LA FUNCIÓN j-INVARIANTE DE UN RETICULADO

Dado que las funciones elípticas dependen de la elección de un retículo, una pregunta natural es ¿ Dados dos retículos L y L', bajo que condiciones las funciones elípticas sobre estas son escencialmente iguales?. El objetivo de esta sección es definir la función "j-invariante", con la cual se establecerá un criterio que permita responder a la pregunta anterior. De manera más concreta, esta sección busca demostrar el siguiente teorema:

Teorema 0.1. *Sean L y L' reticulados en $\mathbb{C}$. Entonces $j(L) = j(L')$ si y solamente si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $L = \lambda L'$.*

Dados dos retículos L, L' para las cuales existe un elemento $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $L = \lambda L'$ (reticulados homotéticos), notemos que hay una correspondencia entre las funciones elípticas para el reticulado L y las funciones elípticas del reticulado L' , de la siguiente manera: Si $f(z)$ es función elíptica para L' entonces $f(\lambda z)$ es una función elíptica para L.

En particular para la función elíptica de Weierstrass,

$$\wp(z, L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\wp(\lambda z, L) &= \wp(\lambda z, \lambda L'),\\ &= \frac{1}{(\lambda z)^2} + \sum_{\omega \in L' - \{0,0\}} \left(\frac{1}{(\lambda z - \lambda\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda\omega)^2} \right),\\ &= \lambda^{-2}\wp(z, L').\end{aligned}$$

Por ende nos gustaría determinar las clases de reticulados módulo homotecia, y como dijimos en un principio, aquí es donde la función j-invariante jugará un rol crucial. El primer paso para aquello, es definir el discriminante de un reticulado.

Recordemos que cada retículo L, tiene asociada las constantes

$$g_2(L) = 60 \sum_{\omega \in L-\{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{y} \quad g_3(L) = 140 \sum_{\omega \in L-\{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Además de que la función elíptica de Weierstrass para L satisface la equación diferencial:

$$\wp'(z, L)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(L)\wp(z) - g_3(L).$$

Definición 0.1. *Dado un reticulado L definimos el discriminante de L, el cual será denotado por $\Delta(L)$, como el valor:*

$$\Delta(L) := g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2.$$

Notemos que $\Delta(L)$ se relaciona con $\Delta(F(x) = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L))$, polinomio que aparece en la ecuación diferencial de $\wp$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta(L) &= \frac{1}{16}\Delta(F(x) = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)),\\ &= \frac{1}{16}4^4(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2,\\ &= 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2,\end{aligned}$$

donde e_1, e_2, e_3 son las distintas raíces de $F(x)$.

Así, dado $L = [\omega_1, \omega_2]$, sabemos por la ecuación diferencial

$$\wp'(z, L)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(L)\wp(z) - g_3(L),$$

que el polinomio $F(x)$ se anula en los valores $\wp(\frac{\omega_1}{2}), \wp(\frac{\omega_2}{2})$ y $\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$. Dado que si $z, w \notin L$ enotonces $\wp(z) = \wp(w)$ si y solamente si $z \cong \pm w \mod L$, además del hecho de que ninguno de los puntos $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ y $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ satisface esta condición, se tiene que las 3 raíces e_1, e_2 y e_3 son distintas. Por lo tanto hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 0.2. *Para todo reticulado L de $\mathbb{C}$ se tiene que $\Delta(L) \neq 0$.*

Ahora tenemos todos los conceptos para definir el elemento principal de esta sección.

Definición 0.2. *Definimos la función j-invariante de un reticulado L como:*

$$\begin{aligned} j(L) &:= 1728\frac{g_2(L)^3}{\Delta(L)}, \\ &= 1728\frac{g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2}. \end{aligned}$$

Una vez tenemos esta definición, podemos abordar el teorema principal.

Teorema 0.3. *Sean L y L' retículos en $\mathbb{C}$. Entonces $j(L) = j(L')$ si y solamente si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $L = \lambda L'$.*

Demostración:

$\Leftarrow$: Supongamos que $L = \lambda L'$. Luego se tiene que,

$$\begin{aligned} g_2(L) &= g_2(\lambda L'), \\ &= 60 \sum_{\omega \in \lambda L' - \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \\ &= 60 \sum_{\omega \in L' - \{0\}} \frac{1}{(\lambda\omega)^4}, \\ &= \lambda^{-4} g_2(L'). \end{aligned}$$

De manera análoga, se puede calcular que

$$g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L').$$

Así, se tiene $\Delta(L) = \lambda^{-12}\Delta(L')$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} j(L) &= 1728\frac{g_2(L)^3}{\Delta(L)}, \\ &= 1728\frac{\lambda^{-12} g_2(L')^3}{\lambda^{-12}\Delta(L')}, \\ &= j(L'). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Sean L, L' latices tales que $j(L) = j(L')$. Primero que todo, probemos la siguiente afirmación:

Afirmación: *Existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que*

$$g_2(L) = \lambda^{-4} g_2(L') \quad y \quad g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L').$$

Separemos el análisis de esta afirmación en casos:

Si $g_2(L')$ y $g_3(L')$ son distintos de cero, entonces sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\lambda^{-4} g_2(L') = g_2(L).$$

Como $j(L) = j(L')$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{g_2(L')^3}{g_2(L')^3 - 27g_3(L')^2} &= \frac{g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2}, \\ &= \frac{\lambda^{-12} g_2(L')^3}{\lambda^{-12} g_2(L')^3 - 27g_3(L)^2}, \\ &= \frac{g_2(L')^3}{g_2(L')^3 - 27\lambda^{12} g_3(L)^2}. \end{aligned}$$

Factorizando, se tiene que

$$\lambda^{-12} = \left(\frac{g_3(L)}{g_3(L')}\right)^2 .$$

Luego, reemplazando en caso de ser necesario λ por $i\lambda$, se tiene que $g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L')$, lo que demuestra la afirmación.

En el caso de que $g_2(L') = 0$. Notemos que $g_3(L') \neq 0$, pues $\Delta(L) = g_2(L)^3 - 27 g_3(L)^2$ es siempre distinto de cero. Por otro lado, como $j(L) = j(L') = 0$ se tiene que $g_2(L) = 0$. Así, podemos elegir $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L')$.

De manera análoga con $g_3(L') = 0$, (esta vez $j(L) = 1728$), se puede elegir λ de manera que $g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L')$.

Con esto se demuestra la afirmación.

Previo a continuar con la demostración del teorema principal, necesitamos una ultima herramienta:

Lema 0.1. *Sea $\wp(z)$ la función elíptica de Weierstrass para el retículo L, y sea*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} (2n+1) G_{2n+2}(L) z^{2n},$$

su expansión de Laurent. Entonces para $n \neq 1$, el coeficiente $(2n+1)G_{2n+2}(L)$ de z^{2n} es un polinomio con coeficientes racionales, independientes de L, en términos $g_2(L)$ y $g_3(L)$.

Demostración: Para facilitar la notación, denotemos para cada $n \geq 1$

$$a_n := (2n+1) G_{2n+2}(L).$$

Diferenciando la ecuación diferencial de $\wp$ se tiene que:

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{1}{2} g_2(L).$$

Así, igualando los coeficientes de las series de Laurent, se obtiene que para $n \geq 1$:

$$2n(2n-1)a_n = 6\left(2a_n + \sum_{i=1}^{n-2} a_i a_{n-1-i}\right),$$

y de manera equivalente

$$(2n+3)(n-2)a_n = 3\sum_{i=1}^{n-2} a_i a_{n-1-i}.$$

Dado que $g_2(L) = 60G_4(L) = 20a_1$ y $g_3(L) = 140G_6(L) = 28a_2$, la demostración del lema está terminada.

Dado que $j(L) = j(L')$, por la afirmación anterior, tenemos que existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$g_2(L) = \lambda^{-4} g_2(L') \quad y \quad g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L').$$

Notemos que $\lambda^{-4} g_2(L') = g_2(\lambda L')$ y $\lambda^{-6} g_3(L') = g_3(\lambda L')$, por ende $\wp(z, L)$ y $\wp(z, \lambda L')$ poseen la misma expansión en de Laurent y por ende $\wp(z, L) = \wp(z, \lambda L')$. Como los polos de la función elíptica de Weierstrass corresponden a los elementos del retículo, se tiene que $L = \lambda L'$. $\square$

$\square$