~~Ac~~ Descomposición de var. abel. con acción de grupos ①

R.

→ V = esp. vec. $/_{\mathbb{C}}$ dim g, $L \subseteq V$ reticulado (generado $2g$ vectores base ~~de~~ V sobre $\mathbb{R}$)

$M = V/L$ = toro complejo, $\pi : V \longrightarrow V/L$ cubr. univ.

Identificamos $\lambda \in L \Longleftrightarrow$ transf $v \mapsto v+\lambda$, $\pi_1(M) \simeq L = H_1(M)$

→ Si $M_j = V_j/L_j$ $j=1,2$, toda función holom. $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ se levanta a una $h: V_1 \to V_2$ analítica invariante $h(v+\lambda_1) = h(v) + \lambda_2$

$\Rightarrow h(v) = F(v) + c$, $F: V_1 \to V_2$ $\mathbb{C}$-lineal con $F(L_1) \subseteq L_2$.

$\Rightarrow$ las funciones entre respectivos π_1 y H_1 inducido por F.

$$\therefore \begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{F} & V_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f_0} & M_2 \end{array} \quad f_0 \text{ homomorfismo de grupos.}$$

• Dado $M = V/L$, escogemos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ gen. para L $\{v_1, \dots, v_g\}$ base para V. $\lambda_i = (\ )\}g$ en base $v_1, \dots, v_g$ $\Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}) = \Lambda$ = Matriz Periodo de M

(λ_{jk})

Si $M \xrightarrow{f} M_2 \rightsquigarrow F: V \longrightarrow V_2$, $F(L) \subseteq L_2$ y N = Matriz entera corresp.

C = Matriz de F

$\Rightarrow C\Lambda = \Lambda_2 N$.

• X = sup. Riemann comp. género $g \geq 1$, $V = (H^{1,0}(X))^* = \{f : H^{1,0}(X) \to \mathbb{C} \,/\, f \ \mathbb{C}\text{-lineal}\}$

$L = \{ \ell_\gamma : V \to \mathbb{C} \,/\, \ell_\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega, \ \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z}) \}$ reticulado

$Jac(X) = V/L$. Fijamos $x_0 \in X$, $\ell(x)(\omega) = \int_{x_0}^{x} \omega$

$X \xrightarrow{\phi} Jac(X)$

→ $\forall n \geq 1$, $\phi_n : X^n \longrightarrow Jac(X)$ $\phi_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$

$\Rightarrow W^n = \phi_n(X) \subseteq Jac(X)$

Teo Torelli: X, Y sup. Riemann género $g \geq 2$ $\phi : X \to Jac(X)$ x_0

$\psi : Y \to Jac(Y)$ y_0. Si $f : Jac(X) \to Jac(Y)$ es bianalítica tal que $f(W^{g-1})$ es un trasladado de $\psi(Y^{g-1})$

$\Rightarrow \exists h : X \to Y$ bianalítica tal que $\psi(h(x)) = \varepsilon f(\phi(x)) + a$ con $a \in JacY$, $\varepsilon = \pm 1$.

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ base canónica para $H_1(X, \mathbb{Z})$ $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_j(\omega) = \int_{\alpha_j} \omega \qquad 1 \le j \le 2g$$

generadores de $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ $\{v_1, \dots, v_g\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_g\}$ base para V

$\Lambda = (I_g \quad Z)$.

Existe $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ base de $H^{1,0}(X)$ dual a $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$

$$\lambda_k(\omega_j) = \delta_{jk} = \int_{\gamma_k} \omega_j \qquad 1 \le j, k \le g$$

$$Z = (z_{jk}) = \left(\int_{\alpha_{g+k}} \omega_j \right)_{1 \le j, k \le g}$$

<u>Teo de Riemann</u>: Z determina $W^{g-1} = \phi(X^{g-1}) \subseteq JX$.

<u>Torelli</u> (versión 2): X, Y sup. Riemann compacta, $g \ge 2$
$\mathcal{B}$ $\tilde{\mathcal{B}}$ base canónica de homología para X, Y resp.
$\downarrow$ $\downarrow$
Z $\tilde{Z}$ $\Rightarrow Z = \tilde{Z} \Leftrightarrow \exists h: X \to Y$ analítica tal que $h(\beta) = \pm \tilde{\beta}$.

Versión 1 $\Rightarrow$ versión 2.

dem) $\Rightarrow$) Si $Z = \tilde{Z} \Rightarrow I_g \Lambda = \tilde{\Lambda} I_{2g}$ $\Lambda = (I_g \ Z)$, $\tilde{\Lambda} = (I_g \ \tilde{Z})$
$\Rightarrow$ existe isomorfismo entre los toros y luego Torelli versión 1.

$\Leftarrow$ X, Y compactas, género > 0, $f: X \to Y$ analítica y sobre

$\mathcal{B}$ $\tilde{\mathcal{B}}$
Z $\tilde{Z}$

$H^{1,0}(Y) \xrightarrow{f^*} H^{1,0}(X) \Rightarrow$ induce

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Jac}X & \xrightarrow{J_f} & \mathrm{Jac}Y \end{array} \Rightarrow N = [J(f)] = [f_*]$$

inducida $H_1(JX) \to H_1(JY)$ ind $H_1(X) \to H$

X = sup. Riemann compacta $g \geq 2$

K = Fibrado canónico de X, μ: dif. de Beltrami en X es una sección de $\overline{K} \otimes \overline{K}$, z = coord local en X, μ está dada por $\mu(z)$ tal que $\mu(z) \dfrac{d\bar{z}}{dz}$ es inv por cambio de coordenadas.

C^∞ para μ. $|\mu(z)|$ está bien definido en X

$\|\mu\| = \max \{ |\mu(z)| \}$

(B.A. & Cía) $\|\mu\| < 1 \Rightarrow \exists$ difeo $\omega : \operatorname{Im} z \to \mathbb{C}$ tal que ω es solución de $\omega_{\bar{z}}(z) = \mu(z)\,\omega_z(\bar{z})$

$\mathcal{M} = \{ \mu : \|\mu\| < 1 \}$ $\quad \mathrm{Diff}^+(X) = \{ f : X \to X \text{ difeo } (C^\infty) \}$

y este grupo $\mathrm{Diff}^+(X)$ actúa en $\mathcal{M}$.

con $\nu = f^*(\mu) \Leftrightarrow f : X^\nu \to X^\mu$ es bianalítica.

$\Rightarrow \mathcal{M}/\mathrm{Diff}^+(X)$ es M_g.

$\mathrm{Diff}_0(X) = \{ f \in \mathrm{Diff}^+(X) : f \text{ homotópica a } id_X \} \leq \mathrm{Diff}_1(X) = \{ f \in \mathrm{Diff}^+ : f \text{ induce } id \text{ en } H_1(X, \mathbb{Z}) \} \leq \mathrm{Diff}_2(X) = \{ \quad '' \quad \pm id \}$

los 3 son subgrupos normales de Diff^+

los 2 primeros actúan libremente en $\mathcal{M}$.

$\Rightarrow T_g = \mathcal{M}/\mathrm{Diff}_0(X) \approx \mathbb{R}^{6g-6} \qquad T_g = \mathcal{M}/\mathrm{Diff}_1(X)$

ambos son variedades complejas dim $3g-3$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[dl] & \\
T_g = \mathcal{M}/\mathrm{Diff}_0 \arrow[d] \arrow[drr, "\text{cubr. universal orbl.}"] & & \\
T_g = \mathcal{M}/\mathrm{Diff}_1 \arrow[r] & M_g & \mathcal{M}/\mathrm{Diff}^+(X) = T_g/(\mathrm{Diff}^+/\mathrm{Diff}_0) \arrow[l, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

$f \in \mathrm{Diff}^+(X)$, $f_*: H_1(X) \to H_1(X)$.

$$[f_*]_\beta \in Sp(2g,\mathbb{Z}).$$

$$\ker \hookrightarrow \mathrm{Diff}^+(X) \xrightarrow{\theta} Sp(2g,\mathbb{Z}) \qquad \ker = \mathrm{Diff}_0$$

$$\theta(f) \cdot Z(\mu) = Z(f^*(\mu))$$

$$(I \;\; Z(f^*(\mu))) = (I \;\; Z(\mu))\,\theta(f) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

$\to \mathrm{Aut}(X^\mu)$ $\quad X^\mu \longleftrightarrow t \in T_g$

$$G = \mathrm{Im}\big(\mathrm{Stab}_{\mathrm{Diff}^+/\mathrm{Diff}_0}(t)\big) \subseteq Sp(2g,\mathbb{Z})$$

es el subgrupo que fija $Z(\mu) = \{\theta(f) : f \in \mathrm{Aut}(X^\mu)\} \cup \{\pm I\}$

$$\therefore \; \mathrm{Aut}(X^\mu) = \begin{cases} G & \text{si } X \text{ es hiper.} \\ G/\pm id & \text{si } X \text{ no es hiper.} \end{cases}$$

$X \to X/\mathrm{Aut}(X) = Y$ = Sup. Riemann comp género γ
ramif sobre k puntos.

$$\dim\left(T_g^{(\mathrm{Aut}(X))}\right) = 3\gamma - 3 + k$$

$\to \quad \mathcal{M} \xrightarrow{\text{analítica}} \mathbb{H}_g$

$\quad\;\; \mu \longmapsto Z(\mu)$

$$\begin{array}{ccc} {}^{(X,\beta)}T_g & \xrightarrow{\;Z\;} & \mathbb{H}_g \\ \downarrow & \text{cocientes} & \downarrow \\ T_g/\mathrm{Diff} = M_g & \underset{\text{Torelli}}{\hookrightarrow} & \mathbb{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z}) = A_g \\ (X,\theta) & & \text{clase } Z \end{array}$$