 17/8/22

Charla "Anillos locales completos"

Anillos de valuación discreta (AVD o DVR)

Sea K un cuerpo. Una valuación discreta en K es una función

$v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que

i) $v(x) = \infty \iff x = 0$
ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$
iii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Si $\alpha \in (0, 1)$, podemos definir $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

por $|x| = \alpha^{v(x)}$. Se cumple

1) $|x| = 0 \iff x = 0$
2) $|xy| = |x| \cdot |y|$
3) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

i.e. $|\cdot|$ es una norma (ultramétrica o no-arquimedeana)

Sean $A = \{x \in K : v(x) \geq 0\} = \{x : |x| \leq 1\} = K_{v \geq 0}$

$\mathfrak{m} = \{\quad " \quad v(x) > 0\} = \{x : |x| < 1\}$.

$(A, +, \cdot)$ es un anillo, con un único ideal maximal, que es $\mathfrak{m}$ (notar que $A^* = \{x : v(x) = 0\}$).
$k := A/\mathfrak{m}$ se dice cuerpo residual.

Un dominio de integridad A se dice AVD si $A = K_{v \geq 0}$ para $K = \operatorname{Frac} A$ y algún v.

Ejs: 1) $K = \mathbb{Q}$. p número primo.

$x \in \mathbb{Q}^*$, $x = p^r \cdot \frac{m}{n}$, $p \nmid m \cdot n$

$v_p(x) := r$.

$\mathbb{Q}_{v \geq 0} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$.

$\mathfrak{m} = p \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$, $k = \mathbb{Z}_{(p)} / p \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{F}_p$.

2) $K = k(x)$, k cuerpo

$f(x) \in k[x]$ polinomio irreducible.

$\alpha \in k(x)$, $\alpha = f^r \cdot \frac{h}{g}$, $f \nmid h \cdot g$.

$\Rightarrow v_f(\alpha) := r$.

$A = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} : h \nmid q \right\}$, $\mathfrak{m} = f \cdot A$
$A/\mathfrak{m} \simeq k$.

$v_\infty \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) = \deg q - \deg p$

$A = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} : \deg q \geq \deg p \right\} \Rightarrow A/\mathfrak{m} \simeq k$.

$\mathfrak{m} = \{ \quad > \quad \}$

Proposición - ejercicio: si A es AVD, sus ideales son $\{ \mathfrak{m}^r, r \geq 0 \}$

Completación

$(K, |\cdot|)$ o $(A, |\cdot|)$ son espacios métricos. Notar que $+, \cdot$ son continuos.

$\{x_n\} \subseteq K$ sucesión de Cauchy.

Decimos $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ si $x_n - y_n \to 0$.

$\hat{K} = \{$ sucesiones de Cauchy $\} / \sim$

$+, \cdot$ se extienden continuamente a $\hat{K}$, que queda un cuerpo.

$|\cdot|$ también se extiende, pues $\big| |x_n| - |x_m| \big| \leq |x_n - x_m|$

$x = \{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \{|x_n|\} \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy.

$\Rightarrow |x| := \lim_{n \to \infty} |x_n|$. Es norma en $\hat{K}$.

Ej: 1) $K = \mathbb{Q}$, $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ (norma usual)

$\Rightarrow \hat{\mathbb{Q}}^{|\cdot|_\infty} = \mathbb{R}$.

2) $\hat{\mathbb{Q}}^{|\cdot|_p} =: \mathbb{Q}_p$; $\mathbb{Z}_p := \{x : |x|_p \leq 1\}$; $m = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < 1\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & \mathbb{Z}_p/m \end{tikzcd}$$ notar que $p \cdot \mathbb{Z} \subseteq \ker i$

$\Rightarrow \bar{i} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p/m$.

Veamos que es sobreyectiva: $x = \{x_n\} \in \mathbb{Z}_p$.

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$, $|x_n - x_m| < \frac{1}{2}$

En particular

$$|x - x_{n_0}| = \lim_{m \to \infty} |x_m - x_{n_0}| \le \frac{1}{2} < 1 .$$

Luego

$$|x_{n_0}| = |x - x_{n_0} + x| \le \max\{|x - x_{n_0}|, |x|\} \le 1 .$$

$\Rightarrow x_{n_0} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Como $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$\exists\, \tilde{x} \in \mathbb{Z}$ con $x_{n_0} - \tilde{x} \in p\mathbb{Z}$, i.e. $|x_{n_0} - \tilde{x}| < 1$.

Luego $|x - \tilde{x}| < 1$. Así, $i(\tilde{x}) = x \bmod m$.

$\therefore\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p/m$.

Ejercicio: Todo $x \in \mathbb{Z}_p$ se representa por una única sucesión $\{x_n\}$ de la forma $x_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le a_i < p$.

3) $A = k[x]$, $v = v_x \to m = x \cdot k[x]$.

$\hat{A} \simeq k[[x]]$ = series formales en x

$$= \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i ,\ a_i \in k \right\}, +, \cdot \right) = \cancel{\left\{ \sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1} x^{k_1} ,\ a_{k_1} \in k \right\}}$$

Topologías I-ádicas (Atiyah-Macdonald, Cap. 10)

Sea A un anillo, $I \subseteq A$ ideal. Definimos una topología en A decretando que una base de vecindades del $0 \in A$ es $\{I^n : n \in \mathbb{N}\}$. Así, una base de vecindades de $a \in A$ es

$$\{ a + I^n ; n \in \mathbb{N} \}.$$

Una sucesión $\{a_i\} \subseteq A$; 1) es de Cauchy si $\forall n \ \exists i_0$ tal que $\forall i,j \geq i_0$; $a_i - a_j \in I^n$.

2) converge a 0 si $\forall n \ \exists i_0$ t.q. $\forall i \geq i_0$, $a_i \in I^n$.

$\hat{A}$ = completación de A, es un anillo. $\varphi : A \to \hat{A}$; $\varphi(a)$ = suc. de a; $\ker \varphi = \bigcap_{n \geq 0} I^n$.

Si $\{a_i\}$ es de Cauchy, su imagen en A/I^n es eventualmente constante. Llamémosla x_n (i.e. $a_i \bmod I^n = x_n$ para i suficientemente grande). El morfismo canónico

$$r_{n+1} \ A/I^{n+1} \to A/I^n \quad \text{cumple} \quad r_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$$

Si $\{a_i'\} \sim \{a_i\}$, entonces $\{a_i'\}$ da lugar a la misma sucesión x_n.

~~Recíprocamente, si $\{x_n\}$ es una sucesión con $x_n \in A/I^n$~~
~~y $r_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$,~~

(límite inverso)

Definimos $\varprojlim_{n \to \infty} A/I^n$ como el espacio de todas las sucesiones $\{x_n\}$ con $x_n \in A/I^n$ y $r_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$.

i) Notar que tal sucesión da lugar a una sucesión de Cauchy en A, tomando $a_n \in x_n$ de forma arbitraria.

ii) El límite inverso hereda una estructura de anillo

Tenemos $\hat{A} \simeq \varprojlim A/I^n$.

¿ $A = \mathbb{Z}$, $I = (p)$

$\hat{\mathbb{Z}} \simeq \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ De aquí se puede deducir

también ~~que los elementos de $\hat{\mathbb{Z}}$~~ $\hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_p$.

Similarmente: $A = k[x]$, $I = (x)$

$$\hat{A} \simeq \varprojlim k[x]/(x^n) \simeq k[[x]].$$