

# SEMINARIO: TEORÍA DE MULTIPLICACIÓN COMPLEJA O EL SUEÑO DE JUVENTUD DE KRONECKER

RICARDO MENARES

El grupo de Galois absoluto  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  es un objeto central en Teoría de Números, del cual se sabe muy poco. En este seminario discutiremos uno de los problemas más básicos, de cuya solución estamos lejos.

El punto de partida es el **Teorema de Kronecker-Weber**: toda extensión finita galoisiana  $L/\mathbb{Q}$  con  $Gal(L/\mathbb{Q})$  abeliano está contenida en un cuerpo ciclotómico.

En otras palabras, es posible encontrar un natural  $n$  tal que la raíz de la unidad  $e^{\frac{2\pi i}{n}}$  es tal que  $L \subseteq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ .

El problema 12 de Hilbert consiste en generalizar este resultado. Grosso modo, dado un cuerpo de números  $K$  arbitrario, el problema 12 pide dar una manera explícita de construir las extensiones abelianas de  $K$ , usando valores "especiales" de funciones analíticas adecuadas. El Teorema de Kronecker-Weber resuelve este problema cuando  $K = \mathbb{Q}$ , estableciendo que para obtener las extensiones abelianas de  $\mathbb{Q}$  basta con adjuntar valores de la función analítica  $f(x) = e^{2\pi i x}$  con  $x \in \mathbb{Q}$ .

El único caso distinto de  $K = \mathbb{Q}$  en que este problema está resuelto es  $K$  cuadrático imaginario (también está resuelto para los llamados *cuerpos CM*, para los cuales existe una generalización de la teoría que se verá en este seminario). Usando funciones modulares, es posible construir todas las extensiones abelianas de  $K$  mediante adjunción de dos funciones analíticas apropiadas, evaluadas en puntos algebraicos especiales. Esta instancia del problema se conoce como la *teoría de la multiplicación compleja* y utiliza herramientas diversas: teoría algebraica de números, cuerpos de clases, formas modulares y curvas elípticas.

Para un cuerpo arbitrario  $K$ , que no sea de tipo CM, el problema 12 de Hilbert está completamente abierto (incluso para  $K$  cuadrático real).

El núcleo de este seminario consistirá en estudiar el caso cuadrático imaginario. No se asumirá que las/os participantes conocen todos los ingredientes mencionados. En realidad, desarrollaremos cada uno más o menos desde cero, sin llegar a la versión más general sino solamente lo necesario para establecer la Teoría de la Multiplicación Compleja.

El método de trabajo consistirá en charlas preparadas por los participantes del seminario. Después de dar la charla, cada orador/a tendrá un mes para escribir lo expuesto, eventualmente cubriendo detalles que no fueron dichos. Durante la primera o segunda reunión se determinará el calendario, los temas y los oradores encargados. Los alumnos que lo requieran podrán inscribir este curso como un optativo, que será evaluado en base a la charla y su redacción.

Un buen texto introductorio al tema del seminario es Cox, "Primes of the form  $x^2 + ny^2$ ".

*E-mail address:* rmenares@mat.uc.cl