El problema de los N cuadrados

Natalia García

Seminario de Geometría Algebraica - PUC

Dado un anillo graduado, tomamos una variedad proyectiva $X = \mathrm{Proj}(S)$. Definimos el haz $\mathcal{O}(n)$ como $S(n)^{\sim}$ donde $\sim$ es similar al que vimos la clase pasada, pero versión proyectiva. Aquí, $S(n)$ es el anillo S con graduación cambiada (grado n es ahora grado 0).

Proposición

En una variedad X, hay una inyección $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ desde el grupo de divisores de Cartier (módulo equivalencia lineal) hacia $\mathrm{Pic}(X)$.

Bajo esta inyección, un hiperplano es enviado a $\mathcal{O}(1)$, y N veces un hiperplano a $\mathcal{O}(N)$.

Estos haces cumplen $\mathcal{O}(m) + \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}(m+n)$.

Proposición

En $\mathbb{P}^n$, todo haz invertible es isomorfo a $\mathcal{O}(m)$, para algun m.

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ tiene **segundas diferencias iguales a dos** si para todo $j \geq 3$

$$(a_j - a_{j-1}) - (a_{j-1} - a_{j-2}) = a_j - 2a_{j-1} + a_{j-2} = 2.$$

Sabemos que sucesiones de cuadrados de enteros consecutivos tienen segundas diferencias iguales a dos (se llaman **sucesiones triviales**).

Algunas sucesiones no triviales de cuadrados de enteros con segundas diferencias iguales a dos son

$$0, 49, 100 \text{ o } 6^2, 23^2, 32^2, 39^2,$$

y no se conoce ninguna de largo 5 o mayor.

Problema de los N cuadrados (Büchi, 1970)

Existe un entero $M > 0$ tal que toda sucesión de M de cuadrados de enteros con segundas diferencias iguales a dos, sea necesariamente una sucesión trivial?

Teorema (Vojta, 2000)

Las únicas curvas de género cero o uno en la superficie

$$X_n : \begin{cases} x_3^2 - 2x_2^2 + x_1^2 = 2x_0^2 \\ \vdots \\ x_n^2 - 2x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 = 2x_0^2. \end{cases} \subseteq \mathbb{P}^n$$

cuando $n \geq 8$ *son las* 2^n *líneas*

$$\pm x_1 = \pm x_2 - x_0 = \cdots = \pm x_n - (n-1)x_0.$$

Nosotros demostraremos este resultado hoy.

Con el teorema anterior, se resuelve el Problema de los N cuadrados en cuerpos de funciones, y bajo la conjetura de Bombieri-Lang para cuerpos de números.

Corolario (para cuerpos de números)

Bajo la conjetura de Bombieri-Lang para la superficie X_8, existe un $M > 0$ tal que no hay sucesiones no triviales de M cuadrados con segundas diferencias iguales a dos.

Corolario (para cuerpos de funciones)

Sea K cuerpo de funciones de género 1 con cuerpo constante $\mathbb{C}$, sea $n > 7$, sea $f_1, \ldots, f_n \in K$ tales que los cuadrados de esta sucesión tiene segundas diferencias iguales a dos. Entonces la sucesión es trivial o una sucesión de números complejos.

Recordamos la definición fundamental que usaremos:

Definición

Sea $X/\mathbb{C}$ una superficie suave, sea $\mathcal{L}$ un haz invertible y sea

$$\omega \in H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^r \Omega^1_{X/\mathbb{C}}).$$

*Una curva irreducible $C \subset X$ es ω-**integral** si la imagen de $\varphi_C^* \omega$ en $H^0(\tilde{C}, \varphi_C^* \mathcal{L} \otimes S^r \Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}})$ es cero.*

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^r \Omega^1_{X/\mathbb{C}}) & \to & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*(\mathcal{L} \otimes S^r \Omega^1_{X/\mathbb{C}})) & \to & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^* \mathcal{L} \otimes S^r \Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}}) \\ \omega & \mapsto & \varphi_C^* \omega & \mapsto & \varphi_C^\bullet \omega = 0 \end{array}$$

El morfismo $\varphi^\bullet$ es el siguiente:

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}}) & \to & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*(\mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}})) \\ & \to & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*(\mathcal{L}) \otimes \varphi_C^*(S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}})) \\ & \to & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*(\mathcal{L}) \otimes S^r\varphi_C^*(\Omega^1_{X/\mathbb{C}})) \\ & \to & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*(\mathcal{L}) \otimes S^r\Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}}) \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Sketch del método}}$ Para encontrar todas las curvas de género $\leq g$ en la superficie suave X

1. Elegir $\pi : X \to \mathbb{P}^2$, $\mathcal{L}$, $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r \Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ tales que cada componente irreducible del divisor de ramificación $B \subseteq \mathbb{P}^2$ de π es ω-integral.

Sketch del método Para encontrar todas las curvas de género $\leq g$ en la superficie suave X

1. Elegir $\pi : X \to \mathbb{P}^2$, $\mathcal{L}$, $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ tales que cada componente irreducible del divisor de ramificación $B \subseteq \mathbb{P}^2$ de π es ω-integral.
2. Encontrar **todas** las curvas ω-integrales en $\mathbb{P}^2$.

$\boxed{\textbf{Sketch del método}}$ Para encontrar todas las curvas de género $\leq g$ en la superficie suave X

1. Elegir $\pi : X \to \mathbb{P}^2$, $\mathcal{L}$, $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ tales que cada componente irreducible del divisor de ramificación $B \subseteq \mathbb{P}^2$ de π es ω-integral.
2. Encontrar **todas** las curvas ω-integrales en $\mathbb{P}^2$.
3. Encontrar **todas** las curvas $\pi^\bullet\omega$-integrales en X.

$\boxed{\textbf{Sketch del método}}$ Para encontrar todas las curvas de género $\leq g$ en la superficie suave X

1. Elegir $\pi : X \to \mathbb{P}^2$, $\mathcal{L}$, $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ tales que cada componente irreducible del divisor de ramificación $B \subseteq \mathbb{P}^2$ de π es ω-integral.
2. Encontrar **todas** las curvas ω-integrales en $\mathbb{P}^2$.
3. Encontrar **todas** las curvas $\pi^\bullet\omega$-integrales en X.
4. Si $\pi^*\mathcal{L}$ cumple ciertas condiciones, entonces todas las curvas de género $\leq g$ en X son $\pi^\bullet\omega$-integrales.

Sketch del método Para encontrar todas las curvas de género $\leq g$ en la superficie suave X

1. Elegir $\pi : X \to \mathbb{P}^2$, $\mathcal{L}$, $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ tales que cada componente irreducible del divisor de ramificación $B \subseteq \mathbb{P}^2$ de π es ω-integral.
2. Encontrar **todas** las curvas ω-integrales en $\mathbb{P}^2$.
3. Encontrar **todas** las curvas $\pi^\bullet\omega$-integrales en X.
4. Si $\pi^*\mathcal{L}$ cumple ciertas condiciones, entonces todas las curvas de género $\leq g$ en X son $\pi^\bullet\omega$-integrales.

Si $\pi^*\mathcal{L}$ no cumple las condiciones, usamos el hecho que B es ω-integral para obtener un mejor haz $\mathcal{L}'$ y una sección $\omega' \in H^0(X, \mathcal{L}' \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}})$ tal que

$$\{\text{Curvas } \omega'\text{-integrales}\} \subseteq \{\text{Curvas } \pi^\bullet\omega\text{-integrales}\}.$$

Desde ahora, iremos paso a paso utilizando este método para demostrar el resultado de Vojta.

Recordemos un poco la geometría de las superficies involucradas:

Las superficies consideradas son

$$X_n : \begin{cases} 2x_0^2 = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 \\ 2x_0^2 = x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 \\ \quad \vdots \\ 2x_0^2 = x_{n-2}^2 - 2x_{n-1}^2 + x_n^2 \end{cases}$$

Vemos que para $i \geq 3$

$$\begin{aligned} x_i^2 &= 2x_0^2 - x_{i-2}^2 + 2x_{i-1}^2 \\ &= 2x_0^2 - (2x_0^2 - x_{i-4}^2 + 2x_{i-3}^2) + 2(2x_0^2 - x_{i-3}^2 + 2x_{i-2}^2) \\ &\ \ \vdots \\ &= (i-2)(i-1)x_0^2 - (i-2)x_1^2 + (i-1)x_2^2 \end{aligned}$$

Luego $$X_n : \begin{cases} x_3^2 = 2x_0^2 - x_1^2 + 2x_2^2 \\ x_4^2 = 6x_0^2 - 2x_1^2 + 3x_2^2 \\ \quad \vdots \\ x_n^2 = (n-2)(n-1)x_0^2 - (n-2)x_1^2 + (n-1)x_2^2 \end{cases}$$

- Mirando el rango de la matriz Jacobiana (usando las últimas ec.)

$$2\begin{pmatrix} -x_0 & x_1 & -2x_2 & x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ -6x_0 & 2x_1 & -3x_2 & 0 & x_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -(n-2)(n-1)x_0 & (n-2)x_1 & -(n-1)x_2 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

Obtenemos: **Para todo $n \geq 3$, la superficie X_n es suave.**

- Para una intersección completa en $\mathbb{P}^n$, el haz canónico es

$$\mathcal{O}(\underbrace{\textstyle\sum d_i}_{\text{grado di-ésima ecuación}} - n - 1)$$

En nuestro caso: **haz canónico $= \mathcal{O}((n-2)\cdot 2 - n - 1) = \mathcal{O}(n-5)$.**

- Por [H]

Cuando $n \geq 6$, la superficie X_n es de tipo general.

PASO 1

TOMAMOS LAS FUNCIONES RACIONALES

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] & \longmapsto & [x_0 : \ldots : x_{n-1}] \end{array}$$

← proyección en $[0 : \ldots : 0 : 1]$

DEFINEN MORFISMOS $\pi_n : X_n \twoheadrightarrow X_{n-1}$ de grado 2 (FINITOS).
$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [x_0 : \ldots : x_{n-1}]$

El MORFISMO π_n RAMIFICA (totalmente) EN $x_n = 0$.

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1}$$

$$x_n = 0 \longmapsto (n-1)(n-2)x_0^2 - (n-2)x_1^2 + (n-1)x_2^2 = 0$$

A nivel de CURVAS → $x_n = 0 \longleftarrow (n-1)(n-2)x_0^2 - (n-2)x_1^2 + (n-1)x_2^2 = 0$

π_n^{-1}

A nivel de divisores → $2\,\mathrm{div}_{X_n}(x_n) \longleftarrow \mathrm{div}_{X_{n-1}}\left((n-1)(n-2)x_0^2 - (n-2)x_1^2 + (n-1)x_2^2\right)$

π_n^*

Elegimos $\rho : X_n \to \mathbb{P}^2$ el morfismo

$$\rho_n : X_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} X_{n-1} \overset{\pi_{n-1}}{\twoheadrightarrow} \dots \overset{\pi_4}{\twoheadrightarrow} X_3 \overset{\pi_3}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}^2$$

Es un morfismo finito de grado 2^{n-2}

Ramifica sobre las curvas (de $\mathbb{P}^2$)

$$C_{i-2}: (i-1)(i-2)x_0^2 - (i-2)x_1^2 + (i-1)x_2^2 \quad , \quad 3 \leq i \leq n$$

y $\rho_n^*(C_i) = 2\,\mathrm{div}_{X_n}(x_i)$

Vemos que el divisor de ramificación (en $\mathbb{P}^2$) es $\sum_{i=3}^{n} C_i$, y todas sus componentes tienen la forma

$$C_\alpha : (\alpha+1)\alpha x_0^2 - (\alpha)x_1^2 + (\alpha+1)x_2^2 = 0$$

Buscaremos un ω que haga todas estas curvas ω-integrales.

Encontrar ω asociado a la ramificación del morfismo ρ

En el abierto de $\mathbb{P}^2$ donde $x_0=0$, las curvas que queremos que sean ω-integrales son

$$(\alpha+1)\alpha = \alpha x_1^2 - (\alpha+1)x_2^2$$

Derivamos

$$0 = 2\alpha x_1 dx_1 - 2(\alpha+1)x_2 dx_2$$

$$\alpha = \frac{x_2 dx_2}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2}$$

Reemplazando α en la ec. de la curva C_α:

$$\left(\frac{x_2 dx_2}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2} + 1\right)\frac{x_2 dx_2}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2} = \frac{x_2 dx_2}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2} x_1^2 - \left(\frac{x_2 dx_2}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2} + 1\right) x_2^2$$

$$\frac{x_1 dx_1 \cdot x_2 dx_2}{(x_1 dx_1 - x_2 dx_2)^2} = \frac{x_2 dx_2}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2} x_1^2 - \frac{x_1 dx_1}{x_1 dx_1 - x_2 dx_2} x_2^2$$

$$x_1 x_2 dx_1 dx_2 = (x_1^2 x_2 dx_2 - x_1 x_2^2 dx_1)(x_1 dx_1 - x_2 dx_2)$$

$$dx_1 dx_2 = x_1^2 dx_1 dx_2 - x_1 x_2 dx_2 dx_2 - x_1 x_2 dx_1 dx_1 + x_2^2 dx_1 dx_2$$

$$\boxed{x_1 x_2 dx_1 dx_1 + (1 - x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 + x_1 x_2 dx_2 dx_2 = 0}$$

Nuestro ω será elegido para que se vea así en el abierto U_0 de $\mathbb{P}^2$.

Tenemos en un abierto una expresión para nuestro ω. Lo extenderemos a todo $\mathbb{P}^2$. (cambiaremos a otras cartas afines).

En U_0, tenemos $\underset{/x_0}{x_1}\,\underset{/x_0}{x_2}\, d\underset{/x_0}{x_1}\, d\underset{/x_0}{x_1} + (1-\underset{/x_0}{x_1}^2-\underset{/x_0}{x_2}^2)\, d\underset{/x_0}{x_1}\, d\underset{/x_0}{x_2} + \underset{/x_0}{x_1}\,\underset{/x_0}{x_2}\, d\underset{/x_0}{x_2}\, d\underset{/x_0}{x_2}$

En U_1, reemplazamos

$$\underset{/x_0}{x_1} = \underset{x_1^{-1}}{x_0^{-1}} \quad , \quad \underset{/x_0}{x_2} = \underset{x_1}{x_2}\,\underset{x_1^{-1}}{x_0^{-1}}$$

Luego, $x_0^{-1}x_2x_0^{-1}\, d(x_0^{-1})\, d(x_0^{-1}) + (1-x_0^{-2}-x_2^2x_0^{-2})\, d(x_0^{-1})\, d(x_2x_0^{-1}) + x_0^{-2}x_2\, d(x_2x_0^{-1})\, d(x_2x_0^{-1})$

$$= \frac{x_2}{x_0^2}\left(\frac{-1}{x_0^2}dx_0\right)\left(\frac{-1}{x_0^2}dx_0\right) + \left(1-\frac{1}{x_0^2}-\frac{x_2^2}{x_0^2}\right)\left(\frac{-1}{x_0^2}dx_0\right)\left(\frac{x_0dx_2-x_2dx_0}{x_0^2}\right) + \frac{x_2}{x_0^2}\left(\frac{x_0dx_2-x_2dx_0}{x_0^2}\right)\left(\frac{x_0dx_2-x_2dx_0}{x_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^6}\left[x_0^2x_2\, dx_0dx_0 + (x_0-x_0^3-x_0x_2^2)\, dx_0\, dx_2 + x_0^2x_2\, dx_2dx_2\right]$$

$$= \frac{1}{x_0^5}\left[x_0x_2\, dx_0dx_0 + (1-x_0^2-x_2^2)\, dx_0\, dx_2 + x_0x_2\, dx_2\, dx_2\right]$$

Similarmente, en U_2

$$= \frac{1}{x_0^5}\left[x_0x_1\, dx_0dx_0 + (1-x_0^2-x_1^2)\, dx_0dx_1 + x_0x_1\, dx_1\, dx_1\right]$$

Definimos $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(5)\otimes S^2\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ como la sección que localmente tiene esas expresiones.

$\boxed{\textbf{Paso 2}}$ Para verificar que una curva dada es ω-integral:

Proposición

Sea $C \subset X$ una curva irreducible. Sea $\omega \in H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}})$. Sea $U = \mathrm{Spec}(A)$ un abierto en X tal que $C \cap U \neq \emptyset$ y $\mathcal{L}_{|U} \cong \mathcal{O}_U$.
Sea ω_0 la imagen de ω bajo

$$H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}}) \to H^0(U, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}}) \to H^0(U, S^r\Omega^1_{U/\mathbb{C}}) = S^r\Omega^1_{A/\mathbb{C}}.$$

Sea $I = (g)$ un ideal de A tal que $C \cap U = \mathbb{V}_U(I)$. Si

$$\omega_0 \in g \cdot S^r(\Omega^1_{A/\mathbb{C}}) + dg \cdot (S^{r-1}\Omega^1_{A/\mathbb{C}}),$$

entonces C es ω-integral.

Es esencialmente lo que vimos la clase pasada.

• Ver que $x_1=0$ es ω-integral:

$$\underbrace{x_1x_2\,dx_1dx_1+(1-x_1^2-x_2^2)dx_1dx_2}_{\text{Múltiplo de } dx_1}+\underbrace{x_1x_2\,dx_2dx_2}_{\text{Múltiplo de } x_1}$$

Similarmente $x_2=0$ y $\underbrace{x_0=0}_{\text{CAMBIAR CARTA AFIN}}$ son ω-integrales.

• Ver que $(\alpha+1)\alpha x_0^2-\alpha x_1^2+(\alpha+1)x_2^2=0$ es ω-integral:

$$\left[\begin{array}{l}(\alpha+1)\alpha=\alpha x_1^2-(\alpha+1)x_2^2\\ 0=\alpha x_1dx_1-(\alpha+1)x_2dx_2\end{array}\right] \rightarrow dx_2=\frac{\alpha x_1}{(\alpha+1)x_2}dx_1$$

$$\begin{aligned}
&x_1x_2\,dx_1dx_1+(1-x_1^2-x_2^2)dx_1dx_2+x_1x_2\,dx_2dx_2\\
&=x_1x_2\,dx_1dx_1+(1-x_1^2-x_2^2)\,dx_1\left(\frac{\alpha x_1}{(\alpha+1)x_2}\right)dx_1+x_1x_2\left(\frac{\alpha x_1}{(\alpha+1)x_2}\right)dx_1\left(\frac{\alpha x_1}{(\alpha+1)x_2}\right)dx_1\\
&=\left(x_1x_2+(1-x_1^2-x_2^2)\left(\frac{\alpha x_1}{(\alpha+1)x_2}\right)+\frac{\alpha^2x_1^3}{(\alpha+1)^2x_2}\right)dx_1dx_1\\
&=\frac{x_1}{(\alpha+1)^2x_2}\left((\alpha+1)^2x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)\alpha(\alpha+1)+x_1^2\alpha^2\right)dx_1dx_1\\
&=\frac{x_1}{(\alpha+1)^2x_2}\left((\alpha+1)x_2^2-\alpha x_1^2+\alpha(\alpha+1)\right)dx_1dx_1\\
&=0 \mod \text{ec. de la curva}
\end{aligned}$$

• También se puede verificar que

$x_0+x_1+x_2=0$, $x_0+x_1-x_2=0$, $x_0-x_1+x_2=0$, $x_0-x_1-x_2=0$

son ω-integrales

Se concluye

Los curvas $X_0=0,\ X_1=0,\ X_2=0$

$(\alpha+1)\alpha X_0^2 - \alpha X_1^2 + (\alpha+1)X_2^2\ ,\quad \alpha \neq$

$X_0+X_1+X_2=0,\ X_0+X_1-X_2=0,\ X_0-X_1+X_2=0,\ X_0-X_1-X_2=0$

son ω-integrales en $\mathbb{P}^2$.

Nos falta demostrar que estas son todas las curvas ω-integrales

Para mostrar que una lista de curvas ω-integrales está completa:

En un abierto $U \subseteq \mathbb{P}^2$ donde $\mathcal{L}_{\mathbb{P}^2|U} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2|U}$, una sección $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$ se ve como

$$\sum_{i=0}^{r} A_i(x,y)(dx)^{r-i}(dy)^i$$

y lo podemos ver como un polinomio mónico en una variable

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{A_i(x,y)}{A_0(x,y)}(dT)^i$$

Proposición

Sea Δ el lugar de ceros en $\mathbb{A}^2$ de $A_0(0,0)$ y $\operatorname{disc}(\sum_{i=0}^{r} \frac{A_i}{A_0} T^{r-i})$. En todo punto $P \in \mathbb{A}^2 \setminus \Delta$, la suma de las multiplicidades de las curvas ω-integrales que pasan a través de P es **a lo más** *r.*

Trabajaremos en el abierto U_0 (fuera de $x_0=0$)

$$\omega = \underbrace{x_1x_2}_{A_0}dx_1dx_1 + \underbrace{(1-x_1^2-x_2^2)}_{A_1}dx_1dx_2 + \underbrace{x_1x_2}_{A_2}dx_2dx_2$$

Entonces $A_0 = x_1x_2$

$$\begin{aligned} \text{disc} &= (1-x_1^2-x_2^2)^2 - 4x_1^2x_2^2 \\ &= 1+x_1^4+x_2^4-2x_1^2-2x_2^2+2x_1^2x_2^2-4x_1^2x_2^2 \\ &= (1+x_1+x_2)(1+x_1-x_2)(1-x_1+x_2)(1-x_1-x_2) \end{aligned}$$

Luego, en cada punto $P \in \mathbb{P}^2$ fuera de

$$\Delta = \{x_0=0\} \cup \{x_1=0\} \cup \{x_2=0\} \cup \{x_0+x_1+x_2=0\} \cup \{x_0+x_1-x_2=0\} \cup \{x_0-x_1+x_2=0\} \cup \{x_0-x_1-x_2=0\}$$

pasan a lo más 2 curvas ω-integrales, (deben ser de tipo C_α, todas las demás están en Δ)

Notar que Δ es unión de curvas ω-integrales

Tomemos $P \notin \Delta$. Veamos cuantas curvas C_α pasan por ahí.

$$(\alpha+1)\alpha - \alpha x_1^2 + (\alpha+1)x_2^2 = 0$$

Resolvemos para α. El discriminante de la ecuación cuadratica

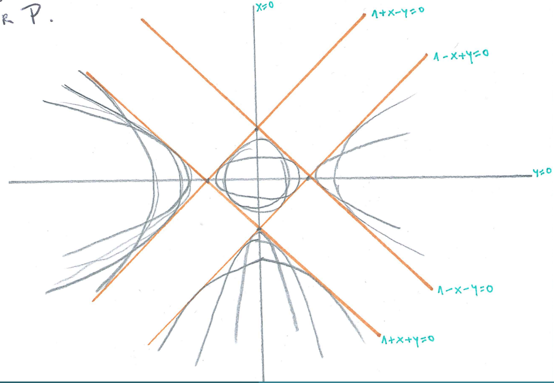
$$\alpha^2 + (1 - x_1^2 + x_2^2)\alpha + x_2^2 = 0$$

Es justamente $(1+x_1+x_2)(1+x_1-x_2)(1-x_1+x_2)(1-x_1-x_2)$.

Como estamos fuera de Δ, debe haber dos soluciones de la ecuación.

$\therefore$ Pasan dos curvas C_α por P.

Las curvas ω-integrales son exactamente las de la lista anterior



$\boxed{\textbf{Paso 3}}$ Encontrar curvas en X: Sea $\pi : X' \to X$ morfismo (dominante, finito) de superficies suaves, y sean $C' \subset X'$, $C \subset X$ curvas irreducibles tales que $\pi(C') = C$. Del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{C}' \arrow[l, "\varphi_{C'}"'] \arrow[d, "p"] \\
X & \tilde{C} \arrow[l, "\varphi_C"]
\end{tikzcd}$$

obtenemos el diagrama en secciones globales

$$\begin{tikzcd}
H^0(X', \pi^*\mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X'/\mathbb{C}}) \arrow[r, "(\varphi_C)^\bullet_{\pi^*\mathcal{L}}"] & H^0(\tilde{C}', (\varphi_C)^*\pi^*\mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\tilde{C}'/\mathbb{C}}) \arrow[d, phantom, "\wr|"] \\
 & H^0(\tilde{C}', p^*\varphi_C^*\mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\tilde{C}'\mathbb{C}}) \\
H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}}) \arrow[uu, "\pi^\bullet_{\mathcal{L}}"] \arrow[r, "(\varphi_C)^\bullet_{\mathcal{L}}"'] & H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*\mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}}). \arrow[u, hook, "p^\bullet_{\varphi_C^*\mathcal{L}}"']
\end{tikzcd}$$

$\parallel$ C' es $\pi^\circ\omega$-integral

$$\pi^\circ\omega \longmapsto 0$$

$$\begin{tikzcd}
H^0(X', \pi^*\mathcal{L} \otimes S^R\Omega^1_{X'/\mathbb{C}}) \arrow[r] & H^0(\tilde{C}', (\varphi_c)^* \underset{\cong}{\pi^*} \mathcal{L} \otimes S^R\Omega^1_{\tilde{C}'/\mathbb{C}}) \\
 & H^0(\tilde{C}', p^* \varphi_c^* \mathcal{L} \otimes S^R\Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}}) \\
H^0(X, \mathcal{L} \otimes S^R\Omega^1_{X/\mathbb{C}}) \arrow[uu] \arrow[r] & H^0(\tilde{C}, \varphi_c^* \mathcal{L} \otimes S^R\Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\omega \longmapsto 0$$

$=$ C es ω-integral

Concluimos:

Proposición

Si tenemos un morfismo (dominante, finito) de superficies suaves $\pi : X' \to X$ y curvas $C' \subset X'$, $c \subset X$, tenemos que

$$C' \text{ es } \pi^\bullet\omega\text{-integral} \leftrightarrow C \text{ es } \omega\text{-integral.}$$

Luego, en nuestro caso, las curvas $\rho_n^\bullet\omega$-integrales son las preimágenes de las curvas ω-integrales en $\mathbb{P}^2$.

En nuestro caso:

Las curvas $\mathfrak{p}_W$-integrales en X son:

todas suaves, irred, int. completa

(a) • $\mathfrak{p}_n^*$ de $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=0$,

(b) • $\mathfrak{p}_n^*(C_\alpha)$, $\alpha \neq$

(c) • $\mathfrak{p}_n^*$ de $x_0+x_1+x_2=0, \ldots, x_0-x_1-x_2=0$

son las curvas $\pm x_1 = \pm x_2 - x_0 = \ldots = \pm x_n - (n-1)x_0$

Curvas de tipo (a) tienen género $\underline{2^{n-3}}(n-4)+1$

tipo (b) tienen género $2^{n-2}(n-3)+1$ si $\mathfrak{p}_n$ no ramif. ahí

$2^{n-3}(n-4)+1$ si $\mathfrak{p}_n$ ramif. ahí

tipo (c) tienen género 0.

se calculan viendo el canónico K_C (son int. completas) a, b

$\boxed{\textbf{Paso 4}}$ Ahora solamente falta mostrar que todas las curvas de género $\leq g$ son $\rho_n^{\bullet}\omega$-integrales. Para esto:

Proposición

Sea $X/\mathbb{C}$ una superficie suave, sea $\omega \in H^0(X, \mathcal{O}(m) \otimes S^r\Omega^2_{X/\mathbb{C}})$ y sea $g \geq 1$ un número entero. Si $m < r(2g-2)$, entonces para toda curva C de género menor o igual que g tenemos

$$H^0(\tilde{C}, \varphi_C^*\mathcal{O}(m) \otimes S^r\Omega^1_{\tilde{C}/\mathbb{C}}) = 0$$

y por lo tanto C debe ser ω-integral.

EN NUESTRO CASO $m=5$, $g=1$ y

$$5 \not< 2(2-2)=0$$

En nuestro caso, no resultó directamente con la sección $\rho_n^{\bullet}\omega$ en el haz $\mathcal{O}(5) \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}}$. Ahora veremos que se puede hacer para mejorarlos. Utilizaremos el hecho que las componentes del divisor branch B de ρ son ω-integrales.

Proposición

Si $\rho : X \to \mathbb{P}^2$ es un morfismo dominante, y R es un divisor primo tal que $B = \rho(R)$ es una curva, y ρ ramifica sobre B con índice de ramificación $e_{R/B} > 1$. Si B es ω-integral para $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}})$, entonces existe una sección

$$\omega' \in H^0(X, \mathcal{O}(-(e_{R/B} - 1)R) \otimes \rho^*\mathcal{L} \otimes S^r\Omega^1_{X/\mathbb{C}})$$

no nula y tal que curvas ω'-integrales en X son $\pi^{\bullet}\omega$-integrales.

Trabajando con cuidado, se obtiene el resultado para divisores no necesariamente primos.

En nuestro caso, φ_n ramifica sobre las curvas de $\mathbb{P}^2$:

$$C_{i-2}: (i-2)(i-1)X_0^2 - (i-2)X_1^2 + (i-1)X_2^2 = 0 \quad ; \qquad 3 \leq i \leq n$$

$$B = \sum_{i=3}^{n} C_{i-2}$$

Luego $R = \sum_{i=3}^{n} (\overset{\text{"}e_i\text{"}}{2} - 1)\, \mathrm{div}_{X_n}(x_i)$ ← suma de $n-2$ "hiperplanos $\cap X_n$"

Así que $\mathcal{O}(-R) = \mathcal{O}(n-2)$

y $\omega' \in H^0(X_n, \mathcal{O}(n-2) \otimes \mathcal{O}(5) \otimes S^2\Omega^1_{X_n/\mathbb{C}})$.

Cuando $n-2 > 5$, las curvas de género ≤ 1 serán ω-integrales, luego φ_n ω-integrales.

⇒ Las curvas de género ≤ 1 en X_n, $n > 7$, son de tipo (a), (b), (c).

Para qué tipo de problemas se puede aplicar este método?

- Uno necesita un problema que se reduzca a un sistema de ecuaciones que defina una superficie (problema: contar cuantas subvariedades pasan por un punto)

Para qué tipo de problemas se puede aplicar este método?

- Uno necesita un problema que se reduzca a un sistema de ecuaciones que defina una superficie (problema: contar cuantas subvariedades pasan por un punto)
- No podemos trabajar en característica positiva por el momento (el mismo problema)

Para qué tipo de problemas se puede aplicar este método?

- Uno necesita un problema que se reduzca a un sistema de ecuaciones que defina una superficie (problema: contar cuantas subvariedades pasan por un punto)
- No podemos trabajar en característica positiva por el momento (el mismo problema)
- Si la superficie obtenida tiene singularidades, hay que estudiarlas y esto afectará las desigualdades finales, pero el método se puede aplicar

Para qué tipo de problemas se puede aplicar este método?

- Uno necesita un problema que se reduzca a un sistema de ecuaciones que defina una superficie (problema: contar cuantas subvariedades pasan por un punto)
- No podemos trabajar en característica positiva por el momento (el mismo problema)
- Si la superficie obtenida tiene singularidades, hay que estudiarlas y esto afectará las desigualdades finales, pero el método se puede aplicar
- Se necesitan ojalá muchas ecuaciones de grados altos (esto se está arreglando, utilizando diferenciales de orden superior)

Para qué tipo de problemas se puede aplicar este método?

- Uno necesita un problema que se reduzca a un sistema de ecuaciones que defina una superficie (problema: contar cuantas subvariedades pasan por un punto)
- No podemos trabajar en característica positiva por el momento (el mismo problema)
- Si la superficie obtenida tiene singularidades, hay que estudiarlas y esto afectará las desigualdades finales, pero el método se puede aplicar
- Se necesitan ojalá muchas ecuaciones de grados altos (esto se está arreglando, utilizando diferenciales de orden superior)
- Uno puede trabajar son superficies definidas abstractamente, en realidad no es necesario utilizar ecuaciones