Espacios ultramétricos (completos)

$(K, |\cdot|)$ un cuerpo, dotado de una norma ultramétrica.

[Ej: A dominio AVD, $|\cdot|$ = norma inducida por la valuación
$K = \text{Frac } A$.

i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ii) $|xy| = |x|\cdot|y|$, (iii) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Lema (todos los triángulos son isósceles)

Si $|x| \neq |y|$, entonces $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Dem: Suponemos $|x| > |y|$. Entonces

$$|x| = |(x+y) - y| \leq \underbrace{\max\{|x+y|, |y|\}}_{\text{no puede ser } |y|, \text{ pues } |x|>|y|} = |x+y|$$

Además $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|$

$\therefore |x| = |x+y|$ ∎

Corolario (Las bolas son abiertos y cerrados)

$\forall a \in K, \forall r > 0$, $D(a, r) = \{x \in K : |x-a| \leq r\}$
$D^\circ(a, r) = \{x \in K : |x-a| < r\}$

son abiertos y cerrados.

Dem: $D(a,r)$ abierto: $x \in D(a,r)$. ~~(Si $x = a$, $D^\circ(a,r)$)~~

Podemos suponer $x \neq a$. Veamos que $D^\circ\left(x, \frac{|x-a|}{2}\right) \subseteq D(a,r)$

Sea $y \in D^\circ\left(x, \frac{|x-a|}{2}\right)$. Entonces $|y-a| = |y-x+x-a|$
$= |x-a| \leq r$.

(0)

$[D^\circ(a,r)]^c$ es ~~cerrado~~ abierto por un argumento similar.

<u>Prop</u>:
Supongamos $(K, |\cdot|)$ completo. Sea $(a_n) \subseteq K$ una sucesión y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ las sumas parciales.

Entonces S_n es convergente $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

<u>Dem</u>: $\Rightarrow]$ Si $S_n \to S$, entonces $a_k = S_k - S_{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} S - S = 0$.

$\Leftarrow]$ Veamos que S_n es de Cauchy. Supongamos $n < m$,

$$\Rightarrow S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

$$\Rightarrow |S_m - S_n| \leq \max_{k=n+1}^{m} \{|a_k|\}. \quad (*)$$

Como $a_k \to 0$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 : k \geq k_0, \ |a_k| < \varepsilon$.

Luego $(*) \Rightarrow \forall n, m \geq k_0, \ |S_m - S_n| < \varepsilon$.
$(K, |\cdot|)$ completo $\Rightarrow \{S_n\}$ converge.

<u>Corolario</u> $A = \{x \in K : |x| \leq 1\}$ (anillo de valuación de K)

$\mathfrak{m} = \{x \in K : |x| < 1\}$ (ideal maximal)

Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \in A[[x]]$. Entonces

$\forall a \in \mathfrak{m}, \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a^k, \ n \geq 1 \right\}$ converge.

En particular, podemos definir una función

$f : \mathfrak{m} \longrightarrow A, \quad f(a) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a^k$.

Dem: $a_k \in A$, $|a| <$
$\Rightarrow |a_k| \cdot |a|^k$
$\leq |a|^k \to 0$

Extensiones [Neukirch, "Algebraic number theory", Cap. II, §4]

Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo ultramétrico y completo. Entonces, $\forall$ extensión algebraica L/K, existe una única norma

$$|\cdot|_L : L \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{tal que } \forall x \in K, \ |x|_L = |x| .$$

Idea para la existencia: nos podemos reducir al caso L/K finita. Si $\alpha \in L$, consideramos la aplicación K-lineal

$$T_\alpha : L \longrightarrow L$$
$$x \longmapsto \alpha \cdot x$$

Si $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq L$ es una base como K-espacio vectorial, obtenemos una matriz representante $[T_\alpha]$.

Definimos $N_{L/K}(\alpha) := \det [T_\alpha]$.

Se verifica
- No depende de la elección de base
- $N_{L/K}(\alpha) \in K$
- $N_{L/K}(\alpha \cdot \beta) = N_{L/K}(\alpha) \cdot N_{L/K}(\beta)$.
- Si $f(x) = x^d + a_{n-1} x^{d-1} + \dots + a_0 \in K[x]$ es el polinomio mínimo de α, entonces

$$N_{L/K}(\alpha) = \pm a_0^m , \text{ algún } m \geq 1 .$$

- Si $\alpha \in K$, $N_{L/K}(\alpha) = \alpha^{[L:K]}$.

Definamos $|\cdot|_L : L \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$\alpha \longmapsto |N_{L/K}(\alpha)|^{\frac{1}{[L:K]}}$.

Claramente $\cdot\ \alpha \in K \Rightarrow |\alpha|_L = |\alpha|$

$\cdot\ \alpha \in L\ ,\ |\alpha|_L = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

$\cdot\ |\alpha \cdot \beta|_L = |\alpha|_L \cdot |\beta|_L$.

<u>Lema de Hensel</u> $(K, |\cdot|)$ completo y $A = \{x : |x| \leq 1\}$.
$k = A/m$ $\quad m = \{x : |x| < 1\}$.
Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in A[x]$ tal que

$\max\{|a_i|\} = 1$.

Si $f(x) = \bar{g}(x) \cdot \bar{h}(x) \bmod m$; con $\bar{g}(x), \bar{h}(x) \in k[x]$
~~relativamente~~ primos relativos, entonces $\exists\ g(x), h(x) \in A[x]$
tales que $\deg(g) = \deg(\bar{g})$ y, $g(x) \equiv \bar{g}(x) \bmod m$
$h(x) \equiv \bar{h}(x) \bmod m$
y $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

<u>Lema</u>; $|\alpha + \beta|_L \leq \max\{|\alpha|_L, |\beta|_L\}$. $(*)$

<u>Dem.</u> Si $|\beta|_L \leq |\alpha|_L$, $(*) \Leftrightarrow$ $|\alpha|_L \leq 1 \Rightarrow |\alpha + 1|_L \leq 1$.

<u>Af</u>: Sea $A' =$ cerradura entera de A en L
$= \{ z \in L : \exists\ f \in A[x]$, mónico, con $f(z) = 0\}$

A' es un anillo.

(11)

$\underline{1}$: $A' = \{ z \in L : N_{L|K}(z) \in A \}$

$\subseteq]$ obvio usando $N_{L|K} = \pm a_0^m$.

$\supseteq]$ Sea $z \in L$ con $N_{L|K}(z) \in A$. Si $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$ es el pol. min. en $K[x]$ y $\exists i$ con $|a_i| > 1$, sea

a_{i_0} con $|a_{i_0}| = \max\{|a_i|\}$.

$\Rightarrow \frac{1}{a_{i_0}} f(x) =: g(x) \in A[x]$; $g(x) \bmod m \not\equiv 0$.

Además si $\bar{g}(x) := g(x) \bmod m$, entonces $\left|\frac{a_0}{a_{i_0}}\right| < 1$, luego

$\bar{g}(x) = x^e \cdot \bar{h}(x) \bmod m$.

Hensel $\Rightarrow g(x)$ es reducible $\rightarrow\leftarrow$.

$\therefore f(x) \in A[x]$ ∎

Luego $|\alpha|_L \leq 1 \Rightarrow N_{L|K}(\alpha) \in A \Rightarrow \alpha \in A' \Rightarrow \alpha + 1 \in A'$

$\Rightarrow N_{L|K}(\alpha+1) \in A \Rightarrow |\alpha+1|_L \leq 1$ ∎

~~Dem: $|a|<1 \Rightarrow |a_2|\cdot|a|^k \leq |a|^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$~~ $\blacksquare$

~~$a_2 \in A$~~

Dem. del Lema de Hensel.

Sea $d = \deg f$, $m = \deg g$. Luego $\deg \bar{h} \leq d-m$.

Escogemos $g_0, h_0 \in A[x]$ con $\deg g_0 = m$

$\deg h_0 \leq d-m$

$\ni$ $g_0 \equiv \bar{g} \mod m$

$h_0 \equiv \bar{h} \mod m$.

Además, $\exists\ \alpha(x), \beta(x) \in A[x]$ con $\alpha \cdot g_0 + \beta \cdot h_0 \equiv 1 \mod m$

Sea $\pi \in A$ un coeficiente no nulo de

$$f - g_0 \cdot h_0 \,, \quad \alpha \cdot g_0 + \beta \cdot h_0 - 1$$

de valor absoluto mínimo $\left(\begin{array}{l} \Rightarrow f \equiv g_0 \cdot h_0 \mod \pi \\ \quad \alpha g_0 + \beta h_0 \equiv 1 \mod \pi \end{array} \right)$

$\ni$ Buscamos g_1, h_1 con $\deg g_1 = m$; $\deg h_1 \leq d-m$ tales que

$$f \equiv g_1 h_1 \mod \pi^2.$$

Postulamos $g_1 = g_0 + \pi p_1$, p_1, q_1 por determinar.

$h_1 = h_0 + \pi q_1$

$$f - g_0 \cdot h_0 = f - (g_1 - \pi p_1)(h_1 - \pi q_1)$$
$$= f - g_1 h_1 + \pi (p_1 h_1 + q_1 g_1) - \pi^2 p_1 q_1$$

$\Rightarrow$ Queremos $\quad f - g_0 h_0 \equiv \pi (p_1 h_1 + q_1 g_1) \mod \pi^2$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f_1 := \frac{f - g_0 h_0}{\pi} \equiv p_1 h_1 + q_1 g_1 \mod \pi$$
$$\equiv p_1 h_0 + q_1 g_0 \mod \pi .$$

Definimos p_1 por la división de polinomios

$$\beta \cdot f_1 = q \cdot g_0 + p_1 \quad ; \quad \deg p_1 < \deg g_0 = m .$$

Sea $\tilde{q}_1 := \alpha \cdot f_1 + h_0 q$.

$$\Rightarrow h_0 p_1 + g_0 \tilde{q}_1 = h_0 (\beta \cdot f_1 - q \cdot g_0) + g_0 (\alpha \cdot f_1 + h_0 q)$$
$$= f_1 (\beta h_0 + \alpha g_0)$$
$$\equiv f_1 \mod \pi .$$

Sea q_1 el polinomio $\tilde{q}_1$ eliminando los coef. divisibles por π. Como

$$\underset{\deg m}{g_0} q_1 + \underbrace{h_0 p_1}_{\substack{\deg < d-m+m \\ = d}} \equiv \underbrace{f_1}_{\deg \leq d} \mod \pi .$$

deducimos $m + \deg q_1 \leq d$, i.e. $\deg q_1 \leq d - m$.

Iterativamente, definimos g_n, h_n con

$\deg g_n = \deg g \; ; \; \deg h_n \leq d - m$

$$f \equiv g_n h_n \mod \pi^{n+1}$$
$$g_n = g_{n-1} + p_{n+1} \pi^n$$
$$h_n = h_{n-1} + q_{n+1} \pi^n$$

$\Rightarrow$ g_n, h_n convergen a $g, h \in A[x]$

y $f = g \cdot h$ $\square$