LA FUNCIÓN j-INVARIANTE DE UN RETICULADO

En la sección anterior, se introdujo el concepto de función elíptica, donde se vio que estas funciones dependen de la elección de un retículo. Así, surge una pregunta natural ¿Dados dos retículos L y L', bajo que condiciones las funciones elípticas sobre estas son escencialmente iguales?. La respuesta a esta pregunta será que son escencialmente iguales si es que estos dos retículos son homotéticos. Así, el objetivo de esta sección es definir una función llamada la "j-invariante", con la cual se establecerá un criterio que permita caracterizar los reticulados modulo homotecia. De manera más concreta, se va a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 0.1. *Sean L y L' reticulados en $\mathbb{C}$. Entonces $j(L) = j(L')$ si y solamente si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $L = \lambda L'$.*

Consideremos dos retículos L y L' para los cuales existe un elemento $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $L = \lambda L'$, es decir, son retículos homotéticos. Notemos que si este es el caso, existe una correspondencia natural entre las funciones elípticas para el reticulado L y las funciones elípticas del reticulado L': *Si $f(z)$ es función elíptica para L entonces $f(\lambda z)$ es una función elíptica para L'.*

Recordemos que la sección anterior se dedicó al análisis de una función elíptica de particular importancia, dígase la función elíptica de Weierstrass,

$$\wp(z, L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

En particular, para esta función se tiene que

$$\begin{aligned}
\wp(\lambda z, L) &= \wp(\lambda z, \lambda L'), \\
&= \frac{1}{(\lambda z)^2} + \sum_{\omega \in L' - \{0,0\}} \left(\frac{1}{(\lambda z - \lambda\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda\omega)^2} \right), \\
&= \lambda^{-2} \wp(z, L').
\end{aligned}$$

Por ende conociendo la función elíptica de Weierstrass de un reticulado, se puede determinar la función de Weierestrass de cualquier reticulado homotético. Por esto, nos gustaría determinar las clases de reticulados módulo homotecia, y como dijimos en un principio, aquí es donde la función j-invariante jugará un rol crucial. El primer paso para lograr esto, es introducir el concepto de "discriminante de un reticulado".

Recordemos que cada retículo L, tiene asociada las constantes

$$g_2(L) = 60 \sum_{\omega \in L - \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{y} \quad g_3(L) = 140 \sum_{\omega \in L - \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Además de que la función elíptica de Weierstrass para L satisface la equación diferencial:

$$\wp'(z, L)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(L)\wp(z) - g_3(L).$$

Definición 0.1. *Dado un reticulado L definimos el discriminante de L, el cual será denotado por $\Delta(L)$, como el valor:*

$$\Delta(L) := g_2(L)^3 - 27 g_3(L)^2.$$

Notemos que $\Delta(L)$ se relaciona con $\Delta(F(x) = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L))$, polinomio que aparece en la ecuación diferencial de $\wp$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta(L) &= \frac{1}{16}\Delta(F(x) = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)),\\ &= \frac{1}{16}4^4(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2,\\ &= 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2,\end{aligned}$$

donde e_1, e_2, e_3 son las raíces de $F(x)$.

Así, dado $L = [\omega_1, \omega_2]$, sabemos por la ecuación diferencial

$$\wp'(z,L)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(L)\wp(z) - g_3(L),$$

que el polinomio $F(x)$ se anula en los valores $\wp(\frac{\omega_1}{2}), \wp(\frac{\omega_2}{2})$ y $\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$. Usando el hecho que si $z, w \notin L$, entonces $\wp(z) = \wp(w)$ si y solamente si $z \equiv \pm w \mod L$, además de que ninguno de los puntos $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ y $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ satisface esta condición, se tiene que las 3 raíces e_1, e_2 y e_3 son distintas. Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 0.2. *Para todo reticulado L de $\mathbb{C}$ se tiene que $\Delta(L) \neq 0$.*

Tras esto, se tienen todos los conceptos necesarios para definir el objeto principal de esta sección.

Definición 0.2. *Definimos la función j-invariante de un reticulado L como:*

$$\begin{aligned} j(L) &:= 1728\frac{g_2(L)^3}{\Delta(L)},\\ &= 1728\frac{g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2}.\end{aligned} \tag{0.1}$$

Previo a continuar, veamos un par de ejemplos de retículos cuya $j-$invariante puede ser calculada de manera sencilla:

Ejemplo 0.1. Sea $L = [1, i]$. Notemos que:

$$\begin{aligned} iL &= i[1,i],\\ &= [i,-1],\\ &= [1,i],\\ &= L.\end{aligned}$$

Así, $g_3(L) = g_3(iL)$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} g_3(L) &= g_3(iL),\\ &= 140\sum_{\omega\in iL-\{0\}}\frac{1}{\omega^6},\\ &= 140\sum_{\omega\in L-\{0\}}\frac{1}{(i\omega)^6},\\ &= -g_3(L).\end{aligned}$$

Luego $g_3(L) = g_3(iL) = 0$. Reemplazando esto en la ecuación 0.1 y en vista del teorema 0.2 se tiene que:

$$j([1,i]) = 1728.$$

Ejemplo 0.2. Sea $\rho = exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ y sea $L = [1, \rho]$. Así,

$$\begin{aligned} \rho L &= \rho[1,\rho],\\ &= [\rho,\rho^2],\\ &= [\rho, 1-\rho],\\ &= L.\end{aligned}$$

Por lo tanto $g_2(L) = g_2(\rho L)$. Además, notemos que:

$$\begin{aligned} g_2(L) &= g_3(\rho L), \\ &= 60 \sum_{\omega \in \rho L - \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \\ &= 60 \sum_{\omega \in L - \{0\}} \frac{1}{(\rho\omega)^4}, \\ &= \rho^{-4} g_2(L). \end{aligned}$$

Luego $g_2(L) = g_2(\rho L) = 0$. Nuevamente, en vista de la ecuación 0.1 y en vista del teorema 0.2 se tiene que:

$$j([1, \rho]) = 0.$$

Observación 0.1. Notemos que en estos ejemplos, lo que se hizo fue buscar los ceros de las funciones g_2 y g_3. En caso de estar interesados, una forma más natural (y bastante directa) de determinar estos ceros es utilizando la llamada "formula de valencia", la cual puede ser encontrada en la Proposición 8 del Capítulo 3, Sección 2 [Kob12].

Con la definición de la $j-$invariante ya establecida, podemos abordar el teorema principal.

Teorema 0.3. *Sean L y L' retículos en $\mathbb{C}$. Entonces $j(L) = j(L')$ si y solamente si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $L = \lambda L'$.*

Demostración:

$\Leftarrow$: Supongamos que $L = \lambda L'$. Luego se tiene que,

$$\begin{aligned} g_2(L) &= g_2(\lambda L'), \\ &= 60 \sum_{\omega \in \lambda L' - \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \\ &= 60 \sum_{\omega \in L' - \{0\}} \frac{1}{(\lambda\omega)^4}, \\ &= \lambda^{-4} g_2(L'). \end{aligned}$$

De manera análoga, se puede calcular que

$$g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L').$$

Así, se tiene $\Delta(L) = \lambda^{-12}\Delta(L')$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} j(L) &= 1728 \frac{g_2(L)^3}{\Delta(L)}, \\ &= 1728 \frac{\lambda^{-12} g_2(L')^3}{\lambda^{-12}\Delta(L')}, \\ &= j(L'). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Sean L, L' latices tales que $j(L) = j(L')$. Primero que todo, probemos la siguiente afirmación:

Afirmación: *Existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que*

$$g_2(L) = \lambda^{-4} g_2(L') \quad y \quad g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L').$$

Separemos el análisis de esta afirmación en casos:

Si $g_2(L')$ y $g_3(L')$ son distintos de cero, entonces sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\lambda^{-4} g_2(L') = g_2(L).$$

Como $j(L) = j(L')$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{g_2(L')^3}{g_2(L')^3 - 27g_3(L')^2} &= \frac{g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2},\\ &= \frac{\lambda^{-12}g_2(L')^3}{\lambda^{-12}g_2(L')^3 - 27g_3(L)^2},\\ &= \frac{g_2(L')^3}{g_2(L')^3 - 27\lambda^{12}g_3(L)^2}.\end{aligned}$$

Factorizando, se tiene que

$$\lambda^{-12} = \left(\frac{g_3(L)}{g_3(L')}\right)^2.$$

Luego, reemplazando en caso de ser necesario λ por $i\lambda$, se tiene que $g_3(L) = \lambda^{-6}g_3(L')$, lo que demuestra la afirmación.

En el caso de que $g_2(L') = 0$. Notemos que $g_3(L') \neq 0$, por el teorema 0.2. Por otro lado, como $j(L) = j(L') = 0$ se tiene que $g_2(L) = 0$. Así, podemos elegir $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $g_3(L) = \lambda^{-6}g_3(L')$.

De manera análoga con $g_3(L') = 0$, (esta vez $j(L) = 1728$), se puede elegir λ de manera que $g_2(L) = \lambda^{-4}g_2(L')$.

Con esto se demuestra la afirmación.

Previo a continuar con la demostración del teorema principal, necesitamos una ultima herramienta:

Lema 0.1. *Sea $\wp(z)$ la función elíptica de Weierstrass para el retículo L, y sea*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\geq 1}(2n+1)G_{2n+2}(L)z^{2n},$$

su expansión de Laurent. Entonces para $n \geq 1$, el coeficiente $(2n+1)G_{2n+2}(L)$ de z^{2n} es un polinomio con coeficientes racionales, independientes de L, en términos de $g_2(L)$ y $g_3(L)$.

Demostración: Para facilitar la notación, denotemos para cada $n \geq 1$

$$a_n := (2n+1)G_{2n+2}(L).$$

Notemos que si $n = 1$, entonces

$$a_1 = 3G_4(L) = \frac{1}{20}g_2(L),$$

y si $n = 2$, se tiene que:

$$a_2 = 5G_6(L) = \frac{1}{28}g_3(L).$$

Para analizar los casos en que $n \geq 3$, observemos que diferenciando la ecuación diferencial de $\wp$ se tiene que:

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{1}{2}g_2(L).$$

Reemplazando la serie de Laurent en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\left(6\frac{1}{z^4} + \sum_{n\geq 1}2n(2n-1)a_nz^{2(n-1)}\right) &= 6\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{n\geq 1}a_nz^{2n}\right)^2 - \frac{1}{2}g_2(L),\\ &= 6\left(\frac{1}{z^4} + \sum_{n\geq 1}2a_nz^{2(n-1)} + \left(\sum_{n\geq 1}a_nz^{2n}\right)^2\right) - \frac{1}{2}g_2(L).\end{aligned}$$

Así, igualando los coeficientes de las series de Laurent para z^{2n-2}, se obtiene que para $n \geq 3$:

$$2n(2n-1)a_n = 6\left(2a_n + \sum_{i=1}^{n-2} a_i a_{n-1-i}\right), \tag{0.2}$$

pues los distintintos monomios de grado $2(n-1)$ que aparecen en $\left(\sum_{n\geq 1} a_n z^{2n}\right)^2$ son los $a_k a_j z^{2(k+j)}$ tal que $j, k \geq 1$.

Luego juntando terminos en la ecuación 0.2, esta puede reescribirse como

$$(2n+3)(n-2)a_n = 3\sum_{i=1}^{n-2} a_i a_{n-1-i}.$$

Con esto, notemos que dado que a_3 depende de a_1 y a_4 depende de a_1 y a_2 se tiene que estos se pueden escribir como polinomios con coeficientes racionales en términos de $g_2(L)$ y $g_3(L)$. Por inducción, asumamos que para $n \leq k$ se tiene que a_n depende a_1 y a_2, luego se tiene que

$$a_{n+1} = \frac{3}{(2n+5)(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-1-i},$$

depende de a_1 y a_2, lo que termina la demostración. □

Dado que $j(L) = j(L')$, se tiene por la afirmación anterior que existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$g_2(L) = \lambda^{-4} g_2(L') \quad y \quad g_3(L) = \lambda^{-6} g_3(L').$$

Notemos que $\lambda^{-4}g_2(L') = g_2(\lambda L')$ y $\lambda^{-6}g_3(L') = g_3(\lambda L')$, por ende $\wp(z, L)$ y $\wp(z, \lambda L')$ poseen la misma expansión de Laurent y por ende $\wp(z, L) = \wp(z, \lambda L')$. Como los polos de la función elíptica de Weierstrass corresponden a los elementos del retículo, se tiene que $L = \lambda L'$.

□

Por último, hay otra forma de pensar en la función $j-$-invariante que será útil en las secciones subsiguientes. Esta consiste en considerar j como una función definida sobre el semiplano superior, que le asocia a τ el valor $j([1, \tau])$.

References

[Kob12] Neal I Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, volume 97. Springer Science & Business Media, 2012. 0.1