Más sobre j

Marcos Morales

1. Propiedades de j

Anteriormente definimos la $j-$invariante de un reticulado L, en términos de las constantes $g_2(L)$ y $g_3(L)$. Sea ahora $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) > 0\}$, sea L_τ el reticulado definido por 1 y τ, es decir, $L_\tau = \{n + m\tau \ / \ n, m \in \mathbb{Z}\}$ y sea la función $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, definida por $j(\tau) = j(L_\tau)$, también definimos $g_2, g_3 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ por $g_2(\tau) = g_2(L_\tau)$ y $g_3(\tau) = g_3(L_\tau)$. La función j tiene las siguientes propiedades

Teorema 1.0:
i) j es holomorfa en $\mathbb{H}$.
ii) Sean $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, *entonces* $j(\tau) = j(\tau')$ *si y solo si* $\tau' = \gamma\tau$, *para algún* $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.
iii) $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *es sobreyectiva.*
iv) Para $\tau \in \mathbb{H}$, *se tiene* $j'(\tau) \neq 0$, *excepto en los siguientes casos,*
a) $\tau = \gamma i$, *con* $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, *en este caso* $j'(\tau) = 0$ *pero* $j''(\tau) \neq 0$.
b) $\tau = \gamma\omega$, *donde* $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, *en este caso* $j'(\tau) = j''(\tau) = 0$ pero $j'''(\tau) \neq 0$.

Demostración: (i) Recordemos que $\Delta(\tau)$ nunca se hace cero, por lo tanto basta con verificar que g_2 y g_3 son holomorfas. Como se vio en la charla CM 6, lema 2.2, la serie que define a g_2 converge absolutamente, debemos probar que converge unifromemente en conjuntos compactos de $\mathbb{H}$. Notemos que $g_2(\tau) = g_2(\tau+1)$, de esta forma, es suficiente demostrar que la convergencia es uniforme cuando $|Re(\tau)| \leq 1/2$ y $Im(\tau) \geq \epsilon$, donde $\epsilon < 1$ es un número real positivo arbitrario. En este caso, afirmamos que

$$|m + n\tau| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\sqrt{m^2 + n^2}.$$

En otras palabras, si $\tau = a + bi$, debemos probar que

$$(m + an)^2 + n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}(m^2 + n^2).$$

En efecto, si $|m + an| \geq \frac{\epsilon}{2}|m|$, entonces

$$(m + an)^2 + n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}m^2 + n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}m^2 + \frac{\epsilon^2}{4}n^2,$$

Lo último porque $b^2 = Im(\tau)^2 \geq \epsilon^2 \geq \epsilon^2/4$. Por otra parte si $|m + an| < \frac{\epsilon}{2}|m|$, entonces como $\epsilon < 1$ y $|a| \leq 1/2$, se concluye que $|m| < |n|$, luego

$$(m + an)^2 + n^2b^2 \geq n^2b^2 \geq \frac{\epsilon^2}{2}n^2 = \frac{\epsilon^2}{4}(2n^2) \geq \frac{\epsilon^2}{4}(m^2 + n^2).$$

Lo cual concluye lo que se quería probar, de esta forma tenemos una cota uniforme para la serie que define a g_2, y por lo tanto, usando el mismo argumento que se usó en la charla CM6 Lema 2.2, se concluye que g_2 es holomorafa. Similarmente, se tiene que g_3 es holomorfa, por lo tanto j es holomorfa.

(ii) En la charla CM7, teorema 0.1, se probó que, $j(\tau) = j(\tau')$ si y sólo si, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $L_\tau = \lambda L_{\tau'}$, y en CM4, Equivalencias 0.3, se probó que esto era equivalente a que existiera $\gamma \in SL_2(F)$, tal que $\tau' = \gamma\tau$.

(iii) Primero hay que calcular los límites de $g_2(\tau)$ y $g_3(\tau)$, cuando $Im(\tau) \to \infty$, tenemos que

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = 60 \left(2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ n\neq 0}} \frac{1}{(m+n\tau)^4} \right).$$

Usando la convergencia uniforme demostrada en (i), vemos que

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} g_2(\tau) = 120 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{4}{3}\pi^4.$$

Lo último porque la suma es igual a $\pi^4/90$. Similarmente, usando que $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^6 = \pi^6/945$, obtenemos que

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} g_3(\tau) = \frac{8}{27}\pi^6.$$

Estas últimas ecuaciones implican que

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = \left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^3 - 27\left(\frac{8}{27}\pi^6\right)^2 = 0.$$

y por lo tanto

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} j(\tau) = \infty.$$

También necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 1.1: *Todo $\tau \in \mathbb{H}$ es $SL_2(\mathbb{Z})$-equivalente a un punto τ' que satisface $|Re(\tau')| \leq 1/2$ y también $|Im(\tau')| \geq 1/2$.*

Demostración: Si $|Im(\tau)| \geq 1/2$, entonces existe un entero m, tal que $\tau' := \tau + m$, cumple con, $|Re(\tau')| \leq 1/2$ y $|Im(\tau')| \geq 1/2$.. como $\tau' = \tau + m = \gamma\tau$, con $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, entonces este caso esta cubierto.

Si $Im(\tau) < 1/2$, por lo hecho anterirormente podemos asumir que $|Re(\tau)| \leq 1/2$. Se sigue que $|\tau| < 1/\sqrt{2}$, de esta forma

$$Im\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{Im(\tau)}{|\tau|^2} > 2Im(\tau).$$

como $\frac{-1}{\tau} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\tau$, podemos aumentar la parte imaginaria de τ más que el doble, a través de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$. Repitiendo el proceso tanto como sea necesario encontramos el τ' pedido. $\square$

Ahora procedemos a demostrar (iii), como j es holomorfa y no constante, entonces la imagen de $\mathbb{H}$, es un abierto de $\mathbb{C}$, queremos probar que es cerrado. Tomemos una secuencia de puntos $\{j(\tau_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge a un $z \in \mathbb{C}$. Debemos probar que $z = j(\tau)$, para algún $\tau \in \mathbb{H}$. Por el lema 1.1, podemos asumir que cada τ_k está en la región $R = \{\tau \in \mathbb{H} \ / \ |Re(\tau)| \leq 1/2,\ Im(\tau) \geq 1/2\}$. Si las partes imaginarias de los τ_k no estuvieran acotadas, entonces por lo probado anteriormente, la secuencia $\{j(\tau_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tendría una subsecuencia que va a infinito. Esto es claramente imposible. Pero entonces los τ_k pertenecen a un subconjunto compacto de $\mathbb{H}$. Luego, hay una subsucesión que converge a un $\tau \in \mathbb{H}$, y por continuidad, se sigue que $j(\tau) = z$.

(iv) Primero necesitamos los siguientes lemas.

Lema 1.2: *Si $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, entonces existen vecindades U de τ y V de τ', tal que el conjunto $\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma(U) \cap V \neq \emptyset\}$, es finito.*

Demostración: Sea M y ϵ constantes positivas, definimos $K \subset \mathbb{H}$ como

$$K = \{\tau \in \mathbb{H} \ / \ |Re(\tau)| \leq M, \, \epsilon \leq |Im(\tau)| \leq 1/\epsilon\}.$$

Queremos probar que $\Delta(K) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito. Sea $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Delta(K)$, lo cual quiere decir que hay un $\tau \in K$, tal que $\gamma\tau \in K$, queremos acotar $|a|$, $|b|$, $|c|$ y $|d|$ en términos de M y ϵ con lo cual quedaría probada la finitud. Notemos que

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{ca|\tau|^2 + bd + Re(\tau)(ad + bc) + (ad - bc)Im(\tau)i}{|c\tau + d|^2}.$$

Luego $Im(\gamma\tau) = Im(\tau)/|c\tau + d|^2$, como $\gamma\tau \in K$, entonces $\epsilon \leq Im(\tau)/|c\tau + d|^2$, luego $|c\tau + d|^2 \leq Im(\tau)/\epsilon \leq 1/\epsilon^2$. Ahora, como

$$|c\tau + d|^2 = (cRe(\tau) + d)^2 + c^2 Im(\tau)^2.$$

Concluimos que $|c| \leq 1/\epsilon^2$ y $|d| \leq (\epsilon + M)/\epsilon^2$. Ahora, para acotar a, afirmamos que $\gamma^{-1} \in \Delta(K)$, en efecto, tenemos que $\gamma^{-1}(\gamma\tau) = \tau \in K$, como $\gamma\tau \in K$, concluimos que $\gamma^{-1} \in \Delta(K)$, luego, como $\gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, por lo hecho anteriromente se concluye que $|a| \leq (\epsilon + M)/\epsilon^2$. Ahora bien, como la cantidad de opciones para a, c y d son finitas, y $ad - bc = 1$, se concluye que también hay finitos b, de esta forma $\Delta(K)$, es finito. Ahora bien, si U es una vecindad de $\tau \in \mathbb{H}$, tal que $\overline{U} \subset \mathbb{H}$ es compacto, entonces usando lo anterior en $\overline{U}$, se concluye que $\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Tomamos entonces vecindades U y V de τ y τ', tal que la clausura de U sea compacta, esté contenida en $\mathbb{H}$ y $V \subset U$, estas vecindades tienen las propiedades que pide el lema, de esta forma, el lema queda demostrado. $\square$

Corolario 1.3 : *Sea $\tau \in \mathbb{H}$, entonces existe U, vecindad de τ, tal que para todo $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$*

$$\gamma(U) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma\tau = \tau.$$

Demostración: Por lo visto en la demostración del lema 1.2, existe una vecindad U de τ, tal que $A(U) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito, obviamente $B = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ \gamma\tau = \tau\} \subset A(U)$, independiente de la vecindad U escogida, supongamos que existe un $\delta \in A(U) \backslash B$, entonces $\delta\tau = \tau' \neq \tau$, escogemos una vecindad W de τ, tal que $W \cap \delta(U) = \emptyset$, de esta forma hemos encontrado una vecindad más pequeña tal que δ no está en $A(W)$, continuando con el resto de elementos, después de un número finito de pasos llegaremos a la vecindad buscada. $\square$

Lema 1.4: *Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$,con $D > 0$ entero libre de cuadrados, cuerpo cuadrático imaginario, y $\mathcal{O}$ un orden de K con $\mathcal{O}^* \neq \{1, -1\}$, entonces $K = \mathbb{Q}(i)$ o bien $\mathbb{Q}(\omega)$* y *$\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$.*

Demostración: En efecto, sea $N : K \to \mathbb{Z}$, definida de la siguiente forma, si $\alpha = p + q\sqrt{-D}$, entonces $N(\alpha) = p^2 + q^2 D$. A la función N se le llama la norma de K, y no es difícil probar que es multiplicativa. Afirmamos que $\alpha \in \mathcal{O}_K$ es unidad si y sólo si $N(\alpha) = 1$, en efecto, notemos que $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$, luego si $N(\alpha) = 1$, entonces α es unidad con inverso $\bar{\alpha}$. Por otra parte, si α es unidad con inverso γ, y $N(\alpha) \neq 1$, entonces como la norma es multiplicativa, se tendría

$$1 = N(1) = N(\alpha\gamma) = N(\alpha)N(\gamma).$$

Lo cual es imposible porque la norma restringida a $\mathcal{O}_K$ va a los números enteros positivos (ver Demostración del teorema 0.1 de la charla CM3), por lo tanto $N(\alpha) = 1$. Ahora bien, veamos cuales son las posibilidades para $\mathcal{O}_K^*$, si $-D \equiv 2, 3 \pmod 4$, entonces $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}(\sqrt{-D})$, de esta forma $\alpha = a + b\sqrt{D}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, etonces, se tendría que $N(\alpha) = a^2 + b^2 D = 1$. Si $D > 1$, de esta forma, las únicas opciones son $b = 0$ y $a = \pm 1$. Por otra parte, si $D = 1$, en cuyo caso estamos hablando de $K = \mathbb{Q}(i)$, entonces $b = \pm 1$ también son opciones y todas funcionan y sólo para este caso se cumple que $\mathcal{O}_K^* \neq \{1, -1\}$, de hecho, $\mathcal{O}_K^* = \{1, -1, i, -i\}$. Por otra parte, si $-D \equiv 1 \pmod 4$, se tendría que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{-D}}{2}\right)$, luego, $\alpha = a + b\frac{1+\sqrt{-D}}{2}$, entonces, $N(\alpha) = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2 D}{4} = 1$, iremos por casos, si $b = 0$, las unidades son ± 1. Si $a = 0$, entonces tenemos $b^2(1 + D) = 4$, de esta forma, si $D > 3$, la igualdad es imposble, $D = 2$ tampoco es posible, la única opción es $D = 3$

y $b = \pm 1$, en este caso estamos hablando de $\mathbb{Q}(\omega)$. Por último, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, notemos que $|a + \frac{b}{2}| < 1$, esto permite sólo las siguientes posibilidades, $a = 1$ y $b = -1$ o bien $a = -1 y b = 1$, de esta forma tenemos que $\frac{D+1}{4} = 1$ y concluimos nuevamente que $K = \mathbb{Q}(\omega)$, y sólo para este caso se cumple que $\mathcal{O}_K^* \neq \{1, -1\}$, de hecho, $\mathcal{O}_K^* = \{1, -1, \omega, -\omega, \omega^2, -\omega^2\}$. Con lo hecho anteirormente, concluimos que si $\mathcal{O}_K^* \neq \{1, -1\}$, entonces $K = \mathbb{Q}(i)$ o bien $K = \mathbb{Q}(\omega)$, ahora supongamos que $\mathcal{O}$ es un orden tal que $\mathcal{O}^* \neq \{1, -1\}$, por Proposición 0.2 de la charla CM3, se sabe que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_K$, como las únicas unidades de $\mathcal{O}_K$ son ± 1 a menos que $K = \mathbb{Q}(i)$ o $K = \mathbb{Q}(\omega)$, se tiene que las únicas unidades de un orden $\mathcal{O}$ en K son ± 1 a menos que estemos en los casos ya descritos, además, si $K = \mathbb{Q}(i)$, entonces las unidades distintas de ± 1, son i y $-i$, si una de estas dos está en $\mathcal{O}$, entonces $\mathcal{O} = \mathbb{Z}(i) = \mathcal{O}_K$, lo mismo ocurre si $K = \mathbb{Q}(\omega)$, concluimos que en ambos casos $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, lo cual termina la demostración del lema. $\square$

Por último, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 1.5: *Sea L un reticulado y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, lo siguiente es equivalente*

(i) $\alpha L \subset L$
(ii) Existe un orden $\mathcal{O}$, en un cuerpo cuadrático imaginario K, tal que $\alpha \in \mathcal{O}$ y L es homotético a un $\mathcal{O}-$ideal fraccional propio.

Demostración: $\Rightarrow$) Recordemos que un ideal fraccional propio I culmpe que $\{\beta \in K \ / \ \beta I \subset I\} = \mathcal{O}$, por lo tanto (ii) es inmediato.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\alpha L \subset L$. Podemos suponer $L = \langle 1, \tau \rangle$ con $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pues si $L = \langle z, w \rangle$, entonces escribimos $\lambda = 1/z$ y reemplazamos L por λL. Como $\alpha L \subset L$, entonces $\alpha = a + b\tau$ y $\alpha\tau = c + d\tau$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, dividiendo ambas expresiones, obtenemos

$$\tau = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}.$$

Lo cual implica que

$$b\tau^2 + (a - d)\tau - c = 0.$$

Como α no es entero, entonces $b \neq 0$, de esta manera $K = \mathbb{Q}(t)$ es un cuerpo cuadrático imaginario. Se sigue que

$$\mathcal{O} = \{\beta \in K \ / \ \beta L \subset L\}.$$

Es un orden de K, para el cual L es un ideal fraccional propio, como $\alpha \in \mathcal{O}$, se concluye (i). $\square$

Ahora, supongamos que $j'(\tau) = 0$. Entonces τ tiene una vecindad U, tal que para todo z suficientemente cerca a $j(\tau)$, existen $\tau' \neq \tau'' \in U$ tal que $j(\tau) = j(\tau') = z$. Por la parte (ii), $\tau'' = \gamma\tau'$, para algún $\gamma \neq \pm Id$. Así $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$, haciendo U tan pequeño como sea necesario y utilizando el corolario 1.3, obtenemos que $\gamma\tau = \tau$, lo cual implica que $\langle 1, \tau \rangle = (c\tau + d)\langle 1, \tau \rangle$. Afirmamos que $c \neq 0$, en efecto, si $c = 0$, entonces $\gamma = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ con $m \neq 0$, pero esta matriz no tiene puntos fijos, luego $\alpha = c\tau + d$ no es entero, entonces, por la proposición 1.5, existe α en un orden $\mathcal{O}$, de un cuerpo cuadrático imaginario K, tal que $\alpha \in \mathcal{O}$ y tal que $\langle 1, \tau \rangle$ es homotético a un $\mathcal{O}$-ideal fraccional propio, es mas, la condición de que $\langle 1, \tau \rangle = \alpha\langle 1, \tau \rangle$, implica que $\alpha \in \mathcal{O}^*$, pues de lo contrario tendríamos una dilatación. Sin embargo, por el lema 1.4, $\mathcal{O}^* = \{-1, 1\}$ a menos que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, para $K = \mathbb{Q}(i)$ o $\mathbb{Q}(w)$, donde $w = e^{2i\pi/3}$. Como ambos cuerpos tienen número de clase 1 (ver ejemplo 3.7 de la charla CM3), se concluye que $\langle 1, \tau \rangle$, es homotético a $\langle 1, i \rangle$ o $\langle 1, w \rangle$. Luego $j'(\tau) = 0$ implica que τ es equivalente a i o a w. Ahora bien,

$$j(\tau) = 1728 \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}.$$

Luego,

$$j(\tau) - 1728 = 1728 \frac{27 g_3(\tau)^2}{\Delta(\tau)}.$$

Además tenemos que $g_3(i) = 0$, en efecto, tenemos que $\langle 1, i\rangle = i\langle 1, i\rangle$, de esta forma,

$$g_3(i) = i^6 g_3(i) = -g_3(i).$$

Con estas últimas ecuaciones, se concluye que $j'(i) = 0$. Si $j''(i) = 0$, entonces, i es por lo menos un cero triple de $j(\tau) - 1728$, entonces para z suficientemente cerca de 1728, existen τ, τ' y τ'', cerca de i tal que $j(\tau) = j(\tau') = j(\tau'') = z$. Entonces $\tau' = \gamma_1 \tau$, $\tau'' = \gamma_2 \tau$, donde $\pm\gamma_1$ y $\pm\gamma_2$ son todos distintos y a su vez distintos a $\pm$ la identidad. Por el colorario anterior, se tiene $\gamma_1 i = \gamma_2 i = i$. De esta forma hay por lo menos 6 elementos de $SL_2(\mathbb{Z})$ que fijan a i, pero es facil verificar que sólo existen 4, lo cual es una contradicción, por lo tanto $j''(i) \neq 0$. Sólo falta ver el caso de ω, notemos que como $\omega^3 = 1$ y $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{60} g_2(\omega) &= \sum_{m,n} \frac{1}{(m + n\omega)^4} = \sum_{m,n} \frac{1}{(m\omega^3 + n\omega)^4} == \frac{1}{\omega^4} \sum_{m,n} \frac{1}{(m\omega^2 + n)^4} \\
&= \frac{1}{\omega} \sum_{m,n} \frac{1}{(n - m - m\omega)^4} = \frac{1}{\omega} \sum_{M,N} \frac{1}{(N + M\omega)^4} = \frac{1}{60\omega} g_2(\omega)
\end{aligned}$$

De esto se concluye que $g_2(\omega) = 0$, deribando directamente j y evaluando, se obtiene que,

$$\begin{aligned}
j'(\tau) &= \frac{g_2(\tau)^2 (\Delta(\tau) g_2(\tau) - 3\Delta'(\tau))}{\Delta(\tau)^2} \\
j''(\tau) &= \frac{g_2(\tau) H(\tau)}{\Delta(\tau)^4}
\end{aligned}$$

Donde $H(\tau)$, es el otro factor que aparece al derivar $j'(\tau)$, se concluye que $j'(\omega) = j''(\omega) = 0$, si se tuviera que $j'''(\omega) = 0$, entonces usando el mismo razonamiento anteriormente usado para i, encontraríamos γ_1, γ_2 y $\gamma_3 \in SL_2(\mathbb{Z})$, tales que $\gamma_k(\omega) = \omega$, además, $\pm\gamma_1, \pm\gamma_2, \pm\gamma_3, \pm Id$, son todos distintos entre sí, de esta forma, existirían al menos 8 elementos en $SL_2(\mathbb{Z})$ que fijan a ω, pero sólo exiten 6, lo cual es una contradicción, conculimos que $j'''(\omega) \neq 0$, lo cual completa la demostración del teorema.

$\square$

Corolario 1.6: *Sean $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tal que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Entonces existe un reticulado L, tal que $g_2(L) = g_2$ y $g_3(L) = g_3$.*

Demostración: Como j, es sobreyectiva y $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, existe $\tau \in \mathbb{H}$, tal que

$$j(\tau) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

Usando el mismo argumento utilizado en la demostración de el teorema 0.3 de la charla CM 7 (Afirmación en la demostración del teorema 0.3), podemos encontrar λ, tal que

$$g_2 = \lambda^{-4} g_2(\tau),$$

$$g_3 = \lambda^{-6} g_3(\tau).$$

Esto implica que $g_2 = g_2(\lambda\langle 1, \tau\rangle)$ y $g_3 = g_3(\lambda\langle 1, \tau\rangle)$, por lo tanto el reticulado que se buscaba es $L = \lambda\langle 1, \tau\rangle$. $\square$

2. q-expansión de j

Ahora vamos a ver la $q-$expansión de j, sea el mapeo $\phi : \mathbb{H} \to D(0,1) \setminus \{0\}$, dado por $\phi(\tau) = e^{2\pi i\tau}$. Si τ y τ' se mapean al mismo punto x, entonces difieren por un entero, es decir, $\tau = \tau' + m$ con $m \in \mathbb{Z}$. De esta forma, si $x \in D$, definimos $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$, dada por $f(x) = j(\tau)$, donde τ es uno de los puntos de $\mathbb{H}$ que va a x, f está bien definida porque si $m \in \mathbb{Z}$ entonces $j(\tau) = j(\tau + m)$. Por otra parte, tenemos que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}j(\tau) = \frac{d}{d\tau}j(\tau)\frac{d\tau}{dx} = \frac{j'(\tau)}{2\pi i e^{2\pi i\tau}}$$

Luego f es análitica en $D(0,1)$ y por lo tanto tiene una serie de Laurent alrededor de 0,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)q^n$$

Donde $q = e^{2\pi i\tau}$. Reemplazando f por $j(\tau)$, vemos que j tiene una serie de Fourier absolutamente convergente, a esto le llamaremos q-expansión de j. Primero veremos las expansiones de g_2 y g_3, para ello, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.0: *Si $\tau \in \mathbb{H}$ y $n > 0$, tenemos las expansiones de Fourier*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = \frac{8\pi^4}{3}\sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i r n\tau},$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} = -\frac{8\pi^6}{15}\sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2\pi i r n\tau}.$$

Demostración: Recordemos la fórmula del producto de Euler

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Tomando logaritmos a ambos lados y derivando, obtenemos la descomposición de la cotangente

$$\pi cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\tau} - \frac{1}{m}\right).$$

Sea $x = e^{2\pi i\tau}$. Si $\tau \in \mathbb{H}$, entonces $|x| < 1$, luego

$$\pi cot(\pi\tau) = \pi\frac{\cos(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau)} = \pi i\frac{e^{2i\pi\tau}+1}{e^{2i\pi\tau}-1} = \pi i\frac{x+1}{x-1} = -\pi i\left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right) = -\pi i\left(\sum_{r=1}^{\infty} x^r + \sum_{r=0}^{\infty} x^r\right).$$

Con las últimas dos ecuaciones, se concluye que

$$\pi cot(\pi\tau) = -\pi i\left(1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} e^{2\pi i r\tau}\right) = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\tau} - \frac{1}{m}\right).$$

Derivando la última ecuación repetidamente, obtenemos

$$-\frac{1}{\tau^2} - \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{(m+\tau)^2} = -(2\pi i)^2\sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau},$$

$$-3!\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+\tau)^4}=-(2\pi i)^4\sum_{r=1}^{\infty}r^3e^{2\pi ir\tau},$$

$$-5!\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+\tau)^6}=-(2\pi i)^6\sum_{r=1}^{\infty}r^5e^{2\pi ir\tau}.$$

Reemplazando τ por $n\tau$, obtenemos el lema 2.1. $\square$

Con el lema 2.0, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.1: *Si $\tau\in\mathbb{H}$, tenemos las siguientes expansiones*

$$g_2(\tau)=\frac{4\pi^4}{3}\left(1+240\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_3(k)q^k\right).$$

$$g_3(\tau)=\frac{8\pi^6}{27}\left(1-504\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_5(k)q^k\right).$$

Donde $\sigma_\alpha(k)=\sum_{d|k}d^\alpha$ y $q=e^{2\pi i\tau}$.

Demostración: Tenemos que

$$\begin{aligned}
g_2(\tau)&=60\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\\
&=60\left(2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}+\sum_{\substack{m,n=-\infty\\ n\neq 0}}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)\\
&=60\left(\frac{2\pi^4}{90}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4}+\frac{1}{(m-n\tau)^4}\right)\\
&=60\left(\frac{2\pi^4}{90}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)\\
&=60\left(\frac{2\pi^4}{90}+16\frac{\pi^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}r^3q^{nr}\right).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio $nr=k$ y coleccionando los términos que tienen igual potencia, obtenemos la expresión deseada. La demostración para g_3 es análoga. $\square$

Teorema 2.2: *Si $\tau\in\mathbb{H}$, tenemos la expansión de Fourier*

$$\Delta(\tau)=(2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

.
Donde los coeficientes $\tau(n)$ son enteros, con $\tau(1)=1$ y $\tau(2)=-24$ y $q=e^{2\pi i\tau}$.

Demostración: Escribimos

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)x^n,\; B=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)x^n.$$

Entonces,

$$\Delta(\tau)=g_2(\tau)^3-27g_3(\tau)^2=\frac{64\pi^{12}}{27}\left((1+240A)^3-(1-504B)^2\right).$$

Ahora bien, A y B tienen coeficientes enteros y

$$(1+240A)^3-(1-504B)^2=12^2(5A+7B)+12^3(100A^2-147B^2+8000A^3).$$

Notemos que

$$5A+7B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(5\sigma_3(n)+7\sigma_5(n)\right)q^n.$$

Adicionalmente, se tiene que

$$5d^3+7d^5=d^3(5+7d^2)\equiv d^3(d^2-1)\equiv 0 \pmod 3,$$
$$5d^3+7d^5=d^3(5+7d^2)\equiv d^3(1-d^2)\equiv 0 \pmod 4.$$

Luego

$$5d^3+7d^5\equiv 0 \pmod{12}.$$

De esta forma 12^3 es un factor de $(1+240A)^3-(1-504B)^2$. Por lo tanto, concluimos que

$$\Delta(\tau)=\frac{64\pi^{12}}{27}\left(12^3\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n\right)=(2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

El coeficiente de x es $(5+7)12^2/12^3=1$. Similarmente, se demuestra que $\tau(2)=-24$. $\square$

Finalmente, obtenemos la q-expansión para j

Teorema 2.3: *Si $\tau\in\mathbb{H}$, tenemos la expansión de Fourier*

$$j(\tau)=\frac{1}{q}+744+196884+\sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n.$$

Donde los coeficientes $c(n)$ son enteros y $q=e^{2\pi i\tau}$.

Demostración: Tenemos que

$$g_2(\tau)^3=\frac{64}{27}\pi^{12}(1+240q+I_1)^3=\frac{64}{27}\pi^{12}(1+720q+I_2),$$
$$\Delta(\tau)=\frac{64}{27}\pi^{12}12^3q(1-24q+J_1).$$

Donde I_1,I_2 y J_1 son las respectivas series que faltan para completar las expresiones, las cuales tienen coeficientes enteros. Luego

$$\frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}=\frac{1+720q+I_2}{12^3q(1-24q+J_1)}=\frac{1}{12^3q}(1+720q+I_2)(1+24q+J_2)=\frac{1}{12^3}\left(\frac{1}{q}+744+K\right).$$

En esta última expresión, J_2 es la expresión que falta para completar la serie de la inversa de $1-24q+J_1$ en $\mathbb{Z}[[q]]$, la cual existe pues su coeficiente constante es 1, mientras que K es la serie que falta para completar el producto $(1/q)(1+720q+I_2)(1+24q+J_2)$. De esta forma, se concluye que

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q^n.$$

Donde los $c(n)$ son enteros. $\square$