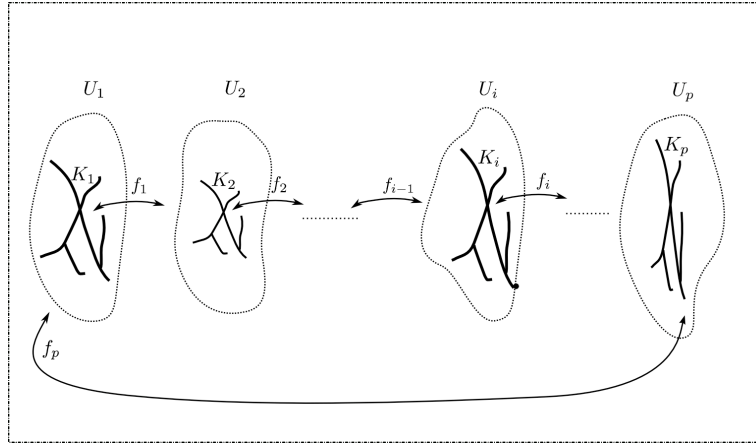


FIG. 2.4 – La Proposition 2.38

**Distance de Hausdorff sur les compacts.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et compact. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $A \subset X$ . Nous notons  $V_\varepsilon(A)$  le  $\varepsilon$ -voisinage de  $A$  dans  $X$

$$V_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

La distance de Hausdorff entre deux ensembles compacts non vides  $K_1, K_2$  qui appartiennent à  $X$  est définie comme

$$d_H(K_1, K_2) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid K_1 \subset V_\varepsilon(K_2) \text{ et } K_2 \subset V_\varepsilon(K_1) \}$$

qui est bien une distance dans l'espace  $\mathcal{K}(X)$  des ensembles compacts non vides de  $X$ . De plus  $(\mathcal{K}(X), d_H)$  est un espace métrique compact. L'espace  $\mathcal{K}_c(X)$  des ensembles connexes, compacts et non vides est un sous-espace compact de  $\mathcal{K}(X)$ . Soit  $(Y, d')$  un autre espace métrique compact. Nous notons  $C^0(X, Y)$  l'espace des fonctions continues de  $X$  vers  $Y$  et le dotons de la topologie de la convergence uniforme.

**Lemme 2.39** *L'application*

$$\begin{aligned} C^0(X, Y) \times \mathcal{K}(X) &\longrightarrow \mathcal{K}(Y) \\ (f, K) &\longmapsto f(K) \end{aligned}$$

*est continue.*

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble de toutes les  $p$ -tuples  $(f_1, \dots, f_p)$  qui vérifient les hypothèses de la Proposition 2.38 pour les ouverts  $(U_1, \dots, U_p)$ . On plonge  $\mathcal{F}$  dans le produit

$$C(\overline{U}_1, \mathbb{C}) \times C(\overline{U}_2, \mathbb{C}) \times C(\overline{U}_2, \mathbb{C}) \times C(\overline{U}_3, \mathbb{C}) \times \cdots \times C(\overline{U}_p, \mathbb{C}) \times C(\overline{U}_1, \mathbb{C})$$

par l'inclusion

$$(f_1, \dots, f_p) \longmapsto (f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}, \dots, f_p, f_p^{-1})$$

On munit  $\mathcal{F}$  de la topologie induite par la convergence uniforme dans ce produit.



**Lemme 2.40** *L'ensemble des  $p$ -tuples dans  $\mathcal{F}$  qui vérifient les conclusions de la Proposition 2.38 est fermé.*

**Preuve.** Soit  $\{(f_1^n, \dots, f_p^n)\}_{n \geq 0}$  une suite de  $p$ -tuples dans  $\mathcal{F}$  qui vérifient les conclusions de la Proposition 2.38 et qui converge vers le  $p$ -tuple  $(f_1, \dots, f_p)$  dans  $\mathcal{F}$ . Il existe donc des suites de compacts  $\{K_i^n\}_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{K}_c(\overline{U}_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , vérifiant

$$\begin{aligned} f_i^n(K_i^n) &= K_{i+1}^n \\ (f_i^n)^{-1}(K_{i+1}^n) &= K_i^n \end{aligned}$$

et de plus pour tout  $n \geq 0$  on a que  $K_i^n \cap \partial U_i \neq \emptyset$  pour au moins un entier  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Comme  $\mathcal{K}_c(\overline{U}_i)$  est compact pour tout  $i$ , en passant par une sous-suite si nécessaire, nous avons des compacts connexes  $\tilde{K}_i$  dans  $\mathcal{K}_c(\overline{U}_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  vérifiant

$$K_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{K}_i$$

pour la distance de Hausdorff correspondante et pour tout  $i$ . Il existe de plus un  $i^*$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tel que  $K_{i^*}^n \cap \partial U_{i^*} \neq \emptyset$  pour une infinité de valeurs de  $n$  et donc  $\tilde{K}_{i^*} \cap \partial U_{i^*} \neq \emptyset$ . Par passage à la limite on aura  $f_{i^*}(\tilde{K}_{i^*}) = \tilde{K}_{i^*+1}$  et  $f_{i^*}^{-1}(\tilde{K}_{i^*+1}) = \tilde{K}_{i^*}$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$ , modulo  $p$ . Finalement les ensembles  $K_i = \widehat{\tilde{K}_i}$ , remplissages de  $\tilde{K}_i$ , vérifient la conclusion de la Proposition 2.38 pour la  $p$ -tuple  $(f_1, \dots, f_p)$  ■

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la Proposition 2.38 en observant que si  $(f_1, \dots, f_p)$  appartient à  $\mathcal{F}$  pour des multiplicateurs  $(e^{2\pi i \beta_1}, \dots, e^{2\pi i \beta_p})$ , il existe pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$  une suite de nombres réels  $\{\theta_n^i\}_{n \geq 0}$  qui convergent vers zéro et tel que  $\sum_i (\beta_i + \theta_n^i)$  est un nombre qui vérifie une condition diophantienne pour tout  $n \geq 0$ . Les  $p$ -tuples

$$(e^{2\pi i \theta_n^1} f_1, \dots, e^{2\pi i \theta_n^p} f_p)$$

appartiennent à  $\mathcal{F}$  pour tout  $n$  assez grand et convergent vers  $(f_1, \dots, f_p)$ . En plus elles vérifient les conclusions de la Proposition 2.38 d'après la Proposition 2.37. Le lemme précédent nous permet de conclure ■

On revient au problème des  $dhf$ 's. Comme conséquence de la Proposition 2.38 nous montrerons le

**Théorème 2.41** *Soit  $F$  une dhf avec une courbe invariante  $u$  indifférente. Soit  $\mathcal{U}$  un tube ouvert contenant  $u$  dont ses fibres sont des domaines de Jordan. On suppose que  $\overline{\mathcal{U}}_\theta$  dépend continument de  $\theta$  et que  $F$  et  $F^{-1}$  définissent des dhf injectives au voisinage de  $\overline{\mathcal{U}}$ . Il existe alors un ensemble compact et connexe  $K \subset \overline{\mathcal{U}}$  tel que*

- i)  $\text{graph}(u) \subset K$ .
- ii)  $F(K) = F^{-1}(K) = K$ , c'est à dire,  $K$  est un ensemble complètement invariant par  $F$ .
- iii)  $K \cap \partial \mathcal{U} \neq \emptyset$ .

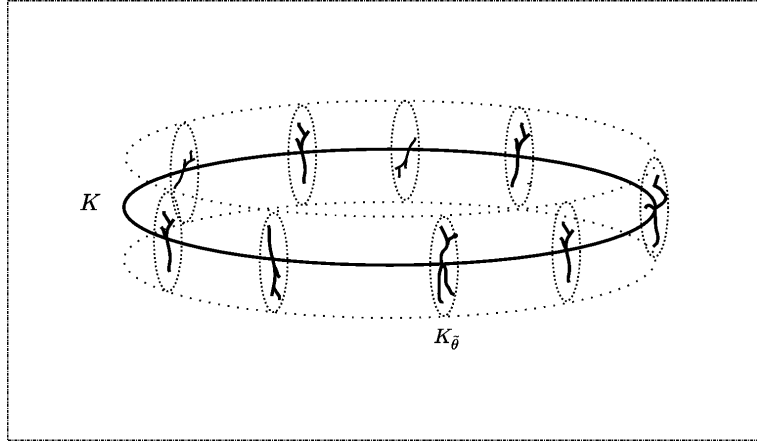


FIG. 2.5 –

La preuve se présente d'une façon très analogue à celle de la Proposition 2.38 (et très analogue aussi à la preuve originale du Théorème de Pérez-Marco). Nous allons permettre des  $dhf$  avec un nombre de rotation différent de  $\alpha$  (en fait rationnel) sur la base  $\mathbb{T}^1$ , et ceci sera le seul moment parmi tout ce travail où cette exception sera permise. Nous pouvons supposer comme d'habitude que la courbe invariante est la section nulle  $u = \{z \equiv 0\}_{\mathbb{T}^1}$ .

Soit ainsi  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  l'ensemble de toutes les  $dhf$   $F$  (à nombre de rotation libre sur la base  $\mathbb{T}^1$ ) pour lesquelles la section nulle est une courbe invariante indifférente, et telles que  $F$  et  $F^{-1}$  définissent des  $dhf$  injectives au voisinage de  $\bar{\mathcal{U}}$ . Ainsi si une  $dhf$   $F$  appartient à  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  elle s'écrit sous la forme

$$F(\theta, z) = (\theta + \alpha_F, \rho_1(\theta)z + \rho(\theta, z)) \quad (2.33)$$

où  $\alpha_F$  est un nombre réel quelconque,  $\rho_1$  est un fonction continue qui ne s'annule pas et tel que la moyenne

$$\int_{\mathbb{T}^1} \log |\rho_1(\theta)| d\theta = 0.$$

Le terme  $\rho(\theta, \cdot)$  représente les termes d'ordre plus grand que 2. On munit cet ensemble de la topologie de la convergence uniforme de  $F$  et  $F^{-1}$  sur  $\bar{\mathcal{U}}$ .

**Lemme 2.42** *L'ensemble des dhf dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  qui vérifient les conclusions du Théorème 2.41 est fermé.*

**Preuve.** Soit  $\{F_i\}_{i \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  dont tous les éléments vérifient les conclusions du théorème et qui converge vers une  $dhf$   $F$ . Soit  $\{K_i\}_{i \geq 0}$  une suite associée de compacts connexes vérifiant les conclusions du théorème. Pour tout  $i \geq 0$  le compact  $K_i$  contient la courbe invariante et possède un point  $(\theta_i, z_i)$  dans  $\partial\mathcal{U}$ . Comme  $\partial\mathcal{U}$  est un compact et l'espace  $\mathcal{K}_c(\bar{\mathcal{U}})$  des compacts connexes de  $\bar{\mathcal{U}}$  l'est aussi, en passant à une sous-suite si nécessaire on a qu'il existe un compact connexe  $K \subset \bar{\mathcal{U}}$  qui contient la courbe invariante

et un point  $(\tilde{\theta}, \tilde{z})$  tels que

$$\begin{aligned} K_i &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} K \\ (\theta_i, z_i) &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} (\tilde{\theta}, \tilde{z}) \in K \cap \partial \mathcal{U} \end{aligned}$$

Les propriétés de continuité dans les espaces considérés nous permettent de voir que  $K$  vérifie les conclusions du théorème ■

La preuve du Théorème 2.41 résulte alors du

**Lemme 2.43** *Soit  $F$  une dhf qui vérifie les hypothèses du Théorème 2.41. Il existe une suite dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  qui converge vers  $F$ , telle que tous ces éléments vérifient les conclusions du Théorème 2.41.*

**Preuve.** Nous écrivons  $F$  comme dans (2.33). Soit  $\{l_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes trigonométriques de moyenne nulle, qui convergent uniformément vers la fonction  $\log |\rho_1|$  (Théorème de Féjer). Comme  $\alpha$  est irrationnel il existe une suite de nombres rationnels  $p_n/q_n$  écrits de façon irréductible, qui convergent vers  $\alpha$  et tels que  $q_n$  est plus grand que le degré du polynôme  $l_n$ , pour tout  $n \geq 0$ . Nous posons

$$\rho_1^n = \frac{\rho_1}{|\rho_1|} e^{l_n} \quad (2.34)$$

Ces fonctions convergent uniformément vers  $\rho_1$ . Nous définissons une suite de dhf  $\{F_n\}_{n > 0}$  par

$$F_n(\theta, z) = \left( \theta + \frac{p_n}{q_n}, \rho_1^n(\theta)z + \rho(\theta, z) \right) \quad (2.35)$$

Pour  $n$  assez grand  $F_n$  appartient à  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  et en plus  $F_n$  converge vers  $F$ . Compte tenu de la définition de  $q_n$  nous pouvons résoudre l'équation cohomologique

$$\tilde{u}_1^n \left( \theta + \frac{p_n}{q_n} \right) - \tilde{u}_1^n(\theta) = l_n(\theta) \quad (2.36)$$

puisque la condition  $q_n > \deg(l_n)$  nous assure de ne pas tomber sur une résonance dans les coefficients de la solution. On pose  $u_1^n = \exp(\tilde{u}_1^n)$ . Cette fonction vérifie

$$\frac{u_1^n(\theta + p_n/q_n)}{u_1^n(\theta)} = e^{l_n(\theta)} \quad (2.37)$$

et donc le changement de coordonnées  $\tilde{F}_n = H_n^{-1} \circ F_n \circ H_n$ , où

$$H_n(\theta, z) = (\theta, u_1(\theta)z)$$

nous donne la forme normale pour  $F_n$

$$\tilde{F}_n(\theta, z) = \left( \theta + \frac{p_n}{q_n}, \tilde{\rho}_1^n(\theta)z + \tilde{\rho}^n(\theta, z) \right)$$

avec  $|\tilde{\rho}_1^n(\theta)| = 1$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . On pose  $\mathcal{U}^n = H_n^{-1}(\mathcal{U})$ . Soit  $\tilde{\theta}$  dans  $\mathbb{T}^1$ . On considère les transformations holomorphes

$$\gamma_i^n(z) = \tilde{f}_n\left(\tilde{\theta} + i\frac{p_n}{q_n}, z\right)$$

pour  $i$  dans  $\{0, \dots, q_n - 1\}$ . Ainsi le  $q_n$ -tuple  $(\gamma_0^n, \dots, \gamma_{q_n-1}^n)$  est une bonne chaîne pour les fibres  $\mathcal{U}_{\tilde{\theta} + i\frac{p_n}{q_n}}^n$  respectivement. On applique la Proposition 2.38 pour obtenir des compacts connexes pleins  $K_i^n \subset \mathcal{U}_{\tilde{\theta} + i\frac{p_n}{q_n}}^n$ ,  $i \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ , qui contiennent l'origine et vérifient

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n\left(\tilde{\theta} + i\frac{p_n}{q_n}, K_i^n\right) &= K_{i+1}^n \\ (\tilde{f}_n)^{-1}\left(\tilde{\theta} + i\frac{p_n}{q_n}, K_{i+1}^n\right) &= K_i^n \end{aligned}$$

On obtient aussi un indice  $i = i_n$  dans  $\{0, \dots, q_n - 1\}$  tel que  $K_{i_n}^n \cap \partial\mathcal{U}_{\tilde{\theta} + i\frac{p_n}{q_n}}^n \neq \emptyset$ . L'ensemble

$$K^n = H_n\left(\{z \equiv 0\}_{\mathbb{T}^1} \cup \left(\bigcup_{j=0}^{q_n-1} \left\{\tilde{\theta} + j\frac{p_n}{q_n}\right\} \times K_j^n\right)\right)$$

vérifie donc les conclusions du Théorème 2.41 pour  $F_n$ , ce qui montre la conclusion du théorème pour  $F$  ■

**Corollaire 2.44** *Soit  $F$  une dhf et  $u$  une courbe invariante indifférente. Il existe alors des orbites, autres que celles situées sur la courbe invariante, qui sont stables.*

**Preuve.** On suppose comme d'habitude que  $u = \{z \equiv 0\}_{\mathbb{T}^1}$  et  $F(\theta, z) = (\theta + \alpha, \rho_1(\theta)z + \rho(\theta, z))$ , avec  $\rho_1(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Il existe une constante  $C > 1$  telle que  $C > |\rho_1(\theta)| > C^{-1}$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . En appliquant le Lemme d'inversion uniforme (voir l'Annexe B) on obtient un rayon  $r > 0$  tel que  $f_\theta$  et  $f_\theta^{-1}$  sont définies et univalentes dans un voisinage du disque  $\overline{D_r}$ . En prenant  $\mathcal{U} = \mathbb{T}^1 \times D_r$  le Théorème 2.41 s'applique ■

## Deuxième partie

### Persistance de courbes invariantes



# Chapitre 3

## Persistance des courbes invariantes

Dans le chapitre précédent nous venons de voir une suite de résultats qui mettent en relation la dynamique d'une  $dhf$  autour d'une courbe invariante avec les données de cette courbe (multiplicateur, degré, nombre de rotation transversal). Nous pouvons dire donc que la courbe et les données associées déterminent la dynamique locale autour de la courbe, et dire aussi, plus vaguement, que l'existence d'une courbe invariante (à données fixées) nous fournit une connaissance de la dynamique dans une région non négligeable de l'espace. Dans ce chapitre (et les prochains qui contiennent les principaux théorèmes de ce travail), nous nous intéresserons à la question de savoir si cette *connaissance* de la dynamique dans une région de l'espace est une propriété stable de la dynamique vis à vis des perturbations sur la transformation. Plus précisément, nous allons étudier des petites perturbations de la transformation *autour* de la courbe invariante. Dit autrement, l'existence d'une courbe invariante implique qu'on peut écrire la  $dhf$  sous forme normale

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, \rho_1(\theta)z + \rho(\theta, z))$$

dans un voisinage tubulaire de la courbe. Il existe donc un rayon positif  $r$  petit tel que la fonction holomorphe  $\rho(\theta, \cdot)$  est convergente sur  $D_r$ . Ainsi, une petite perturbation de la  $dhf$  autour de la courbe sera une transformation de la forme

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, \tilde{\rho}_0(\theta) + (\tilde{\rho}_1(\theta) + \rho_1(\theta))z + \tilde{\rho}(\theta, z))$$

avec  $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1 : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions continues de taille petite (dans une topologie adéquate à la régularité des transformations qu'on traite), et avec  $\tilde{\rho}(\theta, \cdot)$  holomorphe dans un disque  $D_{r'}$ ,  $r' \in (0, r]$  dont la taille est comparable à la taille de  $\rho$  (dans un sens à préciser), pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  (pour tout  $\theta$  dans une bande adéquate dans le cas analytique). Ces hypothèses de proximité entre la perturbation et la transformation originale seront bien précisées au fur et à mesure qu'on énoncera les résultats pour chaque type de régularité. Notons que nous considérons des perturbations qui changent seulement la partie holomorphe des dynamiques. Le nombre de rotation sur la base  $\alpha$  est donc fixé.

Nous rappelons ici la définition de la norme du sup pour une fonction bornée  $f : \mathcal{V} \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathcal{V}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^k$ ,  $k \geq 1$ .

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \leq \sup_{z \in \mathcal{V}} |f(z)|$$

### 3.1 Persistance d'une courbe attractive

Soit  $F$  une  $dhf$  et  $u$  une courbe invariante attractive,  $\kappa = \kappa(u) \in (0, 1)$ . Quitte à effectuer un changement de coordonnées nous pouvons supposer que  $F$  s'écrit sous la forme

$$F(\theta, z) = (\theta + \alpha, \rho_1(\theta)z + \rho(\theta, z))$$

, qu'elle est définie et bornée sur  $\mathbb{T}^1 \times D_r$ ,  $r > 0$ , et en plus que

$$\|\rho_1\|_{\mathbb{T}^1} \leq \frac{\kappa + \kappa^{1/2}}{2} < 1$$

Dans ce cas il existe alors un rayon  $r' > 0$  (qui dépend de la taille de  $\rho$  et  $\kappa$ ) tel qu'on a  $|f_\theta(z)| < |z|$  pour  $z$  dans  $D_{r'}$  et tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Ceci implique que le tube  $\mathbb{T}^1 \times D_{r'}$  est contracté par la dynamique de  $F$ , et la courbe invariante  $u$  coïncide avec la courbe donnée par la Proposition 2.11.

Cette observation nous suggère une méthode pour montrer la persistance d'une courbe invariante attractive. Nous énonçons la persistance de la courbe attractive d'une façon plus générale en utilisant la notation  $f_\theta(z) = \rho_0(\theta) + \rho_1(\theta)z + \rho(\theta, z)$  pour la partie holomorphe des  $dhf$  traitées.

**Proposition 3.1** *Soient  $M > 0$ ,  $R > 0$  et  $\eta \in (0, 1)$  des nombres réels. Il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que pour toute  $dhf$   $F$  définie dans  $\mathbb{T}^1 \times D_R$  qui vérifie*

$$\|\rho_0\|_{\mathbb{T}^1} \leq \varepsilon \quad , \quad \|\rho_1\| \leq \eta + \varepsilon < 1 \quad , \quad \|\rho\|_{\mathbb{T}^1 \times D_R} \leq M$$

*il existe une courbe invariante  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow D_R$  qui est attractive. Si  $F$  est de classe  $C^\infty$  alors  $u$  est de classe  $C^\infty$ . Si  $F$  est analytique sur la bande  $B_\delta$  alors  $u$  est analytique sur une bande  $B_{\delta'}$ , avec  $\delta' \in (0, \delta)$ .*

**Preuve.** En fait, il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $r \in (0, R)$  tels que  $|f_\theta(z)| < |z|$  pour tout  $z$  dans  $D_r$ ,  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Ceci dit que le tube  $\mathbb{T}^1 \times D_r$  est contracté par la dynamique de  $F$  et donc la Proposition 2.11 (2.13, 2.12) assure l'existence d'une courbe continue (de classe  $C^\infty$ , de classe analytique respectivement) qui est invariante et attractive ■

### 3.2 Persistance d'une courbe répulsive

Quand il s'agit d'une courbe invariante répulsive, l'argument de l'inverse (voir section 2.1.2 du chapitre 2) nous permet de voir que la courbe invariante  $u$  devient une courbe attractive pour la transformation inverse  $F^{-1}$ , et qui est stable par des petites perturbations de la dynamique d'après la Proposition 3.1. L'application  $F \mapsto F^{-1}$  est continue en les topologies adéquates, selon le type de régularité traitée : la topologie de la convergence uniforme dans le cas continu, voir les chapitres 4, 5 pour les cas différentiable et analytique. Nous avons donc la



**Proposition 3.2** *Soit  $F$  une dhf définie sur un produit  $\mathbb{T}^1 \times D_R$ , qui possède une courbe invariante  $u$  répulsive. Il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $r \in (0, R)$  tels que si une dhf  $\tilde{F}$  vérifie*

$$\|F - \tilde{F}\|_{\mathbb{T}^1 \times D_r} \leq \varepsilon$$

*alors  $\tilde{F}$  possède une courbe invariante  $\tilde{u} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}_r$  répulsive. La courbe  $\tilde{u}$  est de classe  $C^\infty$  dans le cas  $C^\infty$  et analytique sur une petite bande dans le cas analytique.*

### 3.3 Persistance d'une courbe indifférente

Dans le cas d'une courbe invariante indifférente nous allons nous restreindre seulement à des courbes de degré nul et aux cas de la régularité supérieur (cas  $C^\infty$  et analytique). Nous allons aussi supposer que le nombre de rotation dans la base  $\alpha$  vérifie une hypothèse arithmétique pour résoudre l'équation cohomologique (1.13), ce qui nous permet d'écrire la forme normale

$$(\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, e^{2\pi i \theta \alpha} z + \rho(\theta, z))$$

pour la transformation considérée, autour de la courbe invariante. Ainsi, le nombre  $\alpha$  vérifie soit la condition diophantienne  $\mathbb{C}\mathbb{D}$  dans le  $C^\infty$ , soit la condition de Brjuno  $\mathbb{B}$  lorsqu'on traite le cas analytique.

Nous verrons que le problème de la persistance d'une courbe invariante avec nombre de rotation transversal  $\beta$  donné, est en fait un problème de petits diviseurs, c'est à dire, qu'il existe des restrictions liées aux propriétés arithmétiques de la paire de nombres de rotation  $(\alpha, \beta)$ , qui déterminent les réponses à la question qui nous occupe. Dans les deux prochains paragraphes nous allons essayer d'illustrer qu'elle est la nature de ces conditions arithmétiques.

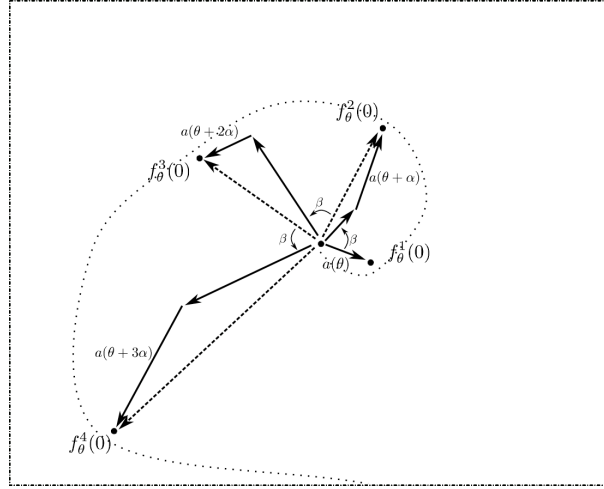
#### 3.3.1 Une résonance

On considère la dynamique triviale  $F_0(\theta, z) = (\theta + \alpha, e^{2\pi i \beta} z)$ . Nous voulons construire une perturbation de la forme

$$F_a(\theta, z) = (\theta + \alpha, a(\theta) + e^{2\pi i \beta} z) \tag{3.1}$$

où  $a : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue de taille petite, de façon à détruire la courbe invariante  $\{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$ . Une condition largement suffisante est que tous les points  $(\theta, z)$  s'échappent vers l'infini avec la dynamique de  $F_a$ . Comme les dynamiques de la forme (3.1) sont des isométries pour la métrique euclidienne, il suffira que l'origine  $z = 0$  s'échappe. On choisit la fonction  $a$  de façon à optimiser cet effet d'échappement à chaque itération, comme esquissé dans la Figure 3.3.1. On accomplit ceci en imposant que la direction de  $a(\theta + \alpha)$  coïncide avec celle de  $a(\theta)e^{2\pi i \beta}$ . On pose donc

$$a(\theta)e^{2\pi i \beta} = a(\theta + \alpha) \tag{3.2}$$

FIG. 3.1 – La dynamique de  $F_a$  projetée sur  $\mathbb{C}$ 

En utilisant les séries de Fourier pour résoudre cette équation, on voit qu'on a une solution non nulle si et seulement si il existe  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $k\alpha \equiv \beta \pmod{1}$ , car dans ce cas nous avons

$$a(\theta) = \hat{a}(k)e^{2\pi ik\theta}$$

On dit dans ce cas que la paire  $(\alpha, \beta)$  est rationnelle. Au paragraphe prochain on verra que lorsque la paire  $(\alpha, \beta)$  n'est pas rationnelle, les différences  $\|m\alpha - \beta\|$ ,  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ , sont celles qui présentent (au niveau formel) les obstructions pour la persistance de la courbe invariante, car elles apparaissent comme des (petits) diviseurs dans la solution d'une équation cohomologique associée au problème.

### 3.3.2 Présentation formelle du problème comme une question de petits diviseurs

En termes de formes normales, le problème se réduit à trouver un changement de coordonnées  $H(\theta, z) = (\theta, u_0(\theta) + u_1(\theta)z)$ , avec  $u_0, u_1 : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions de la même classe de différentiabilité que les transformations considérées,  $u_1(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et de degré nul, tel que la conjugaison de

$$F(\theta, z) = \left( \theta + \alpha, \rho_0(\theta) + (e^{2\pi i\beta} + \rho_1(\theta))z + \rho(\theta, z) \right)$$

par  $H$  s'écrit sous la forme normale

$$N_F(\theta, z) = \left( \theta + \alpha, e^{2\pi i\beta} z + \tilde{\rho}(\theta, z) \right),$$

ce qui se traduit par trouver des fonctions  $u_0, u_1$  de façon que

$$\begin{aligned} (H^{-1} \circ F \circ H)_\theta(z) &= \frac{1}{u_1(\theta + \alpha)} \left\{ \rho_0(\theta) + e^{2\pi i\beta} u_0(\theta) - u_0(\theta + \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + u_1(\theta)(e^{2\pi i\beta} + \rho_1(\theta))z + \rho(\theta, h_\theta(z)) \right\} \\ &= e^{2\pi i\beta} z + \tilde{\rho}(\theta, z) \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur nous obtenons les équations (approchées) suivantes pour  $u_0$  et  $u_1$  :

$$\frac{u_1(\theta)}{u_1(\theta + \alpha)} (e^{2\pi i\beta} + \rho_1(\theta)) = e^{2\pi i\beta} \quad (3.3)$$

$$e^{2\pi i\beta} u_0(\theta) - u_0(\theta + \alpha) = -\rho_0(\theta) \quad (3.4)$$

L'équation (3.3) donne lieu à une équation cohomologique classique dans laquelle les petits diviseurs  $\|m\alpha\|$ ,  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ , déterminent les obstructions. Pour sa part, l'équation (3.4) est une équation cohomologique tordue par un facteur constant  $e^{2\pi i\beta}$ . Ce sont donc les petits diviseurs  $\|m\alpha - \beta\|$ ,  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ , qui déterminent les obstructions. Au début du chapitre 1 nous traitons plus en détail ces équations, ainsi que les conditions arithmétiques qui permettent leur résolution.

### 3.3.3 Familles à un paramètre complexe

Dans ce paragraphe nous allons faire quelques considérations intuitives, et plutôt peu rigoureuses, qui vont cependant nous permettre de comprendre le cadre dans lequel on énoncera les Théorèmes de persistance des courbes invariantes indifférentes.

Soit  $\mathcal{F}$  "l'espace" des  $dhf$  définies dans le produit  $\mathbb{T}^1 \times D_R$ ,  $R > 0$ . Soit  $\rho : \mathbb{T}^1 \times D_R \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue, à fibres holomorphes et qui s'annulent jusque'à l'ordre 2 en  $z = 0$ . Soit l'ensemble

$$\mathbb{C}_\rho = \{N_t \mid t \in \mathbb{C}\}$$

où  $N_t$  est la  $dhf$ , ou forme normale, donnée par

$$N_t(\theta, z) = (\theta + \alpha, tz + \rho(\theta, z))$$

Soit  $\lambda = e^{2\pi i\beta}$ . On voit donc que pour  $t \sim \lambda$ ,  $t \neq \lambda$  la forme normale  $N_t$  est une petite perturbation de  $N_\lambda$  et que  $\beta$  n'est plus le nombre de rotation transversal de la courbe invariante  $\{z \equiv 0\}_{\theta \in \mathbb{T}^1}$ . En fait, nous pouvons en gros dire que le nombre de rotation transversal varie le long de la courbe complexe  $\mathbb{C}_\rho \subset \mathcal{F}$ , et que cette courbe rencontre l'ensemble

$$\mathcal{F}_\beta = \{F \text{ proche de } N_\lambda \mid f_\theta \text{ a une forme normale } e^{2\pi i\beta} z + \tilde{\rho}(\theta, z)\}$$

de façon transverse au point  $N_\lambda$ . Nous nous proposons de montrer que l'ensemble  $\mathcal{F}_\beta$  est de codimension 1 complexe pour certaines valeurs de  $\beta$ . Ceci nous amène à poser le problème en termes de familles à un paramètre complexe de  $dhf$ .

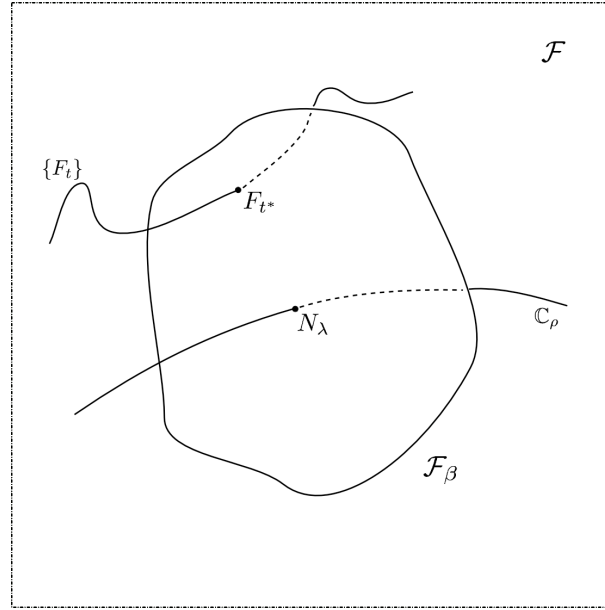


FIG. 3.2 – Interprétation géométrique du problème

De façon générale les théorèmes dynamiques de type KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser. Petits diviseurs pour des petites perturbations) sont énoncés en ces termes. Ceci est dû notamment au fait qu'on associe à ces dynamiques une valeur numérique (nombre de rotation, vecteur de rotation, fréquence, etc.) et que les perturbations changent cette valeur associée. Il faut ainsi ajouter un paramètre de la même nature numérique que la valeur associée qui sert à corriger ce changement. On sait aussi que cette correction peut se faire seulement pour des valeurs numériques qui vérifient certaines conditions arithmétiques (voir [Bos86], [Mar]).

Soit donc  $\{F_t\}_{t \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  une famille à un paramètre complexe de  $dhf$  (une courbe complexe dans  $\mathcal{F}$ ), dont chaque élément est proche d'une  $dhf$  qui possède une courbe invariante indifférente (disons proche de  $N_\lambda$ ). Nous allons montrer que si la famille  $\{F_t\}_{t \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  vérifie une propriété de transversalité appropriée, il existe alors un paramètre  $t^*$  dans  $\Sigma$  tel que  $F_{t^*}$  appartient à  $\mathcal{F}_\beta$ .

Nous voulons dans ce moment préciser ce que signifie qu'une courbe complexe dans  $\mathcal{F}$  est *transverse*. Nous demandons notamment que l'on puisse faire varier le nombre de rotation transversal (même s'il ne sera pas nécessairement bien défini pour tous les paramètres car pour cela on a besoin d'une courbe invariante). Pour une courbe  $u_t : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  qui est proche de la section nulle, les quantités suivantes sont proches

$$\int_{\mathbb{T}^1} \log \{ \partial_z f_\theta(u_t(\theta)) \} d\theta \sim \int_{\mathbb{T}^1} \log (\lambda + \rho_{1,t}(\theta)) d\theta$$

où la définition de  $\rho_{1,t}$  est immédiate suivant la notation usuelle. Nous disons donc qu'une famille à un paramètre complexe  $\{F_t\}_{t \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  de  $dhf$  est *transverse* si la quantité  $\int_{\mathbb{T}^1} \log (\lambda + \rho_{1,t}(\theta)) d\theta$  bouge avec le paramètre. Comme la taille de  $\rho_{1,t}$  est très petite ceci revient à

dire que la dérivée

$$\partial_t \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}(\theta) d\theta$$

est *grande*, où le sens de cette grandeur sera bien défini dans les énoncés des théorèmes, dans les deux cas de régularité que nous allons traiter, et dont les démonstrations respectives occupent l'essentiel du reste de ce travail.



# Chapitre 4

## Cas infiniment différentiable

Dans ce chapitre nous allons traiter le problème de la persistance d'une courbe invariante indifférente de degré nul en classe  $C^\infty$ . Nous considérons une famille  $\{F_s\}_{s \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  à un paramètre  $s \in \Sigma \subset \mathbb{C}$  complexe de  $dhf$  où chaque  $F_s$  est une  $dhf$  de classe  $C^\infty$ . Nous disons qu'une telle famille est *lisse* si, écrite sous la notation habituelle

$$\begin{aligned} F_s(\theta, z) &= (\theta + \alpha, f_s(\theta, z)) \\ &= (\theta + \alpha, \rho_{0,s}(\theta) + \rho_{1,s}(\theta)z + \lambda z + \rho_s(\theta, z)), \end{aligned}$$

les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^1 \times \Sigma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (s, \theta) &\longmapsto \rho_{0,s}(\theta), \rho_{1,s}(\theta) \end{aligned}$$

sont des fonctions de classe  $C^\infty$  et en plus la fonction  $\rho : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{D} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^\infty$ . Les fibres  $\rho_s(\theta, \cdot)$  sont holomorphes, continues jusqu'au bord  $\partial\mathbb{D}$  et s'annulent jusqu'au l'ordre 2 en  $z = 0$  pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et tout  $s$  dans  $\Sigma$ . Nous fixons la notation  $\lambda = e^{2\pi i\beta}$ . Dans ce chapitre nous allons désigner une famille de  $dhf$  soit par  $\{F_s\}$ , soit par  $\{f_s\}$  où  $f_s$  représente la partie holomorphe de la dynamique  $F_s$ . Nous disons que  $F_s$  est la  $dhf$  associée à  $f_s$ . Nous donnons aussi l'adjectif de *lisse* ( $C^\infty$ ) à une famille de parties holomorphes  $\{f_s\}_{s \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$ . Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre nous allons introduire quelques notations.

**Des notations et normes considérées.** Pour éviter toute confusion nous adoptons la notation  $f(\theta, \cdot)$  pour les fonctions holomorphes  $\Pi_2 F$  en gardant la place du sous-indice pour le paramètre complexe. Nous allons aussi écrire  $f'(\theta, z)$  au lieu de  $\partial_z f(\theta, z)$  et  $f^{(i)}(\theta, z)$  pour les dérivées d'ordre supérieur  $\partial_z^i f(\theta, z)$ .

Pour une fonction  $g : \mathbb{T}^1 \rightarrow (B, |\cdot|_B)$  de classe  $C^\infty$ , où  $B$  est un espace de Banach avec norme  $|\cdot|_B$ , nous considérons la norme  $C^0$  comme étant

$$\|g\|_0 = \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |g(\theta)|_B$$

et pour  $r$  dans  $\mathbb{N}$  les normes  $C^r$  comme

$$\|g\|_r = \sum_{i=0}^r \left\| \frac{\partial^i g}{\partial \theta^i} \right\|_0$$

L'espace de Banach que nous aurons toujours en tête sera l'espace  $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$  des fonctions holomorphes du disque unité complexe qui sont continues jusqu'au bord. Pour une matrice  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nous allons noter  $\|A\|_{\mathcal{L}}$  sa norme usuelle

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{|v|=1} |Av|$$

et le *plus petit valeur propre*  $[A]_{\mathcal{L}}$

$$[A]_{\mathcal{L}} = \inf_{|v|=1} |Av|$$

où  $|\cdot|$  est une norme dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemme 4.1** *Soit  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une matrice avec  $[A]_{\mathcal{L}} \neq 0$ . Alors la matrice  $A$  est inversible et la norme de la matrice inverse  $A^{-1}$  vérifie*

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq [A]_{\mathcal{L}}^{-1}$$

**Preuve.** La condition  $[A]_{\mathcal{L}} \neq 0$  implique que le noyau  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ . Comme l'ensemble  $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$  est compact, le sup et le inf dans les définitions de  $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}}$  et  $[A]_{\mathcal{L}}$  sont atteints, d'où l'inégalité suit ■

Le but de ce chapitre est de montrer qu'une condition diophantienne sur la paire  $(\alpha, \beta)$  implique la persistance de la courbe invariante en codimension 1 complexe. Plus précisément nous montrerons le

**Théorème 4.2** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie l'hypothèse  $\mathbb{C}\mathbb{D}_1$  et pour toutes constantes  $L > 1, M > 1, T > 1$  il existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  qui dépend de  $L, M, T, (\alpha, \beta)$ , un nombre entier naturel  $r \geq 2$  qui dépend de la paire  $(\alpha, \beta)$  et une constante positive universelle  $C$  tels que, si une famille à un paramètre complexe  $\{f_s\}_{s \in \Sigma}$  de fonctions de  $\mathbb{T}^1$  vers  $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$  vérifie pour un certain  $\varepsilon$  dans  $(0, \tilde{\varepsilon}]$*

- $\|\rho_{0,s}\|_r \leq \varepsilon$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon) \subset \Sigma$
- $\|\rho_{1,s}\|_r \leq \varepsilon$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon) \subset \Sigma$
- $\left[ \partial_s \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}(\theta) d\theta \Big|_{s=0} \right]_{\mathcal{L}} > L^{-1}$
- $\|\rho_s\|_r \leq M$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon) \subset \Sigma$
- $\|\partial_s^2 \rho_{1,s}\|_0 + \|\partial_s \rho_s\|_0 \leq T$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon)$

alors il existe un paramètre  $s^*$  dans le disque  $D(0, 2CL\varepsilon)$  et une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  de classe  $C^\infty$ , de degré nul, qui est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F_{s^*}(\theta, z) = (\theta + \alpha, f_{s^*}(\theta, z))$ , et son nombre de rotation transversal est  $\varrho_{\text{tr}}(u) = \beta$ .



Le théorème ci dessus découlera d'une version plus faible qui cependant est plus adaptée à la méthode de démonstration utilisée

**Théorème 4.3** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie l'hypothèse diophantienne  $\mathbb{CD}_1$  il existe  $\bar{\varepsilon} > 0$  et un nombre naturel  $r \geq 2$  tels que si une fonction  $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \Omega(\overline{\mathbb{D}})$  satisfait  $\|f - \lambda z\|_r < \bar{\varepsilon}$  alors il existe  $t$  dans  $\mathbb{C}$  et une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  de classe  $C^\infty$  de degré nul, qui est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F^*(\theta, z) = (\theta + \alpha, e^t f)$ , et son nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(u) = \beta$ .*

Le Théorème 4.3 est donc la version du Théorème 4.2 pour le cas particulier de la famille  $\{f_t\}_{t \in \mathbb{C}} = \{e^t f\}_{t \in \mathbb{C}}$  et  $f$  proche de  $\lambda z$ . Nous pouvons noter que la condition diophantienne demandée dans les hypothèses du théorème est exactement celle qui apparaît comme nécessaire et suffisante pour pouvoir toujours résoudre l'équation linéarisée associée au problème (voir section 1.2). Cette simple observation nous permet de montrer que la condition diophantienne est optimale pour le problème de la persistance de la courbe invariante dans le cas  $C^\infty$  comme le montre la

**Proposition 4.4** *Soit  $\alpha \in \mathbb{CD}$  et soit  $\beta$  tel que la paire  $(\alpha, \beta)$  ne satisfait pas la condition diophantienne  $\mathbb{CD}_1$ . Pour tous  $\varepsilon > 0, r$  dans  $\mathbb{N}$  il existe une fonction  $a : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  et de norme  $C^r$  plus petite que  $\varepsilon$  telle que la famille à un paramètre complexe*

$$F_t(\theta, z) = (\theta + \alpha, ta(\theta) + t\lambda z)$$

*vérifie que pour tout  $t$  dans  $\mathbb{C}$  la dynamique holomorphe fibrée  $F_t$  ne possède aucune courbe invariante de classe  $C^\infty$  avec  $\beta$  comme nombre de rotation transversal.*

**Preuve.** Notons d'abord que pour une telle famille la dérivée par rapport à  $z$  de la partie holomorphe est toujours égal à  $t\lambda = te^{2\pi i\beta}$ , donc le seul paramètre qui permet l'existence d'une courbe invariante avec nombre de rotation transversal égal à  $\beta$  est  $t = 1$ . L'hypothèse de transversalité est immédiate. Supposons que pour une fonction  $a : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  nous avons une courbe invariante  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  pour la dynamique holomorphe fibrée  $F(\theta, z) = (\theta + \alpha, a(\theta) + \lambda z)$ . Nous pouvons alors déterminer de façon unique cette courbe à l'aide de l'équation de la courbe invariante

$$a(\theta) + e^{2\pi i\beta} u(\theta) = u(\theta + \alpha)$$

qui est bien une équation cohomologique comme celles étudiées dans la section 1.2. La Proposition 1.8 nous permet construire une fonction  $a$  de façon que l'unique courbe invariante solution à l'équation ci-dessus ne soit même pas une distribution ■

## 4.1 Le Théorème des Fonctions Implicites de Hamilton

Depuis les travaux de Sergeraert [Ser72] et plus particulièrement ceux de Herman [Her85b], [Bos86], l'utilisation des théorèmes de fonctions implicites dans les espaces de

Fréchet pour résoudre des problèmes dynamiques faisant intervenir des petits diviseurs est devenue très fructueuse. Cette technique repose sur le fait que la résolution du problème linéaire associé est fortement relié aux propriétés arithmétiques des fréquences impliquées, comme nous pouvons voir dans la discussion des équations cohomologiques (voir section 1.2). Un théorème de fonctions implicites assure en général l'existence de solutions au le problème non linéaire qui nous occupe pourvu que le problème linéaire admette des solutions. Le Théorème des Fonctions Implicites de Hamilton nous permet d'appliquer cette technique dans le cadre des fonctions de classe  $C^\infty$ , qui d'habitude nous mènent à travailler avec des espaces qui ne sont pas des espaces de Banach, mais des espaces de Fréchet. La différence essentielle avec les théorèmes des fonctions implicites classiques dans les espaces de Banach repose sur le fait que celui de Hamilton nous exige de résoudre le problème linéaire associé non pas seulement au point où la solution est connue, mais dans tout un voisinage de ce point. Les prochains paragraphes vont préciser tous les objets mathématiques qui interviennent dans l'énoncé du Théorème de Hamilton ainsi que les espaces qui vont nous permettre de nous servir de ce théorème pour montrer la version faible du Théorème de la persistance de la courbe invariante dans le cas  $C^\infty$  (Théorème 4.3). Nous renvoyons le lecteur aux articles [Ham82], [Bos86] pour un traitement plus détaillé du Théorème de Hamilton.

### 4.1.1 Bons Espaces de Fréchet

Nous disons que l'espace vectoriel topologique  $E$  est un *bon espace de Fréchet au sens de Hamilton* s'il existe une famille croissante de seminormes  $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  qui définissent sa topologie, une famille d'opérateurs d'approximation et lissage  $\{S_t\}_{t>1}$  et des constantes positives  $C_{n,k}$  pour chaque paire  $(n, k)$  dans  $\mathbb{N}^2$  qui vérifient

1.  $S_t : E \rightarrow E$  est une application linéaire continue.
2. Si  $k \leq n, \forall x \in E, \forall t \in ]1, +\infty]$ 

$$\begin{cases} \|S_t(x)\|_n \leq C_{n,k} t^{n-k} \|x\|_k \\ \|[Id - S_t](x)\|_k \leq C_{k,n} t^{k-n} \|x\|_n \end{cases}$$

Les dernières inégalités impliquent des inégalités de convexité sur les seminormes  $\|\cdot\|_i$ , (*Hadamard*) : pour chaque paire  $(n, k)$  dans  $\mathbb{N}^2$  il existe des constantes positives  $\tilde{C}_{n,k}$  tels que

$$\|x\|_l \leq \tilde{C}_{k,n} \|x\|_k^{1-\alpha} \|x\|_n^\alpha \quad (4.1)$$

pour tout  $x$  qui appartient à  $E$ , pour tous les entiers  $k \leq l \leq n$ , où  $\alpha$  est défini par  $l = (1 - \alpha)k + \alpha n$ .

La somme directe (le produit)  $E \oplus F$  de deux bons espaces de Fréchet est un bon espace de Fréchet avec les seminormes  $\|(u, v)\|_{i_{E \oplus F}} = \|u\|_{i_E} + \|v\|_{i_F}$  et les opérateurs de lissage et approximation  $S_t(u, v) = (S_t^E u, S_t^F v)$ . Nous disons que l'application  $f : U \subset E \rightarrow F$  d'un ouvert  $U$  d'un bon espace de Fréchet  $E$  vers un autre bon espace de Fréchet  $F$ , est une *bonne application au sens de Hamilton* si pour tout  $x_0$  qui appartient à  $U$  il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $U$ , un entier positif  $r$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$  des constantes positives  $C_i$  tels que

$$\|f(x)\|_i \leq C_i (1 + \|x\|_{i+r}) \quad (4.2)$$

pour tout  $x$  dans  $V$  et pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ .

**Différentiabilité au sens de Gâteaux.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f$  une application de  $U$  vers  $F$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  (au sens de Gâteaux) lorsque

1.  $f$  est continue.
2. Il existe une application  $Df : U \times E \rightarrow G$  continue, linéaire en la deuxième coordonnée et telle que pour tout  $x$  dans  $U$ ,  $y$  dans  $E$  on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ f(x + ty) - f(x) \right\} = Df(x)y$$

Les applications de classe  $C^k$  (au sens de Gâteaux) sont définies par récurrence sur  $k$  : soit  $k$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $f$  est dite de classe  $C^k$  lorsqu'elle est de classe  $C^1$  et que  $Df$  est de classe  $C^{k-1}$  sur l'ouvert  $U \times E$  de  $E \times E$ . Nous disons que  $f$  est une bonne application de classe  $C^k$  ( $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) si  $f$  est de classe  $C^k$  au sens de Gâteaux, et que  $f$  ainsi que ses dérivés jusque à l'ordre  $k$  sont des bonnes applications (une telle dérivé  $D^i f$  est une application à valeurs dans  $F$  définie sur l'ouvert  $U \times E^i$  de  $E^{i+1}$ ).

**Proposition 4.5** *Donnons nous trois bons espaces de Fréchet  $E, F, G$ ,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $V$  un ouvert de  $F$ . Si  $f : U \rightarrow V$  et  $g : V \rightarrow G$  sont des bonnes applications de classe  $C^k$  ( $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ), alors la composition  $g \circ f$  est une bonne application de classe  $C^k$ . La projection  $E \times F \rightarrow E$  est une bonne application de classe  $C^k$  pour tout  $k$ .*

### 4.1.2 Théorème des Fonctions Implicites

**Théorème 4.6 (Fonction implicite)** *Donnons nous trois bons espaces de Fréchet  $E, F, G$ ,  $U$  un ouvert de  $E \times F$ ,  $f : U \rightarrow G$  une bonne application de classe  $C^r$  ( $2 \leq r \leq \infty$ ) et  $(x_0, y_0)$  qui appartient à  $U$ . Supposons qu'il existe un voisinage  $V_0$  de  $(x_0, y_0)$  et une bonne application continue et linéaire dans la deuxième coordonnée  $L : V_0 \times G \rightarrow F$  telle que si  $(x, y)$  appartient à  $V_0$  alors  $D_2 f(x, y)$  est inversible avec  $L(x, y)$  comme son inverse. On en déduit alors que  $x_0$  a un voisinage  $W$  dans lequel est définie une bonne application de classe  $C^r$ ,  $g : W \rightarrow F$  telle que :*

1.  $g(x_0) = y_0$
2. Pour tout  $x$  dans  $W$  la paire  $(x, g(x))$  appartient à  $U$  et se vérifie que  $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$

*En plus, si  $x$  appartient à  $W$ ,  $y$  est dans un petit voisinage au tour de  $y_0$  et on a que  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  alors  $y = g(x)$ .*

## 4.2 Les bons espaces de Fréchet $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$

Nous définissons  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$  comme l'espace des fonctions  $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow B$  de classe  $C^\infty$  (au sens de Gâteaux) à valeurs dans un espace de Banach  $(B, |\cdot|_B)$  et nous le munissons de

la famille de seminormes  $C^r$  définies comme au début de ce chapitre. Avec ces seminormes l'espace  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$  devient un espace de Fréchet. Nous définirons des opérateurs d'approximation et lissage qui le font devenir un bon espace de Fréchet sur lequel nous pourrions appliquer le théorème 4.6.

### 4.2.1 Opérateurs de lissage et approximation sur $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$

Les opérateurs que nous allons définir dans cette section sont classiques et nous renvoyons le lecteur aux articles [H76], [Her83a] pour les démonstrations. La seule chose à souligner dans notre cas est que l'espace d'arrivée des fonctions est un espace de Banach, où on peut définir, de la même façon que dans le cas réel ou complexe, l'intégrale de Riemann d'une fonction (voir [Kat04]). L'opération  $*$  de convolution est ainsi bien définie. Par la suite nous identifierons les fonctions qui appartiennent à  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$  aux fonctions dans  $C_{\mathbb{Z}}^\infty(\mathbb{R}, B)$ , les fonctions de classe  $C^\infty$  qui sont  $\mathbb{Z}$ -périodiques à valeurs dans  $B$ . Soit  $\eta$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}, B)$  vérifiant  $\text{supp}(\eta) \subset [-1, 1]$ ,  $\eta(-x) = \eta(x)$  et  $\eta(x) = 1$  si  $|x| \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \eta(\xi) d\xi$ ; on pose, pour  $t \geq 1$ ,  $\phi_t(x) = t\phi(tx)$ . Pour  $f$  dans  $C_{\mathbb{Z}}^\infty(\mathbb{R}, B)$  on définit l'opérateur de lissage et approximation

$$S_t f = f * \phi_t = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \phi_t(y) dy \in C_{\mathbb{Z}}^\infty(\mathbb{R}, B) \quad (4.3)$$

Par la formule d'inversion de Fourier, on a pour tout  $v$  dans  $B$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$

$$S_t(v e^{2\pi i n \theta}) = v \eta\left(-\frac{n}{t}\right) e^{2\pi i n \theta} \quad (4.4)$$

donc  $S_t f$  est un polynôme trigonométrique de degré au plus  $|t|$ . Les opérateurs  $S_t$  ont les propriétés suivantes de lissage et approximation

**Proposition 4.7** *Pour chaque paire  $(k, n)$  dans  $\mathbb{N}^2$  il existe des constantes positives  $C_{k,n}$  telles que si  $f$  appartient à  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$  et  $n \geq k$  alors pour tout  $t \geq 1$*

1.  $\|S_t f\|_n \leq C_{k,n} t^{n-k} \|f\|_k$
2.  $\|S_t f - f\|_k \leq C_{n,k} t^{k-n} \|f\|_n$

## 4.3 Preuve du Théorème 4.3

À partir des bons espaces de Fréchet  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, B)$  définis dans la section 4.2 on définit ici les bons espaces de Fréchet que nous allons utiliser lors de la preuve du Théorème 4.3 :

1. L'espace  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}^1$  vers l'espace de Banach  $\mathbb{C}$  est le bon espace de Fréchet  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ .
2. Le bon espace de Fréchet  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}}))$  est l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}^1$  vers l'espace de Banach  $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$ . Ceci est l'espace des parties holomorphes des dynamiques holomorphes fibrées de classe  $C^\infty$ . Rappelons que l'espace de Banach  $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$  est l'espace des fonction holomorphes sur  $\mathbb{D}$  qui sont continues sur jusqu'au bord, avec la norme  $\|f\|_{\Omega(\overline{\mathbb{D}})} = \sup_{|z|<1} |f(z)|$ .

**Lemme 4.8** Soit l'ensemble ouvert  $A = \{u \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \mid \|u\|_0 < 1/2\}$  de  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ .  
Les applications

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) &\longrightarrow \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{D(0, 3/4)})) \\ f &\longmapsto f^{(i)} = \frac{\partial^i f}{\partial z^i} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \times C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \\ (u, v) &\longmapsto uv \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_0 &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_0 \\ v &\longmapsto v^{-1} \\ v &\longmapsto e^v \end{aligned}$$

où  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_0$  est l'espace ouvert de  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  des fonctions qui ne s'annulent pas,  
4.

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_{d_0} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \\ h &\longmapsto \log h \end{aligned}$$

où  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_{d_0}$  est l'espace ouvert de  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  des fonctions de degré nul,  
5.

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \int_{\mathbb{T}^1} v(\theta) d\theta \end{aligned}$$

6. l'application  $\eta_r$

$$\begin{aligned} \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{D(0, r)})) \times A &\xrightarrow{\eta_r} C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \\ (f, u) &\longmapsto f(\cdot, u(\cdot)) \end{aligned}$$

pour tout  $r$  dans  $(1/2, 1]$ ,  
sont de bonnes applications au sens de Hamilton.

**Preuve.** Le point 1. est une conséquence des estimations de Cauchy. Les points 2., 3., 4., 5., sont classiques et en fait ce sont des bonnes applications de classe  $C^\infty$ . Nous montrerons par la suite le point 6. Rappelons que le fait d'être une bonne application est un fait local, donc étant donnée  $(\bar{f}, \bar{u})$  dans  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) \times A$  nous fixons un voisinage borné  $C^0$  de

$\bar{f}$  dans  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{D(0, r)}))$  et un voisinage  $C^0$  de  $\bar{u}$  dans  $A \subset C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ . Notons que les estimations de Cauchy assurent l'existence pour chaque paire  $(i, j)$  dans  $\mathbb{N}^2$ , de constantes positives  $C_{i,j}$  telles que

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} f^{(i)}(\theta, u(\theta)) \right\|_0 \leq C_{i,j} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial \theta^j} \right\|_0 \quad (4.5)$$

car nous pouvons permettre des pertes de rayon uniformes. Calculons quelques dérivées de  $\eta_r$  par rapport à  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_r(f, u)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \theta}(\cdot, u(\cdot)) + f'(\cdot, u(\cdot)) \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \eta_r(f, u)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\cdot, u(\cdot)) + \frac{\partial f'}{\partial \theta}(\cdot, u(\cdot)) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial f'}{\partial \theta}(\cdot, u(\cdot)) \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad + f''(\cdot, u(\cdot)) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + f'(\cdot, u(\cdot)) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

Plus généralement nous voyons que grâce aux estimations de Cauchy (4.5) il nous suffit d'estimer les termes de la forme

$$\left\| \frac{\partial^j f}{\partial \theta^j} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^{i_1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^{i_2} \cdots \left( \frac{\partial^n u}{\partial \theta^n} \right)^{i_n} \right\|_0$$

avec  $j + i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n = n$ , par rapport aux seminormes  $\|f\|_n$  et  $\|u\|_n$ . En utilisant les inégalités de convexité de Hadamard (4.1) nous avons les estimations

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial \theta^j} \right\|_0 &\leq \tilde{C}_{0,n}^{\Gamma^\infty} \|f\|_0^{\frac{n-j}{n}} \|f\|_n^{\frac{j}{n}} \leq A_n \|f\|_n^{\frac{j}{n}} \\ \left\| \frac{\partial^s u}{\partial \theta^s} \right\|_0^{i_s} &\leq (\tilde{C}_{0,n}^{C^\infty} \|u\|_0^{\frac{n-s}{n}} \|u\|_n^{\frac{s}{n}})^{i_s} \leq B_n \|u\|_n^{\frac{si_s}{n}} \end{aligned}$$

pour des constantes positives  $A_n, B_n$  qui dépendent seulement du voisinage de  $\bar{f}$  à part de  $n$ . En considérant un produit adéquat des inégalités ci-dessus nous avons

$$\left\| \frac{\partial^j f}{\partial \theta^j}(\theta, u(\theta)) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^{i_1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^{i_2} \cdots \left( \frac{\partial^n u}{\partial \theta^n} \right)^{i_n} \right\|_0 \leq D_n \|f\|_n^{\frac{j}{n}} \|u\|_n^{\frac{n-j}{n}}$$

pour des constantes positives  $D_n$ . L'inégalité de Young implique finalement que

$$\left\| \frac{\partial^j f}{\partial \theta^j}(\theta, u(\theta)) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^{i_1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^{i_2} \cdots \left( \frac{\partial^n u}{\partial \theta^n} \right)^{i_n} \right\|_0 \leq D_n (\|f\|_n + \|u\|_n)$$

On peut en déduire donc que l'application  $\eta_r$  est une bonne application de classe  $C^0$  ■

**Corollaire 4.9** *L'application  $\eta_r$  (cf. 6. du Lemme 4.8) est une bonne application de classe  $C^\infty$  pour tout  $r$  dans  $(1/2, 1]$ .*

**Preuve.** Nous devons montrer que toutes les dérivées  $D^i \eta_r$  sont des bonnes applications de classe  $C^0$ . Voyons qu'est ce qui se passe avec  $D\eta_r$

$$\begin{aligned} D\eta_r(f, u)(\Delta f, \Delta u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(f + t\Delta f)(\cdot, u + s\Delta u(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))] \\ &= f'(\cdot, u(\cdot))\Delta u + \Delta f(\cdot, u(\cdot)) \end{aligned}$$

Ceci est une fonction à 4 variables dans un bon espace de Fréchet (le produit de bons espaces) qui peut s'écrire comme la composition de bonnes applications qui apparaissent dans le lemme précédent, donc c'est une bonne application. Pour les dérivées d'ordre supérieur il se passe de façon analogue ■

### Les bons opérateurs $\mathbb{M}_\alpha, \mathbb{M}_{\alpha, \beta}$

Soit  $v$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ . Nous considérons les équations cohomologiques

$$\phi(\theta) - \phi(\theta + \alpha) = v(\theta) \quad (4.6)$$

$$\lambda \tilde{\phi}(\theta) - \tilde{\phi}(\theta + \alpha) = v(\theta) \quad (4.7)$$

Si  $\int_{\mathbb{T}^1} v(\theta) d\theta = 0$  nous avons déjà vu que sous l'hypothèse diophantienne pour  $\alpha$  l'équation (4.6) a pour solution

$$\phi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{v}(n)}{e^{2\pi i n \alpha} - 1} e^{2\pi i n \theta}$$

avec la normalisation  $\hat{\phi}(0) = 0$ . Ainsi  $\phi$  est de classe  $C^\infty$ . De même, sous l'hypothèse diophantienne pour la paire  $(\alpha, \beta)$  la solution de l'équation (4.7) est

$$\tilde{\phi}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{v}(n)}{e^{2\pi i n \alpha} - e^{2\pi i n \beta}} e^{2\pi i n \theta}$$

qui est aussi de classe  $C^\infty$ . Nous définissons les opérateurs  $\mathbb{C}$ -linéaires

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_* &\rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \\ v &\mapsto \phi \\ \mathbb{M}_{\alpha, \beta} : C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \\ v &\mapsto \tilde{\phi} \end{aligned}$$

où  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont définies ci-dessus et  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_*$  est l'espace des fonctions dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  de moyenne nulle. Ainsi définis ces opérateurs sont inversibles (compte tenue de la normalisation  $\int_{\mathbb{T}^1} \phi = 0$ ).

**Lemme 4.10** *Les opérateurs  $\mathbb{M}_\alpha, \mathbb{M}_{\alpha, \beta}$  sont des bonnes applications au sens de Hamilton.*

**Preuve.** La théorie classique des séries de Fourier d'une fonction  $f$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  assure que les coefficients de sa série de Fourier vérifient les inégalités

$$\|f\|_i \leq B_i \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left( (1 + |k|)^{i+2} |\hat{f}(k)| \right) \quad (4.8)$$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left( (1 + |k|)^i |\hat{f}(k)| \right) \leq C_i \|f\|_i \quad (4.9)$$

pour des constantes positives  $B_i, C_i$  qui dépendent seulement de  $i$  dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $v$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ . Les inégalités ci-dessus et la condition diophantienne sur  $\alpha$  impliquent que pour tout  $i \geq 0$  il existe des constantes positives  $C'_i, B'_{i+2}$  tels que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{M}_\alpha(v)\|_i &\leq C_i \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left( (1 + |k|)^{i+2} \left| \frac{\hat{v}(k)}{e^{2\pi i n \alpha} - 1} \right| \right) \\ &\leq C'_i \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left( (1 + |k|)^{i+4} |\hat{v}(k)| \right) \\ &\leq B'_{i+2} \|v\|_{i+2} \end{aligned}$$

La preuve pour  $\mathbb{M}_{\alpha, \beta}$  étant analogue nous l'omettons ■

### 4.3.1 Correction du nombre de rotation transversal

Pour toute  $f$  dans  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}}))$  telle que la taille  $C^0$  de  $f - \lambda z$  est suffisamment petite et pour toute courbe continue  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  aussi de taille  $C^0$  petite nous pouvons définir uniformément la fonction  $\log f'(\theta, u(\theta))$  qui vérifie  $\log \lambda = 2\pi i \beta$ , car le degré de la fonction  $f'(\theta, u(\theta))$  dépend continûment de la paire  $(f, u)$ . Dans ce cas nous pouvons calculer l'intégrale suivante

$$\mathcal{I}(f, u) = \frac{1}{2\pi i} \int \log f'(\theta, u(\theta)) d\theta \quad (4.10)$$

Notons que quand la courbe  $u$  est invariante par la dynamique associée à  $f$ , et de degré nul, ce nombre coïncide avec le nombre de rotation transversal  $\varrho_{tr}(u)$ . Avec cette définition nous pouvons donner du sens à l'affirmation suivante "pour n'importe quelle paire  $(f, u)$  il existe toujours un nombre complexe  $t$  qui corrige le nombre de rotation transversal à la valeur  $\beta$ ".

**Proposition 4.11** *Pour tout nombre réel  $\beta$  dans  $[0, 1)$ , pour toute application  $f$  dans un voisinage  $U$  de  $f_0 \equiv \lambda z$  dans  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}}))$  et pour toute courbe  $u$  dans un voisinage  $V$  de  $u_0 \equiv 0$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ , la fonction  $t : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$  définie par l'égalité  $\mathcal{I}(e^t f, u) = \beta$  est une bonne application de classe  $C^\infty$ . En plus, il existe une constante positive universelle  $C$  telle que*

$$|t| \leq C \|f' - \lambda\|_{C^0} \quad (4.11)$$



**Preuve.** En fait, la formule (4.10) nous permet calculer explicitement la valeur de  $t$ . Plus précisément, soient  $U, V$  les voisinages qui nous permettent de calculer l'intégrale  $\mathcal{I}$  comme au paragraphe précédent, alors

$$\mathcal{I}(e^t f, u) = \frac{1}{2\pi i} \int \log e^t f'(\theta, u(\theta)) d\theta \quad (4.12)$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \left( t + \int \log f'(\theta, u(\theta)) d\theta \right) \quad (4.13)$$

alors  $t$  est une bonne application de classe  $C^\infty$  d'après la Proposition 4.5 et les lemme 4.8, 4.9. L'estimation (4.11) s'obtient facilement à l'aide de (4.13) ■

Dorénavant chaque fois que nous écrivons  $e^t f(\theta, u(\theta))$ , et qu'il n'y a pas lieu à confusion, il faudra penser toujours que  $t = t(f, u)$ .

### La bonne application $u_1$

L'égalité  $\mathcal{I}(e^t f, u) = \beta$  et l'hypothèse  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{D}$  nous permettent de résoudre l'équation

$$e^t f'(\theta, u(\theta)) = e^{2\pi i \beta} \frac{u_1(\theta + \alpha)}{u_1(\theta)} \quad (4.14)$$

avec  $u_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})_0$ , et où en plus  $(f, u) \mapsto u_1$  est une bonne application au sens de Hamilton. En effet, dans les bons voisinages, où la fonction  $t$  est bien définie, l'équation (4.14) se réduit à l'équation cohomologique

$$t + \log f'(\theta, u(\theta)) = 2\pi i \beta + \tilde{u}_1(\theta + \alpha) - \tilde{u}_1(\theta) \quad (4.15)$$

On voit que la condition  $\mathcal{I}(e^t f, u) = \beta$  est la condition intégrale nécessaire pour résoudre cette équation. Pour assouplir la notation nous introduisons la fonction  $l(f, u)(\theta) = \log f'(\theta, u(\theta))$ . Il est clair que l'application  $(f, u) \mapsto l(f, u)$  est une bonne application dans les voisinages que nous considérons ici. Nous avons alors

$$\tilde{u}_1(\theta) = \mathbb{M}_\alpha(l(u, f))(\theta)$$

L'application  $(f, u) \mapsto \tilde{u}_1$  est une bonne application au sens de Hamilton d'après les résultats de la section 4.3, et il en est de même de l'application

$$(f, u) \longmapsto u_1 = e^{\tilde{u}_1}.$$

Si en outre, si les voisinages  $V, U$  sont suffisamment petits la distance  $|u_1(\theta) - 1|$  est très petite et uniformément bornée, et en particulier  $u_1(\theta)$  ne s'annule pas. Il est immédiat de vérifier que  $u_1$  satisfait l'équation (4.14).

### 4.3.2 Le Théorème 4.3 sous la forme d'un problème de fonction implicite

Considérons l'application  $\Theta : \left( U \subset \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) \right) \times \left( V \subset C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \right) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  définie par

$$\Theta(f, u) = e^t f(\theta, u(\theta)) - u(\theta + \alpha) \quad (4.16)$$

où l'application  $t(f, u)$  et les ensembles  $U, V$  sont définis dans la Proposition 4.11. Cette application est une bonne application de classe  $C^\infty$ . On peut sans peine voir que le fait que  $u$  soit invariante pour la dynamique holomorphe fibrée associée à  $e^t f$  est équivalente au fait que  $\Theta(f, u)$  soit identiquement nulle. Notons que dans le cas où  $f_0 \equiv \lambda z$  et  $u_0 \equiv 0$  nous avons

$$\Theta(f_0, u_0) = 0$$

La preuve du Théorème 4.3 sera une application directe du Théorème des Fonctions Implicite de Hamilton, c'est-à-dire, la courbe invariante  $u$  sera définie d'une façon implicite à partir de l'équation  $\Theta(f, u) = 0$  autour de la solution déjà connue  $(f_0, u_0)$ .

#### Inversion de la différentielle

La partie la plus importante pour appliquer le Théorème de Hamilton est l'inversion de la différentielle par rapport à la deuxième variable, ce qui dans notre cas se traduit par trouver une bonne application continue  $L(f, u, \Delta g)$ , linéaire en  $\Delta g$ , définie pour toute paire  $(f, u)$  dans un voisinage de  $(f_0, u_0)$  et pour tout  $\Delta g$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  de façon que si nous posons  $\Delta u = L(f, u, \Delta g)$  nous avons

$$D_2 \Theta(f, u) \Delta u = \Delta g. \quad (4.17)$$

Dans ce qui se suit nous allons résoudre cette équation (en  $\Delta u$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ ) d'une façon formelle. La différentielle partielle de  $\Theta$  par rapport à  $u$  en la direction  $\Delta u$  est

$$D_2 \Theta(f, u) \Delta u = e^t f(\cdot, u(\cdot)) (\partial_u t \cdot \Delta u) + e^t f'(\cdot, u(\cdot)) \Delta u - \Delta u(\cdot + \alpha) \quad (4.18)$$

où  $\partial_u t \cdot \Delta u$  est la différentielle de  $t$  par rapport à  $u$  dans la direction  $\Delta u$ , qui est un nombre complexe. Nous prenons  $u_1(f, u) = u_1$  comme dans (4.14). L'équation (4.17) devient donc

$$e^t f(\cdot, u) (\partial_u t \cdot \Delta u) + \frac{u_1(\cdot + \alpha)}{u_1} e^{2\pi i \beta} \Delta u - \Delta u(\cdot + \alpha) = \Delta g \quad (4.19)$$

Avec la notation  $\widetilde{\Delta u} = \frac{\Delta u}{u_1}$ ,  $\widetilde{\Delta g} = \frac{\Delta g}{u_1(\cdot + \alpha)}$ ,  $\widetilde{f} = \frac{e^t f(\cdot, u)}{u_1(\cdot + \alpha)}$  nous avons

$$e^{2\pi i \beta} \widetilde{\Delta u}(\theta) - \widetilde{\Delta u}(\theta + \alpha) = \widetilde{\Delta g}(\theta) - (\partial_u t \cdot \Delta u) \widetilde{f}(\theta) \quad (4.20)$$

En appliquant l'opérateur  $\mathbb{C}$ -linéaire (inversible)  $\mathbb{M}_{\alpha, \beta}$  aux deux cotés on obtient de façon équivalente

$$\widetilde{\Delta u} = \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\widetilde{\Delta g}) - (\partial_u t \cdot \Delta u) \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\widetilde{f}) \quad (4.21)$$

On peut calculer explicitement la valeur de  $\partial_u t \cdot \Delta u$ , car en dérivant l'égalité  $\mathcal{I}(e^t f, u) = \beta$  dans la direction  $\Delta u$  nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi i} \left( (\partial_u t \cdot \Delta u) + \int_{\mathbb{T}^1} \frac{f''(\theta, u(\theta)) \Delta u(\theta)}{f'(\theta, u(\theta))} d\theta \right) = 0 \quad (4.22)$$

ce qui ajouté à l'égalité (4.21) nous donne

$$\partial_u t \cdot \Delta u = - \int_{\mathbb{T}^1} \frac{f''(\theta, u(\theta)) \Delta u(\theta)}{f'(\theta, u(\theta))} d\theta \quad (4.23)$$

$$= - \int_{\mathbb{T}^1} \frac{f''(\theta, u(\theta)) u_1(\theta) \left( \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\widetilde{\Delta g})(\theta) - (\partial_u t \Delta u) \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\tilde{f})(\theta) \right)}{f'(\theta, u(\theta))} d\theta \quad (4.24)$$

$$\partial_u t \cdot \Delta u = \frac{- \int_{\mathbb{T}^1} \frac{f''(\theta, u(\theta)) u_1(\theta)}{f'(\theta, u(\theta))} \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\widetilde{\Delta g})(\theta) d\theta}{1 - \int_{\mathbb{T}^1} \frac{f''(\theta, u(\theta)) u_1(\theta)}{f'(\theta, u(\theta))} \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\tilde{f})(\theta) d\theta} \quad (4.25)$$

Nous posons finalement

$$\Delta u = u_1 \left( \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\widetilde{\Delta g}) - (E \mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\tilde{f})) \right) \quad (4.26)$$

où  $E = \partial_u t \cdot \Delta u$  comme dans (4.25). On voit que si  $f''(\theta, u(\theta))$  est suffisamment petit par rapport à la taille  $C^0$  de  $u_1$  et  $\mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\tilde{f})$ , le nombre complexe  $\partial_u t \Delta u$  est bien défini et en plus l'application  $(f, u, \Delta g) \mapsto \partial_u t \Delta u$  est une bonne application au sens de Hamilton. Il est direct aussi que la définition ci-dessus pour  $\Delta u$  vérifie l'équation (4.17), et l'application  $(u, f, \Delta g) \mapsto \Delta u$  est une bonne application au sens de Hamilton dans un voisinage adéquat de la paire  $(f_0, u_0)$ . Or, les conditions sur  $f''$ ,  $u_1$ ,  $\mathbb{M}_{\alpha, \beta}(\tilde{f})$  s'obtiennent en rétrécissant suffisamment le voisinage autour de  $(f_0, u_0)$  qui sert à calculer  $t$ . Nous avons en main tous les ingrédients pour appliquer le Théorème de Hamilton à l'application  $\Theta$  : Il existe une bonne application de classe  $C^\infty$

$$\begin{aligned} \Xi : \tilde{U} \subset \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) &\longrightarrow \mathbb{C} \times C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \\ \Xi(f) &\longmapsto (t, u) \end{aligned}$$

définie dans un voisinage  $\tilde{U}$  de  $f_0$  (une  $C^r$  boule, pour un certain  $r \in \mathbb{N}$ ) telle que la courbe  $u$  est invariante pour la dynamique holomorphe fibrée associée à  $e^t f$ , de degré nul et de nombre transversal de rotation égal à  $\beta$ , ce qui donne une version plus précise du Théorème 4.3. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $r \in \mathbb{N}$ . Nous posons

$$B_\varepsilon^r = \{f \in \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) \mid \|f - \lambda z\|_r < \varepsilon\}$$

**Théorème 4.12** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie l'hypothèse  $\mathbb{CD}_1$  il existe  $\varepsilon > 0$ , un nombre naturel  $r \geq 2$  et une bonne application de classe  $C^\infty$  au sens de Hamilton,  $\Xi : B_\varepsilon^r \subset \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) \rightarrow \mathbb{C} \times C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  tels que*

- $\Xi(\lambda z) = (0, 0)$ .

- Si on écrit  $\Xi(f) = (t, u)$  alors la courbe  $u$  est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F^*(\theta, z) = (\theta + \alpha, e^t f(\theta, z))$ , est de degré nul et son nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(e^t f, u) = \beta$ .
- La projection sur la première coordonnée  $\pi_1 \Xi(f)$  coïncide avec  $t(f, \pi_2 \Xi(f))$  où  $\pi_2 \Xi(f)$  est la projection sur la deuxième coordonnée et  $t$  est la fonction définie dans la Proposition 4.11. La paire  $(t, u)$  est uniquement déterminée par ces propriétés, pour  $u$  dans un voisinage de  $u_0 \equiv 0$ .

## 4.4 Preuve du Théorème 4.2, un argument de transversalité

Soit  $\{f_s\}_{s \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  une famille lisse à un paramètre complexe de fonctions dans  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}}))$ . Définissons l'application d'évaluation, qui est de classe  $C^\infty$  mais pas nécessairement bonne

$$\begin{aligned} e : \Sigma &\longrightarrow \Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}})) \\ s &\longmapsto f_s \end{aligned}$$

Si la famille  $\{f_s\}$  vérifie aussi que  $\|f_s - \lambda z\|_r < \bar{\varepsilon}$  pour tout  $s$  dans un certain disque  $D(0, R) \subset \Sigma \subset \mathbb{C}$ , où  $\bar{\varepsilon}, r$  sont ceux du Théorème 4.12, nous pouvons définir une application  $t : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$ , et une application  $u : D(0, R) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$  de classe  $C^\infty$  par

$$\begin{aligned} s &\mapsto t(s) = \pi_1 \Xi(e(s)) \\ s &\mapsto u(s) = \pi_2 \Xi(e(s)) \end{aligned}$$

où l'application  $\Xi$  est celle fournie par le Théorème 4.12. Dans ce cas la courbe  $u(s)$  est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F_s(\theta, z) = (\theta + \alpha, e^{t(s)} f_s(\theta, z))$ , est de degré nul et son nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(u(s)) = \beta$ . Le but de cette section est de montrer que sous l'hypothèse de transversalité de la famille  $\{f_s\}_{s \in \Sigma}$  on peut choisir un rayon  $R > 0$  et trouver un paramètre  $s^*$  dans  $D(0, R)$  tel que  $t(s^*) = 0$ , c'est à dire, qu'on n'a pas besoin de faire une correction  $e^t$  sur la dynamique  $F_{s^*}(\theta, z) = (\theta + \alpha, f_{s^*}(\theta, z))$  afin d'obtenir la courbe invariante avec le bon nombre transversal de rotation.

### L'Indice de Kronecker

Nous allons faire dans cette section un petit rappel sur l'indice de Kronecker d'une fonction du plan  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^2$  par rapport à un disque. Soit une fonction  $G : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$ , qui s'écrit  $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$  définie sur un disque  $D$  du plan. Nous définissons l'indice de Kronecker de  $G$  sur le bord  $\partial D$  par l'intégrale

$$n(G; D) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{g_1 dg_2 - g_2 dg_1}{g_1^2 + g_2^2}$$

quand il n'y a pas de zéros de  $G$  sur le bord  $\partial D$ . Ce nombre mesure le nombre de tours que la courbe  $G(\partial D)$  fait au tour de zéro. En fait, il n'est pas difficile de voir que

$$n(G; D) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} G^*(\delta\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{G \circ \partial D} \delta\theta$$

où  $\delta\theta$  est la 1-forme d'élément d'angle autour de l'origine complexe. Parmi les diverses propriétés de l'indice de Kronecker nous allons utiliser seulement celles qui sont contenues dans la proposition suivante, dont la preuve se trouve dans [Lim81] :

**Proposition 4.13** *Soit  $G : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $J : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  deux fonctions de classe  $C^2$ . On a*

1. *Si 0 n'appartient pas au segment  $[G(z), J(z)]$  pour tout  $z$  dans  $\partial D$  alors  $n(G; D) = n(J; D)$ .*
2. *Si  $G$  n'a pas de zéros dans le disque  $D$  alors  $n(G; D) = 0$ .*
3. *Si  $|G(z)| < |J(z)|$  et  $J(z) \neq 0$  pour tout  $z$  dans  $\partial D$  alors  $n(J + G; D) = n(J; D)$ .*
4. *Si  $G$  a un zéro unique et non dégénéré dans  $D$  alors  $n(G; D) = \pm 1$ .*

On dit qu'un point  $z$  dans  $D$  est un zéro non dégénéré de  $G$  si le déterminant de la matrice Jacobienne  $J(G)$  de  $G$  est non nul. Il est clair que 2., 3. sont une conséquence de 1. Nous allons utiliser cette proposition pour montrer l'existence d'un zéro pour une fonction qui n'est pas très bien comprise, en la comparant à une autre qui possède un zéro unique et non dégénéré, dont l'indice de Kronecker n'est pas nul. Au chapitre 5 nous ne faisons pas appel à l'indice de Kronecker pour trouver des zéros de fonctions car dans ce cas les fonctions sont holomorphes et c'est le Théorème de Rouché qui s'applique.

### La fonction $t(s)$

Nous allons étudier par la suite le comportement de la fonction  $t(s)$ . Nous savons d'après (4.13) qu'on a explicitement

$$t(s) = 2\pi i \beta - \int_{\mathbb{T}^1} \log f'_s(\theta, u(s)(\theta)) d\theta$$

d'où on peut calculer la différentielle de  $t$  au point  $s$  dans la direction  $\Delta s$  par

$$Dt(s)\Delta s = - \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\partial_s f'_s(\theta, u(s)(\theta)) \Delta s + f''_s(\theta, u(s)(\theta)) Du(s)\Delta s(\theta)}{f'_s(\theta, u(s)(\theta))} d\theta$$

Le Théorème des Fonctions Implicites de Hamilton nous fournit aussi l'expression de la différentielle de la fonction implicite engendrée, ce qui nous permet de calculer

$$\begin{aligned} Du(s)\Delta s &= D\pi_2 \Xi(e(s)) [De(s)\Delta s] \\ &= D\pi_2 \Xi(f_s) [\partial_s f_s \Delta s] \\ &= - \left( D_2 \Theta(f_s, \pi_2 \Xi(f_s)) \right)^{-1} \left[ D_1 \Theta(f_s, \pi_2 \Xi(f_s)) [\partial_s f_s \Delta s] \right] \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'affirmer que s'il existe une constante  $T > 1$  telle que  $\|\partial_s f_s\|_0 < T$  pour tout  $s$  dans  $D(0, R)$  alors il existe une constante positive  $T'$ , qui dépend seulement de la paire  $(\alpha, \beta)$  et de  $T$ , telle que

$$\|Du(s)\Delta s\|_0 < T'|\Delta s|$$

Nous pouvons écrire donc  $Dt(s) = w(s) + A(s)$  avec  $w(s)$  une matrice  $\in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  et la matrice  $A(s) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  de taille contrôlée par la taille de  $f_s''$ . Plus précisément

$$\begin{aligned} w(s) &= - \int_{\mathbb{T}^1} \left( f'_s(\theta, u(s)(\theta)) \right)^{-1} \partial_s f'_s(\theta, u(s)(\theta)) d\theta \\ A(s)\Delta s &= \int_{\mathbb{T}^1} \left( f'_s(\theta, u(s)(\theta)) \right)^{-1} f''_s(\theta, u(s)(\theta)) Du(s)\Delta s(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Si on suppose qu'il existe des nombres réels positifs  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  tels que  $\|f_s\|_r \leq \varepsilon_0$ ,  $\|f'_s - \lambda\|_r \leq \varepsilon_1$ ,  $\|f''_s\|_r \leq \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon}$  alors on a que

$$\|A(s)\|_{\mathcal{L}} < 2T'\varepsilon_2 \quad (4.27)$$

Nous pouvons contrôler aussi la distance  $\|w(s) - w(0)\|_{\mathcal{L}}$  sur le bord d'un disque  $D(0, R)$ . Pour cela nous considérons les inégalités suivantes :

$$\|\partial_s f'_s(\theta, z) - \partial_s f'_s|_{s=0}(\theta, z)\|_{\mathcal{L}} \leq \|\partial_s^2 f'_s\|_0 |s| \leq TR \quad (4.28)$$

si on suppose que  $\|\partial_s^2 f'_s\|_0 \leq T$ . De façon similaire nous avons

$$\|\partial_s f'_s|_{s=0}(\theta, u(0)(\theta)) - \partial_s f'_s|_{s=0}(\theta, 0)\|_{\mathcal{L}} \leq \|\partial_s f''_s|_{s=0}\|_0 \|u(s)\|_0 \leq TT'R \quad (4.29)$$

si  $\|\partial_s f''_s\|_0 \leq T$ . Il existe donc une constante positive  $T''$ , qui dépend seulement de  $T$  et  $(\alpha, \beta)$ , telle que

$$\|w(s) - w(0)\|_{\mathcal{L}} \leq T''R \quad (4.30)$$

### Transversalité et fin de la preuve

Considérons la fonction affine  $W(s) = t(0) + w(0)s$ . L'hypothèse de transversalité

$$\left[ \partial_s \int_{\mathbb{T}^1} f'_s(\theta, 0) d\theta \Big|_{s=0} \right]_{\mathcal{L}} > L^{-1},$$

pour une constante  $L > 1$ , impliquera que  $W$  croît suffisamment vite, ce qui va nous permettre de la comparer à la différence  $t(s) - W(s)$  sur le bord d'un disque  $D(0, R)$ , de rayon  $R$  assez grand de façon que le zéro (unique et non dégénéré)

$$\tilde{s} = -w(0)^{-1}t(0)$$

de  $W$ , soit contenu dans le disque (nous allons utiliser le point 3. de la Proposition 4.13). D'après le Lemme 4.1 et l'estimation (4.11) la taille de  $\tilde{s}$  est bornée par  $LC\varepsilon_1$ . D'après

(4.27) et (4.30) la différence entre les fonctions  $W$  et  $t$  sur le bord du disque  $D(0, R)$  est bornée par

$$\begin{aligned} |W(s) - t(s)| &\leq R\|D(W - t)\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq R(\|w(s) - w(0)\|_{\mathcal{L}} + \|A(s)\|_{\mathcal{L}}) \\ &\leq R(T''R + 2T'\varepsilon_2) \end{aligned}$$

D'autre part la taille de  $W$  est minorée sur le bord du disque par

$$|W(s)| > RL^{-1} - C\varepsilon_1$$

Pour pouvoir utiliser le point 3. de la Proposition 4.13 il suffira alors que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$RL^{-1} - C\varepsilon_1 > T''R^2 + 2T'\varepsilon_2R$$

et c'est justement le cas si nous prenons  $R = 2LC\varepsilon_1$  et  $\bar{\varepsilon}$  suffisamment petit. Ce choix nous permet aussi d'assurer la présence de  $\tilde{s}$  dans  $D(0, R)$  et de cette manière la présence d'un zéro  $s^*$  de  $t$  dans  $D(0, R)$ , car il n'y a que deux possibilités, soit  $t$  s'annule sur le bord du disque, ou bien l'indice  $n(t, D(0, R)) = \pm 1$  et le point 2. de la Proposition 4.13 nous donne l'existence de  $s^*$ . Nous venons de montrer ainsi la

**Proposition 4.14** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie l'hypothèse  $\mathbb{C}\mathbb{D}_1$  et pour toutes constantes  $L > 1, T > 1$  il existe  $\bar{\varepsilon} > 0$ , un nombre naturel  $r \geq 2$ , qui dépend seulement de la paire  $(\alpha, \beta)$ , et une constante positive universelle  $C$  tels que si une famille lisse à un paramètre complexe  $\{f_s\}_{s \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  de fonctions de  $\mathbb{T}^1$  vers  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^1, \Omega(\overline{\mathbb{D}}))$  vérifie pour des nombres réels positifs  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in (0, \bar{\varepsilon}]$ ,*

- $\left[ \partial_s \int_{\mathbb{T}^1} f'_s(\theta, 0) d\theta \Big|_{s=0} \right]_{\mathcal{L}} > L^{-1}$
- $\|f_s\|_r \leq \varepsilon_0, \|f'_s - \lambda\|_r \leq \varepsilon_1, \|f''_s\|_r \leq \varepsilon_2$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon_1)$
- $\|\partial_s^2 f'_s\|_0 + \|\partial_s f''_s\|_0 \leq T$  pour tout  $s$  dans  $D(0, 2CL\varepsilon_1)$

*alors il existe un paramètre  $s^*$  dans le disque  $D(0, 2CL\varepsilon_1)$  et une courbe  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  de classe  $C^\infty$  qui est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F_{s^*}(\theta, z) = (\theta + \alpha, f_{s^*}(\theta, z))$ , est de degré nul et son nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(f_{s^*}, u) = \beta$ .*

Nous pouvons finir à présent la preuve du Théorème 4.2. Pour cela, supposons qu'il existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  et une constante  $M > 1$  tels que

$$\begin{aligned} \|\rho_{0,s}\|_r &\leq \tilde{\varepsilon} \\ \|\rho_{1,s}\|_r &\leq \tilde{\varepsilon} \\ \|\rho_s\|_r &\leq M \end{aligned}$$

Nous faisons un changement d'échelle sur  $z$  de taille  $m > 1$ , c'est à dire, nous définissons une nouvelle famille lisse  $\{\tilde{f}_s\}_{s \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  par

$$\tilde{f}_s(\theta, z) = mf_s(\theta, m^{-1}z)$$

ce qui avec la notation usuelle nous donne

$$\begin{aligned}\|\tilde{\rho}_{0,s}\|_r &\leq m\tilde{\varepsilon} \\ \|\tilde{\rho}_{1,s}\|_r &\leq \tilde{\varepsilon} \\ \|\tilde{\rho}_s\|_r &\leq m^{-1}M\end{aligned}$$

Si nous posons  $m = 3M\bar{\varepsilon}^{-1}$  (quitte à diminuer  $\bar{\varepsilon}$  on a que  $m > 1$ ) et  $\tilde{\varepsilon} \leq \frac{\bar{\varepsilon}^2}{9M}$  nous avons

$$\begin{aligned}\|\tilde{\rho}_{0,s}\|_r &\leq \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \\ \|\tilde{\rho}_{1,s}\|_r &\leq \tilde{\varepsilon} < \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \\ \|\tilde{\rho}_s\|_r &\leq \frac{\bar{\varepsilon}}{3}\end{aligned}$$

La Proposition 4.14 nous donne donc un paramètre  $s^*$  dans le disque  $D(0, 2CL\bar{\varepsilon})$  et une courbe  $u$  de classe  $C^\infty$  qui est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $\tilde{F}_{s^*}$ , ce qui signifie

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{s^*}(\theta, u(\theta)) &= (\theta + \alpha, u(\theta + \alpha)) \\ (\theta + \alpha, m f_{s^*}(\theta, m^{-1}u(\theta))) &= (\theta + \alpha, u(\theta + \alpha)) \\ f_{s^*}(\theta, m^{-1}u(\theta)) &= m^{-1}u(\theta + \alpha)\end{aligned}$$

On voit ainsi que la courbe  $m^{-1}u$  est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F_{s^*}$ . En plus  $\tilde{f}'_s(\theta, z) = f'_s(\theta, m^{-1}z)$ , donc le nombre de rotation transversal de la courbe  $m^{-1}u$  est aussi égal à  $\beta$  ce qui termine la preuve du Théorème 4.2 ■



# Chapitre 5

## Cas analytique

Nous allons traiter dans ce chapitre le problème de la persistance de la courbe invariante par des petites perturbations des dynamiques holomorphes fibrées pour le cas des  $dhf$  de classe analytique. Avant d'énoncer les résultats précis nous allons consacrer quelques paragraphes à des résultats simples d'analyse qui seront nécessaires lors des démonstrations. Un traitement des noms des diverses constantes qui apparaissent sera aussi utile.

### 5.1 Quelques résultats d'analyse

#### Constantes

Dans ce chapitre vont apparaître plusieurs constantes (toutes positives) d'origines diverses. Quelques unes ont une valeur numérique fixée et leur raison d'être n'est autre que d'éviter la prolifération de symboles comme  $\pi, \frac{\pi}{29}, e^{2\pi}$ , etc. À ce type de constantes nous adjoindrons le qualificatif de *universelles* et seront toujours notées par la lettre  $C_j$  avec un indice qui indique leur ordre d'apparition dans le cours du texte. Inversement à chaque fois qu'on note une constante par  $C_j$  il faut assumer qu'elle est universelle. Il y aura aussi des constantes dont la valeur fait partie des hypothèses des théorèmes, ces constantes sont  $L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)$ . Dans un troisième groupe il y a les constantes dont la valeur dépend seulement de celle des constantes  $L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)$  et elles seront toujours désignées par la lettre  $K_j$  avec un indice qui indique leur ordre d'apparition ou bien la nature de la quantité dont elle est une borne. Inversement à chaque fois qu'on note une constante par  $K_j$  il faut supposer qu'elle dépend au plus des constantes  $L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)$ . Nous gardons le nom spécial  $\aleph$  pour une constante particulière qui appartient à ce dernier groupe et qui détermine, dans un certain sens, la procédure.

#### Les normes

Toutes les fonctions qui vont apparaître dans ce chapitre sont des fonctions holomorphes et bornées. Soit  $f : U \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et bornée de l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^k$ ,

$k \in \{1, 2, 3\}$ , vers  $\mathbb{C}$ . Nous considérons la norme  $\|f\|_U$  comme étant

$$\|f\|_U = \sup_{z \in U} |f(z)|$$

Il faut avoir en tête que  $U$  est de façon générale de la forme  $B_\delta \times D^Z \times D^t$  où  $B_\delta$  est la bande de largeur  $\delta$ , et  $D^Z, D^t$  sont des disques dans  $\mathbb{C}$ . Dans ce cas nous définissons l'oscillation de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $z$  par

$$\text{osc}(f)_{B_\delta, D^Z, D^t} = \sup_{\substack{(\theta, t) \in B_\delta \times D^t \\ z_1, z_2 \in D^Z}} |f(\theta, z_1, t) - f(\theta, z_2, t)|$$

Notons que si  $z = 0$  appartient à  $D^Z$  et  $f$  s'annule en ce point alors l'oscillation est une borne pour la norme

$$\|f\|_{B_\delta, D^Z, D^t} \leq \text{osc}(f)_{B_\delta, D^Z, D^t} \leq 2\|f\|_{B_\delta, D^Z, D^t} \quad (5.1)$$

Quand les domaines de définition des fonctions sont bien établis et qu'il n'y a pas lieu à confusion, nous omettrons le domaine dans la notation de la norme et de l'oscillation.

### Notations et estimations pour les fonctions analytiques tronquées

Soit  $f$  une fonction analytique sur la bande  $B_\delta$  et  $N$  un entier naturel. Nous définissons la troncature au niveau  $N$  et le reste au niveau  $N$  de  $f$  par

$$\begin{aligned} f|_N(\theta) &= \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \theta} \\ f|_{\overline{N}}(\theta) &= \sum_{|n| > N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \theta} \end{aligned}$$

où  $\hat{f}(n)$  est le  $n$ -ième coefficient de la série de Fourier de  $f$ . Ces deux fonctions sont analytiques sur la bande  $B_\delta$ . Si nous considérons une largeur de bande  $\delta' \in (0, \delta)$  avec  $\delta - \delta'$  pas trop grand, il existe une constante universelle  $C_1$  telle que

$$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{B_\delta} e^{-2\pi|n|\delta} \quad (5.2)$$

$$\|f|_{\overline{N}}\|_{B_{\delta'}} \leq C_1 \|f\|_{B_\delta} \frac{e^{-2\pi N(\delta - \delta')}}{\delta - \delta'} \quad (5.3)$$

la dernière inégalité nous dit que si nous perdons un peu de largeur de bande nous gagnons une estimation sur le reste de  $f$  (estimation à la Cauchy). Nous consignons ici le simple fait suivant

**Affirmation 5.1.1** *Soit  $f$  une fonction analytique dont la dérivée  $\partial_\theta f$  est bornée sur la bande  $B_\delta$ . On a donc*

$$\|f\|_{B_\delta} \leq \left| \int_{\mathbb{T}^1} f(\theta) d\theta \right| + \|\partial_\theta f\|_{B_\delta} \quad (5.4)$$

### Estimations pour les solutions des équations cohomologiques avec troncature

Considérons les équations cohomologiques en  $g_1$  et  $g_2$

$$g_1(\theta) - g_1(\theta + \alpha) = p_1(\theta) \quad (5.5)$$

$$e^{2\pi i\beta} g_2(\theta) - g_2(\theta + \alpha) = p_2(\theta) \quad (5.6)$$

où  $\alpha, \beta$  sont des nombres réels,  $p_1, p_2$  sont des polynômes trigonométriques d'ordre au plus  $N$  et  $\int_{\mathbb{T}^1} p_1(\theta) d\theta = 0$ . Par la méthode des coefficients des séries de Fourier nous obtenons l'expression des solutions

$$g_1(\theta) = \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{\hat{p}_1(n) e^{2\pi i n \theta}}{1 - e^{2\pi i n \alpha}} \quad ; \quad \int_{\mathbb{T}^1} g_1(\theta) d\theta = 0$$

$$g_2(\theta) = \sum_{|n| \leq N} \frac{\hat{p}_2(n) e^{2\pi i n \theta}}{e^{2\pi i \beta} - e^{-2\pi i n \alpha}}$$

Rappelons que  $\int_{\mathbb{T}^1} g_1 = 0$  est un choix, que nous allons toujours faire. Soient  $f_1, f_2$  des fonctions analytiques sur la bande  $B_\delta$  avec  $\int_{\mathbb{T}^1} f_1 = 0$ . Nous posons  $p_j = f_j|_N$ , pour  $j \in \{1, 2\}$ , et utilisons la notation  $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha, \beta}$  de la section 1.1 pour les pires petits diviseurs. Nous posons  $\varphi_1(N) = \Gamma_\alpha(N), \varphi_2(N) = \Gamma_{\alpha, \beta}(N)$ , il existe alors une constante  $C_2$  telle que

$$\|g_j\|_{B_\delta} \leq C_2 N \|f_j\|_{B_\delta} \varphi_j(N)$$

$$\|\partial_\theta g_j\|_{B_\delta} \leq C_2 N^2 \|f_j\|_{B_\delta} \varphi_j(N)$$

pour  $j \in \{1, 2\}$ . Il faut remarquer que le facteur  $C_2 N$  est loin d'être optimal, mais il suffira pour les applications à venir.

## 5.2 Le problème

Soit  $\{F_t\}_{t \in \Sigma \subset \mathbb{C}}$  une famille à un paramètre complexe de dynamiques holomorphes fibrées, qui s'écrivent de la façon habituelle

$$F_t(\theta, z) = \left( \theta + \alpha, \rho_{0,t}(\theta) + (\lambda + \rho_{1,t}(\theta))z + \rho_t(\theta, z) \right)$$

comme des perturbations d'une  $dhf$  qui possède une courbe invariante de degré nul et dont le nombre de rotation transversal est  $\beta, \lambda = e^{2\pi i \beta}$ . Nous disons qu'il s'agit d'une famille *analytique* si l'application  $(t, \theta, z) \mapsto F_t(\theta, z)$  est holomorphe dans le produit  $\Sigma \times B_\delta \times D$ , où  $\delta$  est un nombre positif,  $\Sigma$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $D$  est un disque centré à l'origine de  $\mathbb{C}$ . Pour fixer les idées nous énonçons et montrons les résultats pour le disque  $D = \mathbb{D}$ , mais le cas général reste vrai avec des modifications évidentes. Le fait qu'une famille soit analytique se traduit par le fait que les fonctions

$$(t, \theta) \longmapsto \rho_{0,t}(\theta)$$

$$(t, \theta) \longmapsto \rho_{1,t}(\theta)$$

$$(t, \theta, z) \longmapsto \rho_t(\theta, z)$$

sont holomorphes sur les domaines adéquats, et c'est sur cette forme que nous allons l'utiliser. Le but de ce chapitre est de montrer que la persistance d'une courbe invariante de degré nul, avec un nombre transversal de rotation donné, pour une dynamique holomorphe fibrée est un phénomène de codimension 1 complexe dans la classe analytique, sous une condition arithmétique appropriée. Plus précisément nous allons montrer le

**Théorème 5.1** *Pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  qui vérifie la condition de Brjuno  $\mathbb{B}_1$ , pour toutes constantes positives  $L > 1, M, T$  et  $\delta$  il existe  $\varepsilon^*(L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)) > 0$  et une constante positive  $K_R(L, M, T, \delta, (\alpha, \beta))$  tels que si pour un certain  $\varepsilon$  dans  $(0, \varepsilon^*]$  la famille analytique  $\{F_t\}_{t \in \Sigma}$  vérifie qu'il existe un disque  $D(t_0, K_R \varepsilon) \subset \Sigma$  tel que*

$$L > \left| \partial_t \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}(\theta) d\theta \Big|_{t=t_0} \right| > L^{-1}$$

et pour tout  $t$  dans  $D(t_0, K_R \varepsilon)$

$$\begin{cases} \|\rho_{0,t}\|_{B_\delta} \leq \varepsilon \\ \|\rho_{1,t}\|_{B_\delta} \leq \varepsilon \\ \|\partial_z^2 \rho_t\|_{B_\delta, \mathbb{D}} \leq M \\ \|\partial_t \partial_z \rho_t\|_{B_\delta, \mathbb{D}} + \|\partial_t^2 \rho_{1,t}\|_{B_\delta} \leq T \end{cases}$$

alors il existe un paramètre  $\bar{t}$  dans  $D(t_0, K_R \varepsilon)$  tel que  $F_{\bar{t}}$  possède une courbe invariante  $u$ , analytique sur la bande  $B_{\frac{\delta}{2}}$ , de degré nul et dont le nombre de rotation transversal est  $\varrho_{tr}(u) = \beta$ . De plus, la taille de  $u$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

### 5.3 Deux lemmes techniques

Dans cette section nous allons montrer deux lemmes d'une allure très technique qui vont définir deux suites de nombres réels positifs  $\{l_n\}, \{w_n\}$  qui tendent vers 0 d'une façon bien particulière et qui seront utilisées comme mesure de la vitesse de convergence vers 0 de quelques fonctions lors de la preuve du Théorème 5.1. Ces deux lemmes vont nous fournir aussi deux suites sommables de nombres réels positifs  $\{d_n^0\}, \{d_n^1\}$  que nous utiliserons comme pertes de largeur de bande pour obtenir des estimations pour des fonctions analytiques tronquées. Ceci étant, la partie qui suit est la partie la plus importante dans ce travail du point de vue de la relation entre l'arithmétique et la dynamique étudiée.

Soit  $\aleph > 2$  un paramètre réel et  $\{A_n\}_{n \geq 0}, \{B_n\}_{n \geq 0}$  les suites non décroissantes de nombres réels positifs définies par  $A_n = \Gamma_{\alpha, \beta}(2^n), B_n = \Gamma_\alpha(2^n)$ , où nous utilisons la notation de la section 1.1 pour les pires petits diviseurs. Sous la condition de Brjuno  $\mathbb{B}_1$  ces suites satisfont

$$\sum_n \frac{\log A_n}{2^n} < \infty \quad \sum_n \frac{\log B_n}{2^n} < \infty$$

**Lemme 5.2** *Définissons*

$$l_n = \frac{e^{-n^2}}{16\aleph A_n B_n 2^n} \tag{5.7}$$

On a alors

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 0$
2.  $\sum_n \aleph 2^n B_n l_n < \frac{1}{8}$
3.  $\aleph 2^n A_n l_n < \frac{1}{16}$
4. La relation

$$l_{n+1} = \frac{\aleph l_n e^{-2\pi 2^n d_n^1}}{d_n^1} \quad (5.8)$$

définit une suite  $\{d_n^1\}_{n \geq 0}$  de nombres réels positifs telle que

$$\sum_n d_n^1 < K_1(1 + \log \aleph) \quad (5.9)$$

où la constante  $K_1$  ne dépend que des suites  $A_n, B_n$ .

**Preuve.** Les points 1., 2., 3. sont immédiats. Posons ensuite

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n &= -\log(\aleph 2^n l_n) \\ &= \log A_n + \log B_n + \log 16 + n^2 \end{aligned}$$

et définissons d'abord une suite  $\{\tilde{d}_n^1\}_{n \geq 0}$  par la relation

$$l_{n+1} = \aleph l_n e^{-2\pi 2^n \tilde{d}_n^1}$$

ce qui donne

$$2\pi 2^n \tilde{d}_n^1 = \hat{\sigma}_{n+1} - \hat{\sigma}_n + \log 2\aleph$$

comme la suite  $\hat{\sigma}_n$  est croissante, la suite  $\tilde{d}_n^1$  est positive. Comme la série  $\sum \frac{\hat{\sigma}_n}{2^n}$  est convergente, la série  $\sum \tilde{d}_n^1$  est aussi convergente, et sa somme est majorée par  $K_1(1 + \log \aleph)$ , où  $K_1$  ne dépend que des suites  $A_n, B_n$ .

Pour finir nous allons trouver une suite réel  $\{x_n^1\}_{n \geq 0}$  de façon que si nous posons  $d_n^1 = \tilde{d}_n^1 + x_n^1$ , l'affirmation du lemme au point 4. est vérifiée. Pour cela il suffit de résoudre l'équation

$$\frac{e^{-2\pi 2^n x_n^1}}{\tilde{d}_n^1 + x_n^1} = 1 \quad (5.10)$$

Un analyse graphique élémentaire nous permet de voir que (5.10) a une solution unique  $x_n^1$ . De plus, on a que  $x_n < s_n$ , où  $s_n$  vérifie

$$e^{-2\pi 2^n s_n} = s_n$$

La série  $\sum s_n$  converge, ce qui termine la démonstration du lemme ■

**Lemme 5.3** *Définissons*

$$w_n = \frac{l_n}{\aleph 4^n A_n} \quad (5.11)$$

où la suite  $\{l_n\}_{n \geq 0}$  est celle définie au lemme 5.2. On a alors

1.  $\aleph w_n (2^n A_n)^2 < \frac{1}{32}$
2.  $\sum_n \aleph w_n 2^n A_n < \frac{1}{16}$
3. La relation

$$\frac{w_{n+1}}{4} = \frac{w_n \aleph e^{-2\pi 2^n d_n^0}}{d_n^0} \quad (5.12)$$

définit une suite  $\{d_n^0\}_{n \geq 0}$  de nombres réels positifs telle que

$$\sum_n d_n^0 \leq K_2 (1 + \log \aleph) \quad (5.13)$$

où la constante  $K_2$  ne dépend que des suites  $A_n, B_n$ .

**Preuve.** Les points 1., 2. sont immédiats. Comme lors de la preuve du Lemme 5.2 nous allons définir  $\{\tilde{d}_n^0\}_{n \geq 0}$  par la relation

$$\frac{w_{n+1}}{4} = w_n \aleph e^{-2\pi 2^n \tilde{d}_n^0}$$

c'est à dire

$$\tilde{d}_n^0 = \frac{1}{2\pi 2^n} \{2n + 1 + \log(A_{n+1}^2 B_{n+1}) - \log(A_n^2 B_n) + \log 32\aleph\}$$

qui définit bien une suite positif et sommable. Nous pouvons, comme au Lemme 5.2, trouver une suite  $\{x_n^0\}_{n \geq 0}$  de réels telle que la modification  $d_n^0 = \tilde{d}_n^0 + x_n^0$  satisfait le lemme ■

## 5.4 Un processus itératif

### 5.4.1 Choix du paramètre $\aleph$ et les largeurs de bande

Comme nous venons de le voir dans les lemmes de la section précédente, les suites qui y sont définies dépendent de la valeur de la constante  $\aleph$ . Pour nous servir de ces suites nous allons choisir la valeur de  $\aleph$  comme étant plus grande que plusieurs quantités qui dépendent au plus des constantes de type  $K$  qui apparaissent dans la procédure qui suit. Ce choix est possible car ces constantes dépendent au plus des constantes qui apparaissent dans les hypothèses du Théorème 5.1 ( $L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)$ ). Ceci étant, nous allons écrire des minoration explicites à mesure que la procédure s'effectue. Une fois ce choix effectué, nous disposons de deux suites de nombres réels positifs  $\{d_n^0\}_{n \geq 0}, \{d_n^1\}_{n \geq 0}$ , qui nous allons utiliser comme des pertes de largeur de bande dans notre procédure. Ces suites satisfont

$$\sum_{n \geq 0} \max(d_n^0, d_n^1) < (K_1 + K_2)(1 + \log \aleph) < \infty$$

ce qui nous permet de fixer un nombre naturel  $n^*$  de façon que

$$\sum_{n \geq n^*} \max(d_n^0, d_n^1) \leq \frac{\delta}{4}$$

où  $\delta$  est la largeur de la bande initiale de définition de la variable  $\theta$  des fonctions involuées dans le Théorème 5.1. La démonstration se fera *via* l'utilisation d'un algorithme de récurrence divisé en étapes. Le nombre  $n^*$  va indiquer à quelle étape on démarre l'application de l'algorithme. Dans chaque étape les fonctions involuées auront une bande de définition pour la variable  $\theta$  dont la largeur sera

$$\delta^{n^*} = \frac{3\delta}{4} \quad (5.14)$$

$$\delta^{n+1} = \delta^n - \max(d_n^0, d_n^1) \quad (5.15)$$

D'après le choix de  $n^*$  on a que pour tout  $n \geq n^*$  la largeur de bande  $\delta^n > \frac{\delta}{2}$ .

### 5.4.2 Description de l'algorithme

La démonstration du Théorème 5.1 s'effectue en exhibant une conjugaison analytique affine sur chaque fibre, c'est à dire, de la forme

$$h(\theta, z) = (\theta, u_0(\theta) + u_1(\theta)z),$$

qui met une des dynamiques holomorphes fibrées  $F_t$  sous forme normale, avec  $u_1$  une fonction de degré nul, ce qui implique, d'après la discussion du chapitre 1, l'existence de la courbe invariante avec le bon nombre transversal de rotation. L'équation de conjugaison est

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ F \circ h = & \left( \theta + \alpha, \frac{1}{u_1(\theta+\alpha)} \{ \rho_{0,t}(\theta) + \lambda u_0(\theta) - u_0(\theta + \alpha) \} \right. \\ & + \frac{1}{u_1(\theta+\alpha)} \{ \rho_{1,t}(\theta) u_0(\theta) + \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \} \\ & + z \frac{u_1(\theta)}{u_1(\theta+\alpha)} \{ \lambda + \rho_{1,t}(\theta) + \partial_z \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \} \\ & + \frac{1}{u_1(\theta+\alpha)} \{ \rho_t(\theta, u_0(\theta) + u_1(\theta)z) - \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \} \\ & \left. - z u_1(\theta) \partial_z \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \right) \end{aligned}$$

Un tel changement de coordonnées  $h$  sera le résultat limite de compositions successives de deux types particuliers de conjugaisons affines.

Plus précisément la procédure que nous allons effectuer pour rendre nuls les termes  $\rho_0, \rho_1$  (cela implique la forme normale) se divise en plusieurs *étapes*. Le but dans chaque étape est de faire diminuer la taille de  $\rho_0$  et  $\rho_1$ , de façon que à la limite ses tailles tendent vers 0. Cependant, la vitesse de cette convergence est très particulière et dépend fortement des propriétés arithmétiques de la paire  $(\alpha, \beta)$ . À chacune des étapes nous allons appliquer 4 types d'opérations. Les deux premiers sont des opérations à la KAM (ou algorithme de Newton), c'est-à-dire, que nous résoudrons les équations du problème mais simplifiées (on garde seulement les termes que les rendent des équations cohomologiques). C'est sont ces opérations (plutôt les solutions aux équations) qui nous fournissent les fonctions  $u_0, u_1$  qui donnent le changement de coordonnées de l'étape. Bien entendu, ce changement ne met pas la dynamique sous forme normale car les équations qui ont été résolues étaient des équations simplifiées. Il faut donc prendre en charge un reste dont la taille sera contrôlée par les deux autres opérations. L'une consiste simplement à introduire une perte sur la largeur

de la bande de définition de la variable  $\theta$  des fonctions, ce qui nous permet de contrôler la taille de certains des restes. La quatrième opération consiste à restreindre l'espace de paramètres  $t$ . Nous allons maintenant décrire les deux premières opérations, dites de type KAM, pour pouvoir ensuite être plus précis sur l'effet des deux dernières. Les opération de type KAM consistent à trouver un changement de coordonnées afin par fibres avec une forme particulière, ce qui nous amènera à résoudre des équations cohomologiques tronquées comme à la section 5.1; si nous sommes à l'étape  $n$  nous allons résoudre les équations avec une troncature au niveau  $2^n$ .

#### Les 4 opérations

**Cas  $u_1 = 1$  (dite *résolution de l'équation de  $u_0$* )** Dans ce cas nous obtenons comme résultat de la conjugaison

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ F \circ h &= \left( \theta + \alpha, \rho_{0,t}(\theta) + \lambda u_0(\theta) - u_0(\theta + \alpha) + \rho_{1,t}(\theta)u_0(\theta) + \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \right. \\ &\quad + z \{ \lambda + \rho_{1,t}(\theta) + \partial_z \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \} \\ &\quad \left. + \{ \rho_t(\theta, u_0(\theta) + z) - \rho_t(\theta, u_0(\theta)) - z \partial_z \rho_t(\theta, u_0(\theta)) \} \right) \end{aligned}$$

Nous choisissons  $u_0$  de sorte que

$$\rho_{0,t}(\theta) \Big|_{2^n} + \lambda u_0(\theta) - u_0(\theta + \alpha) = 0 \quad (5.16)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho_{0,t}^{new} &= \rho_{1,t}u_0 + \rho_t(\cdot, u_0) + \rho_{0,t} \Big|_{2^n} \\ \rho_{1,t}^{new} &= \rho_{1,t} + \partial_z \rho_t(\cdot, u_0) \\ \rho_t^{new}(\cdot, z) &= \rho_t(\cdot, u_0 + z) - \rho_t(\cdot, u_0) - z \partial_z \rho_t(\cdot, u_0) \end{aligned}$$

Nous allons obtenir une estimation du type

$$\|u_0\| \leq C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \|\rho_{0,t}\| \quad (5.17)$$

Compte tenu de la taille de  $\rho_{0,t}, \rho_{1,t}$  nous allons voir que la taille de  $\rho_{0,t}^{new} - \rho_{0,t} \Big|_{2^n}$  diminue (effet "quadratique"). Les tailles des autres fonctions concernées ne changent pas de façon significative.

**Cas  $u_0 = 0$  (dite *résolution de l'équation de  $u_1$* )** On a cette fois comme résultat de la conjugaison

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ F \circ h &= \left( \theta + \alpha, \frac{\rho_{0,t}(\theta)}{u_1(\theta + \alpha)} + z \frac{u_1(\theta)}{u_1(\theta + \alpha)} \{ \lambda + \rho_{1,t}(\theta) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_t(\theta, u_1(\theta)z)}{u_1(\theta + \alpha)} \right) \end{aligned}$$



Nous choisissons  $u_1$  de sorte que

$$\frac{u_1(\theta)}{u_1(\theta + \alpha)} \{\lambda + \rho_{1,t}(\theta)\} = \tilde{\lambda} \quad (5.18)$$

pour une constante  $\tilde{\lambda}$  appropriée (donnée par la condition intégrale de l'équation cohomologique). En fait, nous ne résoudrons pas exactement cette équation, mais la troncature au niveau  $2^n$  de l'équation cohomologique qui en résulte. À l'issue de cette opération nous avons

$$\begin{aligned} \rho_{0,t}^{new} &= \frac{\rho_{0,t}(\cdot)}{u_1(\cdot + \alpha)} \\ \rho_{1,t}^{new} &= \tilde{\lambda} - \lambda + \text{Reste}(\theta, t) \\ \rho_t^{new} &= \frac{\rho_t(\cdot, u_1(\cdot)z)}{u_1(\cdot + \alpha)} \end{aligned}$$

où l'expression du reste  $\text{Reste}(\theta, t)$  sera explicitée dans les sections à venir. Pour la solution  $u_1$  nous allons obtenir une estimation du type

$$\|u_1 - 1\| \leq \aleph 2^n \Gamma_\alpha(2^n) \|\partial_\theta \rho_{1,t}\| \quad (5.19)$$

Les tailles de  $\rho_{0,t}^{new}, \rho_t^{new}$  ne changent donc pas d'ordre de grandeur. L'effet de résoudre une équation comme (5.18) mais tronquée peut être vu comme une tentative de rendre  $\rho_1$  indépendant de  $\theta$ . C'est précisément sur la taille de  $\partial_\theta \rho_{1,t}$  qu'on peut gagner à l'issue de cette opération. Il faudra cependant, contrôler la taille de  $\text{Reste}(\theta, z)$ .

**Perte de largeur de bande** La troisième opération consiste en perdre un morceau de bande pour pouvoir contrôler les restes issus des opérations précédentes. Lors de l'étape  $n$  nous allons perdre une largeur égale au  $\max(d_n^0, d_n^1)$ , et la nouvelle largeur de bande sera donc comme dans (5.15). Avec cette opération nous obtenons un contrôle sur la taille de  $\rho_{0,t}^{new}$  et  $\partial_\theta \rho_{1,t}^{new}$ .

**Coupage dans l'espace des paramètres** Nous allons utiliser l'affirmation 5.1.1 pour contrôler la taille de  $\rho_{1,t}^{new}$ , c'est à dire, qu'il suffit d'avoir un contrôle sur la dérivée  $\partial_\theta \rho_{1,t}^{new}$  plus un contrôle sur le nombre complexe  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{new}(\theta) d\theta$ . Ce dernier nombre complexe peut être varié avec le paramètre  $t$  grâce à l'hypothèse de transversalité sur la famille  $\{F_t\}_{t \in \Sigma}$ . Cette opération consiste alors à localiser un disque dans l'espace des paramètres où ce nombre complexe est suffisamment petit. La façon pour réussir à cette localisation sera simplement de trouver un paramètre  $t$  qui annule  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{0,t}^{new}(\theta) d\theta$  et choisir ensuite un rayon de taille appropriée.

### Description d'une étape

Bien entendu, cette section n'est qu'une description dont nous laissons les estimations rigoureuses pour une section future. Au début de la  $n$ -ième étape nous avons les fonctions

$\rho_{0,t}^n, \rho_{1,t}^n, \rho_t^n$  et les estimations

$$\|\rho_{0,t}^n\| \leq w_n \quad (5.20)$$

$$\|\rho_{1,t}^n\| \leq K_3 l_n \quad (5.21)$$

pour une constante  $K_3$  et les suites  $l_n, w_n$  sont celles définies lors de la section 5.3. Nous avons aussi un espace de paramètres qui est un disque  $D(t_n, p_n)$ . Le but à la fin de l'étape est de retrouver ces estimations pour l'indice  $n + 1$ . Chaque étape de notre algorithme se décompose à son tour en 4 *parties*.

**1ère partie** Cette partie consiste à appliquer plusieurs fois l'opération de résolution de l'équation de  $u_0$  (cette partie comporte alors des *pas*). Nous introduisons un indice supplémentaire pour indiquer les pas. Ainsi nous aurons comme résultat de chaque pas les fonctions  $\rho_{0,t}^{n,i+1}, \rho_{1,t}^{n,i+1}, \rho_t^{n,i+1}$ . À chaque pas les tailles des fonctions  $\rho_{1,t}, \rho_t$  ne changent pas beaucoup. La fonction  $\rho_{0,t}^{n,i}$  est la somme d'une partie *quadratique* dont la taille diminue de moitié à chaque pas, plus une série de restes d'ordre plus grand que  $2^n$  (en termes de sa série de Fourier). Cette partie finira au moment où la taille de la partie quadratique soit plus petite que  $\frac{w_{n+1}}{4}$ . On peut interpréter géométriquement cette partie comme une tentative d'aller chercher la courbe invariante, c'est à dire, de centrer la dynamique le plus proche possible, compte tenu des petits diviseurs, de la courbe invariante.

**2ème partie** Cette partie consiste à appliquer une seule fois l'opération de résolution de l'équation de  $u_1$ . Ceci nous permet de ramener le contrôle de la taille de  $\partial_\theta \rho_{1,t}$  à un contrôle sur un reste d'ordre plus grand que  $2^n$ . On peut interpréter cette partie comme un essai d'ajuster le nombre transversal de rotation de la dynamique à la valeur  $\beta$ .

**3ème partie** Cette partie consiste à perdre un morceau sur la bande de définition de la variable  $\theta$  des fonctions. À la fin de la deuxième partie nous avons deux restes à estimer, qui viennent essentiellement des troncatures des fonctions dont leur tailles sont plus petites que  $w_n, l_n$  respectivement. L'inégalité (5.3), les relations (5.12), (5.8) qui définissent les suites  $d_n^0, d_n^1$  et l'introduction d'une perte de largeur de bande de taille  $\max(d_n^0, d_n^1)$  nous donnent les estimations  $\|\rho_{0,t}^{n+1}\| \leq w_{n+1}, \|\partial_\theta \rho_{1,t}^{n+1}\| \leq l_{n+1}$ .

**4ème partie** Cette partie consiste tout simplement à appliquer l'opération de coupure de l'espace des paramètres pour réussir une borne sur le nombre complexe  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n+1}$  de taille d'ordre  $l_{n+1}$  et de cette manière pouvoir commencer l'étape suivante.

La démonstration du Théorème 5.1 passe alors par montrer que les hypothèses faites sur la famille  $\{F_t\}_{t \in \Sigma}$  nous permettent d'une part obtenir les estimations nécessaires pour commencer une étape (l'étape  $n^*$ ) et d'autre part, accomplir d'un bout à l'autre le plan qui nous venons de décrire pour une étape quelconque. Nous verrons lors de la section 5.4.7 que les propriétés listées dans les lemmes 5.2, 5.3 des suites  $l_n, w_n$  nous permettent

de montrer, pour un seul paramètre  $t^*$  dans  $\Sigma$ , la convergence de la méthode, c'est à dire, que la composition successive des changements de coordonnées fournis par chaque étape converge vers un changement de coordonnées analytique qui rend la dynamique holomorphe fibrée  $F_{t^*}$  sous une forme normale.

### 5.4.3 Initialisation de l'algorithme

Les domaines de toutes les fonctions qui apparaissent au début de notre procédure sont le disque unité du plan complexe  $\mathbb{D} = D(0, 1)$  pour la variable  $z$ , la bande  $B_\delta$  de largeur  $\delta$  pour la variable  $\theta$  et le disque du plan complexe  $D(0, K'\varepsilon)$  pour le paramètre  $t$ , où la constante  $K'$  sera bientôt explicitée. Avant de commencer le processus itératif nous avons besoin d'estimations pour les dérivées par rapport à  $\theta$  de certaines fonctions. Pour cela nous admettons une perte de largeur de bande  $\delta/4$  et obtenons ainsi les estimations de Cauchy suivantes

$$\begin{aligned} \|\partial_\theta \rho_{1,t}\| &\leq \frac{24\varepsilon}{\delta} \\ \|\partial_\theta \partial_z \rho_t\| &\leq \frac{24M}{\delta} = N \end{aligned}$$

où nous utilisons la ligne ci-dessus pour définir une fois pour toutes la constante positive  $N$ . Nous pouvons déjà exhiber la valeur maximale des tailles de départ

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\delta l_{n^*}}{24} \quad (5.22)$$

qui dépend seulement de  $\delta, n^*$ , qui à son tour dépendent seulement de  $L, M, T, \delta, (\alpha, \beta)$ . Nous allons supposer dans cette section que  $\|\rho_0\| \leq w_{n^*}$ . Cette hypothèse est beaucoup plus forte que celle annoncée dans le Théorème 5.1. Cependant, nous verrons que nous pouvons nous ramener à ce cas, à une procédure préalable prés, dont gardons la description pour la section 5.5. Posons ensuite

$$\rho_{0,t}^{n^*,0} = \rho_{0,t} \quad , \quad \rho_{1,t}^{n^*,0} = \rho_{1,t} \quad , \quad \rho_t^{n^*,0} = \rho_t \quad (5.23)$$

Les domaines de ces fonctions (où cela ait du sens) sont la bande de largeur  $\delta^{n^*} = 3\delta/4$  et le disque  $D(0, R^{n^*,0})$  de rayon  $R^{n^*,0} = 1$  pour la variable  $z$ . L'espace des paramètres  $t$  est le disque  $D(t_{n^*}, p_{n^*})$  de centre  $t_{n^*} = 0$  que nous allons supposer être un zéro simple de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*,0}$  (cette hypothèse sera enlevée lors de la section 5.5.1), et de rayon

$$p_{n^*} = 100l_{n^*} = \frac{2400\bar{\varepsilon}}{\delta} \quad (5.24)$$

Ceci nous dit que  $K' = \frac{2400}{\delta}$ . Comme  $\aleph$  est grande nous aurons toujours  $p_{n^*} < 1$ . Nous avons alors les estimations pour démarrer l'étape  $n^*$

$$\|\partial_\theta \rho_{1,t}^{n^*,0}\| \leq l_{n^*} \quad (5.25)$$

$$\|\rho_{0,t}^{n^*,0}\| \leq w_{n^*} \quad (5.26)$$

$$\|\partial_z^2 \rho_t^{n^*,0}\| \leq M \quad (5.27)$$

$$\text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n^*,0}) \leq 2N \quad (5.28)$$

$$\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n^*,0}) \leq 2T \quad (5.29)$$

$$\left\| \int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}^{n^*,0} d\theta - \Delta_0 \right\| \leq \frac{L^{-1}}{1000} \quad (5.30)$$

L'inégalité (5.30) et l'existence du nombre complexe  $\Delta_0$  est encore une hypothèse supplémentaire de l'algorithme, que nous enleverons par la suite. Le nombre complexe  $\Delta_0$  vérifie aussi que  $L > |\Delta_0| > L^{-1}$ .

**Remarque 10 (Sur le niveau de départ et la taille de  $\varepsilon$ )** *Nous verrons dans la section 5.4.8 qu'une subtile modification lors de la première étape établira la dernière affirmation du Théorème 5.1, concernant la taille de  $u$  et la taille de  $\varepsilon$ .*

#### 5.4.4 Mise en œuvre du pas itératif

Afin de contrôler les diverses fonctions qui apparaissent lors du déroulement des étapes nous allons introduire quelques suites de nombres réels, et nous allons faire des affirmations sur ces suites, dont la vérification se fera au fur et à mesure que nous aurons en main les éléments que le permettront. Au tout début de l'étape  $n$  nous avons la famille  $\{F_t\}$  écrite sous la forme

$$F_t^{n,0}(\theta, z) = (\theta + \alpha, \rho_{0,t}^{n,0}(\theta) + z\rho_{1,t}^{n,0}(\theta) + \lambda z + \rho_t^{n,0}(\theta, z))$$

avec  $\rho_t^{n,0}$  s'annulant à l'ordre 2 en  $z = 0$ . Les domaines des fonctions sont : pour la variable  $z$  le disque  $D(0, R^{n,0})$ , où la suite  $\{R^{n,i}\}_{n \geq n^*, i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$  vérifie

$$\frac{3}{8} < \dots < R^{n^*+1,1} < R^{n^*+1,0} < R^{n^*,\infty} < \dots < R^{n^*,2} < R^{n^*,1} < R^{n^*,0} = 1; \quad (5.31)$$

pour la variable  $\theta$  le domaine est la bande  $B_{\delta^n}$ , dont la largeur  $\delta^n$  est définie dans la section 5.4.1. L'espace des paramètres  $t$  de la famille est le disque  $D(t_n, p_n)$  de centre  $t_n$ , un zéro simple de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n,0}(\theta) d\theta$ , et de rayon

$$p_n = 100l_n \quad (5.32)$$

Dans cette section nous allons prendre en charge seulement les estimations qui ne font pas intervenir le paramètre  $t$ , en gardant pour la section 5.4.5 les estimations dans le paramètre

$t$ . Au début de l'étape nous avons alors les estimations

$$\|\rho_{0,t}^{n,0}\| \leq w_n \quad (5.33)$$

$$\|\partial_z^2 \rho_t^{n,0}\| \leq M_n \quad (5.34)$$

$$\text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,0}) \leq N_{n,0} \quad (5.35)$$

$$\|\partial_\theta \rho_{1,t}^{n,0}\| \leq l_n \quad (5.36)$$

où les suites de nombres réels  $\{M_n\}_{n \geq n^*}$  et  $\{N_{n,i}\}_{n \geq n^*, i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$  sont majorées par des constantes  $K_M$  et  $K_N$  respectivement.

En utilisant l'affirmation 5.1.1 avec l'inégalité (5.36) et une estimation sur la norme  $\|\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}^{n,0} - \Delta_0\|$  que nous n'écrivons pas ici (voir inégalité (5.87) de la section 5.4.5) nous obtenons l'estimation

$$\|\rho_{1,t}^{n,0}\| \leq K_3 l_n \quad (5.37)$$

La constante  $K_3$  apparaît immédiatement lors de l'application de l'affirmation 5.1.1 avec ces inégalités.

### Première partie, l'équation de $u_0$

Avant d'effectuer le  $i$ -ème pas de la première partie de l'étape  $n$  nous avons les fonctions  $\rho_{0,t}^{n,i}, \rho_{1,t}^{n,i}, \rho_t^{n,i}$  où cette dernière est définie sur le disque  $D(0, R^{n,i})$  dans la variable  $z$ . Le  $i$ -ème pas consiste en trouver un changement de coordonnées de la forme  $h_{n,i}^t(\theta, z) = (\theta, u_{0,t}^{n,i}(\theta) + z)$  en résolvant l'équation tronquée

$$\lambda u_{0,t}^{n,i}(\theta) - u_{0,t}^{n,i}(\theta + \alpha) = -\rho_{0,t}^{n,i}|_{2^n} \quad (5.38)$$

D'après la section 5.1 la solution à cette équation satisfait

$$\|u_{0,t}^{n,i}\| \leq C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \|\rho_{0,t}^{n,i}\| \quad (5.39)$$

$$\|\partial_\theta u_0^{n,i}\| \leq C_2 4^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \|\rho_{0,t}^{n,i}\| \quad (5.40)$$

Notons qu'après avoir résolue (5.38) le nouveau  $\rho_0$  est

$$\rho_{0,t}^{n,i+1} = \rho_{0,t}^{n,i}|_{2^n} + \rho_{1,t}^{n,i} u_{0,t}^{n,i} + \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) \quad (5.41)$$

et vérifie

$$\rho_{0,t}^{n,i+1}|_{2^n} = \{\rho_{1,t}^{n,i} u_{0,t}^{n,i} + \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i})\}|_{2^n} \quad (5.42)$$

grâce à la définition de  $\rho_{0,t}^{n,i}|_{2^n}$ . Nous avons aussi un nouveau  $\rho_1$

$$\rho_{1,t}^{n,i+1} = \rho_{1,t}^{n,i} + \partial_z \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) \quad (5.43)$$

et un nouveau  $\rho$

$$\rho_t^{n,i+1}(\cdot, z) = \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i} + z) - \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) - z \partial_z \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) \quad (5.44)$$

défini en la variable  $z$  sur le disque  $D(0, r_t^{n,i+1}(\theta))$  avec

$$r_t^{n,i+1}(\theta) = R^{n,i} - |u_{0,t}^{n,i}(\theta)| \quad (5.45)$$

La suite  $\{R^{n,i}\}$  vérifie

$$R^{n,i+1} \leq r_t^{n,i+1}(\theta) \quad (5.46)$$

pour tout  $\theta$  dans  $B_{\delta^n}$ . Nous considérons désormais le rayon  $R^{n,i+1}$  comme le domaine de la variable  $z$ . Il faut se rappeler que à chaque fois que nous résoudrons (5.38) nous le faisons sans perte de largeur de bande. C'est seulement au moment où nous aurons besoin d'estimer les restes  $\rho_{0,t}^{n,i}|_{2^n}$  que nous introduirons, et seulement une fois par étape, lors de la 3ème partie, une perte de largeur  $d_0^n$ .

**Estimations dans la première partie de l'étape.** Définissons

$$\eta_{n,0}^t = \rho_{0,t}^{n,0} \quad (5.47)$$

$$\eta_{n,i+1}^t = \rho_{1,t}^{n,i} u_{0,t}^{n,i} + \rho_t^{n,i}(\theta, u_{0,t}^{n,i}) \quad (5.48)$$

Chaque fois que nous résoudrons l'équation (5.38) nous gagnons vraiment sur l'estimation de  $\eta_{n,i+1}^t$  car (5.42) implique

$$\rho_{0,t}^{n,i+1}|_{2^n} = \eta_{n,i+1}^t|_{2^n} \quad (5.49)$$

et nous améliorons (5.39),(5.40) par

$$\|u_{0,t}^{n,i}\| \leq C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \|\eta_{n,i}^t\| \quad (5.50)$$

$$\|\partial_\theta u_{0,t}^{n,i}\| \leq C_2 4^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \|\eta_{n,i}^t\| \quad (5.51)$$

Nous allons montrer inductivement pour tout  $i \geq 0$ , l'indice des pas, que

$$\|\partial_z^2 \rho_t^{n,i}\| \leq M_n \quad (5.52)$$

$$\text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i}) \leq N_{n,i} \quad (5.53)$$

$$\|\eta_{n,i}^t\| \leq \frac{w_n}{2^i} \quad (5.54)$$

$$\|\partial_\theta \rho_{1,t}^{n,i}\| \leq 2l_n \quad (5.55)$$

$$\|\rho_{1,t}^{n,i}\| \leq K_4 l_n \quad (5.56)$$

où la constante  $K_4$  est plus grande que  $K_3$ . À partir des inégalités (5.50),(5.51) et (5.54) ils découlent les estimations

$$\|u_{0,t}^{n,i}\| \leq \frac{C_2 l_n}{\aleph 2^n 2^i} \quad (5.57)$$

$$\|\partial_\theta u_{0,t}^{n,i}\| \leq \frac{C_2 l_n}{\aleph 2^i} \quad (5.58)$$

Pour accomplir l'induction nous voyons d'abord que les hypothèses (5.33)...(5.37) nous permettent de démarrer. Supposons donc que les relations précédentes sont vérifiées pour tout  $0 \leq j < i + 1$ .

Nous sommes déjà en mesure de exhiber une partie de la définition de la suite  $\{R^{n,i}\}$  : supposons définie  $R^{n,i}$  nous définissons

$$R^{n,i+1} = R^{n,i} - C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) w_n \left( \frac{1}{2^i} \right) \quad (5.59)$$

$$R^{n,\infty} = R^{n,0} - 2C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) w_n \quad (5.60)$$

Si  $\aleph$  est plus grande que  $C_2$  alors l'affirmation (5.46) se vérifie d'après (5.45) et (5.57).

L'inégalité (5.56) s'obtient de (5.43), (5.37), (5.52) et (5.57) car

$$\begin{aligned} \|\rho_{1,t}^{n,i+1}\| &\leq \left\| \rho_{1,t}^{n,0} + \sum_{j=0}^i \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) \right\| \\ &\leq K_3 l_n + M_n \sum_{j=0}^i \|u_{0,t}^{n,j}\| \\ &\leq K_3 l_n + K_M C_2 \frac{l_n}{2^n} \\ &\leq K_4 l_n \end{aligned}$$

où la constante  $K_4$  dépend seulement de  $C_2, K_3$  et  $K_M$ . La relation (5.44) nous donne

$$\|\partial_z^2 \rho_t^{n,i+1}\| = \|\partial_z^2 \rho_t^{n,i}(\cdot, z + u_0^{n,i})\| \leq M_n$$

ce qui donne (5.52). En différenciant la relation (5.44) nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i+1} &= \partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i}(\cdot, z + u_{0,t}^{n,i}) + \partial_z^2 \rho_t^{n,i}(\cdot, z + u_{0,t}^{n,i}) \partial_\theta u_{0,t}^{n,i} \\ &\quad - \partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) - \partial_z^2 \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) \partial_\theta u_{0,t}^{n,i} \end{aligned}$$

et en estimant les termes correspondants nous pouvons estimer l'oscillation

$$\text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i+1}) \leq N_{n,i} + 2K_M K_2 4^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \frac{w_n}{2^i}$$

En fait, cette dernière inégalité nous permet déjà montrer une partie de la définition de la suite  $\{N_{n,i}\}$  : posons  $N_{n^*,0} = 2N$  et supposons  $N_{n,i}$  définie. Nous posons donc

$$N_{n,i+1} = N_{n,i} + 2K_M C_2 4^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \frac{w_n}{2^i} \quad (5.61)$$

Nous définissons  $N_{n,\infty}$  comme une borne supérieure des  $N_{n,i}$ , c'est à dire

$$N_{n,\infty} = N_{n,0} + 4K_M C_2 4^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) w_n \quad (5.62)$$

On vérifie maintenant sans peine l'inégalité

$$\text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i+1}) \leq N_{n,i+1}$$

La relation (5.43) nous permet calculer  $\partial_\theta \rho_1^{n,i+1}$  et estimer

$$\begin{aligned}
\|\partial_\theta \rho_1^{n,i+1}\| &\leq \left\| \partial_\theta \rho_1^{n,0} + \sum_{j=0}^i \partial_\theta \left( \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) \right) \right\| \\
&\leq l_n + \left\| \sum_{j=0}^i \partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) + \partial_z^2 \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) \partial_\theta u_{0,t}^{n,j} \right\| \\
&\leq l_n + \sum_{j=0}^i N_{n,j} \|u_{0,t}^{n,j}\| + M_n \|\partial_\theta u_{0,t}^{n,j}\| \\
&\leq l_n + \frac{K_5}{\aleph} l_n
\end{aligned}$$

pour une constante  $K_5$  qui dépend seulement de  $C_2$ ,  $K_M$  et  $K_N$ . Si nous choisissons  $\aleph$  plus grande que  $K_5$  nous obtenons

$$\|\partial_\theta \rho_1^{n,i+1}\| \leq 2l_n$$

Finalement nous estimons  $\eta_{n,i+1}^t$  à l'aide du point 3. du Lemme 5.2 et du point 1. du Lemme 5.3

$$\begin{aligned}
\|\eta_{n,i+1}^t\| &\leq K_4 l_n C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \frac{w_n}{2^i} + M_n \left( C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) \frac{w_n}{2^i} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{16} \frac{w_n}{2^i} + \frac{1}{2^i 16} \frac{w_n}{2^i} \\
&\leq \frac{w_n}{2^{i+1}}
\end{aligned}$$

où nous utilisons que  $\aleph > K_4 C_2$  et  $\aleph > K_M C_2^2$ .

**Finalisation de la première partie.** Nous allons appliquer l'opération de résolution de l'équation de  $u_0$  jusqu'au moment où la taille de  $\|\eta_{n,i}^t\|$  devient plus petite que  $\frac{w_{n+1}}{4}$ , ou plus précisément quand  $\frac{w_n}{2^i}$  soit plus petite que  $\frac{w_{n+1}}{4}$ . Soit  $i_n$  un tel moment, c'est à dire, que nous résolvons  $i_n$  fois l'équation (5.38). À ce moment nous nous arrêtons et passons à la deuxième partie de l'étape.

### Deuxième partie, l'équation de $u_1$

Cette partie consiste en résoudre une seule fois l'équation de  $u_1$ . Plus précisément, nous cherchons un changement de coordonnées de la forme  $h_n^t(\theta, z) = (\theta, u_{1,t}^n(\theta)z)$  et tel que

$$\frac{u_{1,t}^n(\theta)}{u_{1,t}^n(\theta + \alpha)} \{ \rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda \} = \lambda_n^t \quad (5.63)$$

Si nous posons  $e^{v_t^n(\theta)} = u_{1,t}^n(\theta)$  l'équation (5.63) se réduit à résoudre

$$v_t^n(\theta) - v_t^n(\theta + \alpha) = \log \lambda_n^t - \log(\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) \quad (5.64)$$



Nous allons résoudre alors l'équation (dite de  $u_1$ ) tronquée suivante

$$v_t^n(\theta) - v_t^n(\theta + \alpha) = \log \lambda_n^t - \left\{ \log (\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) \right\} \Big|_{2^n} \quad (5.65)$$

avec  $\lambda_n^t$  étant le seul nombre complexe qui permette cette résolution, c'est-à-dire, le seul qui rende nulle la moyenne du coté droit

$$\log \lambda_n^t = \int_{\mathbb{T}^1} \left\{ \log (\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) \right\} \Big|_{2^n} d\theta = \log \lambda + \int_{\mathbb{T}^1} \log \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda} + 1 \right) d\theta \quad (5.66)$$

On a l'estimation

$$\left| \int_{\mathbb{T}^1} \log \left( \frac{\rho_1^{n,i_n}}{\lambda} + 1 \right) d\theta \right| \leq C_3 \|\rho_1^{n,i_n}\|$$

pour une constante universelle  $C_3$ . Pour estimer la solution de (5.65) il nous faut une estimation de la taille du coté droit, pour cela nous écrivons la différence et l'estimons par

$$\begin{aligned} \log \lambda_n^t - \log (\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) &= \int_{\mathbb{T}^1} \log \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda} + 1 \right) d\theta - \log \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda} + 1 \right) \\ \|\log \lambda_n^t - \log (\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda)\| &\leq C_4 \|\rho_{1,t}^{n,i_n}\| \end{aligned}$$

pour une constante  $C_4$ . Nous avons

$$\|v_t^n\| \leq C_2 C_4 2^n \Gamma_\alpha(2^n) \|\rho_{1,t}^{n,i_n}\| \quad (5.67)$$

$$\|\partial_\theta v_t^n\| \leq C_2 C_4 4^n \Gamma_\alpha(2^n) \|\rho_{1,t}^{n,i_n}\| \quad (5.68)$$

car nous choisissons la moyenne  $\widehat{v}_t^n(0) = 0$ . Après la conjugaison par le changement de coordonnées  $h_n^t$  qui en résulte nous avons les nouvelles fonctions

$$\rho_{0,t}^{n+1,0} = \frac{\rho_{0,t}^{n,i_n}(\cdot)}{u_{1,t}^n(\cdot + \alpha)} \quad (5.69)$$

$$\rho_t^{n+1,0} = \frac{1}{u_{1,t}^n(\cdot + \alpha)} \rho_t^{n,i_n}(\cdot, u_{1,t}^n z) \quad (5.70)$$

Cette dernière fonction est définie en la variable  $z$  sur un disque  $D(0, r_t^{n+1,0}(\theta))$  avec

$$r_t^{n+1,0}(\theta) = \frac{R^{n,i_n}}{|u_{1,t}^n(\theta)|} \quad (5.71)$$

La suite  $\{R^{n,i}\}$  vérifie

$$R^{n+1,0} \leq r_t^{n+1,0}(\theta) \quad (5.72)$$

pour tout  $\theta$  dans la bande  $B_{\delta^n}$ . Nous considérons désormais le rayon  $R^{n+1,0}$  comme le domaine de la variable  $z$ . Le reste qui n'a pas été considéré dans l'équation (5.65) donne lieu à une nouvelle fonction  $\rho_1$

$$\rho_{1,t}^{n+1,0}(\theta) = \lambda_n^t \left( e^{\left\{ \log (\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) \right\} \Big|_{2^n}} \right) - \lambda \quad (5.73)$$

**Estimations dans la deuxième partie de l'étape.** De (5.67) et (5.56) nous avons

$$\|u_{1,t}^n - 1\| \leq C_3 C_2 C_4 2^n \Gamma_\alpha(2^n) K_4 l_n \quad (5.74)$$

Il existe donc une constante  $K_6$  telle que

$$\|u_{1,t}^n\| \leq e^{K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} \quad (5.75)$$

$$\|(u_{1,t}^n)^{-1}\| \leq e^{K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} \quad (5.76)$$

et en utilisant que  $\partial_\theta u_1^n = \partial_\theta v^n u_1^n$  et (5.68) nous avons

$$\|\partial_\theta u_{1,t}^n\| \leq e^{K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} K_6 4^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n \quad (5.77)$$

$$\leq 3K_6 4^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n \quad (5.78)$$

si  $\aleph$  est plus grande que  $K_6$ . Nous pouvons aussi noter que l'estimation (5.74) nous dit que le degré de la fonction  $u_1$  est nul. Nous sommes déjà en mesure de conclure la définition de la suite  $\{R^{n,i}\}$  et de montrer qu'elle est minorée par  $3/8$ .

**La suite  $\{R^{n,i}\}$ .** Supposons  $R^{n,\infty}$  déjà défini, alors nous posons

$$R^{n+1,0} = \frac{R^{n,\infty}}{e^{\aleph 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n}}. \quad (5.79)$$

Avec cette définition en main l'inégalité (5.72) se vérifie d'après (5.71) et (5.76). La suite  $R^{n,i}$  satisfait aussi les relations de décroissance annoncées dans (5.31). Voyons finalement que la sous suite des  $R^{n,0}$  est minorée par  $\frac{3}{8}$ . Pour faire cela notons que

$$R^{n+1,0} = 1 - \left\{ \sum_{j=0}^n R^{j,0} - R^{j+1,0} \right\}$$

et que les différences peuvent être estimées par

$$\begin{aligned} R^{j,0} - R^{j+1,0} &= R^{j,0} (1 - e^{-\aleph 2^j \Gamma_\alpha(2^j) l_n}) + \frac{2C_2 2^j \Gamma_{\alpha,\beta}(2^j) w_n}{e^{\aleph 2^j \Gamma_\alpha(2^j) l_n}} \\ &\leq \aleph 2^j \Gamma_\alpha(2^j) l_n + 2C_2 2^j \Gamma_{\alpha,\beta}(2^j) w_n \end{aligned}$$

donc d'après le point 2. du lemme 5.2 et le point 2. du lemme 5.3 la série des différences est bornée par

$$\sum_n \aleph 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n + 2 \sum_n C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) w_n < \frac{5}{8} \quad \blacksquare$$

La relation (5.70) donne

$$\partial_z^2 \rho_t^{n+1,0}(\theta, z) = \frac{u_{1,t}^n(\theta)^2}{u_{1,t}^n(\theta + \alpha)} \partial_z^2 \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta) z)$$

et nous obtenons alors l'estimation souhaitée pour la fonction  $\partial_z^2 \rho$

$$\begin{aligned} \|\partial_z^2 \rho_t^{n+1,0}\| &\leq M_n e^{3K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} \\ &\leq M_{n+1} \end{aligned}$$

car la suite  $\{M_n\}$  est construite comme suit

**La suite**  $\{M_n\}$ . Nous posons  $M_{n^*} = M$  et inductivement, si  $M_n$  est déjà définie,

$$M_{n+1} = M_n e^{3\aleph 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} \quad (5.80)$$

d'où suit sans peine la majoration par  $K_M$  et la validité de (5.80) ■

Pour calculer l'oscillation de  $\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n+1,0}$  nous faisons

$$\begin{aligned} \partial_\theta \partial_z \rho_t^{n+1,0}(\theta, z) &= \frac{\partial_\theta u_{1,t}^n(\theta) u_{1,t}^n(\theta + \alpha) - \partial_\theta u_{1,t}^n(\theta + \alpha) u_{1,t}^n(\theta)}{u_{1,t}^n(\theta + \alpha)^2} \partial_z \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta) z) \\ &+ \frac{u_{1,t}^n(\theta)}{u_{1,t}^n(\theta + \alpha)} \left\{ \partial_\theta \partial_z \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta) z) \right. \\ &\left. + \partial_z^2 \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta) z) z \partial_\theta u_{1,t}^n(\theta) \right\} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n+1,0}) &\leq 4 \|\partial_\theta u_{1,t}^n\| \|u_{1,t}^n\| \|(u_{1,t}^n)^{-1}\|^2 K_M + N_{n,i_n} \|u_{1,t}^n\| \|(u_{1,t}^n)^{-1}\| \\ &+ 2 \|(u_{1,t}^n)^{-1}\| \|u_{1,t}^n\| K_M \|\partial_\theta u_{1,t}^n\| \end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure la définition de la suite  $\{N_{n,i}\}$  et montrer qu'elle est majorée par une constante  $K_N$ .

**La suite**  $\{N_{n,i}\}$ . Supposons que  $N_{n,\infty}$  est déjà défini, nous posons alors

$$N_{n+1,0} = e^{2K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} N_{n,\infty} + 144 K_M K_6 4^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n \quad (5.81)$$

ce qui ajouté à l'inégalité (5.81) et les estimations dans cette section nous donnent

$$\text{osc}(\partial_\theta \partial_z \rho_t^{n+1,0}) \leq N_{n+1,0} \quad (5.82)$$

Si nous introduisons la valeur de  $N_{n,\infty}$  (voir (5.62)) dans la définition de  $N_{n+1,0}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} N_{n+1,0} &\leq e^{2K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} N_{n,0} + 8 K_M C_2 4^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) w_n + 144 K_M K_6 4^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n \\ &\leq e^{2K_6 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} N_{n,0} + K_7 4^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n \\ &\leq e^{2K_6 \sum 2^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n} \left( 2N + K_7 \sum 4^n \Gamma_\alpha(2^n) l_n \right) \end{aligned}$$

pour une constante  $K_7$ . On voit bien que (5.83) et les propriétés de la suite  $\{l_n\}$  impliquent une majoration pour la sous suite  $N_{n,0}$  par une constante  $K_N$ , ce qui ajouté aux relations suivantes de croissance

$$2N = N_{n^*,0} < N_{n^*,1} < \dots < N_{n^*,\infty} < N_{n^*+1,0} < \dots,$$

implique la majoration annoncée pour la suite  $\{N_{n,i}\}$  toute entière ■

Nous allons finir cette deuxième partie de l'étape en écrivant les fonctions pour lesquelles on a besoin d'une perte de largeur de bande pour obtenir une estimation, car dans son expression interviennent des fonctions tronquées. La relation (5.73) implique que

$$\partial_\theta \rho_{1,t}^{n+1,0} = \lambda_n^t \left( e^{\left\{ \log(\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda) \right\} \Big|_{2^n}} \right) \partial_\theta \left( \left\{ \log(\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda) \right\} \Big|_{2^n} \right)$$

mais l'opérateur de troncature commute avec la dérivation par rapport à  $\theta$ , donc

$$\partial_\theta \rho_{1,t}^{n+1,0} = \lambda_n^t \left( e^{\left\{ \log(\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda) \right\} \Big|_{2^n}} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda} (\partial_\theta \rho_{1,t}^{n,i_n}) \right\} \Big|_{2^n} \quad (5.83)$$

L'expression de la fonction  $\rho_0$  est alors

$$\rho_{0,t}^{n+1,0} = \frac{\rho_{0,t}^{n,i_n}}{u_{1,t}^n(\cdot + \alpha)} = \frac{1}{u_{1,t}^n(\cdot + \alpha)} \left( \eta_{1,t}^t + \sum_{j=0}^{i_n-1} \eta_{n,j}^t \Big|_{2^n} \right) \quad (5.84)$$

### Troisième partie, perte de largeur de bande

Pour estimer la taille des fonctions tronquées qui apparaissent dans (5.83),(5.84) nous introduisons une perte de largeur de bande de taille  $\max(d_n^0, d_n^1)$ . Le domaine de la variable  $\theta$  est désormais  $\delta^{n+1}$ . Nous pouvons estimer alors  $\rho_{0,t}^{n+1,0}$  par

$$\begin{aligned} \|\rho_{0,t}^{n+1,0}\| &\leq 2 \left( \frac{w_{n+1}}{4} + \sum_{j=0}^{i_n-1} C_1 \frac{w_n e^{-2\pi 2^n d_n^0}}{2^j d_n^0} \right) \\ &\leq \frac{w_{n+1}}{2} + 4C_1 \frac{w_n e^{-2\pi 2^n d_n^0}}{d_n^0} \\ &\leq w_{n+1} \end{aligned}$$

si  $\aleph$  est plus grande que  $2C_1$ , où nous avons utilisé la borne  $\|(u_{1,t}^n)^{-1}\| < 2$  qui n'est d'ailleurs pas très précise, mais suffisante. On reprend (5.83) ; comme  $\|\rho_{1,t}^{n,i_n}\|$  est uniformément petite il existe une constante  $C_5$  telle que

$$\begin{aligned} \|\partial_\theta \rho_{1,t}^{n+1,0}\| &\leq \frac{C_5 \|\partial_\theta \rho_{1,t}^{n,i_n}\| e^{-2\pi 2^n d_n^1}}{d_n^1} \\ &\leq \frac{2C_5 l_n e^{-2\pi 2^n d_n^1}}{d_n^1} \\ &\leq l_{n+1} \end{aligned} \quad (5.85)$$

où la dernière inégalité est rendue possible grâce à la définition de la suite  $\{l_n\}_{n \geq 0}$  (voir Lemme 5.2) et le fait que  $\aleph$  soit plus grande que  $2C_5$ . De cette façon nous obtenons toutes les inégalités (5.33)...(5.36) pour l'indice  $n+1$ . Ceci conclut la troisième partie.

### 5.4.5 Estimations par rapport au paramètre

Avant de passer à la quatrième et dernière partie de l'étape nous reprenons les trois premières pour établir les estimations qui font intervenir le paramètre  $t$ , et qui sont incontournables dans la quatrième partie où nous allons restreindre de façon considérable l'espace des paramètres. Cependant, dans cette section nous restreignons un peu aussi l'espace des paramètres pour appliquer des estimations de Cauchy. Au début de l'étape  $n$  nous avons les estimations suivantes

$$\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n,0}) \leq T_{n,0} \quad (5.86)$$

$$\left\| \int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}^{n,0} d\theta - \Delta_0 \right\| \leq s_n \quad (5.87)$$

où la suite de nombres réels  $\{T_{n,i}\}_{n \geq n^*, i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$  vérifie pour une constante  $K_T$  la majoration

$$T_{n+1,0} \leq K_T n 2^n \Gamma_\alpha(2^n) \quad (5.88)$$

et la suite de nombres réels  $\{s_n\}_{n \geq n^*}$  vérifie

$$\frac{L^{-1}}{1000} = s_{n^*} < s_{n^*+1} < s_{n^*+2} < \dots < \frac{L^{-1}}{100} \quad (5.89)$$

**Estimations dans la première partie de l'étape.** Nous allons montrer inductivement pour tout  $i \geq 0$  que nous avons

$$\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n,i}) \leq T_{n,i} \quad (5.90)$$

Supposons donc que ceci se vérifie pour tout  $0 \leq j < i + 1$ . Estimons d'abord  $\partial_t u_{0,t}^{n,i}$ . Nous utilisons une estimation de Cauchy, c'est à dire, nous perdons un peu de rayon sur le disque  $D(t_n, p_n)$  (espace des paramètres) pour obtenir une estimation sur la dérivé  $\partial_t u_{0,t}^{n,i}$ . Plus précisément nous construisons une suite de rayons  $\{p_{n_i}^-\}_{i \in \mathbb{N} \cup \infty}$  définie par

$$\begin{aligned} p_{n_{-1}}^- &= p_n \\ p_{n_i}^- &= p_{n_{i-1}}^- - l_n \left(\frac{2}{3}\right)^i \\ p_{n_\infty}^- &= p_n - 3l_n \end{aligned}$$

Ceci dit qu'à chaque pas nous perdons un tout petit morceau de rayon de taille  $l_n \left(\frac{2}{3}\right)^i$  (c'est cette perte que nous utilisons dans l'estimation (5.91) qui suit), et à la limite, l'accumulation des pertes est au plus de taille  $3l_n$ . De (5.57) l'estimation de Cauchy nous donne alors

$$\|\partial_t u_{0,t}^{n,i}\| \leq \frac{6C_2}{8 \cdot 2^n} \left(\frac{3}{4}\right)^i \quad (5.91)$$

Nous pouvons à ce moment estimer l'oscillation de  $\partial_t \partial_z \rho$  par

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_z \rho_t^{n,i+1} &= \partial_t \partial_z \rho_t^{n,i}(\theta, u_{0,t}^{n,i} + z) + \partial_z^2 \rho_t^{n,i}(\theta, u_{0,t}^{n,i} + z) \partial_t u_{0,t}^{n,i} \\ &\quad - \partial_t \partial_z \rho_t^{n,i}(\theta, u_{0,t}^{n,i}) - \partial_z^2 \rho_t^{n,i}(\theta, u_{0,t}^{n,i}) \partial_t u_0^{n,i} \\ \text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n,i+1}) &\leq T_{n,i} + 2M_n \|\partial_t u_{0,t}^{n,i}\| \end{aligned}$$

ce qui nous permet de montrer déjà une partie de la définition de la suite  $\{T_{n,i}\}$  : posons  $T_{n^*,0} = 2T$  et supposons  $T_{n,i}$  défini, nous posons

$$T_{n,i+1} = T_{n,i} + \frac{12K_M C_2}{\aleph 2^n} \left(\frac{3}{4}\right)^i \quad (5.92)$$

Nous définissons  $T_{n,\infty}$  comme un borne pour les  $T_{n,i}$ , donc

$$T_{n,\infty} = T_{n,0} + \frac{48K_M C_2}{\aleph 2^n} \quad (5.93)$$

On vérifie maintenant sans peine l'inégalité

$$\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n,i+1}) \leq T_{n,i+1}$$

**Estimations dans la deuxième partie de l'étape.** Nous estimons d'abord la taille de  $\partial_t u_1^n = u_1^n \partial_t v_n$ , en dérivant par rapport à  $t$  l'équation (5.65), ce qui donne

$$\partial_t v_t^n(\theta) - \partial_t v_t^n(\theta + \alpha) = - \left\{ \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,i_n}}{\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda} \right\}_1^{2^n} \quad (5.94)$$

où la notation  $|\cdot|_1^{2^n}$  veut dire que nous faisons la troncature de tous les termes de la série de Fourier des fonctions sauf ceux d'ordre compris entre 1 et  $2^n$ . La meilleure estimation que nous pouvons obtenir pour la fonction du côté droit (sous sa forme originale sans troncature) est de l'ordre d'une constante. Plus précisément en introduisant une perte dans le rayon du disque  $D(t_n, p_{n^-})$  de taille  $l_n$  l'estimation de Cauchy donne

$$\left\| \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,i_n}}{\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda} \right\| \leq 12K_4 \quad (5.95)$$

Le nouvel espace de paramètres est  $D(t_n, p_{n^-})$  avec

$$p_{n^-} = p_{n_\infty^-} - l_n = p_n - 4l_n$$

Nous avons donc

$$\|\partial_t u_{1,t}^n\| \leq C_2 24K_4 2^n \Gamma_\alpha(2^n) \quad (5.96)$$

Nous pouvons estimer maintenant l'oscillation de  $\partial_t \partial_z \rho_t^{n+1,0}$  par

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_z \rho_t^{n+1,0}(\theta, z) &= \frac{\partial_t u_{1,t}^n(\theta) u_{1,t}^n(\theta + \alpha) - \partial_t u_{1,t}^n(\theta + \alpha) u_{1,t}^n(\theta)}{u_{1,t}^n(\theta + \alpha)^2} \partial_z \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta)z) \\
&\quad + \frac{u_{1,t}^n(\theta)}{u_{1,t}^n(\theta + \alpha)} \left\{ \partial_t \partial_z \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta)z) \right. \\
&\quad \left. + \partial_z^2 \rho_t^{n,i_n}(\theta, u_{1,t}^n(\theta)z) z \partial_t u_{1,t}^n(\theta) \right\} \\
\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n+1,0}) &\leq 4 \|\partial_t u_{1,t}^n\| \|u_{1,t}^n\| \|(u_{1,t}^n)^{-1}\|^2 M_n + \|u_{1,t}^n\| \|(u_{1,t}^n)^{-1}\| T_{n,i_n} \\
&\quad + 2 \|u_{1,t}^n\| \|(u_{1,t}^n)^{-1}\| M_n \|\partial_t u_{1,t}^n\|
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Nous pouvons conclure la définition de la suite  $\{T_{n,i}\}$  et montrer la majoration (5.88) annoncée.

**La suite  $\{T_{n,i}\}$ .** Supposons  $T_{n,\infty}$  déjà défini, nous posons

$$T_{n+1,0} = \tilde{K}_T 2^n \Gamma_\alpha(2^n) + 2T_{n,\infty} \tag{5.98}$$

avec la constante  $\tilde{K}_T = 32K_M C_2 24K_4$ . En regardant l'inégalité (5.97) nous obtenons d'après les définitions que

$$\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{n+1,0}) \leq T_{n+1,0}$$

Si nous introduisons la valeur de  $T_{n,\infty}$  (voir (5.93)) dans la définition de  $T_{n+1,0}$  nous obtenons

$$T_{n+1,0} \leq \tilde{K}_T 2^n \Gamma_\alpha(2^n) + 2T_{n,0} + \frac{\tilde{K}_T}{2^n}$$

ce qui donne (largement d'ailleurs) l'estimation annoncée. ■

**Estimations dans la troisième partie de l'étape.** Nous sommes prêts à estimer la distance entre  $\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}$  et  $\Delta_0$  et voir qu'elle est toujours très petite, ce que nous permettra de montrer dans la section 5.4.6 que  $\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}(\theta) d\theta$  croît presque comme une application linéaire. En envisageant de simplifier la notation, nous allons introduire des constantes  $K_8, K_9$  de manière qu'on ait

$$\begin{aligned}
\partial_t \left( \sum_0^i \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}(\theta)) \right) &= \sum_0^i \partial_t \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) + \partial_z^2 \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) \partial_t u_{0,t}^{n,j} \\
\left\| \partial_t \left( \sum_0^i \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}(\theta)) \right) \right\| &\leq T_{n,\infty} 2C_2 2^n \Gamma_{\alpha,\beta}(2^n) w_n + \frac{K_8}{82^n} \\
&\leq \frac{K_9}{82^n}
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Nous aurons besoin aussi d'estimer la taille de  $\partial_t(\lambda_n^t)$ . Pour cela il sera utile d'avoir une expression plus détaillée; de (5.66) nous avons

$$\begin{aligned}\partial_t(\lambda_n^t) &= \lambda_n^t \partial_t(\log \lambda_n^t) \\ &= \frac{\lambda_n^t}{\lambda} \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,i_n}}{1 + \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}} d\theta \right) \\ &= \frac{\lambda_n^t}{\lambda} \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,0} + \partial_t \left( \sum_0^{i_n-1} \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) \right)}{1 + \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}} d\theta \right)\end{aligned}$$

Voyons alors ce que donne la dérivée par rapport à  $t$  de  $\rho_{1,t}^{n+1,0}$ . En différenciant (5.73) nous avons

$$\partial_t \rho_{1,t}^{n+1,0} = \partial_t(\lambda_n^t) e^{\{\log(\rho_1^{n,i_n} + \lambda)\}_{|_{2^n}}} + \lambda_n^t e^{\{\log(\rho_1^{n,i_n} + \lambda)\}_{|_{2^n}}} \left\{ \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,i_n}}{\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda} \right\} \Big|_{2^n}$$

et la différence entre son intégrale et  $\Delta_0$  s'écrit donc comme la somme de trois termes  $I_1 + I_2 + I_3$ , un pour chaque ligne ci-dessous

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}^{n+1,0}(\theta) d\theta - \Delta_0 &= \left( \int_T \frac{\lambda_n^t e^{\{\log(\rho_1^{n,i_n} + \lambda)\}_{|_{2^n}}}}{\lambda} d\theta \right) \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,0}}{1 + \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}} d\theta \right) - \Delta_0 \\ &+ \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\lambda_n^t e^{\{\log(\rho_1^{n,i_n} + \lambda)\}_{|_{2^n}}}}{\lambda} d\theta \right) \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\partial_t \left( \sum_0^{i_n-1} \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}) \right)}{1 + \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}} d\theta \right) \\ &+ \int_{\mathbb{T}^1} \lambda_n^t e^{\{\log(\rho_1^{n,i_n} + \lambda)\}_{|_{2^n}}} \left\{ \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,i_n}}{\rho_{1,t}^{n,i_n} + \lambda} \right\} \Big|_{2^n} d\theta\end{aligned}$$

Le terme  $I_1$  est égal à la somme des trois termes ci-dessous

$$\begin{aligned}&\left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\lambda_n^t e^{\{\log(\rho_1^{n,i_n} + \lambda)\}_{|_{2^n}}}}{\lambda} d\theta \right) \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\partial_t \rho_{1,t}^{n,0} - 1}{1 + \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}} d\theta \right) \\ &+ \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\lambda_n^t e^{\{\log(\frac{\rho_1^{n,i_n}}{\lambda} + 1)\}_{|_{2^n}}}}{\lambda} d\theta \right) \left( \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}}{1 + \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}}{\lambda}} d\theta \right) \\ &+ \left( \int_{\mathbb{T}^1} e^{\int \log(\frac{\rho_1^{n,i_n}}{\lambda} + 1) + \{\log(\frac{\rho_1^{n,i_n}}{\lambda} + 1)\}_{|_{2^n}}} - 1 d\theta \right) \Delta_0\end{aligned}$$

Il existe donc une constante  $K_s$  telle que

$$\|I_1\| \leq e^{K_s l_n} s_n + K_s l_n \quad (5.100)$$

Les termes  $\lambda_n^t, \rho_{1,t}^{n,i_n}$  sont majorés universellement donc il existe une constante  $C_6$  telle que à l'aide de (5.99) nous avons

$$\|I_2\| \leq \frac{C_6 K_9}{\aleph 2^n} \quad (5.101)$$



Le terme  $I_3$  est l'intégrale d'un terme universellement borné multiplié par la troncature d'une fonction, dont la taille est aussi bornée (par une constante de type  $K$ , tout cela *avant* l'introduction de la perte de largeur de bande, voir (5.95)). Quand nous considérons la perte de largeur de bande nous obtenons ainsi une constante  $K_{10}$  et la borne

$$\|I_3\| \leq K_{10} \frac{e^{-2\pi 2^n d_n^1}}{d_n^1} = \frac{K_{10} l_{n+1}}{\aleph l_n} < \frac{K_{10}}{\aleph e^{2n+1}} \quad (5.102)$$

En considérant ces trois bornes pour les termes  $I_1, I_2$  et  $I_3$  nous avons que dans la troisième partie de l'étape il se vérifie l'estimation

$$\left\| \int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}^{n+1,0} d\theta - \Delta_0 \right\| \leq e^{K_s l_n} s_n + K_s l_n + \frac{C_6 K_9}{\aleph 2^n} + \frac{K_{10}}{\aleph e^{2n+1}} \quad (5.103)$$

Nous pouvons à ce moment rendre explicite la définition de la suite  $\{s_n\}$  et montrer ses propriétés annoncées.

**La suite  $\{s_n\}$ .** Nous définissons cette suite par la récurrence

$$s_{n^*} = \frac{L^{-1}}{1000} \quad (5.104)$$

$$s_{n+1} = s_n e^{K_s l_n} + K_s l_n + \frac{C_6 K_9}{\aleph 2^n} + \frac{K_{10}}{\aleph e^{2n+1}} \quad (5.105)$$

d'où (5.103) implique (tautologiquement) que

$$\left\| \int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \rho_{1,t}^{n+1,0} d\theta - \Delta_0 \right\| \leq s_{n+1} \quad (5.106)$$

En itérant la définition nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned} s_n &< \left( \prod_0^\infty e^{K_s l_j} \right) s_{n^*} + \prod_0^\infty e^{K_s l_j} \left( \sum_0^\infty K_s l_j + \frac{C_6 K_9}{\aleph 2^n} + \frac{K_{10}}{\aleph e^{2j+1}} \right) \\ &\leq (e^{K_s \sum_j l_j}) s_{n^*} + e^{K_s \sum_j l_j} \left( K_s \sum_0^\infty l_j + \frac{2C_6 K_9}{\aleph} + \frac{K_{10}}{e \aleph} \right) \end{aligned}$$

et si  $\aleph$  est suffisamment grande nous avons la majoration (5.89) annoncée ■

### 5.4.6 Quatrième partie, coupure dans l'ensemble des paramètres

Nous arrivons à une partie bien différente dans la procédure, car ici les estimations ne s'obtiennent pas par un phénomène des restes d'une équation linéarisée (restes *quadratiques*), ou par des estimations de Cauchy associées à des pertes de largeur de bande, comme dans les parties précédentes, mais par la propriété de transversalité de la famille

$\{F_t\}$ . Voyons la nécessité d'une telle hypothèse. À ce moment on a, d'après la relation (5.73), que pour une constante  $C_7$

$$\|\rho_{1,t}^{n+1,0}\| \leq C_7 \|\rho_{1,t}^{n,i_n}\| \leq C_7 K_4 l_n, \quad (5.107)$$

c'est à dire qu'on n'a pas gagné sur l'ordre de grandeur de la taille de  $\rho_1$ . Ceci était prévisible car nous n'avons effectué que des opérations pour contrôler la dérivé  $\partial_\theta \rho_1$ . Nous allons utiliser l'affirmation 5.1.1 pour contrôler  $\rho_1$ , donc nous avons besoin de contrôler la taille de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}(\theta) d\theta$  qui est une donnée de dimension 1 complexe. La propriété de transversalité de la famille  $\{F_t\}$  va nous permettre de faire cela. Nous allons trouver un paramètre  $t_{n+1}$  tel que  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t_{n+1}}^{n+1,0} = 0$ , et alors nous profiterons du fait que si nous nous approchons suffisamment ce paramètre, la taille de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n+1,0}$  est petite. Plus précisément nous allons restreindre l'espace des paramètres  $D(t_n, p_{n-})$  en trouvant un disque  $D(t_{n+1}, p_{n+1}) \subset D(t_n, p_{n-})$  avec  $t_{n+1}$  un zéro simple de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n+1,0}(\theta) d\theta$  et de rayon  $p_{n+1}$  suffisamment petit (comme dans (5.32)).

### Une application du Lemme de Rouché

Nous utiliserons le Lemme de Rouché pour trouver  $t_{n+1}$ , c'est à dire, un argument d'homotopie qui compare une fonction holomorphe à une autre qui a un zéro simple à l'intérieur d'un domaine. Il nous faut montrer alors que sur le bord d'un disque autour de  $t_n$  il se vérifie l'hypothèse du Lemme de Rouché. Nous écrivons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\rho_{1,t}^{n+1,0}(\theta)}{\lambda} d\theta &= \int_{\mathbb{T}^1} \left( \frac{\lambda_n^t}{\lambda} e^{\{\log(\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda)\}_{|\overline{2^n}} - 1} \right) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}^1} \left( e^{\int_{\mathbb{T}^1} \log\left(\frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} + 1\right) d\theta + \{\log(\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda)\}_{|\overline{2^n}} - 1} \right) d\theta \end{aligned}$$

et définissons  $g_+(t)$  comme étant cette dernière expression, que nous allons comparer sur le bord d'un disque  $D(t_n, r)$  avec la fonction  $g(t) = \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\rho_{1,t}^{n,0}(\theta)}{\lambda} d\theta$

$$\begin{aligned} |g_+(t) - g(t)| &\leq \int_{\mathbb{T}^1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}^1} \log\left(\frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} + 1\right) d\theta - g(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \log(\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) \right\}_{|\overline{2^n}} \right| + Z^2 e^Z \right\} d\theta \end{aligned}$$

où  $Z = \left| \int_{\mathbb{T}^1} \log\left(\frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} + 1\right) d\theta + \left\{ \log(\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda) \right\}_{|\overline{2^n}} \right|$ . Il existe alors une constante  $K_{11}$  telle que  $Z < K_{11} l_n \ll 1$  si  $\aleph$  est suffisamment grande. À l'aide d'un développement de Taylor pour  $\log\left(\frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} + 1\right)$ , où le module de la fonction  $\omega(\theta, t)$  liée au développement est

compris entre 0 et 1, nous avons

$$\begin{aligned}
|g_+(t) - g(t)| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}^1} \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} - \frac{\omega(\theta,t)}{2} \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} \right)^2 - \frac{\rho_{1,t}^{n,0}(\theta)}{\lambda} \right) d\theta \right| \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^1} \left| \left\{ \log \left( \rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda \right) \right\} \right|_{\frac{1}{2^n}} + Z^2 e^Z \left| d\theta \right| \\
&< \int_{\mathbb{T}^1} \left| \sum_0^{i_n-1} \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}(\theta)) \right| + \left| \frac{\omega(\theta,t)}{2} \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} \right)^2 \right| d\theta \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^1} \left| \left\{ \log \left( \rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda \right) \right\} \right|_{\frac{1}{2^n}} + Z^2 e^Z \left| d\theta \right|
\end{aligned}$$

On peut vérifier sans peine les estimations suivantes

$$\int_{\mathbb{T}^1} \left| \sum_0^{i_n-1} \partial_z \rho_t^{n,j}(\theta, u_{0,t}^{n,j}(\theta)) \right| d\theta \leq \frac{2C_2 K_M l_n}{\aleph} \quad (5.108)$$

$$\int_{\mathbb{T}^1} \left| \frac{\omega(\theta,t)}{2} \left( \frac{\rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta)}{\lambda} \right)^2 \right| d\theta \leq \frac{K_4^2 l_n^2}{2} \quad (5.109)$$

$$\int_{\mathbb{T}^1} \left| \left\{ \log \left( \rho_{1,t}^{n,i_n}(\theta) + \lambda \right) \right\} \right|_{\frac{1}{2^n}} d\theta \leq \frac{C_3 K_4 l_n e^{-2\pi 2^n d_n^1}}{d_n^1} \leq \frac{C_3 K_4 l_{n+1}}{\aleph} \quad (5.110)$$

Si  $\aleph$  est suffisamment grand nous avons

$$|g_+(t) - g(t)| < 3l_n L^{-1} \quad (5.111)$$

sur tout le disque  $D(t_n, r)$  avec  $r \leq p_{n-}$ . La condition de transversalité sur la dérivée  $\partial_t \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}(\theta) d\theta$  implique que  $g(t)$  croît presque comme une application linéaire, plus précisément

$$s_n |t - t_n| \geq \left| \int_{t_n}^t \left( \frac{\Delta_0}{\lambda} - \partial_t g(t) \right) \right| = \left| \frac{\Delta_0(t - t_n)}{\lambda} - g(t) + g(t_n) \right|$$

ce qui implique

$$|g(t)| \geq (L^{-1} - s_n) |t - t_n| \geq \frac{99}{100} L^{-1} |t - t_n| = \frac{99}{100} L^{-1} r$$

sur le bord d'un disque  $D(t_n, r)$ . Il suffit donc que le rayon  $r$  soit au moins  $\frac{100}{99} 3l_n$  pour satisfaire l'hypothèse du Lemme de Rouché et obtenir ainsi un zéro simple  $t_{n+1}$  de  $g_+(t)$  à l'intérieur du disque  $D(t_n, r)$ . Il faut montrer d'une partie que si nous prenons  $r$  comme étant cette valeur minimale alors le nouveau zéro  $t_{n+1}$  est bien dans l'espace des paramètres  $D(t_n, p_{n-})$ . Pour cela il suffit de voir que

$$p_{n-} - 3l_n \frac{100}{99} > 92l_n > 0 \quad (5.112)$$

Il faut également montrer que nous pouvons démarrer l'étape  $n + 1$  avec le rayon  $p_{n+1}$ . Pour cela nous voyons que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 100l_{n+1} \\ &= l_n \left( \frac{100\Gamma_{\alpha,\beta}(2^n)\Gamma_\alpha(2^n)}{\Gamma_{\alpha,\beta}(2^{n+1})\Gamma_\alpha(2^{n+1})2e^{2n+1}} \right) \\ &< 25l_n \end{aligned} \tag{5.113}$$

D'après (5.112) et (5.113) le disque  $D(t_{n+1}, p_{n+1})$  est contenu dans le disque  $D(t_n, p_n)$ , et devient notre nouvel espace de paramètres.

Nous obtenons ainsi toutes les estimations nécessaires pour recommencer la procédure à l'étape  $n + 1$ .

#### 5.4.7 Convergence de la méthode

Tout ce que nous venons de voir nous dit que nous pouvons itérer la procédure une infinité de fois pour la  $dhf$  correspondant au paramètre  $\bar{t} = \bigcap_{n \geq n^*} D(t_n, p_n)$ . Nous allons omettre le paramètre dans la notation puisque nous considérons désormais seulement la dynamique holomorphe fibrée donnée par ce paramètre,  $F_{\bar{t}}$ . Bien entendu,  $\bar{t}$  est le paramètre qui vérifie la conclusion du Théorème 5.1. Les taux de décroissance des fonctions ainsi que toutes les estimations qui apparaissent au cours de la procédure nous permettront de montrer que la composition successive des conjugaisons fabriquées lors de la procédure donnent lieu à un changement de coordonnées analytique. Posons d'abord

$$\delta^\infty = \delta^* - \sum_{n^*}^{\infty} \max(d_n^0, d_n^1) > \frac{\delta}{2} \tag{5.114}$$

Regroupons les conjugaisons par étape en notant

$$H_n(\theta, z) = h_{n,0} \circ h_{n,1} \circ \cdots \circ h_{n,i_n-1} \circ h_n(\theta, z) = \left( \theta, u_0^n(\theta) + u_1^n(\theta)z \right)$$

où nous avons posé  $u_0^n(\theta) = \sum_{i=0}^{i_n-1} u_0^{n,i}(\theta)$ . Les compositions successives jusque à l'étape  $n$  donnent

$$\begin{aligned} H_{n^*} \circ H_{n^*+1} \circ \cdots \circ H_n(\theta, z) &= \left( \theta, u_0^{n^*} + u_1^{n^*} \left( u_0^{n^*+1} + u_1^{n^*+1} (\dots (u_0^n + u_1^n z) \dots) \right) \right) \\ &= \left( \theta, u_0^{n^*} + u_1^{n^*} u_0^{n^*+1} + \dots + \left( \prod_{j=n^*}^{n-1} u_1^j \right) u_0^n + \left( \prod_{j=n^*}^n u_1^j \right) z \right) \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que le terme constant et le coefficient de  $z$  dans la ligne ci-dessus convergent uniformément sur  $\theta$  quand  $n$  tend vers l'infini. Pour montrer cette convergence

uniforme il suffit de montrer la convergence uniforme du produit  $\prod_{n^*}^{\infty} u_1^j(\theta)$  et uniforme et absolue de la série  $\sum_{n^*}^{\infty} u_0^j(\theta)$ . Le produit satisfait

$$\log \left( \prod_{j=n^*}^i u_1^j(\theta) \right) = \sum_{j=n^*}^i v^j(\theta)$$

où la dernière série est uniformément et absolument convergente grâce à l'estimation (5.67) et le point 2. du Lemme 5.2. La série des  $u_0$  est

$$\sum_{j=n^*}^n u_0^j(\theta) = \sum_{j=n^*}^n \sum_{i=0}^{i_j-1} u_0^{j,i}(\theta)$$

Donc nous estimons

$$\left\| \sum_{j=n^*}^n u_0^j \right\|_{B_{\delta^\infty}} \leq \sum_{j=n^*}^n \sum_{i=0}^{i_j-1} C_2 2^j \Gamma_{\alpha,\beta}(2^j) \frac{w_j}{2^i} < \frac{1}{8} \sum_{j=n^*}^{\infty} \frac{1}{4^j e^{j^2}} \quad (5.115)$$

Il existe donc la limite

$$H(\theta, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{n^*} \circ H_{n^*+1} \circ \cdots \circ H_n(\theta, z)$$

et s'écrit sous la forme

$$H(\theta, z) = (\theta, u_0(\theta) + u_1(\theta)z)$$

avec les fonctions  $u_0, u_1$  analytiques sur la bande  $B_{\delta^\infty}$ . La fonction  $u_1$  est de degré nul car le degré est un homomorphisme et chaque fonction  $u_1^j$  est de degré nul. La conjugaison de  $F$  par  $H$  prend la forme

$$H^{-1} \circ F \circ H(\theta, z) = (\theta + \alpha, \lambda z + \rho^\infty(\theta, z))$$

car les suites  $l_n, w_n$  qui contrôlent les tailles de  $\rho_0^{n,0}, \rho_1^{n,0}$  tendent vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. La fonction  $\rho^\infty$  s'annule à l'ordre 2 en  $z = 0$  et est définie sur le disque  $D(0, R^\infty)$  avec  $\frac{3}{8} \leq R^\infty$ . La courbe invariante est  $u_0(\theta)$  et d'après (5.115) satisfait

$$\|u_0\|_{B_{\delta^\infty}} \leq \frac{1}{8} \sum_{j=n^*}^{\infty} \frac{1}{4^j e^{j^2}} \quad (5.116)$$

### 5.4.8 Modification de la première étape et la taille de $\varepsilon$

Soient un nombre naturel  $\bar{n} \geq n^*$  et un réel positif  $\varepsilon$  tels que

$$\frac{\delta}{24} l_{\bar{n}+1} < \varepsilon \leq \frac{\delta}{24} l_{\bar{n}} \quad (5.117)$$

Soit  $\{F_t\}_{t \in \Sigma}$  une famille analytique qui vérifie (parmi les autres hypothèses) que

$$\|\rho_1\| \leq \varepsilon \quad , \quad \|\rho_0\| \leq \frac{24\varepsilon}{\delta \aleph 4^{\bar{n}} \Gamma_{\alpha,\beta}(2^{\bar{n}})} \quad (5.118)$$

Démarrons l'algorithme à l'étape  $\bar{n}$  et notons que pour arriver dans un bon pied au début de l'étape  $\bar{n} + 1$  il nous suffit de montrer les faits suivants :

**Dans la première partie** Les inégalités (5.54), (5.55) doivent être

$$\|\eta_{\bar{n},i}^t\| \leq \frac{24\varepsilon}{\delta \aleph 4^{\bar{n}} \Gamma_{\alpha,\beta}(2^{\bar{n}}) 2^i} \quad (5.119)$$

$$\|\partial_\theta \rho_{1,t}^{\bar{n},i}\| \leq 2 \left( \frac{24\varepsilon}{\delta} \right) \quad (5.120)$$

ce qui est immédiat en répétant les calculs de cette partie-là.

**Dans la deuxième partie** L'inégalité (5.74) doit être

$$\|u_{1,t}^{\bar{n}} - 1\| \leq C_3 C_2 C_4 2^{\bar{n}} \Gamma_\alpha(2^{\bar{n}}) K_4 \frac{24\varepsilon}{\delta} \quad (5.121)$$

ce qui est aussi direct.

De cette façon dans la troisième partie nous réussissons à avoir les majorations correspondantes par  $l_{\bar{n}+1}$  et  $w_{\bar{n}+1}$  lors de la perte de largeur de bande.

**Dans les estimations par rapport au paramètre** Afin d'obtenir (5.91) il suffit de perdre un morceau de taille  $\frac{24\varepsilon}{\delta} \left(\frac{2}{3}\right)^i$  sur le disque de paramètres à chaque pas, ainsi comme pour obtenir (5.95) il suffit de perdre un morceau de taille  $\frac{24\varepsilon}{\delta}$ . Lors de la quatrième partie on voit que (5.108), (5.109), (5.110) sont majorées par

$$\frac{2C_2 K_M 24\varepsilon}{\aleph \delta}, \quad \frac{K_4^2 \left(\frac{24\varepsilon}{\delta}\right)^2}{2}, \quad \frac{C_3 K_4 \left(\frac{24\varepsilon}{\delta}\right) e^{-2\pi 2^{\bar{n}} d_n^1}}{d_n^1} \leq \frac{C_3 K_4 l_{\bar{n}+1}}{\aleph} \quad (5.122)$$

respectivement, alors si  $\aleph$  est suffisamment grande (5.111) reste majorée par  $3L^{-1} \left(\frac{24\varepsilon}{\delta}\right)$ , ce qui permet de finir l'étape avec les pertes de rayon du disque de l'espace de paramètres appropriées.

Tout cela nous permet de dire qu'il suffi de démarrer l'étape  $\bar{n}$  avec un disque de rayon

$$p_{\bar{n}} = 100 \frac{24\varepsilon}{\delta} \quad (5.123)$$

dans l'espace des paramètres, donc le paramètre  $\bar{t}$  qui vérifie l'existence de la courbe invariante est bien à distance constante fois  $\varepsilon$  de l'origine du plan complexe. Si  $\varepsilon$  tend vers 0, alors le niveau  $\bar{n}$  de la première étape augmente et l'inégalité (5.116) nous permet de conclure que la taille de la courbe invariante tend vers 0.

Nous avons donc montré que le Théorème 5.1 vaut sous une hypothèse plus forte  $\|\rho_0\| \leq w_{n^*}$  (ou plus précisément sous l'hypothèse (5.118)). Dans la prochaine section nous verrons qu'il suffit d'imposer l'hypothèse  $\|\rho_0\| \leq \varepsilon$  et comme même nous ramener aux hypothèses déjà utilisées. Nous allons décrire une procédure *préalable* à l'algorithme qui va nous permettre ramener les hypothèses du Théorème 5.1 aux hypothèses que nous utilisons effectivement lors de l'application de l'algorithme.

## 5.5 Une procédure préalable et fin de la démonstration

### Diminution initiale de la taille de $\rho_0$

Nous savons que la résolution de l'équation de  $u_0$  donne lieu à une diminution de la taille de  $\rho_0$ . Nous allons résoudre plusieurs fois cette équation pour obtenir, à partir de l'hypothèse du Théorème 5.1, une taille de  $\rho_0$  adéquate pour démarrer l'algorithme. Cependant, chaque résolution de l'équation de  $u_0$  va provoquer une petite augmentation de la taille de  $\rho_1$ , mais l'augmentation totale sera bien contrôlée (nous allons omettre délibérément plusieurs détails lors de la manipulation des estimations dans cette section, dont les justifications ont été bien développées dans les sections précédentes). Nous fixons d'abord une constante  $\aleph$  à partir des données  $(L, M, 2T + (2000L)^{-1}, \delta, (\alpha, \beta))$  comme décrit au début de la section 5.4.1. Ce choix nous fournit les suites déjà introduites  $\{l_n\}, \{w_n\}, \{d_n^0\}, \{d_n^1\}$  et un nombre naturel  $n^*$  qui représente le plus bas niveau de départ pour les étapes de l'algorithme. Supposons qu'il existe  $\bar{n} \geq n^*$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$\frac{\delta l_{\bar{n}+1}}{24} < \varepsilon (w_{n^*})^{-1} \leq \frac{\delta l_{\bar{n}}}{24} \quad (5.124)$$

et (parmi les autres hypothèses du Théorème 5.1) que pour tout paramètre  $t$  dans le disque  $D(0, K_R \varepsilon)$  on ait

$$\|\rho_{0,t}\| \leq \varepsilon \quad , \quad \|\rho_{1,t}\| \leq \varepsilon, \quad (5.125)$$

où la constante  $K_R$  n'a pas été encore définie. La valeur du rayon du disque de l'espace des paramètres sera tout simplement ce qu'il faut pour faire tourner cette procédure préalable plus la rayon nécessaire pour pouvoir démarrer l'algorithme à l'étape  $\bar{n}$ . Cette procédure préalable comportera aussi des étapes (indexées par les nombres naturels entre  $n^*$  jusque à  $\bar{n} - 1$ ). Chaque étape aura deux parties. La première partie de l'étape  $n$  est divisée à son tour en pas, dont chacun consiste à résoudre une fois l'équation de  $u_0$  avec troncature au niveau  $2^n$ . La deuxième partie de l'étape  $n$  consiste en introduire une perte sur le largeur de bande de taille  $d_n^0$ . La suite réelle suivante sera utile pour simplifier les notations

$$W_n = C_2 M 2^n \Gamma_{\alpha, \beta}(2^n) \quad (5.126)$$

Nous allons effectuer séparément la première étape  $n^*$ , car d'une part les estimations sont un peu différentes et d'autre, elle va nous permettre comprendre les manipulations et estimations dans une étape quelconque. Comme d'habitude (dans ce travail) nous notons les fonctions de départ par  $\rho_{0,t}^{n^*}, \rho_{1,t}^{n^*}, \rho_t^{n^*}$ . Nous introduisons un indice pour signaler les pas et définissons la suite de fonctions  $\eta_{n^*,i}^t$  par

$$\eta_{n^*,0}^t = \rho_{0,t}^{n^*,0} \quad (5.127)$$

$$\eta_{n^*,i+1}^t = \rho_{1,t}^{n^*,i} u_{0,t}^{n^*,i} + \rho_t^{n^*,i}(\cdot, u_{0,t}^{n^*,i}) \quad (5.128)$$

L'hypothèse du Théorème 5.1 dit que  $\|\eta_{n^*,0}^t\| \leq \varepsilon$ . Nous allons montrer inductivement que

$$\|\eta_{n^*,i}^t\| \leq \frac{\|\eta_{n^*,0}^t\|}{2^i} \leq \frac{\varepsilon}{2^i} \quad (5.129)$$

$$\|\rho_{1,t}^{n^*,0}\| \leq \|\rho_{1,t}^{n^*,0}\| + 2\|\eta_{n^*,0}^t\|W_{n^*} \leq \varepsilon(1 + 2W_{n^*}) < \varepsilon(w_{n^*})^{-1} \quad (5.130)$$

Supposons alors que ces inégalités soient vérifiées pour  $0 \leq j < i+1$ . Nous pouvons estimer le nouveau  $\eta$  par

$$\|\eta_{n^*,i+1}^t\| \leq \varepsilon(1 + 2W_{n^*})\|\eta_{n^*,i}^t\| \frac{W_{n^*}}{M} + M \left( \|\eta_{n^*,i}^t\| \frac{W_{n^*}}{M} \right)^2$$

comme  $\varepsilon(1 + 2W_{n^*}) < \varepsilon(w_{n^*})^{-1}$ ,  $\|\eta_{n^*,i}^t\| \leq \varepsilon$  et  $\bar{n} \geq n^*$  nous avons

$$\varepsilon(1 + 2W_{n^*}) \frac{W_{n^*}}{M} < l_{\bar{n}} \frac{\delta W_{n^*}}{24M} < \frac{1}{4}, \quad \|\eta_{n^*,i}^t\| \frac{W_{n^*}^2}{M} \leq \varepsilon \frac{W_{n^*}^2}{M} < \frac{1}{4}$$

ce qu'implique que  $\|\eta_{n^*,i+1}^t\| \leq \|\eta_{n^*,i}^t\|2^{-1}$ . La taille de  $\|\rho_{1,t}^{n^*,i+1}\|$  est majorée par

$$\|\rho_{1,t}^{n^*,i+1}\| \leq \|\rho_{1,t}^{n^*,0}\| + W_{n^*} \sum_0^i \|\eta_{n^*,j}^t\| < \|\rho_{1,t}^{n^*,0}\| + 2W_{n^*}\|\eta_{n^*,0}^t\| \leq \varepsilon(1 + 2W_{n^*})$$

Nous continuons avec les pas jusqu'au moment où la taille de  $\eta$  soit plus petite que  $\frac{\varepsilon w_{n^*+1}}{2\aleph w_{n^*}}$ , ou plus précisément quand  $\frac{\varepsilon}{2^i} \leq \frac{\varepsilon w_{n^*+1}}{2\aleph w_{n^*}}$  (cette subtile différence sera très importante dans la section 5.6). Soit  $i_{n^*}$  un tel moment. Dans la deuxième partie de l'étape nous introduisons une perte de largeur de bande de taille  $d_{n^*}^0$ . La taille finale de  $\rho_0$  est majorée donc par

$$\begin{aligned} \|\rho_{0,t}^{n^*+1}\| &\leq \|\eta_{n^*,i_{n^*}}^t\| + 2\|\eta_{n^*,0}^t\| \frac{e^{-2\pi 2^{n^*} d_{n^*}^0}}{d_{n^*}^0} \\ &\leq \frac{\varepsilon w_{n^*+1}}{2\aleph w_{n^*}} + \frac{2\varepsilon w_{n^*+1}}{4\aleph w_{n^*}} \\ &\leq \frac{\varepsilon w_{n^*+1}}{\aleph w_{n^*}} \end{aligned}$$

### Une étape $n^* < n \leq \bar{n} - 1$ quelconque

Au début de l'étape nous avons

$$\|\rho_{0,t}^{n,0}\| \leq \frac{\varepsilon w_n}{\aleph w_{n^*}} \quad (5.131)$$

$$\|\rho_{1,t}^{n,0}\| \leq \varepsilon \left( 1 + 2W_{n^*} + \frac{2w_{n^*+1}W_{n^*+1}}{\aleph w_{n^*}} + \dots + \frac{2w_{n-1}W_{n-1}}{\aleph w_{n^*}} \right) \quad (5.132)$$

$$< \varepsilon(w_{n^*})^{-1} \quad (5.133)$$



Avec la suite habituelle  $\{\eta_{n,i}^t\}$  nous allons montrer inductivement que

$$\|\eta_{n,i}^t\| \leq \frac{\|\eta_{n,0}^t\|}{2^i} \quad (5.134)$$

$$\|\rho_{1,t}^{n,i}\| \leq \varepsilon \left( 1 + 2W_{n^*} + \cdots + \frac{2w_n W_n}{\aleph w_{n^*}} \right) < \varepsilon (w_{n^*})^{-1} \quad (5.135)$$

Supposons donc que ces inégalités sont vérifiées pour  $0 \leq j < i + 1$ . La taille de  $\eta$  est majorée par

$$\varepsilon (w_{n^*})^{-1} \frac{W_n}{M} \|\eta_{n,i}^t\| + M \left( \|\eta_{n,i}^t\| \frac{W_n}{M} \right)^2$$

mais on a aussi que

$$\begin{aligned} \varepsilon (w_{n^*})^{-1} \frac{W_n}{M} &< l_n \frac{\delta W_n}{24M} < \frac{1}{4} \\ M \|\eta_{n,i}^t\| W_n^2 &\leq \frac{M \varepsilon w_n W_n^2}{\aleph w_{n^*}} < \frac{\delta M}{24\aleph} l_n w_n W_n^2 < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\|\eta_{n,i+1}^t\| \leq \|\eta_{n,i}^t\| 2^{-1}$ . La taille de  $\rho_{1,t}^{n,i+1}$  se traite par

$$\begin{aligned} \|\rho_{1,t}^{n,i+1}\| &\leq \|\rho_{1,t}^{n,0}\| + W_n \sum_0^i \|\eta_{n,j}^t\| \\ &< \|\rho_{1,t}^{n,0}\| + \frac{2W_n \varepsilon w_n}{\aleph w_{n^*}} \\ &\leq \varepsilon \left( 1 + 2W_{n^*} + \cdots + \frac{2W_n w_n}{\aleph w_{n^*}} \right) < \varepsilon (w_{n^*})^{-1} \end{aligned}$$

On continue les pas jusqu'au moment où la taille de  $\eta$  soit plus petite que  $\frac{\varepsilon w_{n+1}}{2\aleph w_{n^*}}$ , plus précisément quand  $\frac{\varepsilon w_n}{\aleph w_{n^*} 2^i} \leq \frac{\varepsilon w_{n+1}}{2\aleph w_{n^*}}$ . Soit  $i_n$  un tel moment. Nous introduisons dans la deuxième partie de l'étape une perte de largeur de bande de taille  $d_n^0$ . La taille finale de  $\rho_0$  est majorée donc par

$$\begin{aligned} \|\rho_{0,t}^{n+1}\| &\leq \|\eta_{n,i_n}^t\| + 2\|\eta_{n,0}^t\| \frac{e^{-2\pi 2^n d_n^0}}{d_n^0} \\ &\leq \frac{\varepsilon w_{n+1}}{2\aleph w_{n^*}} + 2 \frac{\varepsilon w_n}{\aleph w_{n^*}} \frac{\varepsilon w_{n+1}}{4\aleph w_n} \\ &< \frac{\varepsilon w_{n+1}}{\aleph w_{n^*}} \end{aligned}$$

Au bout de la  $(\bar{n} - 1)$ -ième étape on obtient

$$\|\rho_{0,t}^{\bar{n}}\| \leq \frac{\varepsilon w_{\bar{n}}}{\aleph w_{n^*}} < \frac{\delta \varepsilon (w_{n^*})^{-1}}{\aleph 4^{\bar{n}} \Gamma_{\alpha,\beta}(2^{\bar{n}})} \quad (5.136)$$

$$\|\rho_{1,t}^{\bar{n}}\| \leq \varepsilon (w_{n^*})^{-1} \quad (5.137)$$

et ces fonctions sont définies sur la bande  $\delta - \sum_{n^*}^{\bar{n}-1} d_n^0$ . La fonction  $\rho_t^{\bar{n}}(\theta, \cdot)$  est définie pour la variable  $z$  sur un disque de rayon

$$1 - \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \|u_{0,t}^{n,i}\| \quad (5.138)$$

Si on commence l'algorithme à l'étape  $\bar{n}$  avec ce disque nous arriverons à la fin à un rayon plus grande que  $3/8$ . La taille de  $\|\rho_t\|$  ne change pas dans l'opération de résolution de l'équation de  $u_0$ .

### Estimations par rapport au paramètre

Nous aurons besoin d'estimer la taille des deux sommes

$$\sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \|u_{0,t}^{n,i}\| \quad , \quad \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \|\partial_t u_{0,t}^{n,i}\|$$

La première est majorée par

$$\begin{aligned} \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \|u_{0,t}^{n,i}\| &\leq 2 \frac{W_{n^*} \varepsilon}{M} + 2 \sum_{n>n^*} \frac{W_n \varepsilon w_n}{M \aleph w_{n^*}} \\ &\leq \frac{2W_{n^*} \varepsilon}{M} \left( 1 + \frac{1}{2\aleph} \sum_{n>n^*} \frac{l_n}{l_{n^*}} \right) < \frac{4W_{n^*} \varepsilon}{M} \end{aligned}$$

En introduisant une perte sur le rayon du disque de l'espace des paramètres de taille  $96000LW_{n^*} \varepsilon$  nous obtenons l'estimation de Cauchy

$$\sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \|\partial_t u_{0,t}^{n,i}\| \leq \frac{1}{4000LM} \quad (5.139)$$

Nous pouvons maintenant estimer l'oscillation finale de  $\partial_t \partial_z \rho_t$  par

$$\text{osc}(\partial_t \partial_z \rho_t^{\bar{n}}) \leq 2T + 2M \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \|u_{0,t}^{n,i}\| \leq 2T + \frac{1}{2000L} \quad (5.140)$$

On aura besoin de la majoration suivante

$$\begin{aligned} \left\| \partial_t \left( \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \partial_z \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) \right) \right\| &\leq \left( 2T + \frac{1}{2L} \right) \sum \sum \|u_0\| + M \sum \sum \|\partial_t u_0\| \\ &\leq \left( 2T + \frac{1}{2L} \right) \frac{4W_{n^*} \varepsilon}{M} + \frac{1}{4000L} \\ &\leq \frac{1}{2000L} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité se vérifie compte tenu de la grandeur de  $\aleph$ . Nous définissons le nombre complexe  $\Delta_0$  qui sera celui qu'on utilise dans l'algorithme, par

$$\Delta_0 = \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*} \right) \Big|_{t=t_0} \quad (5.141)$$

### 5.5.1 Un zéro simple pour $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}$

Le seul ingrédient qui nous manque pour pouvoir appliquer l'algorithme à notre famille est l'existence d'un zéro simple pour  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{n}}$  au centre de l'espace des paramètres. Nous allons trouver ce zéro à l'aide du Lemme de Rouché en comparant  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{n}}$  avec la partie linéaire au point  $t_0$  de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*}$  sur le bord d'un disque de rayon  $R$  et de centre  $t_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{n}} - \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*} - \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{n}} - \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*} \right| \\ &\leq \varepsilon + \frac{T}{2} R^2 + 4W_{n^*} \varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\left| \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0) \right| > L^{-1} R$$

sur ce même bord. Nous fixons donc le rayon

$$R_\varepsilon = \frac{L^{-1} - \sqrt{L^{-2} - 2T\varepsilon(1 + 4W_{n^*})}}{T} \quad (5.142)$$

comme la plus petite racine de l'équation entre les deux bornes précédentes. De cette façon nous assurons bien l'existence d'un zéro  $t^*$  de  $\int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{n}}$  dans  $D(t_0, R_\varepsilon)$ . Nous vérifions sans peine que  $R_\varepsilon$  est un nombre réel positif. De plus, nous vérifions aussi que

$$R_\varepsilon < \frac{L^{-1} 2T\varepsilon(1 + 4W_{n^*})}{T L^{-2}} = 2L\varepsilon(1 + 4W_{n^*}) \quad (5.143)$$

car pour tout  $x$  petit on a que  $x > 1 - \sqrt{1 - x}$ .

Pour démarrer l'application de la partie itérative de l'algorithme nous avons besoin d'un disque de rayon  $100 \frac{24\varepsilon(w_{n^*})^{-1}}{\delta}$  et de centre  $t^*$  dans l'espace des paramètres. Tout ce qui nous venons de voir nous permet de définir la valeur de la constante  $K_R$  comme étant ce qu'il faut pour d'une part trouver  $t^*$ , et d'autre, perdre un morceau de rayon pour obtenir les estimations par rapport au paramètre dans la procédure préalable et finalement pour démarrer l'algorithme à l'étape  $\bar{n}$ , alors

$$K_R = 2L(1 + 4W_{n^*}) + 96000LW_{n^*} + \frac{2400(w_{n^*})^{-1}}{\delta} \quad (5.144)$$

voir Figure (5.5.1). Pour finir avec cette procédure préalable et commencer l'algorithme à

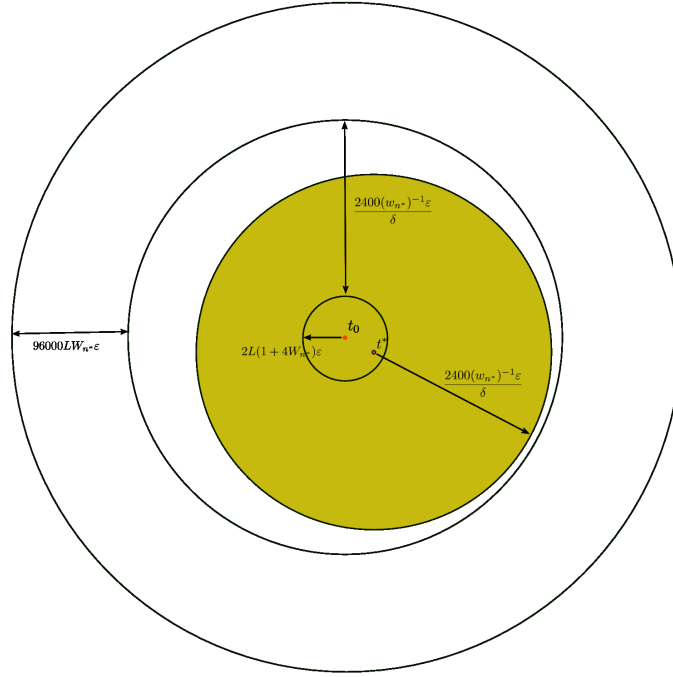


FIG. 5.1 – L'espace des paramètres  $D(t^*, 2400(w_{n^*})^{-1}\epsilon/\delta)$  est coloré

l'étape  $\bar{n}$  il nous suffit seulement de noter que le contrôle suivant

$$\begin{aligned}
 \left\| \Delta_0 - \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{n}} \right) \right\| &\leq \left\| \Delta_0 - \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{n^*} \right) \right\| \\
 &\quad + \left\| \partial_t \left( \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} \partial_z \rho_t^{n,i}(\cdot, u_{0,t}^{n,i}) \right) \right\| \\
 &\leq T\epsilon \left( 2L(1+4W_{n^*}) + \frac{2400(w_{n^*})^{-1}}{\delta} \right) + \frac{L^{-1}}{2000} \\
 &\leq \frac{L^{-1}}{1000}
 \end{aligned}$$

se vérifie dans le disque de l'espace des paramètres de centre  $t_0$  et rayon  $\epsilon \left( 2L(1+4W_{n^*}) + \frac{2400(w_{n^*})^{-1}}{\delta} \right)$  qui contient au disque de centre  $t^*$  et rayon  $\epsilon \frac{2400(w_{n^*})^{-1}}{\delta}$

La courbe invariante est égal à

$$u = \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} u_{0,\bar{t}}^{n,i} + \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \sum_{n=\bar{n}}^{\bar{n}} u_{0,\bar{t}}^n \left( \prod_{j=\bar{n}}^n u_{1,\bar{t}}^j \right) \quad (5.145)$$

et est de degré nul car les changements de coordonnées que nous avons fait dans cette procédure préalable sont aussi de degré nul ■

## 5.6 Une version paramétrée du Théorème de la persistance des courbes invariantes pour les dynamiques holomorphes fibrées

Considérons une application de  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  vers l'ensemble des familles analytiques à 1 paramètre complexe de dynamiques holomorphes fibrées,

$$s \mapsto \{F_t^s\}_{t \in \Sigma}$$

Nous disons qu'il s'agit d'une application analytique entre ces deux ensembles si l'application

$$(s, t, \theta, z) \longmapsto F_t^s(\theta, z)$$

est analytique. Soit  $\bar{s}$  dans l'intérieur de  $\Lambda$ . Supposons que la famille  $\{F_t^{\bar{s}}\}_{t \in \Sigma}$  vérifie les hypothèses du Théorème 5.1. Ainsi, pour tout  $t$  dans le disque  $D(t_0, K_R \varepsilon) \subset \Sigma$  on a

- $L > \left| \partial_t \left( \int_{\mathbb{T}^1} \rho_{1,t}^{\bar{s}} \right) \Big|_{t=t_0} \right| > L^{-1}$
- $\|\rho_{0,t}^{\bar{s}}\| < \varepsilon$  ,  $\|\rho_{1,t}^{\bar{s}}\| < \varepsilon$
- $\|\partial_z^2 \rho_t^{\bar{s}}\| < M$  ,  $\|\partial_t \partial_z \rho_t^{\bar{s}}\| + \|\partial_t^2 \rho_{1,t}^{\bar{s}}\| < T$

pour un certain  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$  où ce dernier est donné par le Théorème 5.1. Alors il existe un voisinage  $V(\bar{s})$  de  $\bar{s}$  dans  $\Lambda$  tel que pour toute famille  $\{F_t^s\}_{t \in \Sigma}$ , avec  $s$  dans  $V(\bar{s})$ , on vérifie ces mêmes hypothèses. Le Théorème 5.1 fournit alors une application de  $V(\bar{s})$  vers  $D(t_0, K_R \varepsilon)$

$$s \mapsto \bar{t}_s$$

et une application de  $V(\bar{s})$  vers l'ensemble des courbes analytiques du cercle  $\mathbb{T}^1$  vers  $\mathbb{C}$

$$s \mapsto u^s : B_\delta \rightarrow \mathbb{C}$$

tels que la courbe  $u^s$  est invariante par la dynamique holomorphe fibrée  $F_{\bar{t}_s}^s$ , est de degré nul avec nombre de rotation transversal égal à  $\beta$ . Le but de cette section est de montrer le

**Théorème 5.4** *Les applications  $s \rightarrow \bar{t}_s$ ,  $s \rightarrow u^s$  définies ci-dessus sont holomorphes.*

La preuve de ce théorème sera fournie par une étude en profondeur de la méthode (procédure préalable et algorithme itératif), et plus précisément par la possibilité d'effectuer cette méthode de façon uniforme pour toutes les familles  $\{F_t^s\}_{t \in \Sigma}$  pour  $s$  appartenant à  $V(\bar{s})$ . Soit  $\bar{n}$  l'unique nombre naturel qui vérifie

$$\frac{\delta l_{\bar{n}+1}}{24} < \varepsilon (w_{n^*})^{-1} \leq \frac{\delta l_{\bar{n}}}{24}$$

Nous pouvons appliquer la procédure préalable à toutes les familles dont  $s$  appartient à  $V(\bar{s})$ . Ceci nous fournit les fonctions  $\{(u_{0,t}^{n,i})^s\}_{(n^* \leq n < \bar{n}; 0 \leq i \leq i_n)}$  définies pour tout  $t$  qui appartient au disque  $D(t_0, K_R \varepsilon)$  (où les indices sont uniformes pour tous les paramètres  $s$  dans  $V(\bar{s})$ ); ceci fournit aussi les fonctions  $(\rho_{0,t}^{\bar{n}})^s, (\rho_{1,t}^{\bar{n}})^s, (\rho_t^{\bar{n}})^s$  qui ont une taille adéquate

pour démarrer l'algorithme itératif à l'étape  $\bar{n}$ . Ces fonctions sont définies pour tout  $t$  qui appartient au disque  $D(t_{\bar{n}}^s, p_{\bar{n}})$ , où  $t_{\bar{n}}^s$  est le seul zéro (simple) de  $\int_{\mathbb{T}^1} (\rho_{1,t}^{\bar{n}})^s d\theta$  fourni par la dernière opération de la procédure préalable. Chaque étape  $n$  de l'algorithme ( $n \geq \bar{n}$ ) fournit à son tour les fonctions  $\{(u_{0,t}^{n,i})^s\}_{0 \leq i \leq i_n}, (u_{1,t}^n)^s$  (les indices sont uniformes), définies pour tout  $t$  qui appartient au disque  $D(t_n^s, p_n)$ , où  $t_n^s$  est le seul zéro (simple) de  $\int_{\mathbb{T}^1} (\rho_{1,t}^n)^s d\theta$ , et les fonctions  $(\rho_{0,t}^{n+1})^s, (\rho_{1,t}^{n+1})^s, (\rho_t^{n+1})^s$  avec une taille adéquate pour démarrer l'étape  $n+1$ , définies pour tout  $t$  qui appartient au disque  $D(t_{n+1}^s, p_{n+1})$ . Notons qu'à partir de l'étape  $\bar{n}$  la seule chose qui n'est pas uniforme est l'espace des paramètres (plutôt son centre). Nous vérifierons que toutes ces fonctions sont holomorphes par rapport à l'ensemble des variables  $(\theta, z, s, t)$ .

### 5.6.1 L'application $\bar{t}_s$

Notons d'abord que pour une seule famille  $\{F_t\}$ , le paramètre  $\bar{t}$  pour lequel nous retrouvons la courbe invariante est l'unique élément de l'intersection  $\cup_{n \geq \bar{n}} D(t_n, p_n)$ . Comme  $p_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  on peut en déduire que  $\bar{t}$  est la limite des centres  $t_n$  des disques. Ceci nous indique alors la stratégie à suivre pour montrer que  $\bar{t}_s$  est holomorphe. Il suffit de montrer que chaque application  $s \mapsto t_n^s$  est holomorphe, dont sa limite  $\bar{t}_s$  le sera aussi (limite uniforme car les rayons  $p_n$  le sont aussi). Pour montrer cela nous allons utiliser le fait bien connu que pour une famille de fonctions holomorphes  $\{g_s : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}\}_{s \in \Lambda}$  qui dépend de façon analytique du paramètre  $s$  et qui vérifie que chaque fonction  $g_s$  a un unique zéro, qui est simple, dans  $\mathbb{D}$ , alors ce zéro est une fonction holomorphe du paramètre  $s$  (une simple utilisation du théorème de la fonction implicite). Nous allons montrer par la suite que la fonction  $\int_{\mathbb{T}^1} (\rho_{1,t}^n)^s d\theta$  dépend de façon holomorphe de  $s$  et  $t$ .

### 5.6.2 Les fonctions $(u_{0,t}^{n,i})^s$ pour $n^* \leq n < \bar{n}$

La notation  $(u_{0,t}^{n,i})^s$  a un sens uniforme par rapport aux indices pour tout  $s$  dans  $V(\bar{s})$  si  $n^* \leq n < \bar{n}$ , et représente la solution de l'équation de  $u_0$  pour la troncature de la fonction  $(\eta_{n,i}^t)^s$  jusqu'au niveau  $2^n$  comme coté droit, donc  $(u_{0,t}^{n,i})^s$  est un polynôme trigonométrique de degré  $2^n$  dont ses coefficients dépendent linéairement des coefficients de la série de Fourier de  $(\eta_{n,i}^t)^s$ . Comme  $(\eta_{n^*,0}^t)^s$  est holomorphe par rapport à  $s$  et  $t$  alors  $(u_{0,t}^{n^*,0})^s$  est aussi holomorphe par rapport à  $s$  et  $t$ . Si on suppose pour toute paire  $(m,j) \prec (n,i)$  que  $(\eta_{m,j}^t)^s$  dépend de façon holomorphe de  $s$  et  $t$  alors  $(u_{0,t}^{n,i})^s$  dépend de façon holomorphe de  $s$  et  $t$  (où  $\prec$  est l'ordre donné par les opérations de la méthode). Tout ceci implique que toutes les fonctions  $\{(u_{0,t}^{n,i})^s\}_{(n^* \leq n < \bar{n}; 0 \leq i \leq i_n)}$  ainsi que  $(\rho_{0,t}^{\bar{n}})^s, (\rho_{1,t}^{\bar{n}})^s, (\rho_t^{\bar{n}})^s$  sont holomorphes par rapport à  $s$  et  $t$ . En particulier, la fonction  $\int_{\mathbb{T}^1} (\rho_{1,t}^{\bar{n}})^s d\theta$ , d'où l'application  $t_s^* = t_{\bar{n}}^s$  est holomorphe par rapport à  $s$  et  $t$ .

### 5.6.3 Une étape $n \geq \bar{n}$ quelconque

Supposons que toutes les fonctions  $(\rho_{0,t}^n)^s, (\rho_{1,t}^n)^s, (\rho_t^n)^s, \{(u_{0,t}^{m,j})^s\}$  sont holomorphes par rapport à  $s$  et  $t$  pour toute paire  $(m,j) \prec (n,0)$  et que tous les centres des espaces des

paramètres  $t_m^s$ , pour  $m \leq n$ , sont des fonctions holomorphes en  $s$ . Quand on résout la première équation de  $u_0$  dans l'étape (le pas  $i = 0$ ), pour chaque  $s$  dans  $V(\bar{s})$ , le polynôme trigonométrique solution  $(u_{0,t}^{n,0})^s$  dépend aussi de façon holomorphe de  $s$  et  $t$ , et par conséquence aussi les fonctions  $(\rho_{0,t}^{n,1})^s, (\rho_{1,t}^{n,1})^s, (\rho_t^{n,1})^s$ . En itérant l'argument nous pouvons affirmer la même chose pour toutes les fonctions  $(u_{0,t}^{n,j})_{0 \leq j \leq i_n}^s, (u_{1,t}^n)^s$  et par conséquent pour les fonctions  $(\rho_{0,t}^{n+1})^s, (\rho_{1,t}^{n+1})^s, (\rho_t^{n+1})^s$ . En particulier les fonctions holomorphes en  $t$  dans  $D(t_n^{\bar{n}}, p_n)$

$$\int_{\mathbb{T}^1} (\rho_{1,t}^{n+1})^s d\theta \tag{5.146}$$

dépendent de façon holomorphe de  $s$ , et il existe une application holomorphe  $s \mapsto t_{n+1}^s$  telle que

$$\int_{\mathbb{T}^1} (\rho_{1,t_{n+1}^s})^s d\theta = 0 \tag{5.147}$$

Ainsi nous montrons inductivement que pour tout  $n$  les applications des centres  $s \mapsto t_n^s$  sont holomorphes, et alors son application limite  $s \mapsto \bar{t}_s$  est aussi holomorphe par rapport à  $s$ . La courbe invariante  $u_s$  s'écrit, d'après (5.145), par

$$u^s = \sum_{n=n^*}^{\bar{n}-1} \sum_{i=0}^{i_n} (u_{0,\bar{t}_s}^{n,i})^s + \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \sum_{n=\bar{n}}^{\bar{n}} (u_{0,\bar{t}_s}^n)^s \left( \prod_{j=\bar{n}}^n (u_{1,\bar{t}_s}^j)^s \right) \tag{5.148}$$

où le premier terme correspond à la procédure préalable et c'est une somme finie de fonctions qui dépendent de façon holomorphe en  $s$ . Les fonctions qui correspondent à la partie itérative de la méthode dépendent aussi de façon holomorphe de  $s$ , d'où on peut conclure que l'application  $s \mapsto u^s$  est holomorphe et donc la preuve du Théorème 5.4 ■

## 5.7 Preuve du Théorème de Siegel pour les dynamiques holomorphes fibrées analytiques

Nous terminons ce chapitre en montrant le Théorème de linéarisation de Siegel pour les  $dhf$  énoncé dans la section 2.3 du chapitre 2. Il nous suffira en fait d'imiter une démonstration classique du Théorème de Siegel (voir [KH95], [Mar], [CG93]), qu'on utilise souvent comme un premier exemple de la méthode KAM, technique que nous avons déjà exploitée pour montrer le théorème central de ce chapitre. Pour ces raisons nous allons omettre quelques arguments, que nous laissons à la charge du lecteur.

Tout au long de cette preuve vont apparaître plusieurs constantes positives qui dépendent au plus des paramètres  $(c_0, \tau)$  de la condition arithmétique sur la paire  $(\alpha, \beta)$ . Ces constantes seront notés par  $c_j$  où l'indice  $j$  représente son ordre d'apparition au cours de la preuve.

Nous supposons que la courbe invariante coïncide avec la section nulle  $\{z \equiv 0\}_{B_\delta}$  et que la dérivée  $\partial_z f_\theta(0) = e^{2\pi i \beta}$  pour tout  $\theta \in B_\delta$ . Ceci peut s'obtenir en conjugant  $F$  par une application affine fibrée résultat de la composition d'une translation (donnée par la

courbe) et d'un changement d'échelles donné par la résolution d'une équation cohomologique adéquate. On écrit alors

$$F(\theta, z) = \left( \theta + \alpha, e^{2\pi i \beta} z + \rho(\theta, z) \right)$$

Nous cherchons une conjugaison de la forme  $H^*(\theta, z) = (\theta, z + h^*(\theta, z))$ , où  $h^*(\theta, \cdot)$  représente les termes d'ordre supérieur en  $z$ , et qui conjugue  $F$  à la dynamique triviale linéaire associée. Nous allons y parvenir au moyen des conjugaisons successives par des fonctions de la forme  $H(\theta, z) = (\theta, z + h(\theta, z))$  qui transforment la  $dhf$  sous une forme plus proche de la forme triviale linéaire associée. Pour établir la méthode nous allons procéder d'abord de façon formelle.

Nous cherchons  $H$  de manière que la  $dhf \tilde{F}$  résultant de la conjugaison de  $F$  par  $H$ ,

$$F \circ H = H \circ \tilde{F},$$

ait un terme non linéaire  $\tilde{\rho}$  plus petit que le terme  $\rho$  de  $F$ . L'équation de conjugaison s'écrit

$$\lambda h(\theta, z) + \rho(\theta, z + h(\theta, z)) = \tilde{\rho}(\theta, z) + h(\theta + \alpha, \lambda z + \tilde{\rho}(\theta, z))$$

Comme d'habitude on choisit  $h$  comme une solution d'une équation linéaire (cohomologique) associée à l'équation de conjugaison. Dans ce cas nous choisissons  $h$  vérifiant l'équation

$$h(\theta + \alpha, \lambda z) - \lambda h(\theta, z) = \rho(\theta, z) \quad (5.149)$$

On veut en fait que  $h$  soit de l'ordre de  $z^2$ , donc il suffira de résoudre l'équation pour  $h' = \partial_z h$  qui en résulte

$$h'(\theta + \alpha, \lambda z) - h'(\theta, z) = \lambda^{-1} \rho'(\theta, z) \quad (5.150)$$

avec la notation  $\rho'(\theta, z) = \partial_z \rho(\theta, z)$ . En écrivant les séries

$$h'(\theta, z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\theta) z^j \quad , \quad \lambda^{-1} \rho'(\theta, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j(\theta) z^j \quad (5.151)$$

l'équation (5.150) donne lieu formellement (en identifiant les coefficients des séries sur  $z$  des deux cotés) aux équations sur des fonctions en  $\theta$

$$h_j(\theta + \alpha) \lambda^j - h_j(\theta) = \rho_j(\theta) \quad (5.152)$$

pour tout  $j \geq 1$ . On résout ces équations, cohomologiques et tordues par  $\lambda^j$ , par la méthode des coefficients des séries de Fourier, en obtenant formellement

$$h_j(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{\rho}_j(n)}{e^{2\pi i(n\alpha + j\beta)} - 1} e^{2\pi i n \theta} \quad (5.153)$$

Sous l'hypothèse diophantienne  $\mathbb{CD}_{\geq 1}(c_0, \tau)$  sur la paire  $(\alpha, \beta)$  nous allons montrer que cette construction donne lieu à une fonction analytique  $h$ . Comme d'habitude nous notons par  $\hat{l}(n)$  le  $n$ -ième coefficient de la série de Fourier d'une fonction  $l : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ .



**Lemme 5.5** Soit  $\Phi : B_\delta \times D_R \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe qui s'écrit sous la forme

$$\Phi(\theta, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(\theta) z^j \quad (5.154)$$

alors

- i) Les coefficients  $\Phi_j : B_\delta \rightarrow \mathbb{C}$  sont des fonctions analytiques.
- ii) Pour tout  $j \geq 1$  la série

$$\Psi_j(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{\Phi}_j(n)}{e^{2\pi i(n\alpha + j\beta)} - 1} e^{2\pi i n \theta} \quad (5.155)$$

représente une fonction analytique sur la bande  $B_\delta$  et la série

$$\Psi(\theta, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\theta) z^j \quad (5.156)$$

représente une fonction holomorphe sur  $B_\delta \times D_R$ .

- iii) Soit  $E \geq 0$  tel que  $\|\Phi\|_{B_\delta, D_R} \leq E$ , et soient aussi  $d, \Delta$  des constantes réelles positives  $d \ll \delta, \Delta \ll 1$ . On suppose aussi que la paire  $(\alpha, \beta)$  vérifie la condition diophantienne  $\mathbb{C}\mathbb{D}_{\geq 1}(c_0, \tau)$ . Alors il existe une constante  $c_1 \geq 0$  telle qu'on a l'estimation

$$\|\Psi\|_{B_{\delta-d}, D_{R(1-\Delta)}} \leq c_1 E \left( \frac{1}{d^{3+\tau} \Delta} + \frac{1}{\Delta^{4+\tau}} \right) \quad (5.157)$$

**Preuve.** Le point i) est immédiat d'après le fait que les fonctions  $\Phi_j$  sont, à des constantes près, les dérivées successives de  $\Phi$  par rapport à  $z$  au point  $z = 0$ . On a successivement

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{B_\delta, D_R} &\leq E \\ \|\Phi_j\|_{B_\delta} &\leq ER^{-j} \text{ pour tout } j \geq 1 \\ |\tilde{\Phi}_j(n)| &\leq ER^{-j} e^{-2\pi|n|\delta} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z} \\ \|\Psi_j\|_{B_{\delta-d}} &\leq ER^{-j} c_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|d} (|n| + j)^{2+\tau} \end{aligned}$$

La série ci-dessus peut se contrôler en considérant les estimations

$$\sum_{|n| \leq j} e^{-2\pi|n|d} j^{2+\tau} \leq 2j^{3+\tau} \quad (5.158)$$

$$\sum_{|n| > j} e^{-2\pi|n|d} |n|^{2+\tau} \leq \frac{c_2}{d^{3+\tau}} \quad (5.159)$$

où cette dernière estimation vient du fait que pour tout  $s > 0$  il existe une constante  $c(s) > 0$  telle que pour tout  $x \in (0, 1)$  on a

$$\sum_{n \geq 0} x^n n^s \leq \frac{c(s)}{(1-x)^{s+1}}$$

Ceci peut se montrer en notant que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} x^n n^s &< \sum_{n \geq 0} (n+s)(n+s-1) \dots (n+1) x^n \\ &= \frac{\partial^s}{\partial x^s} \left( \sum_{n \geq 0} x^{n+s} \right) = \frac{\partial^s}{\partial x^s} \left( \frac{x^s}{1-x} \right) \end{aligned}$$

D'après (5.158) et (5.159) on a donc

$$\begin{aligned} \|\Psi_j\|_{B_{\delta-d}} &\leq c_3 E R^{-j} \left( \frac{1}{d^{3+\tau}} + j^{3+\tau} \right) \text{ pour tout } j \geq 1 \\ \|\Psi\|_{B_{\delta-d}, D_R(1-\Delta)} &\leq c_3 E \sum_{j=1}^{\infty} (1-\Delta)^j \left( \frac{1}{d^{3+\tau}} + j^{3+\tau} \right) \\ &\leq c_1 E \left( \frac{1}{d^{3+\tau} \Delta} + \frac{1}{\Delta^{4+\tau}} \right) \blacksquare \end{aligned}$$

L'estimation (5.157) sera utilisée en prenant  $d = \Delta$  et on aura donc une constante  $c_5 > 0$  telle que

$$\|\Psi\|_{B_{\delta-d}, D_R(1-d)} \leq \frac{c_5 E}{d^{4+\tau}} \quad (5.160)$$

Nous pouvons maintenant décrire une étape de la procédure itérative. Supposons que nous ayons au début de la  $n$ -ième étape une *dhf*  $F_n(\theta, z) = (\theta + \alpha, \lambda z + (\rho^n)'(\theta, z))$  définie sur  $B_{\delta_n} \times D_{R_n}$ , et le contrôle suivant sur la taille

$$\|(\rho^n)'\|_{B_{\delta_n}, D_{R_n}} \leq \varepsilon_n \quad (5.161)$$

pour certains  $\delta_n, R_n, \varepsilon_n$  positifs. Nous construisons une fonction  $h^n(\theta, z)$  à l'aide des séries formelles (5.151), (5.153) pour sa dérivée  $\partial_z h^n$ . Le lemme précédent nous dit que pour des constantes  $d_n = \Delta_n$  petites, nous avons

$$\|\partial_z h^n\|_{B_{\delta_n-d_n}, D_{R_n(1-d_n)}} \leq \frac{c_5 \varepsilon_n}{d_n^{4+\tau}} \quad (5.162)$$

Avec la notation  $g_\theta^n(z) = z + h^n(\theta, z)$  on montre le

**Lemme 5.6** *Si*

$$\varepsilon_n c_5 < d_n^{5+\tau} \quad , \quad 0 < d_n < \frac{1}{5} \quad (5.163)$$

*alors pour tout  $\theta$  dans  $B_{\delta_n-d_n}$  on a que*

*i)  $g_\theta^n(D_{R_n(1-4d_n)}) \subset D_{R_n(1-3d_n)}$  et  $D_{R_n(1-2d_n)} \subset g_\theta^n(D_{R_n(1-d_n)})$ . En particulier on peut inverser  $g_\theta^n$  dans  $D_{R_n(1-2d_n)}$ .*

*ii)  $\|f_n\|_{B_{\delta_n-d_n}, D_{R_n(1-3d_n)}} \leq R_n(1-2d_n)$ .*

**Preuve.** i) Soit  $|z| < R_n(1 - 4d_n)$  et  $\theta$  dans  $B_{\delta_n - d_n}$ . On a donc que

$$|g_\theta^n(z)| \leq |z| + |h^n(\theta, z)| \leq R_n(1 - 4d_n + c_5 \varepsilon_n d_n^{-(4+\tau)}) \leq R_n(1 - 4d_n + d_n)$$

Notons que pour  $|z| = R_n(1 - d_n)$  nous avons que  $|z| - R_n(1 - 2d_n) = R_n d_n > h^n(\theta, z)$ , alors

$$|g_\theta^n(z)| = |z + h^n(\theta, z)| \geq |z| - |h^n(\theta, z)| > R_n(1 - 2d_n)$$

et comme  $g_\theta^n(0) = 0$  pour tout  $\theta$ , on conclut.

ii) Soit  $|z| \leq R_n(1 - 3d_n)$  et  $\theta$  dans  $B_{\delta_n - d_n}$ . On a alors que

$$|f_n(\theta, z)| \leq R_n(1 - 3d_n + \varepsilon_n) < R_n(1 - 2d_n) \quad \blacksquare$$

Il suit d'après ce lemme que la  $dhf$   $F_{n+1} = H_n^{-1} \circ F_n \circ H_n$  est bien définie sur  $B_{\delta_n - d_n} \times D_{R_n(1-4d_n)}$ .

Si en plus on a que

$$\frac{c_5 \varepsilon_n}{d_n^{4+\tau}} < \frac{1}{2}, \quad \text{on a } \|\partial_z h^n\| \leq \frac{1}{2} \quad (5.164)$$

et l'estimation suivante pour la partie non linéaire de  $F_{n+1}$

$$\begin{aligned} \rho^{n+1}(\theta, z) &= \rho^n(\theta, z + h^n(\theta, z)) - \rho^n(\theta, z) \\ &\quad + h^n(\theta + \alpha, \lambda z) - h^n(\theta + \alpha, \lambda z + \rho^{n+1}(\theta, z)) \\ \|\rho^{n+1}\|_{B_{\delta_n - d_n}, D_{R_n(1-4d_n)}} &\leq \|\partial_z \rho^n\| \|h^n\| + \|\partial_z h^n\| \|\rho^{n+1}\| \\ \|\rho^{n+1}\|_{B_{\delta_n - d_n}, D_{R_n(1-4d_n)}} &\leq 2\varepsilon_n c_5 R_n \varepsilon_n d_n^{-(4+\tau)} \\ \|\partial_z \rho^{n+1}\|_{B_{\delta_n - d_n}, D_{R_n(1-5d_n)}} &\leq c_6 \varepsilon_n^2 d_n^{-(5+\tau)} \end{aligned}$$

où  $c_6 \geq 0$  et la dernière inégalité s'obtient via Cauchy en perdant  $R_n d_n$  dans le rayon du disque de définition de la variable  $z$ .

Soit  $R_0$  un rayon positif que nous allons définir bientôt. Nous définissons inductivement la suite de rayons

$$R_{n+1} = R_n(1 - 5d_n) \quad (5.165)$$

où les pertes  $d_n$  sont définies par

$$d_n = \frac{\tilde{\delta}}{10(1 + 2^n)}, \quad \text{où } \tilde{\delta} = \min\{1, \delta\} \quad (5.166)$$

On a ainsi qu'il existe une constante  $l$  dans  $(0, 1/2)$  telle que pour tout  $n \geq 0$  on a que  $R_n > lR_0$ . On définit aussi inductivement la suite des largeurs de bande par  $\delta_0 = \delta$  et  $\delta_{n+1} = \delta_n - d_n$ . On voit que pour tout  $n \geq 0$  on a  $\delta_n \geq 4\delta/5$ . On définit aussi (avec un choix de  $\varepsilon_0$  à faire ultérieurement)

$$\varepsilon_{n+1} = c_6 \varepsilon_n^2 d_n^{-(5+\tau)} = c_6 \varepsilon_n^2 \tilde{\delta}^{-(5+\tau)} 10^{5+\tau} (1 + 2^n)^{5+\tau} \quad (5.167)$$

Il existe une constante  $c_7 > 0$  telle que

$$\varepsilon_{n+1} \leq c_7^{n+1} \varepsilon_n^2 \quad (5.168)$$

On pose  $\varepsilon'_n = c_7^n \varepsilon_n$ . On vérifie ainsi que

$$\varepsilon'_{n+1} = c_7^{n+1} \varepsilon_{n+1} \leq (c_7^{n+1} \varepsilon_n)^2 = (\varepsilon'_n)^2 \quad (5.169)$$

d'où on voit que si  $\varepsilon_0$  est assez petit la suite  $\varepsilon'_n$  (et donc aussi la suite  $\varepsilon_n$ ) tend vers zéro de façon plus qu'exponentielle. Notons que si  $\varepsilon_0$  est assez petit les inégalités (5.163), (5.164) sont vérifiées pour  $n = 0$ . On fixe donc  $R_0$  comme étant un rayon où on ait

$$\|\partial_z \rho\|_{B_\delta, D_{R_0}} \leq \varepsilon_0 \quad (5.170)$$

où  $\varepsilon_0$  est comme ci-dessus. Ce choix pour  $R_0$  est toujours possible car  $\rho$  s'annule à l'ordre 2 en  $z = 0$  et  $F$  est une fonction holomorphe dans les deux variables. On note  $F_0 = F$ . Nous pouvons alors démarrer la procédure que nous venons de décrire et trouver pour tout  $n \geq 0$  une conjugaison  $H_n$  de façon que la suite de  $dhf$  définie inductivement par

$$F_{n+1} = H_n^{-1} \circ F_n \circ H_n$$

est bien définie sur  $B_{\delta_{n+1}} \times D_{R_{n+1}}$  et sa partie non linéaire  $\rho^{n+1}$  vérifie l'estimation

$$\|\partial_z \rho^{n+1}\|_{B_{\delta_{n+1}}, D_{R_{n+1}}} \leq \varepsilon_{n+1}$$

La démonstration du Théorème 2.34 sera terminée quand nous montrerons que les compositions successives des conjugaisons  $H_n$  donnent lieu à une conjugaison biholomorphe définie dans  $B_{4\delta/5} \times D_{lR_0}$ . Autrement dit, il faut montrer que les fonctions

$$K_n = H_0 \circ H_1 \circ \cdots \circ H_n$$

sont bien définies et biholomorphes sur  $B_{\delta_n} \times D_{R_n}$ , et que la suite converge uniformément sur  $B_{4\delta/5} \times D_{lR_0}$ . La première affirmation suit du Lemme 5.6. Pour la deuxième on voit qu'il existe une constante  $c_8 > 0$  telle que

$$\|\partial_z \Pi_2 K_n\|_{B_{4\delta/5}, D_{lR_0}} \leq \prod_{j=0}^n (1 + \|\partial_z h^j\|) \leq c_8$$

d'où on a que

$$\|\Pi_2 K_{n+1} - \Pi_2 K_n\|_{B_{4\delta/5}, D_{lR_0}} \leq c_8 \|h^{n+1}\| \leq c_8 l R_0 c_7^{n+1} \varepsilon_n$$

ce qui permet de conclure ■

# Annexe A

## Fonctions de classe $C^\infty$ à fibres holomorphes

Soit  $f : \mathbb{T}^1 \times U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$ , où  $U$  est un voisinage d'un disque fermé  $\overline{D}_r$ . Nous supposons que la fibre  $f(\theta, \cdot) = f_\theta : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe en  $D_r$ , pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$ . Dans cet Annexe nous étudions ce type de fonctions en termes des séries entières à l'origine du plan complexe des fibres  $f_\theta$ . Nous écrivons

$$f_\theta(z) = \sum_{n \geq 0} f_n(\theta) z^n \quad (\text{A.1})$$

ce qui définit de façon unique les fonctions  $f_n : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , pour tout  $n \geq 0$ . Comme  $f$  est de classe  $C^\infty$  on a que  $\partial_z^n f_\theta(0) : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^\infty$  pour tout  $n \geq 0$ , et tous les coefficients  $f_n$  sont donc de classe  $C^\infty$ . De plus, il existe des constantes positives  $M_n$  telles que

$$|\partial_\theta^n f_\theta(z)| \leq M_n \quad (\text{A.2})$$

pour tout  $z$  dans  $D_r$ ,  $\theta$  dans  $\mathbb{T}^1$  et  $n \geq 0$ .

**Lemme A.1** *Soit  $s \geq 1$ . La dérivée  $\partial_\theta^s f_\theta$  est une fonction holomorphe en  $D_r$  et sa série entière à l'origine s'écrit par*

$$\partial_\theta^s f_\theta(z) = \sum_{n \geq 0} \partial_\theta^s f_n(\theta) z^n \quad (\text{A.3})$$

**Preuve.** Il suffit de montrer le lemme pour  $s = 1$  et appliquer ensuite un argument de récurrence. Soit  $t$  un réel positif plus petit que 1. Les fonctions  $f_\theta^t = \frac{1}{t}(f_{\theta+t} - f_\theta)$  sont holomorphes en  $D_r$ . De plus, pour tout  $z$  dans ce disque il existe  $\theta_{t,z}^{\mathcal{R}}, \theta_{t,z}^{\mathcal{I}}$  dans l'intervalle  $[\theta, \theta + t]$  tels que

$$f_\theta^t(z) = \frac{f_{\theta+t}(z) - f_\theta(z)}{t} = \partial_\theta(\mathcal{R}f)_{\theta_{t,z}^{\mathcal{R}}}(z) + i\partial_\theta(\mathcal{I}f)_{\theta_{t,z}^{\mathcal{I}}}(z) \quad (\text{A.4})$$

où  $\mathcal{R}f, \mathcal{I}f$  représentent la partie réelle et imaginaire respectivement. Nous savons que quand  $t$  tend vers 0 les fonctions  $f_\theta^t$  convergent ponctuellement vers  $\partial_\theta f_\theta$ . On estime les

différences suivantes, pour  $z$  dans  $D_r$ , à l'aide de (A.4)

$$|f_\theta^t(z) - \partial_\theta f_\theta(z)| \leq 2 \sup_{\mathbb{T}^1 \times D_r} |\partial_\theta^2 f_\theta| t \leq 2M_2 t \quad (\text{A.5})$$

On voit donc que la convergence  $f_\theta^t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \partial_\theta f_\theta$  est uniforme dans  $D_r$ , d'où on tire que  $\partial_\theta f_\theta$  est holomorphe sur ce disque. On peut appliquer la formule de Cauchy pour calculer les dérivées à l'origine

$$\partial_z^n f_\theta(0) = \int_{\partial D_{r/2}} \frac{f_\theta(z)}{z^{n+1}} dz = n! f_n(\theta) \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_z^n (\partial_\theta f_\theta)(0) = \partial_\theta (n! f_n(\theta)) = n! \partial_\theta f_n(\theta) \quad (\text{A.7})$$

ce qui nous permet de conclure ■

Inversement, nous voulons savoir quand est ce que une famille  $\{f_n : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \geq 0}$  de fonctions de classe  $C^\infty$  correspond aux coefficients de la série entière à l'origine d'une fonction de classe  $C^\infty$  à fibres holomorphes. L'exemple suivant nous montre la nécessité d'imposer certaines hypothèses à une telle famille.

**Exemple.** La série

$$f_\theta(z) = \sum_{n \geq 0} e^{i2^n \theta} z^n \quad (\text{A.8})$$

n'est pas une fonction de classe  $C^\infty$  dans le disque  $D_R$ , pour tout  $R > 0$ . En fait, si  $f$  l'était, on pourrait dériver terme par terme par rapport à  $\theta$  en obtenant

$$\begin{aligned} \partial_\theta f_\theta(z) &= \sum_{n \geq 0} i2^n e^{i2^n \theta} z^n \\ &\vdots \\ \partial_\theta^s f_\theta(z) &= \sum_{n \geq 0} (i2^n)^s e^{i2^n \theta} z^n \end{aligned}$$

Mais, on voit que  $\partial_\theta^s f_\theta$  converge pour  $|z| < (2^s)^{-1}$  et diverge pour  $|z| > (2^s)^{-1}$ , et cela pour tout  $s \geq 0$ .

La condition pour que les coefficients  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  donnent lieu à une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  à fibres holomorphes sur un certain ouvert  $U$  autour de l'origine du plan complexe vient donnée par la possibilité d'écrire toutes les dérivées  $\partial_\theta^s f$  comme la série des dérivées terme par terme et convergente sur un disque  $D_R$  pour  $R > 0$ . Ainsi, il faut et il suffit qu'il exista  $R > 0$  telle que pour tout  $s \geq 0$  on ait

$$\limsup_{n \geq 0} \|\partial_\theta^s f_n\|_{\mathbb{T}^1}^{1/n} \leq R^{-1}$$

# Annexe B

## Lemme d'inversion uniforme

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction de classe  $C^1$  qui fixe l'origine,  $f(0) = 0$ . Si la matrice  $Df(0)$  est inversible, le Théorème de Inversion locale dit qu'il existe deux voisinages de l'origine  $U_f, V_f$  tels que la restriction  $f : U_f \rightarrow V_f$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ . Nous sommes intéressés par une estimation de la taille de l'ouvert  $U_f$ . Soit  $r_f = \text{dist}(0, \partial U_f)$  le plus grand rayon d'un disque centré en 0 et contenu dans  $U_f$ . Lorsque la fonction  $f$  est holomorphe nous obtenons une majoration de  $r_f$  en termes de la taille de  $f$  et de sa dérivée à l'origine du plan complexe  $\partial_z f(0)$ .

**Lemme B.1 (D'inversion uniforme)** *Soient  $A \in (0, 1), B > 0$  des constantes. Il existe une constante  $r(A, B) \in (0, 1)$  telle que si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe vérifiant*

i)  $f(0) = 0$

ii)  $\|f\|_{\mathbb{D}} \leq B$

iii)  $A < |\partial_z f(0)| < A^{-1}$

alors  $r_f \geq r(A, B)$ .

**Preuve.** Il existe une constante  $B' > 4$  qui dépend seulement de  $B$  telle que  $\|\partial_z^2 f\|_{D_{1/2}} < B'$ . Soient  $\lambda = \partial_z f(0)$ ,  $r = \frac{A}{B'} < \frac{1}{4}$ ,  $R = \frac{Ar}{2}$  et  $t$  dans  $D_R$ . On pose

$$f_t(z) = f(z) - t \quad , \quad \Lambda_t(z) = \lambda z - t$$

Nous allons appliquer le Lemme de Rouché sur le bord  $\partial D_r$  à ces fonctions. Nous avons

$$|f_t(z) - \Lambda_t(z)| = |f(z) - \lambda z| < \frac{B'}{2} r^2$$

pour  $|z| = r$ . De plus nous avons

$$|\Lambda_t(z)| \geq |\lambda z| - |t| > Ar - R = \frac{Ar}{2}$$

sur ce même bord. Nous pouvons donc comparer sur ce bord

$$|f_t(z) - \Lambda_t(z)| < \frac{B'}{2} r^2 = \frac{Ar}{2} < |\Lambda_t(z)|$$

et conclure donc que  $f_t$  et  $\Lambda_t$  ont le même nombre de zéros dans  $D_r$ . Comme  $z_t = \frac{t}{\lambda}$  vérifie  $\Lambda_t(z_t) = 0$  et  $|z_t| < r/2$ , il existe donc un unique  $z_t^*$  dans  $D_r$  tel que  $f_t(z_t^*) = 0$ . Dit autrement, si nous posons  $U_f = f^{-1}(D_R) \cap D_r$ , nous avons que la restriction  $f : U_f \rightarrow D_R$  est un biholomorphisme. De plus, la dérivée de l'inverse vérifie  $|\partial_z f^{-1}(0)| = |\lambda^{-1}| > A > 0$ . Le lemme 1/4 de Koebe assure que l'image  $f^{-1}(D_R) = U_f$  contient le disque centré à l'origine et de rayon  $\frac{RA}{4} = \frac{A^3}{8B'}$  ■

**Corollaire B.2** *Soit  $F : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C}$  une dhf,  $\alpha \in \mathbb{R}$  son nombre de rotation dans la base. Soit  $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$  une courbe invariante pour  $F$  ayant un multiplicateur  $\kappa = \kappa(u)$ . Il existe alors un rayon positif  $R \in (0, 1)$  tel que la transformation inverse  $F^{-1} : \mathcal{U}_r \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C}$  est une dhf bien définie dans le tube  $\mathcal{U}_r$  de rayon  $r$  et centré dans la courbe invariante. Le nombre de rotation de  $F^{-1}$  sur la base est  $-\alpha$ . La courbe  $u$  est invariante pour  $F^{-1}$  et son multiplicateur en tant que telle est  $\kappa^{-1}$ .*

**Preuve.** On suppose que  $u = \{z \equiv 0\}_{\mathbb{T}^1}$ . Comme  $F$  est continue il existe des constantes  $A \in (0, 1), B > 0$  tels que pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$  la fonction univalente  $f_\theta$  vérifie les hypothèses du lemme précédent. Soit donc  $R = R(A, B) = \frac{A^2}{2B'}$  le rayon fourni par la preuve de ce lemme. La transformation inverse  $F^{-1}$  est définie par

$$(\theta, w) \longmapsto \left( \theta - \alpha, f_{\theta - \alpha}^{-1}(w) \right)$$

pour tout  $(\theta, w) \in \mathbb{T}^1 \times D_R$ . Les dérivées  $\partial_w f_\theta^{-1}$  sont bornés sur  $\mathbb{T}^1 \times D_R$  et l'inverse  $F^{-1}$  est donc bornée ■



# Bibliographie

- [AG91] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. CNRS Editions, 1991.
- [Ahl66] L.V. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. Van Nostrand, 1966.
- [Ahl73] L.V. Ahlfors. *Conformal Invariants : Topics in Geometric Function Theory*. McGraw-Hill, 1973.
- [AK06] A. Avila and R. Krikorian. Reducibility or nonuniform hyperbolicity for quasi-periodic Schrödinger cocycles. *Annals of Mathematics*, (164) :911–940, 2006.
- [Arn61] V.I. Arnold. Small denominators I : On the mapping of a circle into itself. *Izv. Akad. Nauk. Math. Series*, 25 :21–86, 1961.
- [Arn63a] V.I. Arnold. Small denominators and problems of stability of motion in classical celestial mechanics. *Russ. Math. Surv.*, 18 :85–193, 1963.
- [Arn63b] V.I. Arnold. Small denominators II : Proof of a theorem of A.N.Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations on the Hamiltonian. *Russ. Math. Surveys*, 18(6) :9–36, 1963.
- [Arn83] V.I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [Bos86] J.B. Bost. Tores invariantes des systèmes dynamiques hamiltoniens. *Asterisque, Séminaire Bourbaki 639*, 133-134 :113–157, 1986.
- [Bru71] A.D. Bruno. Analytic form of differential equations i. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25 :131–288, 1971.
- [Bru72] A.D. Bruno. Analytic form of differential equations ii. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 26 :199–239, 1972.
- [Cas57] J.W. Cassels. *An introduction to Diophantine approximation*, volume 45 of *Cambridge tracts*. Cambridge University Press, 1957.
- [CG93] L. Carleson and T. Gamelin. *Complex Dynamics*. Universitext. Springer-Verlag, 1993.
- [DeL97] D. DeLatte. Diophantine conditions for the linearization of commuting holomorphic functions. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 3(3) :317–332, 1997.
- [Den32] A. Denjoy. Sur les courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures et Appl.*, 11 :333–375, 1932.

- [dlL] R. de la Llave. *A tutorial in KAM theory*, volume 69. Proc. Symp. Pure Applied Math.
- [Dou87] A. Douady. Disques de Siegel et anneaux de Herman. *Asterisque, Séminaire Bourbaki 677*, 152-153 :151–172, 1987.
- [Eli88] L. H. Eliasson. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 15(1) :115–147 (1989), 1988.
- [Féj04] J. Féjóz. Démonstration du ‘théorème d’Arnold’ sur la stabilité du système planétaire (d’après Herman). *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(5) :1521–1582, 2004.
- [GP] M. Guenais and F. Parreau. Valeurs propres de transformations liées aux rotations irrationnelles et aux fonctions en escalier.
- [Gro72] M. Gromov. Smoothing and inversion of differential operators. *Math. USSR Sbornik*, 17 :381–434, 1972.
- [H76] L. Hörmander. The boundary problem of physical geodesy. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 62 :1–52, 1976.
- [Ham82] R.S. Hamilton. The Inverse Function Theorem of Nash and Moser. *Bull. A.M.S.*, 7 :65–222, 1982.
- [Her79] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 49 :5–233, 1979.
- [Her83a] M. Herman. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau, volumen I. *Asterisque*, 103-104 :1983, 1983.
- [Her83b] M. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d’un théorème d’arnold et de moser sur le tore de dimension 2. *Comment. Math. Helvetici*, 58 :453–502, 1983.
- [Her85a] M. Herman. Are the critical points on the boundary of singular domains? *Commun. Math. Phys.*, 99 :563–612, 1985.
- [Her85b] M. Herman. Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number. *Bull. Soc. Bras. Mat.*, 16 :45–83, 1985.
- [Her87] M. Herman. Recent results and some open questions on Siegel’s linearisation theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^n$  near a fixed point. pages 138–198, Proc. VIII Int. Conf. on Mathematics and Physics (Marseille 1986), 1987. World Scientific Publishing, Singapore.
- [Her98] M. Herman. Some open problems in dynamical systems. volume II, pages 797–808, Proc. ICM Berlin, 1998.
- [HPS77] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, and M. Shub. *Invariant Manifolds*, volume 583 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.
- [HW90] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory on numbers, Fifth Edition*. Oxford Science Publications, 1990.

- [JK06] T. Jäger and G. Keller. The Denjoy type of arguments for quasiperiodically forced circle diffeomorphisms. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 26 :447–465, 2006.
- [Jon99] M. Jonsson. Dynamics of polynomial skew products on  $C^2$ . *Math. Annalen*, 314 :403–447, 1999.
- [Jon00] M. Jonsson. Ergodic properties of fibered rational maps. *Ark. Mat.*, 38 :281–317, 2000.
- [JS06] T. Jäger and J. Stark. Towards a classification for quasiperiodically forced circle homeomorphisms. *Journal of the LMS*, 73(3) :727–744, 2006.
- [Kat04] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, volume 54 of *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [Kol54] A.N. Kolmogorov. On the persistence of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian function. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 98 :527–530, 1954.
- [KR01] A. Katok and E.A. Robinson. Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory. In *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, pages 107–173. Amer. Math. Soc., 2001.
- [Kra90] S. Krantz. *Complex analysis : the geometric viewpoint*, volume 23 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.
- [Kri99] R. Krikorian. Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts. *Astérisque*, (259) :vi+216, 1999.
- [Lan66] S. Lang. *Introduction to Diophantine Approximation*. Addison-Wesley, 1966.
- [Lim81] E.L. Lima. *Curso de análise, vol.2*. Projeto Euclides. IMPA, CNPq, 1981.
- [Mañ87] R. Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.
- [Mar] S. Marmi. An introduction to small divisors problems.
- [McM94] C.T. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalisation*. Ann. of Math. Studies. Princeton University Press, 1994.
- [Mil05] J. Milnor. Dynamics in one complex variable : Introductory lectures. preprint Stony Brook, 1990/5.
- [MMY97] S. Marmi, P. Moussa, and J-C. Yoccoz. The Brjuno functions and their regularity properties. *Comm. Math. Phys.*, 186 :265–293, 1997.
- [Mos62] J. Moser. On invariants curves of area-preservings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, pages 1–20, 1962.
- [Mos66] J. Moser. A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 20 :499–535, 1966.

- [Mos67] J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann.*, 169 :136–176, 1967.
- [Mos90] J. Moser. On commuting circle mappings and simultaneous diophantine approximations. *Math. Z.*, 205 :105–121, 1990.
- [Nas56] J. Nash. The embedding problem for riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63 :20–63, 1956.
- [PM92] R. Pérez-Marco. Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d’une application holomorphe au voisinage d’un point fixe (d’après J.-C.Yoccoz). *Asterisque, Séminaire Bourbaki 753*, 206 :273–310, 1992.
- [PM97] R. Pérez-Marco. Fixed points and circle maps. *Acta Math.*, 179 :243–294, 1997.
- [Poi99] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, tomes I-III*. Paris Gauthier-Villars, 1892,1893,1899.
- [Pom75] C. Pommerenke. *Univalent functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975. With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen, *Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher*, Band XXV.
- [R70] H. Rüssmann. Kleine Nenner I : Über invariant Kurven differenzierbaren Abbildungen eines Kreinsringes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, pages 67–105, 1970.
- [R72] H. Rüssmann. Kleine Nenner ii : Bemerkungen zur Newtonschen Methode. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, pages 1–20, 1972.
- [R75a] H. Rüssmann. Note on sums containing small divisors. *Commun. Pure Appl. Math.*, 29 :755–758, 1975.
- [R75b] H. Rüssmann. On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus. *Lecture Notes in Physics*, 38 :598–624, 1975.
- [R80] H. Rüssmann. On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential. *Annals of the New-York Acad. Sci.*, 357 :90–107, 1980.
- [R02] H. Rüssmann. Stability of elliptic fixed points of analytic area-preserving mappings under the Bruno condition. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 22 :1551–1573, 2002.
- [Ris99] E. Risler. Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications. *Mémoires S.M.F.*, 77, 1999.
- [Sch80] W.M. Schmidt. *Diophantine Approximations*, volume 785 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1980.
- [Ser72] F. Sergeraert. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de fréchet et quelques applications. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 5 :599–660, 1972.
- [Ses97] O. Sester. *Étude dynamique des polynômes fibrés*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 1997.

- [Ses99] O. Sester. Hyperbolicité des polynômes fibrés. *Bull. Soc. Math. France*, 127(3) :393–428, 1999.
- [Sie42] C.L. Siegel. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math.*, 43 :807–812, 1942.
- [SM71] C.L. Siegel and J.K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer, Berlin, 1971.
- [Sta03] J. Stark. Transitive sets for quasiperiodically forced monotone maps. *Dyn. Syst.*, 18(4) :351–364, 2003.
- [Yoc84] J.-C. Yoccoz. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 17 :333–359, 1984.
- [Yoc88] J.-C. Yoccoz. Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbf{C}, 0)$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306(1) :55–58, 1988.
- [Yoc92] J.-C. Yoccoz. *An introduction to Small Divisors Problems, in From Number Theory to Physics*, pages 659–679. Springer-Verlag, 1992.
- [Yoc95] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Asterisque*, 231 :3–88, 1995.
- [Yoc02] J.-C. Yoccoz. Analytic linearization of circle diffeomorphisms. In *Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998)*, volume 1784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–173. Springer, Berlin, 2002.
- [Zeh77] E. Zehnder. *A simple proof of a generalization of a Theorem by C.L. Siegel*, volume 597 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 828–854. Springer, Berlin, 1977.



## Résumé

Ce travail de thèse étudie les transformations holomorphes fibrées comme des systèmes dynamiques. Une transformation holomorphe fibrée (DHF) est une fonction fibrée continue de la forme  $(\theta, z) \rightarrow (\theta + \alpha, f_\theta(z))$ , définie dans un produit  $\mathbb{T}^1 \times U$ , où  $U \subset \mathbb{C}$  est un ouvert du plan,  $\alpha$  est un nombre irrationnel et  $f_\theta$  est une fonction univalente pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ . Nous nous concentrons dans l'étude des courbes invariantes. Ces objets jouent le rôle d'un centre pour la dynamique locale de telles transformations.

Ce travail est divisé en deux parties. La première contient une étude de la dynamique locale d'une DHF autour d'une courbe invariante. Nous montrons que cette dynamique est contrôlée par certaines données associées à la courbe (multiplicateur, nombre de rotation transversal). Plus précisément, dans le chapitre 2 nous montrons que les courbes attractives sont linéarisables; l'équivalence entre la stabilité de Lyapounov et la linéarisation dans le cas indifférent; un théorème de linéarisation de Siegel fibré; et une version fibrée du théorème des hérissons de Pérez-Marco.

La deuxième partie contient les résultats majeurs de ce travail. Dans cette partie nous nous concentrons sur la persistance d'une courbe invariante sous des petites perturbations. Au chapitre 3 nous montrons la persistance d'une courbe non-indifférente. Aux chapitres 4 et 5 nous traitons la persistance d'une courbe indifférente de degré nul avec un nombre de rotation transversal donné. Ce problème est un problème de petits diviseurs et nous montrons des théorèmes appropriés de type KAM.

Au chapitre 4 nous montrons que dans la classe  $C^\infty$ , la persistance a lieu pourvu que la paire de nombres de rotation associée vérifie une condition arith-mé-ti-que de type diophantienne. Nous montrons aussi que cette condition est optimale.

Au chapitre 5 nous montrons que dans la classe analytique, la persistance a lieu pourvu que la paire de nombres de rotation associée vérifie une condition arithmétique à la Brjuno. Nous montrons aussi une version paramétrée de ce résultat.

**Mots-clés :** théorie KAM, petits diviseurs, dynamique holomorphe, produits croisés, condition de Brjuno, courbes invariantes.

## Abstract

This doctoral thesis studies the fibered holomorphic transformations as dynamical systems. A fibered holomorphic transformation (FHD) is a fibered continuous function  $(\theta, z) \rightarrow (\theta + \alpha, f_\theta(z))$ , defined in a product  $\mathbb{T}^1 \times U$ , where  $U \subset \mathbb{C}$  is an open set,  $\alpha$  is an irrational number and  $f_\theta$  is a univalent function for every  $\theta \in \mathbb{T}^1$ . We focus on the study of invariant curves. These objects play the role of a center for local dynamics.

This work has two main parts. The first part contains a study of the local dynamics around an invariant curve. We show that this dynamics is controlled by some infinitesimal data associated to the curve (multiplier and fibered rotation number). Indeed, in chapter 2 we prove that non-indifferent invariant curves are linearizable; the equivalence between Lyapunov stability and linearization in the indifferent case; a Siegel linearization theorem for the fibered case; and a fibered version of the Pérez-Marco hedgehogs theorem.

The second part contains the main results of this work. In this part we focus on persistence of an invariant curve under small perturbations. In chapter 3 we prove the persistence of non-indifferent curves. In chapter 4 and 5 we treat persistence of indifferent, zero degree invariant curves, with a given fibered rotation number. This problem is a small divisors problem and we show adequate theorems of KAM type.

In chapter 4 we prove that in the  $C^\infty$  class persistence of the curve occurs provided that the pair of rotation numbers verifies a diophantine-like arithmetical condition. We also show that this condition is optimal.

In chapter 5 we prove that in the analytical class persistence of the curve occurs provided that the pair of rotation numbers verifies a Brjuno-like arithmetical condition. We also show a parametrized version of the main theorem.

**Keywords :** KAM theory, small divisors, holomorphic dynamics, skew-products, Brjuno condition, invariant curves.