FUNCIONES ELÍPTICAS Y LA FUNCIÓN $\wp$ DE WEIERTRASS

FERNANDO HERRERA

Esta charla está basada en el capítulo 3, sección 10 de (1).
En esta charla siempre consideraremos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

1. Funciones elípticas

Definición 1.1. Un reticulado $\mathfrak{L}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ que es generado por ω_1, ω_2.

Escribimos $\mathfrak{L} = [\omega_1, \omega_2]$, luego $\mathfrak{L} = \{n\omega_1 + m\omega_2 \in \mathbb{C}/n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 1.2. Una función elíptica para $\mathfrak{L}$ es una función $f(z)$ definida en $\mathbb{C}$, excepto para singularidades aisladas, que satisface las siguientes dos propiedades:

1. f es meromorfa en $\mathbb{C}$,
2. $f(z + \omega) = f(z)$ para todo $\omega \in \mathfrak{L}$.

Notar que si $\mathfrak{L} = [\omega_1, \omega_2]$, la segunda condición es equivalente a

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z).$$

Entonces una función elíptica es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, doblemente periódica. Los elementos de $\mathfrak{L}$ son llamados periodos.

De la definición es fácil ver que el conjunto de funciones elípticas es un cuerpo.

2. La función $\wp$ de Weiertrass

Una de las funciones elípticas más importantes es la función $\wp$ de Weiertrass, que se define como sigue: dado un complejo z que no está en el reticulado $\mathfrak{L}$ consideramos

$$\wp(z; \mathfrak{L}) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathfrak{L} - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \tag{2.1}$$

En general, si el reticulado $\mathfrak{L}$ está fijo escribiremos $\wp(z)$ en vez de $\wp(z; \mathfrak{L})$. Algunas propiedades de la función $\wp$ para el reticulado $\mathfrak{L}$ son el siguiente teorema.

Teorema 2.1.

1. *$\wp$ es una función elíptica para $\mathfrak{L}$ y sus singularidades son polos dobles en los elementos de $\mathfrak{L}$.*
2. *$\wp$ satisface*
$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(\mathfrak{L})\wp(z) - g_3(\mathfrak{L}) \tag{2.2}$$
si $z \notin \mathfrak{L}$, donde
$$g_2(\mathfrak{L}) = 60 \sum_{\omega \in \mathfrak{L} - \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$
$$g_3(\mathfrak{L}) = 140 \sum_{\omega \in \mathfrak{L} - \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$
3. *$\wp$ satisface*
$$\wp(z + z_2) = -\wp(z) - \wp(z_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z_2)}{\wp(z) - \wp(z_2)} \right)^2$$
si $z, z_2, z + z_2 \notin \mathfrak{L}$.

Antes de comenzar con la demostración del teorema, comenzamos con un lema.

Lema 2.2. *Si $\mathfrak{L}$ es un reticulado y $r > 2$ entonces*

$$G_r(\mathfrak{L}) = \sum_{\omega \in \mathfrak{L} - \{0\}} \frac{1}{\omega^r}$$

converge absolutamente.

Demostración: Primero consideremos la función contínua del espacio compacto $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$ a $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $(x,y) \mapsto |x\omega_1 + y\omega_2|$. Ya que la imagen es un conjunto compacto, existe su mínimo y lo denotamos por M, es decir $M = \text{mín}\{|x\omega_1 + y\omega_2| / x^2+y^2 = 1\}$. Notemos que M es estrictamente positivo pues tal mínimo es alcanzado por algún elemento de S^1, digamos (x_*, y_*), y la igualdad $0 = M = |x_*\omega_1 + y_*\omega_2|$ se contradice con que ω_1, ω_2 sean linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Además notando que

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in S^1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

obtenemos

$$|x\omega_1 + y\omega_2| \geq M\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Empezamos a trabajar con la convergencia propuesta. Llamando $\mathfrak{L} = [\omega_1, \omega_2]$ tenemos

$$\sum_{\omega \in \mathfrak{L}-\{0\}} \frac{1}{|\omega|^r} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{|n\omega_1 + m\omega_2|^r} \leq \frac{1}{M^r} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(n^2+m^2)^{r/2}} \tag{2.3}$$

donde $'$ significa que no se considera el sumando $n = m = 0$. Para cada $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ definimos $C_{n,m} \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrado de lado uno donde el vértice de mayor módulo es (n,m). Así tenemos la desigualdad

$$\frac{1}{(n^2+m^2)^{r/2}} \leq \int\int_{C_{n,m}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{r/2}} dxdy$$

que nos ayuda a ver que la convergencia de la última serie de (2.3) se satisface si la siguiente serie doble es convergente

$$\int\int_{x^2+y^2\geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{r/2}} dxdy.$$

Haciendo el cambio de variables cartesianas a polares es claro que esa integral doble es $2\pi \int_1^\infty \frac{dt}{t^{r-1}}$ la cual es convergente cuando $r > 2$, terminando la demostración del lema. □

Ahora podemos mostrar que $\wp$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathfrak{L}$. Sea Ω un compacto de $\mathbb{C} - \mathfrak{L}$, es suficiente con mostrar que la serie en (2.1) converge absoluta y uniformemente en Ω invocando un lema standard de análisis complejo (ver (2, p. 53) teorema 5.2). Tomamos un real R tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in \Omega$. Además consideramos los $\omega \in \mathfrak{L}$ que satisfacen $|\omega| \geq 2R$. Entonces $|z - \omega| \geq \frac{1}{2}|\omega|$ y se puede ver

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \leq \frac{R(2|\omega| + \frac{1}{2}|\omega|)}{|\omega|^2\left(\frac{1}{4}|\omega|^2\right)} = \frac{10R}{|\omega|^3}.$$

Ya que los periodos de la desigualdad $|\omega| \geq 2R$ son todos excepto una cantidad finita de $\mathfrak{L}$, usando lema 2.2 tenemos que la serie de la función $\wp$ converge absoluta y uniformemente en Ω. Usando tal lema de análisis complejo obtenemos que $\wp$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathfrak{L}$. Es claro que tiene un polo doble en el origen.

Notar que la función $\wp$ es par, pues $(-z-\omega)^2 = (z - (-\omega))^2$ y la serie de $\wp$ es absolutamente convergente.

Ahora mostramos que $\wp$ es periódica. Comenzamos considerando la derivada de $\wp$

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\mathfrak{L}} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Usando la misma idea anterior, esta serie converge absoluta y uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{C} - \mathfrak{L}$, entonces $\wp'$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathfrak{L}$ y periódica en $\mathfrak{L}$; es decir $\wp'$ es una función elíptica para $\mathfrak{L}$. Digamos $\mathfrak{L} = [\omega_1, \omega_2]$. Ya que $\wp'$ es periódica tenemos $\wp'(z) = \wp'(z + \omega_i)$ con $i = 1, 2$; es decir las funciones $\wp(z)$ y $\wp(z + \omega_i)$ tienen la misma derivada luego difieren por una constante. Digamos $\wp(z) = \wp(z + \omega_i) + C$. Evaluando esta igualdad en $z = -\omega_i/2$ (que no pertenece a $\mathfrak{L}$) obtenemos

$$\wp(-\omega_i/2) = \wp(-\omega_i/2 + \omega_i) + C = \wp(\omega_i/2) + C.$$

Ya que $\wp$ es par, C tiene que ser nula, entonces $\wp(z) = \wp(z + \omega_i)$. Es decir $\wp$ es periódica en $\mathfrak{L}$. Además, ya que $\wp$ tiene un polo de orden dos en el origen, se concluye que $\wp$ tiene polos dobles en cada punto de $\mathfrak{L}$. Hemos probado la primera afirmación del teorema.

Para mostrar la segunda aseveración del teorema, primero mostraremos dos lemas. El primero caracteriza las funciones elípticas enteras.

Lema 2.3. *Las únicas funciones elípticas enteras son las constantes.*

Demostración: Consideremos el paralelógramo $\mathfrak{F} = \{s\omega_1 + t\omega_2 / 0 \le s, t \le 1\}$. Notar que cualquier elemento z en el plano complejo es congruente a algún elemento $p \in \mathfrak{F}$ módulo el reticulado, es decir $z \equiv p \ (mod\ \mathfrak{L})$. Denotando f como la función elíptica periódica en $\mathfrak{L}$, tenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ existe $p \in \mathfrak{F}$ talque $f(z) = f(p)$. Por otro lado, f es contínua en el compacto $\mathfrak{F}$, entonces f es acotada en $\mathfrak{F}$. Finalmente por comentario anterior f es acotada en todo $\mathbb{C}$. Ya que además es entera, por teorema de Liouville, f es constante. □

Nuestro último lema, antes de entrar a la segunda parte del teorema, trata sobre la serie de Laurent de $\wp$ en el origen.

Lema 2.4. *Sea $\wp(z; \mathfrak{L}) = \wp(z)$ la función de Weiertrass para el reticulado $\mathfrak{L}$. Entonces en una vecindad del origen tenemos*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2}(\mathfrak{L})\, z^{2n}$$

Demostración: Para $|x| < 1$ recordamos la serie geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ y al derivarla obtenemos la expansión

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Si $|z| < |\omega|$, entonces ponemos $x = z/\omega$ en la última serie y se tiene

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n.$$

Luego sumando sobre $\mathfrak{L} - \{0\}$ tenemos

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathfrak{L} - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathfrak{L} - \{0\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) G_{n+2}(\mathfrak{L})\, z^n.$$

Ya que $\wp$ es par, todos los coeficientes impares deben ser nulos, obteniendo lo propuesto en el lema. □

Del lema podemos ver

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1) G_{2n+2}(\mathfrak{L}) z^{2n-1} \tag{2.4}$$

y calculando los primeros términos de $\wp^3$ y $\wp'^2$ vemos

$$\begin{aligned} \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4(\mathfrak{L})}{z^2} + 15G_6(\mathfrak{L}) + ... \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4(\mathfrak{L})}{z^2} - 80G_6(\mathfrak{L}) + ... \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde ... significa que son sumandos con potencias positivas de z.

Ahora comenzamos a demostrar la segunda parte del teorema. Consideramos la función

$$F(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4(\mathfrak{L})\wp(z) + 140G_6(\mathfrak{L}).$$

Ya que $\wp$ y $\wp'$ son funciones elípticas para $\mathfrak{L}$, F también los es para el mismo reticulado. Además mirando las expansiones se puede ver que F es holomorfa en el origen y allí se anula. Luego por la periodicidad, F es holomorfa y se anula en todos los puntos de $\mathfrak{L}$. Ya que $\wp$ y $\wp'$ son funciones holomorfas en $\mathbb{C} - \mathfrak{L}$, F también lo es. En resumen, F es una función elíptica entera, luego idénticamente nula por lema 2.3. Recordando las definiciones de g_2 y g_3 es claro que $g_2(\mathfrak{L}) = 60G_4(\mathfrak{L})$ y $g_3(\mathfrak{L}) = 140G_6(\mathfrak{L})$ terminando con la demostración del segundo punto del teorema.

Para mostrar el tercer y último punto del teorema, veremos primero el siguiente lema.

Lema 2.5. *Sean $z, z_2 \notin \mathfrak{L}$. Entonces $\wp(z) = \wp(z_2)$ si y sólo si $z \equiv \pm z_2$ mod $\mathfrak{L}$.*

Demostración: Primero miramos la dirección más sencilla ($\Leftarrow$). La hipótesis $z \equiv \pm z_2 \ mod \ \mathfrak{L}$ es equivalente a $z = \pm z_2 + l$, algún $l \in \mathfrak{L}$. Luego $\wp(z) = \wp(\pm z_2 + l) = \wp(\pm z_2) = \wp(z_2)$. Para la otra dirección ($\Rightarrow$), digamos $\mathfrak{L} = [\omega_1, \omega_2]$ y fijamos un número $-1 < \delta < 0$. Denotamos por $\mathbf{P} = \{s\omega_1 + t\omega_2 / \delta \leq s, t \leq \delta + 1\}$ el paralelógramo y Γ su borde orientado positivamente. Notar que cualquier número complejo es congruente módulo $\mathfrak{L}$ a un elemento en $\mathbf{P}$.
Fijamos z_2 y consideramos la función $f(z) = \wp(z) - \wp(z_2)$. Moviendo δ, si fuese necesario, podemos suponer que f no tiene ceros ni polos en Γ. Sabemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

donde Z y P es el número de ceros y polos de f en el interior de $\mathbf{P}$, respectivamente, contando multiplicidad. Ya que f'/f es periódica, las integrales opuestas en Γ se cancelan, y luego $\int_\Gamma f'(z)/f(z)\, dz = 0$. Esto dice que $Z = P$. Por otro lado, el valor de P es fácil conocerlo: el origen es el único polo de f en $\mathbf{P}$; es un polo doble y entonces $Z = P = 2$. Así f tiene dos ceros, contando multiplicidad, en $\mathbf{P}$. Ellos son los congruentes a $\pm z_2$ en $\mathbf{P}$ módulo $\mathfrak{L}$.

Hay dos casos a estudiar: el primero es $z_2 \not\equiv -z_2$ mod $\mathfrak{L}$. Entonces módulo $\mathfrak{L}$, los representantes de z_2 y $-z_2$ en $\mathbf{P}$ son dos puntos distintos. Como $Z = 2$, ellos son los únicos ceros en $\mathbf{P}$ con multiplicidad uno. En particular $\wp'(z_2) \neq 0$. El segundo caso es $z_2 \equiv -z_2$ mod $\mathfrak{L}$, es decir $2z_2 \in \mathfrak{L}$. Ya que $\wp'$ es impar y periódica tenemos

$$\wp'(z_2) = \wp'(z_2 - 2z_2) = \wp'(-z_2) = -\wp'(z_2)$$

lo cual obliga a $\wp'(z_2) = 0$. Entonces el representante de z_2 módulo $\mathfrak{L}$ en $\mathbf{P}$, es un cero de f con multiplicidad al menos dos, y ya que $Z = 2$ no hay más ceros. Esto prueba el lema. $\square$

De la demostración de este lema podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 2.6. *Sea $z \notin \mathfrak{L}$. Entonces $\wp'(z) = 0$ si y sólo si $2z \in \mathfrak{L}$.*

Ahora demostramos el tercer y último punto del teorema. Fijamos $z_2 \notin \mathfrak{L}$ y definimos la siguiente función elíptica

$$G(z) = \wp(z + z_2) + \wp(z) + \wp(z_2) - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z_2)}{\wp(z) - \wp(z_2)}\right)^2.$$

Mostraremos que G es entera y nula en el origen, luego será idénticamente nula por el lema 2.3 y obtendremos el tercer punto del teorema. Mirando la primera parte del teorema y el lema 2.5, es claro que las posibles singularidades de G provienen de tres conjuntos: $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} + \{z_2\}$ y $\mathfrak{L} + \{-z_2\}$. Por la periodicidad de G es suficiente considerar $G(0), G(z_2)$ y $G(-z_2)$. Comenzamos con $G(0)$. Usando las expansiones de Laurent de $\wp$ y $\wp'$, comentadas en lema 2.4 y ec. (2.4) respectivamente, uno ve que

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z_2)}{\wp(z) - \wp(z_2)}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{-2/z^3 - \wp'(z_2) + ...}{1/z^2 - \wp(z_2) + ...}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{-2}{z} - 2\wp(z_2)z + ...\right)^2 = \frac{1}{z^2} + 2\wp(z_2) + ...$$

donde ... significa que los siguientes sumandos son potencias de z estrictamente mayores que el término anterior. Luego

$$G(z) = \wp(z + z_2) + \frac{1}{z^2} + \wp(z_2) + ... - \frac{1}{z^2} - 2\wp(z_2) - ...$$

obteniendo $G(0) = 0$.

Para ver $G(\pm z_2)$ tenemos dos casos, dependiendo si $2z_2$ pertenece o no al retículo $\mathfrak{L}$. Primero miramos el caso $2z_2 \notin \mathfrak{L}$. Amplificando por $z - z_2$ en el cuociente de G tenemos

$$G(z_2) = \wp(2z_2) + 2\wp(z_2) - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z_2)}{\wp'(z_2)}\right)^2. \tag{2.6}$$

Ya que $2z_2 \notin \mathfrak{L}$ (entonces $z_2 \notin \mathfrak{L}$) los dos primeros sumandos de G están definidos. Además el corolario muestra $\wp'(z_2) \neq 0$ y se deduce que $G(z_2)$ está bien definido. Para $G(-z_2)$ miramos algunas series de Laurent en $z=-z_2$:

$$\wp(z+z_2)=\frac{1}{(z+z_2)^2}+3G_4(\mathfrak{L})(z+z_2)^2+...$$

$$\begin{aligned}\wp(z)&=\wp(-z_2)+\wp'(-z_2)(z+z_2)+\frac{\wp''(-z_2)}{2}(z+z_2)^2+\frac{\wp'''(-z_2)}{6}(z+z_2)^3+...\\&=\wp(z_2)-\wp'(z_2)(z+z_2)+\frac{\wp''(z_2)}{2}(z+z_2)^2-\frac{\wp'''(z_2)}{6}(z+z_2)^3+...\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\wp'(z)=-\wp'(z_2)+\wp''(z_2)(z+z_2)-\frac{\wp'''(z_2)}{2}(z+z_2)^2+...$$

ahora ... significa que los siguientes sumandos son potencias de $z+z_2$ estrictamente mayores que el término anterior, la serie de $\wp(z+z_2)$ se ve del lema 2.4 y la serie de $\wp(z)$ es gracias a que $\wp$ es holomorfa en $-z_2$. Con estas series vemos el cuociente de G

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(z_2)}{\wp(z)-\wp(z_2)}\right)^2&=\frac{1}{4}\left(\frac{-2\wp'(z_2)+\wp''(z_2)(z+z_2)-\wp'''(z_2)/2(z+z_2)^2+...}{-\wp'(z_2)(z+z_2)+\wp''(z_2)/2(z+z_2)^2-\wp'''(z_2)/6(z+z_2)^3+...}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{z+z_2}+\frac{1}{6}\frac{\wp'''(z_2)}{\wp'(z_2)}(z+z_2)+...\right)^2=\frac{1}{(z+z_2)^2}+\frac{1}{6}\frac{\wp'''(z_2)}{\wp'(z_2)}+...\end{aligned}$$

Entonces la expansión de G en torno a $-z_2$ es

$$\begin{aligned}G(z)&=\frac{1}{(z+z_2)^2}+3G_4(\mathfrak{L})(z+z_2)^2+...+2\wp(z_2)-\frac{1}{(z+z_2)^2}-\frac{1}{6}\frac{\wp'''(z_2)}{\wp'(z_2)}+...\\&=2\wp(z_2)-\frac{1}{6}\frac{\wp'''(z_2)}{\wp'(z_2)}+...\end{aligned}\tag{2.8}$$

mostrando que $G(-z_2)$ está bien definido.

El segundo caso es $2z_2\in\mathfrak{L}$ que equivale a $\wp'(z_2)=0$ por corolario 2.6. Comenzamos notando que $\wp''(z_2)\neq 0$. En efecto, definimos y notamos que $e_1=\wp(\frac{\omega_1}{2}), e_2=\wp(\frac{\omega_2}{2})$ y $e_3=\wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ son valores distintos gracias al lema 2.5 pues $\pm\omega_1/2,\pm\omega_2/2$ y $\pm(\omega_1+\omega_2)/2$ no son congruentes módulo $\mathfrak{L}$. Por otro lado la ecuación diferencial

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2(\mathfrak{L})\wp(z)-g_3(\mathfrak{L})$$

y el corolario 2.6 nos muestran que e_1,e_2 y e_3 son raíces del polinomio $4x^3-g_2(\mathfrak{L})x-g_3(\mathfrak{L})$. Por lo anterior y mirando la serie de $\wp'(z)^2$ en ec. (2.5) tenemos la factorización

$$\wp'(z)^2=4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3).$$

Derivando esta última identidad se obtiene

$$\wp''(z)=2(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)+2(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_3)+2(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)$$

y ya que $2z_2\in\mathfrak{L}$ equivale a que z_2 es congruente a $\omega_1/2,\omega_2/2$ o $(\omega_1+\omega_2)/2$ módulo el reticulado $\mathfrak{L}$, concluímos $\wp''(z_2)\neq 0$. Si bien para este segundo caso queremos conocer $G(\pm z_2)$, es suficiente con $G(-z_2)$ pues G es elíptica luego $G(z_2)=G(z_2-2z_2)=G(-z_2)$. Mirando ec. (2.7), comentando que $\wp^{(iv)}$ es una función par y $\wp'''(z_2)=0$ (ya que $\wp'''$ es impar y elíptica luego $-\wp'''(z_2)=\wp'''(-z_2)=\wp'''(-z_2+2z_2)=\wp'''(z_2)$) vemos que las series de Laurent en torno a $-z_2$ para este segundo caso son

$$\wp(z+z_2)=\frac{1}{(z+z_2)^2}+3G_4(\mathfrak{L})(z+z_2)^2+...$$

$$\wp(z)=\wp(z_2)+\frac{\wp''(z_2)}{2}(z+z_2)^2+\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{24}(z+z_2)^4+...$$

$$\wp'(z)=\wp''(z_2)(z+z_2)+\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{6}(z+z_2)^3+...$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_2)}\right)^2&=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z_2)(z+z_2)+\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{6}(z+z_2)^3+...}{\frac{\wp''(z_2)}{2}(z+z_2)^2+\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{24}(z+z_2)^4+...}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{z+z_2}+\frac{1}{6}\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{\wp''(z_2)}(z+z_2)+...\right)^2=\frac{1}{(z+z_2)^2}+\frac{1}{6}\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{\wp''(z_2)}+...\end{aligned}$$

Ahora usando estas expansiones podemos mostrar la expansión de G en torno a $-z_2$

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{(z+z_2)^2} + 3G_4(\mathfrak{L})(z+z_2)^2 + ... + 2\wp(z_2) + \frac{\wp''(z_2)}{2}(z+z_2)^2 + ... \\
&- \frac{1}{(z+z_2)^2} - \frac{1}{6}\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{\wp''(z_2)} + ... \\
&= 2\wp(z_2) - \frac{1}{6}\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{\wp''(z_2)} + ...
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

mostrando que $G(-z_2)$ está bien definido.

3. Comentarios extras

En esta sección resumimos varios resultados que son interesantes por sí solos y, que fueron mostrados en la sección anterior o que se deducen fácilmente. El primero es la fórmula de la duplicación de Weierstrass. (comparar con ec. (2.2))

Corolario 3.1. *Si* $2z \notin \mathfrak{L}$

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2.$$

Demostración: En la demostración del teorema 2.1 parte 3 mostramos que G es identicamente nula. En particular, mirando ec. (2.6) tenemos $G(z_2) = 0$ lo cual es equivalente a lo propuesto. Otra forma equivalente de demostrar este corolario es considerar ec. (2.2) y hacer tender z a z_2; una observación útil en este camino es

$$\lim_{z \to z_2} \frac{\wp'(z) - \wp'(z_2)}{\wp(z) - \wp(z_2)} = \frac{\wp''(z_2)}{\wp'(z_2)}.$$

□

El siguiente corolario se obtiene derivando ec. (2.2).

Corolario 3.2. *Si* $z \notin \mathfrak{L}$

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{1}{2}g_2(\mathfrak{L}).$$

Las siguientes identidades están en la demostración de la parte 3 del teorema 2.1.

Corolario 3.3. *Si* $z \notin \mathfrak{L}$

$$
\begin{aligned}
\wp'(z)^2 &= 4\left(\wp(z) - \wp(\frac{\omega_1}{2})\right)\left(\wp(z) - \wp(\frac{\omega_2}{2})\right)\left(\wp(z) - \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})\right) \quad y \\
\wp'''(z) &= 12\wp(z)\wp'(z). \\
\wp^{(iv)}(z) &= 12\wp(z)\wp''(z) \quad si\ 2z \in \mathfrak{L}.
\end{aligned}
$$

Demostración: La primera se demostró en el caso $2z_2 \in \mathfrak{L}$ aunque esa suposición no fue necesaria para obtenerla. En ese teorema mostramos que G es nula y en el caso $2z \notin \mathfrak{L}$ ec. (2.8) muestra $0 = G(-z_2) = 2\wp(z_2) - \frac{1}{6}\frac{\wp'''(z_2)}{\wp'(z_2)}$ que equivale a la segunda identidad. Si $2z \in \mathfrak{L}$ esta segunda identidad se cumple trivialmente pues $\wp'(z) = 0 = \wp'''(z)$. Para la tercera identidad, en el caso $2z \in \mathfrak{L}$ la ecuación (2.9) muestra $0 = G(-z_2) = 2\wp(z_2) - \frac{1}{6}\frac{\wp^{(iv)}(z_2)}{\wp''(z_2)}$ que equivale a la última identidad propuesta. □

Referencias

[1] Cox, D : *Primes of the form* $x^2 + ny^2$, Wiley, New York, second edition, 2013.
[2] Stein, E.; Shakarchi, R: *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2007.
(document)

Depto de matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile
Email address: ferhercon@gmail.com