Sobre $End_R(\mathcal{F})$ para R anillo de enteros p-ádicos

Contexto: L = ext. finita de $\mathbb{Q}_p$

$\mathcal{O}_L$ = anillo de enteros de L

$\mathcal{F}$ = gpo formal (dim 1) sobre $\mathcal{O}_L$

El objetivo de esta sección es describir $End_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F})$ cuando $\mathcal{F}$ tiene "altura" finita

Preliminares

§ Alturas

Proposición 1: sea k cuerpo de car. $p>0$ y $\alpha: \mathcal{F} \to G$ morf. de gps formales sobre k ($\mathcal{F}, G \in k[[X,Y]]$, $\alpha(x) \in k[[X]]$). Si $\alpha(x) \equiv 0 \mod deg 2$ entonces $\alpha = 0$ ó existe $h \in \mathbb{N}$, $\beta(x) \in k[[X]]$ tal que $\alpha(x) = \beta(x^{p^h})$ y $\beta(x) \not\equiv 0 \mod deg 2$.

Esto nos permite definir altura de morfismos

Def: $\alpha \in Hom_k(\mathcal{F}, G) \rightsquigarrow ht(\alpha) = \begin{cases} \infty & si\ \alpha = 0 \\ h & si\ \alpha(x) = \beta(x^{p^h}) \\ & con\ \beta \in k[[X]],\ \beta(x) \not\equiv 0 \mod 2 \end{cases}$

Obs: $ht(\alpha) \in \{\infty, 0, 1, 2, \dots\}$

$ht(\alpha \circ \beta) = ht(\alpha) + ht(\beta)$ y $h(\alpha \underset{G}{+} \alpha') \geq \min\{ht(\alpha), ht(\alpha')\}$

En particular ht es valuación en $End_k(\mathcal{F})$

Def: Si $\mathcal{F}$ es gpo formal sobre k, definimos

$$ht(\mathcal{F}) := ht([p]_{\mathcal{F}}) \in \{\infty, 1, 2, \dots\}$$

§ Reducción de morfismos

Sea A anillo local de car. 0 con cuerpo residual k de car. $p>0$. Para $\mathcal{F}$ gpo formal sobre A definimos

$$ht(\mathcal{F}) := ht(\tilde{\mathcal{F}})$$

donde $\tilde{\mathcal{F}} = red_*(\mathcal{F})$, $red: A \longrightarrow k$

Proposición 2: Sea F gpo formal de altura finita sobre anillo local Noetheriano R de car. 0 y car. residual $p>0$. Sea G otro gpo formal sobre R. Entonces el morfismo de reducción

$$\mathrm{Hom}_R(F,G) \xrightarrow{red_*} \mathrm{Hom}_k(\tilde{F},\tilde{G}) \quad , \ k \text{ cuerpo res. de } R$$

es inyectivo

Dem: Como red_* es morf. de grupos basta probar $\mathrm{Ker}(red_*)=\{0\}$. Sea $m \subseteq R$ ideal maximal. Suponga $\alpha(X) \in \mathrm{Hom}_R(F,G) \setminus \{0\}$ tq $\tilde{\alpha}(X)=0$. Sea $r \geq 1$ (*) el mayor entero tq. $\alpha(X) \equiv 0 \mod m^r$. El anillo m^r/m^{r+1} es k-esp. vectorial de dim finita (pues R Noetheriano $\Rightarrow m^r$ finitamente generado). Sea $\{e_1,..,e_t\}$ base de m^r/m^{r+1} como k-esp. vectorial. Entonces, existen únicos $\beta_j \in k[[X]]$ tales que

$$\alpha(X) = \sum_{j=1}^{t} e_j \cdot \beta_j(X) \mod m^{r+1}$$

Como $\alpha(F(X,Y)) = G(\alpha(X),\alpha(Y)) \equiv \alpha(X)+\alpha(Y) \mod \deg 2$ tenemos

$$\sum_{j=1}^{t} e_j\, \beta_j(F(X,Y)) \equiv \sum_{j=1}^{t} e_j(\beta_j(X)+\beta_j(Y)) \mod m^{r+1}$$

Como $\{e_j\}$ es base, concluimos

$$\beta_j(F(X,Y)) \equiv \beta_j(X)+\beta_j(Y) \mod m^{r+1} \quad \forall j \in \{1,..,t\}$$

En particular: $\beta_j(F(X,Y)) \equiv \beta_j(X)+\beta_j(Y) \mod m \quad \forall j \in \{1,..,t\}$

Esto significa $\beta_j \in \mathrm{Hom}_k(\tilde{F},\tilde{G}_a)$, luego

$$\beta_j([p]_F(X)) = [p]\tilde{G}_a(\beta_j(X)) = 0 \quad \forall j$$

Como $[p]_F(X) \neq 0$, concluimos $\beta_j(X)=0 \ \forall j$. Es decir $\alpha(X) \mod m^{r+1}$, lo que es una contradicción//

(*) La existencia de $r \geq 1$ sigue del hecho que $\bigcap_{k=1}^{\infty} m^k = \{0\}$. Esto último es consecuencia del Teorema de intersección de Krull.

§ Topologías en $\mathrm{Hom}_A(F,G)$

Sea A anillo de valuación discreta, de car. cero, completo y F, G gps formales sobre A

<u>Def</u>: $J : \mathrm{Hom}_A(F,G) \longrightarrow A$

$$\alpha(X) \longmapsto a_1 \quad \text{si} \quad \alpha(X) = a_1X + a_2X^2 + \dots$$

<u>Obs</u>: J es morfismo de grupos

<u>Proposición 3</u>: J es inyectivo y $J(\mathrm{Hom}_A(F,G))$ es cerrado en A.

<u>Dem</u>: Sea K cuerpo de fracciones de A

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(F,G) \arrow[r, hook] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_K(F,G) \arrow[r, "\phi", "\approx"'] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_K(G_a) \arrow[d, "J"] \\
A \arrow[r, hook] & K \arrow[r, "id"] & K
\end{tikzcd}$$

donde $\phi(\alpha) = \log_G \circ \alpha \circ \log_F^{-1}$. Como $J : \mathrm{End}_K(G_a) \xrightarrow{\sim} K$, $uX \longmapsto u$ es isomorfismo, concluimos que $J : \mathrm{Hom}_A(F,G) \longrightarrow A$ es inyectivo. Ahora, sea T una indeterminada. Tenemos

$$\log_G^{-1}(T \cdot \log_F(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T) X^i \quad \text{con } \phi_i(T) \in k[T]$$

y $\mathrm{Hom}_A(F,G) = \{ \log_G^{-1}(a \log_F(X)) : a \in A,\ \phi_i(a) \in A\ \forall i \in \mathbb{N} \}$,

luego $J(\mathrm{Hom}_A(F,G)) = \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{\phi_i^{-1}(A)}_{\text{cerrado } K} \Big)$ cerrado en A //

$(\phi_1(T) = T)$

En $\mathrm{Hom}_A(F,G)$ tenemos las siguientes tres topologías:

Suponga que F y G son de altura finita. Tenemos tres topologías en $\mathrm{Hom}_A(F,G)$

(T1) La topología inducida por filtración

$$\mathrm{Hom}_A(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\tilde{F},\tilde{G}) \longrightarrow \{\infty, 0, 1, 2, \dots\}$$

$(\{\alpha(X) : ht(\tilde{\alpha}(X)) \geq m\}_{m \geq 0}$ sist. de vecindades de $0)$

(T2) La topología inducida por $\mathrm{Hom}_A(F,G) \xrightarrow{J} A$

(T3) La topología inducida por los subgrupos (abiertos)

$$[p^n]_G \mathrm{Hom}_A(F,G)$$

Proposición 4: Las tres topologías son equivalentes y $\mathrm{Hom}_A(F, G)$ es completo con respecto a estas (pues $J(\mathrm{Hom}_A(F,G)) \subseteq A$ es cerrado y A es completo)

Aplicaciones

L = ext. finita de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_L$ = anillo de enteros de L

Sea $\mathcal{F}$ un gpo formal sobre $\mathcal{O}_L$ de altura finita $h \in \{1,2,..\}$

1) $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F})$ es $\mathbb{Z}_p$-módulo

pues

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F}) & \xhookrightarrow{J} & \mathcal{O}_L \\ n & \longmapsto & [n]_{\mathcal{F}} & \longmapsto & n \end{array}$$

$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F})$ cerrado en $\mathcal{O}_L$ (Prop. 4) luego $\mathbb{Z}_p$ = clausura top. de $\mathbb{Z}$ en $\mathcal{O}_L$ $\subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F})$.

2) $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F})$ es anillo conmutativo pues $J: \mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{O}_L$ y $\mathcal{O}_L$ es conmutativo

3) $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{F}) \xhookrightarrow{\mathrm{red}_*} \mathrm{End}_k(\tilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathrm{End}_{k^{sep}}(\tilde{\mathcal{F}})$

(k cuerpo residual de L)

¿Qué estructura tiene $\mathrm{End}_{k^{sep}}(\tilde{\mathcal{F}})$?

Teorema: $\mathrm{End}_{k^{sep}}(\tilde{\mathcal{F}})$ es isomorfo al orden maximal del álgebra de división central D_h de dim h^2 sobre $\mathbb{Q}_p$ e invariante $\frac{1}{h}$ (único salvo isomorfismo)

Un álg. de división central D sobre cuerpo K es álgebra asociativa sobre K (no necesariamente conmutativa) de $\dim_K$ finita donde $D^\times = D \setminus \{0\}$ y el centro de D es K.

(Ej. $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ cuaterniones de Hamilton)

Siempre se cumple $\dim_K D = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Si $K \subseteq L \subseteq D$ con L conmutativo entonces $[L:K] / n$.

Si K es ext. finita de $\mathbb{Q}_p$, $v: K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ su valuación normalizada entonces v se extiende a $v_D: D \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ($v_D(D^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$, e índice de ramif.)

$\mathcal{O}_D = \{x \in D : v(x) \geq 0\}$ es su único orden maximal

($\mathcal{O}_D$ es anillo y $\mathbb{Z}_p$-módulo libre de rango h^2)

El invariante de D se define de la siguiente forma:
tomar $K \subseteq L \subseteq D$, L ext. no ramif. max de K contenida en D,
$\sigma : L \to L$ aut. de Frobenius

Teorema de Skolem-Noether $\Rightarrow \exists \gamma \in D \setminus \{0\}$ tq. $\sigma(x) = \gamma x \gamma^{-1} \ \forall x \in L$

Entonces: $\mathrm{inv}(D) = v(\gamma) + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Obtenemos:

$$\mathrm{End}_{O_L}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \underbrace{\overset{F}{\overset{\parallel}{\mathrm{End}_{O_L}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p}}}_{\text{cuerpo (conmutativo)}} \hookrightarrow \mathrm{End}_{k^{sep}}(\tilde{\mathcal{F}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = D_h$$

$$[F : \mathbb{Q}_p] \mid h$$

· F es cuerpo de fracciones de $\mathrm{End}_{O_L}(\mathcal{F})$ y éste es orden (subanillo y $\mathbb{Z}_p$-submódulo libre de rango maximal).
En particular $\mathrm{End}_{O_L}(\mathcal{F}) \subseteq O_F$ = orden maximal de F