SEMINARIO AMPLITUD ARITMÉTICA

RICARDO MENARES

Una temática básica en Teoría de Números está cristalizada en el décimo problema de Hilbert entero (H10 sobre $\mathbb{Z}$): decidir si existe un algoritmo que, dado un polinomio en n variables $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con coeficientes enteros, determina si la ecuación

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{0.1}$$

admite una solución con coordenadas enteras. Matiyasévich, en los 70s, demostró que este problema es indecidible, dando una respuesta negativa a H10 sobre $\mathbb{Z}$.

La situación cambia radicalmente al considerar otros anillos en que se buscan las soluciones de (0.1). Sea $\overline{\mathbb{Z}}$ el anillo de todos los enteros algebraicos (un entero algebraico es un número complejo que es raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros). Rumely demostró en los 80s que H10 sobre $\overline{\mathbb{Z}}$ admite una respuesta positiva. Su argumento se basa en el siguiente resultado.

Teorema (Rumely) Supongamos que F es absolutamente irreductible y que para todo número primo p, la ecuación (0.1) admite una solución con coordenadas en el cuerpo finito de p elementos. Entonces, la ecuación (0.1) admite una solución de (0.1) con coordenadas en $\overline{\mathbb{Z}}$.

El Teorema de Rumely es un enunciado de existencia y no da un método para, usando la hipótesis, encontrar una solución en $\overline{\mathbb{Z}}$.

En los 90s, en el caso de un polinomio en dos variables, Ullmo dio una nueva demostración del Teorema de Rumely, usando un método que entrega tanto la existencia de una solución como una estimación de su tamaño.

La demostración de Ullmo se basa en una interpretación geométrica de la situación, usando ideas de Moret-Bailly y Szpiro, adaptadas al contexto de la geometría de Arakelov. La ecuación $F = 0$ define una superficie aritmética y el punto entero buscado se interpreta como una sección. Para establecer la existencia y estimar el tamaño de tal sección, se utiliza el concepto de *amplitud aritmética*. Se trata de una adaptación, para fibrados metrizados sobre una superficie aritmética, de la noción geométrica de amplitud de un fibrado sobre una superficie algebraica. Una herramienta importante en este método es un teorema de S.-W. Zhang, que da un análogo para fibrados metrizados del criterio de amplitud de Nakai-Moishezon.

El método arakeloviano ha sido refinado por Autissier, siempre en el contexto de dos variables, demostrando en particular que, cuando se cumple ha hipótesis del teorema de Rumely, hay infinitas soluciones de (0.1) con coordenadas en $\overline{\mathbb{Z}}$ y que tienen tamaño controlado.

Para el caso de más de dos variables, la teoría de la amplitud aritmética no está bien desarrollada aún y ofrece perspectivas de investigación. En particular, no se conoce una versión del teorema de Rumely con control sobre el tamaño de las soluciones.

El primer objetivo de este seminario es, durante el semestre, introducir los conceptos básicos de teoría de Arakelov (curvas aritméticas, superficies aritméticas, fibrados metrizados, etc). En segundo lugar, revisaremos en detalle el método de Moret-Bailly, Szpiro y Ullmo.

Siguiendo los intereses de la audiencia, podremos revisar otros tópicos relacionados. Por ejemplo

- Refinamientos de Autissier del método de Ullmo
- Nexo con la teoría de la capacidad
- H10 sobre $\overline{\mathbb{Z}}$
- Variedades aritméticas

E-mail address: rmenares@mat.uc.cl