Más sobre j

Charla 8

12 de mayo de 2020

1. Propiedades de j

Anteriormente definimos la $j-$invariante de un reticulado L, en términos de las constantes $g_2(L)$ y $g_3(L)$. Sea ahora $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) > 0\}$, sea L_τ el reticulado definido por 1 y τ, es decir, $L_\tau = \{n + m\tau \ / \ n, m \in \mathbb{Z}\}$ y sea la función $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, definida por $j(\tau) = j(L_\tau)$, también definimos $g_2, g_3 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ por $g_2(\tau) = g_2(L_\tau)$ y $g_3(\tau) = g_3(L_\tau)$. La función j tiene las siguientes propiedades

Teorema 1.1:
i) j es holomorfa en $\mathbb{H}$
ii) Sean $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, entonces $j(\tau) = j(\tau')$ si y solo si $\tau' = \gamma\tau$, para algún $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$
iii) $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es sobreyectiva
iv) Para $\tau \in \mathbb{H}$, se tiene $j'(\tau) \neq 0$, excepto en los siguientes casos
a) $\tau = \gamma i$, con $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, en este caso $j'(\tau) = 0$ pero $j''(\tau) \neq 0$
b) $\tau = \gamma\omega$, donde $\omega = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, en este caso $j'(\tau) = j''(\tau) = 0$

Demostración: (i) Recordemos que $\Delta(\tau)$ nunca se hace cero, por lo tanto basta con verificar que g_2 y g_3 son holomorfas. Como se vio anteriormente la serie que define a g_2 converge absolutamente, debemos probar que converge unifromemente en conjuntos compactos de $\mathbb{H}$. Notemos que $g_2(\tau) = g_2(\tau+1)$, de esta forma, es suficiente demostrar que la convergencia es uniforme cuando $|Re(\tau)| \leq 1/2$ y $Im(\tau) \geq \epsilon$, donde $\epsilon < 1$ es un número real positivo arbitrario. En este caso tenemos que

$$|m + n\tau| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$$

Si $\tau = a + bi$, debemos probar que

$$(m + an)^2 + n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}(m^2 + n^2)$$

En efecto, si $|m + an| \geq \frac{\epsilon}{2}|m|$, entonces

$$(m + an)^2 + n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}m^2 + n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}m^2 + \frac{\epsilon^2}{4}n^2$$

Lo último porque $b^2 = Im(\tau)^2 \geq \epsilon^2 \geq \epsilon^2/4$. Por otra parte si $|m + an| < \frac{\epsilon}{2}|m|$, entonces como $\epsilon < 1$ y $|a| \leq 1/2$, se concluye que $|m| < |n|$, luego

$$(m + an)^2 + n^2b^2 \geq n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{2}n^2 = \frac{\epsilon^2}{4}(2n^2) \geq \frac{\epsilon^2}{4}(m^2 + n^2)$$

Lo cual concluye con lo que se quería probar, de esta forma tenemos una cota uniforme para la serie que define a g_2, y por lo tanto g_2 es holomorafa, similarmente se tiene que g_3 es holomorfa, por lo tanto j es holomorfa.

(ii) En la charla CM7 se probó que, $j(\tau) = j(\tau')$ si y sólo si, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $L_\tau = \lambda L_{\tau'}$, y en CM4 se probó que esto era equivalente a que existiera $\gamma \in SL_2(F)$, tal que $\tau' = \gamma\tau$.

(iii) Primero hay que calcular los límites de $g_2(\tau)$ y $g_3(\tau)$, cuando $Im(\tau) \to \infty$, tenemos que

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = 60\left(2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} + \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ n\neq 0}} \frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)$$

Usando la convergencia uniforme demostrada en (i), vemos que

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} g_2(\tau) = 120\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} = \frac{4}{3}\pi^4$$

Lo último porque la suma es igual a $\pi^4/90$. Similarmente, usando que $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^6 = \pi^6/945$, obtenemos que

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} g_3(\tau) = \frac{8}{27}\pi^6$$

Estas últimas ecuaciones implican que

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = \left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^3 - 27\left(\frac{8}{27}\pi^6\right)^2 = 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} j(\tau) = \infty$$

También necesitamos el siguiente lema

Lema 1.1: *Todo $\tau \in \mathbb{H}$ es $SL_2(\mathbb{Z})$-equivalente a un punto τ' que satisface $|Re(\tau')| \leq 1/2$ y también $|Im(\tau')| \geq 1/2$.*

Demostración: Si $|Im(\tau)| \geq 1/2$, entonces existe un entero m, tal que $\tau' := \tau + m$, cumple con, $|Re(\tau')| \leq 1/2$ y $|Im(\tau')| \geq 1/2$.. como $\tau' = \tau + m = \gamma\tau$, con $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, entonces este caso esta cubierto.

Si $Im(\tau) < 1/2$, por lo hecho anterirormente podemos asumir que $|Re(\tau)| \leq 1/2$. Se sigue que $|\tau| < 1/\sqrt{2}$, de esta forma

$$Im\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{Im(\tau)}{|\tau|^2} > 2Im(\tau)$$

como $\frac{-1}{\tau} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\tau$, podemos aumentar la parte imaginaria de τ más que el doble, a través de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$. Repitiendo el proceso tanto como sea necesario encontramos el τ' pedido $\square$

Ahora procedemos a demostrar (iii), como j es holomorfa y no constante, entonces la imagen de $\mathbb{H}$, es un abierto de $\mathbb{C}$, queremos probar que es cerrado. Tomemos una secuencia de puntos $\{j(\tau_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge a un $w \in \mathbb{C}$. Debemos probar que $w = j(\tau)$, para algún $\tau \in \mathbb{H}$. Por el lema anterios, podemos asumir que cada τ_k está en la región $R = \{\tau \in \mathbb{H} \ / \ |Re(\tau)| \leq 1/2, \ Im(\tau) \geq 1/2\}$. Si las partes imaginarias de los τ_k no estuvieran acotadas, entonces por lo probado anteriormente, la secuencia $\{j(\tau_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tendría una subsecuencia que va a infinito. Esto es claramente imposible. Pero entonces los τ_k pertenecen a un subconjunto compacto de $\mathbb{H}$. Luego, hay una subsucesión que converge a un $\tau \in \mathbb{H}$, y por continuidad, se sigue que $j(\tau) = w$.

(iv) Primero necesitamos el siguiente lema

Lema 1.2: *Si $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, entonces existen vecindades U de τ y V de τ', tal que el conjunto $\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma(U) \cap V \neq \emptyset\}$, es finito.*

Demostración: Sea M y ϵ constantes positivas, definimos $K \subset \mathbb{H}$ como

$$K = \{\tau \in \mathbb{H} \ / \ |Re(\tau)| \leq M, \, \epsilon \leq |Im(\tau)| \leq 1/\epsilon\}$$

queremos probar que $\Delta(K) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito. Sea $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Delta(K)$, lo cual quiere decir que hay un $\tau \in K$, tal que $\gamma\tau \in K$, queremos acotar $|a|$, $|b|$, $|c|$ y $|d|$ en términos de M y ϵ con lo cuál quedaría probada la finitud. Notemos que

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{ca|\tau|^2 + bd + Re(\tau)(ad + bc) + (ad - bc)Im(\tau)i}{|c\tau + d|^2}$$

Luego $Im(\gamma\tau) = Im(\tau)/|c\tau + d|^2$, como $\gamma\tau \in K$, entonces $\epsilon \leq Im(\tau)/|c\tau + d|^2$, luego $|c\tau + d|^2 \leq Im(\tau)/\epsilon \leq 1/\epsilon^2$. Ahora, como

$$|c\tau + d|^2 = (cRe(\tau) + d)^2 + c^2 Im(\tau)^2$$

Concluimos que $|c| \leq 1/\epsilon^2$ y $|d| \leq (\epsilon + M)/\epsilon^2$. Ahora, para acotar a, afirmamos que $\gamma^{-1} \in \Delta(K)$, en efecto, tenemos que $\gamma^{-1}(\gamma\tau) = \tau \in K$, como $\gamma\tau \in K$, concluimos que $\gamma^{-1} \in \Delta(K)$, luego, como $\gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, por lo hecho anteriromente se concluye que $|a| \leq (\epsilon + M)/\epsilon^2$. Ahora bien, como la cantidad de opciones para a, c y d son finitas, y $ad - bc = 1$, se concluye que también hay finitos b, luego $\Delta(K)$, es finito. Ahora bien, si U es una vecindad de $\tau \in \mathbb{H}$, tal que $\bar{U} \subset \mathbb{H}$ es compacto, entonces usando lo anterior en $\bar{U}$, se concluye que $\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Tomamos entonces vecindades U y V de τ y τ', tal que la clausura de U sea compacta, esté contenida en $\mathbb{H}$ y $V \subset U$, entonces por lo mostrado anteriormente el lema queda demostrado □

Corolario 1.3 : *Sea $\tau \in \mathbb{H}$, entonces existe U vecindad de τ, tal que para todo $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$*

$$\gamma(U) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma\tau = \tau$$

Demostración: Ejercicio □

Por último, necesitamos la siguiente proposición

Proposición 1.4: *Sea L un reticulado y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, lo siguiente es equivalente*

(i) $\alpha L \subset L$
(ii) Existe un orden $\mathcal{O}$, en un cuerpo cuadrático imaginario K, tal que $\alpha \in \mathcal{O}$ y L es homotético a un $\mathcal{O}-$ideal fraccional propio.

Demostración: $\Rightarrow$) Recordemos que un ideal fraccional propio I culmpe que $\{\beta \in K \ / \ \beta I \subset I\} = \mathcal{O}$, por lo tanto (ii) es inmediato.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\alpha L \subset L$. Podemos suponer $L = \langle 1, \tau \rangle$ con $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pues si $L = \langle z, w \rangle$, entonces escribimos $\lambda = 1/z$ y reemplazamos L por λL. Como $\alpha L \subset L$, entonces $\alpha = a + b\tau$ y $\alpha\tau = c + d\tau$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, dividiendo ambas expresiones, obtenemos

$$\tau = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

lo cual implica que

$$b\tau^2 + (a - d)\tau - c = 0$$

como α no es entero, entonces $b \neq 0$ y entonces $K = \mathbb{Q}(t)$ es un cuerpo cuadrático imaginario. Se sigue que

$$\mathcal{O} = \{\beta \in K \ / \ \beta L \subset L\}$$

Es un orden de K, para el cual L es un ideal fraccional propio, como $\alpha \in \mathcal{O}$, se tiene (iii) $\square$

Ahora, supongamos que $j'(\tau) = 0$. Entonces τ tiene una vecindad U, tal que para todo w suficientemente cerca a $j(\tau)$, existen $\tau' \neq \tau'' \in U$ tal que $j(\tau) = j(\tau') = w$. Por la parte (ii), $\tau'' = \gamma\tau'$, para algún $\gamma \neq \pm Id$. Así $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$, haciendo U tan pequeño como sea necesario y utilizando el corolario, obtenemos que $\gamma(\tau) = \tau$, lo cual implica que $\langle 1, \tau \rangle = (c\tau + d)\langle 1, \tau \rangle$. Afirmamos que $c \neq 0$, en efecto, si $c = 0$, entonces $\gamma = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ con $m \neq 0$, pero esta matriz no tiene puntos fijos, luego $\alpha = c\tau + d$ no es entero, entonces, por la proposición, existe α en un orden $\mathcal{O}$ de un cuerpo cuadrático imaginario K tal que $\alpha \in \mathcal{O}$ y tal que $\langle 1, \tau \rangle$ es homtético a un $\mathcal{O}$-ideal fraccional propio. Sin embargo. $\mathcal{O}^* = \{-1, 1\}$ a menos que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, para $K = \mathbb{Q}(i)$ o $\mathbb{Q}(w)$, donde $w = e^{i\pi/3}$. Como los dos tienen número de clase 1, se tiene que $\langle 1, \tau \rangle$, es homotético a $\langle 1, i \rangle$ o $\langle 1, w \rangle$. Luego $j'(\tau) = 0$ implica que τ es equivalente a i o a w. Ahora bien

$$j(\tau) = 1728 \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$$

Luego

$$j(\tau) - 1728 = 1728 \frac{27 g_3(\tau)^2}{\Delta(\tau)}$$

Además tenemos que $g_3(i) = 0$, en efecto, tenemos que $\langle 1, i \rangle = i\langle 1, i \rangle$, de esta forma

$$g_3(i) = i^6 g_3(i) = -g_3(i)$$

Luego de esto y de lo anterior se concluye que $j'(i) = 0$. Si $j''(i) = 0$, entonces, i es por lo menos un cero triple de $j(\tau) - 1728$, entonces para w suficientemente cerca de 1728, existen τ, τ' y τ'', cerca de i tal que $j(\tau) = j(\tau') = j(\tau'') = w$. Entonces $\tau' = \gamma_1(\tau)$, $\tau'' = \gamma_2\tau$, donde γ_1 y γ_2 son distintos y as su vez distintos de la identidad. Por el colorario anterior $\gamma_1(i) = \gamma_2(i) = i$. De esta forma hay por lo menos 6 elementos de $SL_2(\mathbb{Z})$ que fijan a i, pero sólo existen 4, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $j''(i) \neq 0$. Para g_3 se prueba de forma similar. El teorema queda Demostrado $\square$

Corolario 1.5: *Sean $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tal que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Entonces existe un reticulado L, tal que $g_2(L) = g_2$ y $g_3(L) = g_3$.*

Demostración: Como j, es sobreyectiva y $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, existe $\tau \in \mathbb{H}$, tal que

$$j(\tau) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

Usando el mismo argumento utilizado en la demostración de el teorema de la sección anterior, podemos encontrar λ tal que

$$g_2 = \lambda^{-4} g_2(\tau)$$

$$g_3 = \lambda^{-6} g_3(\tau)$$

Esto implica que $g_2 = g_2(\lambda\langle 1, \tau \rangle)$ y $g_3 = g_3(\lambda\langle 1, \tau \rangle)$, por lo tanto el reticulado que se buscaba es $L = \lambda\langle 1, \tau \rangle$ (para ver los detalles ver Apostol 2.9) $\square$

2. q-expansión de j

Ahora vamos a ver la $q-$expansión de j, sea el mapeo $\phi : \mathbb{H} \to D(0,1) \setminus \{0\}$, dado por $\phi(\tau) = e^{2\pi i \tau}$. Si τ y τ' se mapean a x, entonces difieren por un entero. Si $x \in D$, definimos $f : D \to \mathbb{C}$, dada por $f(x) = j(\tau)$, donde τ es uno de los puntos de $\mathbb{H}$ que va a x, está bien definida porque si $m \in \mathbb{Z}$ entonces $j(\tau) = j(\tau + m)$. Además

$$f'(x) = \frac{d}{dx}j(x) = \frac{d}{d\tau}j(\tau)\frac{d\tau}{dx} = \frac{j'(\tau)}{2\pi i e^{2\pi i\tau}}$$

Luego f es análitica en $D(0,1)$ y por lo tanto tiene una serie de Laurent al rededor de 0

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)x^n$$

Reemplazando f por $j(\tau)$, vemos que j tiene una serie de Fourier absolutamente convergente, a esto le llamaremos $q-$ expansión de j, primero veamos las de g_2 y g_3, necesitamos el siguiente lema

Lema 2.1: *Si $\tau \in \mathbb{H}$ y $n > 0$, tenemos las expansiones de Fourier*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = \frac{8\pi^4}{3}\sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i r n\tau}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} = -\frac{8\pi^6}{15}\sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2\pi i r n\tau}$$

Demostración: Recordemos la formula del producto de Euler

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Tomando logaritmos a ambos lados y derivando, obtenemos la descomposición de la cotangente

$$\pi cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\tau} - \frac{1}{m}\right)$$

Sea $x = e^{2\pi i\tau}$. Si $\tau \in \mathbb{H}$, entonces $|x| < 1$, luego

$$\pi cot(\pi\tau) = \pi\frac{\cos(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau)} = \pi i\frac{e^{2i\pi\tau}+1}{e^{2i\pi\tau}-1} = \pi i\frac{x+1}{x-1} = -\pi i\left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right) = -\pi i\left(\sum_{r=1}^{\infty} x^r + \sum_{r=0}^{\infty} x^r\right)$$

Luego

$$\pi cot(\pi\tau) = -\pi i\left(1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} e^{2\pi i r\tau}\right) = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\tau} - \frac{1}{m}\right)$$

Derivando la última ecuación repetidamente, obtenemos

$$-\frac{1}{\tau^2} - \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(m+\tau)^2} = -(2\pi i)^2\sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau}$$

$$-3!\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+\tau)^4} = -(2\pi i)^4\sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i r\tau}$$

$$-5!\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+\tau)^6} = -(2\pi i)^6\sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2\pi i r\tau}$$

Reemplazando τ por $n\tau$ obtenemos el lema $\square$

Con el lema podemos demostrar el siguiente teorema

Teorema 2.2: *Si $\tau \in \mathbb{H}$, tenemos las siguientes expansiones*

$$g_2(\tau) = \frac{4\pi^4}{3}\left(1 + 240\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_3(k)e^{2\pi i k\tau}\right)$$

$$g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{27}\left(1 - 504\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_5(k)e^{2\pi i k\tau}\right)$$

Donde $\sigma_\alpha(k) = \sum_{d|k} d^\alpha$

Demostración: Tenemos que

$$\begin{aligned}
g_2(\tau) &= 60\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\\
&= 60\left(2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} + \sum_{\substack{m,n=-\infty\\ n\neq 0}}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)\\
&= 60\left(\frac{2\pi^4}{90} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4} + \frac{1}{(m-n\tau)^4}\right)\\
&= 60\left(\frac{2\pi^4}{90} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)\\
&= 60\left(\frac{2\pi^4}{90} + 16\frac{\pi^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}r^3x^{nr}\right)
\end{aligned}$$

Hciendo el cambio $nr = k$ y coleccionando los términos que tienen igual potencia, obtenemos la expresión deseada, la demostración para g_3 es análoga $\square$

Teorema 2.3: *Si $\tau \in \mathbb{H}$, tenemos la expansión de Fourier*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi i n\tau}$$

Donde los coeficientes $\tau(n)$ son enteros, con $\tau(1) = 1$ y $\tau(2) = -24$

Demostración: Escribimos

$$x = e^{2\pi i\tau},\ A = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)x^n,\ B = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)x^n$$

Entonces

$$\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = \frac{64\pi^12}{27}\left((1+240A)^3 - (1-504B)^2\right)$$

Ahora, A y B tienen coeficientes enteros y

$$(1+240A)^3-(1-504B)^2=12^2(5A+7B)+12^3(100A^2-147B^2+8000A^3)$$

Pero

$$5A+7B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(5\sigma_3(n)+7\sigma_5(n)\right)x^n$$

Por otra parte

$$5d^3+7d^5=d^3(5+7d^2)\equiv d^3(d^2-1)\equiv 0 \pmod 3$$
$$5d^3+7d^5=d^3(5+7d^2)\equiv d^3(1-d^2)\equiv 0 \pmod 4$$

Luego

$$5d^3+7d^5\equiv 0 \pmod{12}$$

De esta forma 12^3 es un factor de $(1+240A)^3-(1-504B)^2$ y entonces

$$\Delta(\tau)=\frac{64\pi^12}{27}\left(12^3\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi n\tau}\right)=(2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi n\tau}$$

El coeficiente de x es $(5+7)12^2/12^3=1$, similarmente se encuentra $\tau(2)=-24$ □

Finalmente

Teorema 2.4: *Si $\tau\in\mathbb{H}$, tenemos la expansión de Fourier*

$$j(\tau)=e^{-2\pi i\tau}+744+196884+\sum_{n=1}^{\infty}c(n)e^{2\pi in\tau}$$

Donde los coeficientes c(n) son enteros

Demostración: Escribimos $x=e^{2\pi i\tau}$, entonces

$$g_2(\tau)^3=\frac{64}{27}\pi^{12}(1+240x+I_1)^3=\frac{64}{27}\pi^{12}(1+720x+I_2)$$
$$\Delta(\tau)=\frac{64}{27}\pi^{12}12^3x(1-24x+J_1)^3$$

Luego

$$\frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}=\frac{1+720x+I_2}{12x^3(1-24x+J_2)}=\frac{1}{12^3x}(1+720x+I_2)(1+24x+J_2)=\frac{1}{12^3}\left(\frac{1}{x}+744+K\right)$$

Luego

$$j(\tau)=\frac{1}{x}+744+\sum_{n=1}^{\infty}c(n)x^n$$

□