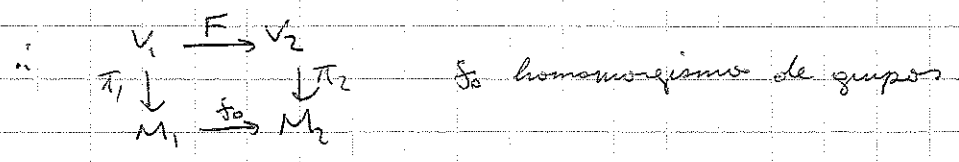


Descomposición de var. abel. con acción de grupos

R.

→ $V = \text{esp. vec. } / \mathbb{C} \text{ dim } g, L \subseteq V \text{ reticulado}$
 (generado 2g vectores base de V sobre \mathbb{R})
 $M = V/L = \text{toro complejo}, \pi: V \rightarrow V/L \text{ cubr. univ.}$
 Identificamos $\lambda \in L \leftrightarrow \text{traza } v \mapsto v + \lambda, \pi_!(M) \simeq L = H_1(M)$

→ si $M_j = V_j/L_j, j=1,2$, toda función holom. $M_1 \xrightarrow{f} M_2$
 se levanta a una $h: V_1 \rightarrow V_2$ analítica nómamente $h(v+\lambda_1) = h(v) + \lambda_2$
 $\Rightarrow h(v) = F(v) + c, F: V_1 \rightarrow V_2$ \mathbb{C} -lineal con $F(L_1) \subseteq L_2$.
 \Rightarrow las funciones entre respectivos π_1 y π_2 inducidos por F .



Dado $M = V/L$, elegimos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ gen. para L $\{v_1, \dots, v_g\}$ base para V .
 $d_i = \begin{pmatrix} \lambda_{2i-1} \\ \lambda_{2i} \end{pmatrix}$ en base $v_1, \dots, v_g \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}) = \Lambda = \text{Matriz Periodica de } M$
 $\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,2g} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{g,1} & \dots & \lambda_{g,2g} \end{pmatrix}$

Si $M \xrightarrow{f} M_2 \rightsquigarrow F: V \rightarrow V_2, F(L) \subseteq L_2$ y $N = \text{Matriz entera con esp.}$
 $C = \text{Matriz de } F$
 $\Rightarrow C\Lambda = \Lambda_2 N$

$X = \text{sup. Riemann comp. género } g \geq 1, V = (H^{1,0}(X))^* = \{f: H^{1,0}(X) \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ lineal}\}$
 $L = \{l_x: V \rightarrow \mathbb{C} / l_x(\omega) = \int_x \omega, x \in H_1(X, \mathbb{Z})\}$ reticulado.
 $\text{Jac}(X) = V/L$. Fijamos $x_0 \in X, l(x)(\omega) = \int_{x_0}^x \omega$
 $X \xrightarrow{\text{Jac}} \text{Jac}(X)$

→ $n \geq 1, \phi_n: X^n \rightarrow \text{Jac}(X) \phi_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \phi(x_i)$
 $\Rightarrow W^n = \phi_n(X) \subseteq \text{Jac}(X)$

Te. Torelli: X, Y sup. Riemann género $g \geq 2, \phi: X \rightarrow \text{Jac}(X) x_0$
 $\psi: Y \rightarrow \text{Jac}(Y) x_0$. Si $f: \text{Jac}(X) \rightarrow \text{Jac}(Y)$ es biholomorfo
 tal que $f(W^{g-1})$ es un trasladado de $\psi(Y^{g-1})$
 $\Rightarrow \exists h: X \rightarrow Y$ biholomorfo tal que $\psi(h(x)) = \varepsilon f(\phi(x)) + a$
 con $a \in \text{Jac } Y, \varepsilon = \pm 1$.

$\{d_1, \dots, d_{2g}\}$ base canónica para $H_1(X, \mathbb{Z})$ $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_j(\omega) = \int_{d_j} \omega \quad 1 \leq j \leq 2g$$

cuadrados de $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ $\{v_1, \dots, v_g\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_g\}$ base para V

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_g & Z \end{pmatrix}$$

Existe $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ base de $H^{1,0}(X)$ dual a $\{\lambda_1, \dots, \lambda_g\}$

$$\lambda_k(\omega_j) = \delta_{jk} = \int_{d_k} \omega_j \quad 1 \leq j, k \leq g$$

$$Z = (z_{jk}) = \left(\int_{d_{2k}} \omega_j \right)_{j \leq j, k \leq g}$$

Teo de Riemann ; Z determina $W^{\text{can}} = \phi(X^{\text{can}}) \in \mathcal{J}X$.

Torlli (versión 2) : X, Y sup. Riemann compacto, $g \geq 2$

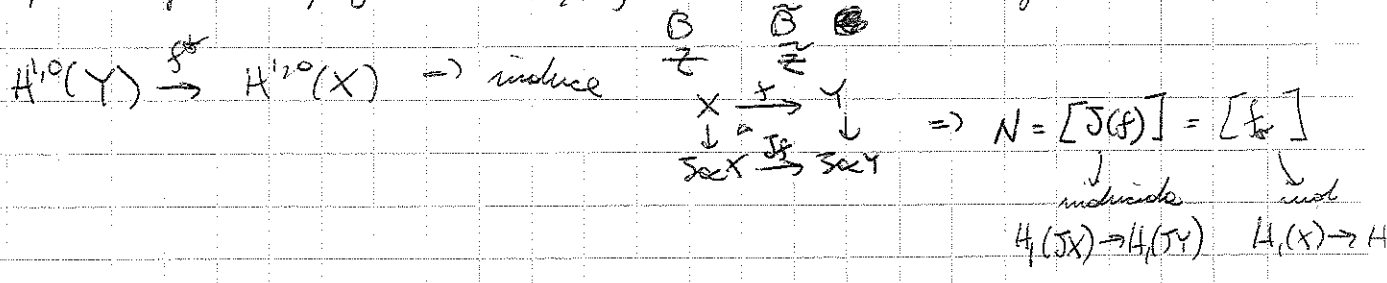
B, \tilde{B} base canónicas de homología para X, Y comp.

$\downarrow \quad \downarrow$
 $Z \quad \tilde{Z} \quad \Rightarrow Z = \tilde{Z} \Leftrightarrow \exists h: X \rightarrow Y$ analítica tal que $h(B) = \pm \tilde{B}$.

versión 1 \Rightarrow versión 2.

\Rightarrow Si $Z = \tilde{Z} \Rightarrow I_g \Lambda = \tilde{\Lambda} I_{2g} \quad \Lambda = (I_g \ Z), \tilde{\Lambda} = (I_g \ \tilde{Z})$
 \Rightarrow existe isomorfismo entre los toros y luego Torlli versión 1.

$\Rightarrow X, Y$ compactos, género > 0 , $f: X \rightarrow Y$ analítica y soluc



$X = \text{sup. Reinam compacto } g \geq 2$

$K = \text{Fibrado canónico de } X, \mu: \text{diff. de Beltrami en } X \text{ es una}$
 sección de $\bar{K} \otimes K, z = \text{coord local en } X, \mu \text{ está dado}$
 por $\mu(z)$ tal que $\mu(z) \frac{dz}{d\bar{z}}$ es inv por cambios de coordenadas.

C^∞ para $\mu. |\mu(z)|$ está bien definido en X

$\|\mu\| = \max \{ |\mu(z)| \}$

(B.A. & co) $\|\mu\| < 1 \Rightarrow \exists \text{ diffeos } \omega: \text{Im } \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que}$
 $\omega \text{ es solución de } \omega_z(z) = \mu(z) \omega_z(\bar{z})$

$\mathcal{M} = \{ \mu: \|\mu\| < 1 \} \quad \text{Diff}^+(X) = \{ f: X \rightarrow X \text{ diffeos } (C^\infty) \}$

y este grupo $\text{Diff}^+(X)$ actúa en \mathcal{M} .

con $\nu = f^*(\mu) \Leftrightarrow f: X^\nu \rightarrow X^\mu \text{ es biholítico.}$

$\Rightarrow \mathcal{M}/\text{Diff}^+(X) \text{ es } M_g$

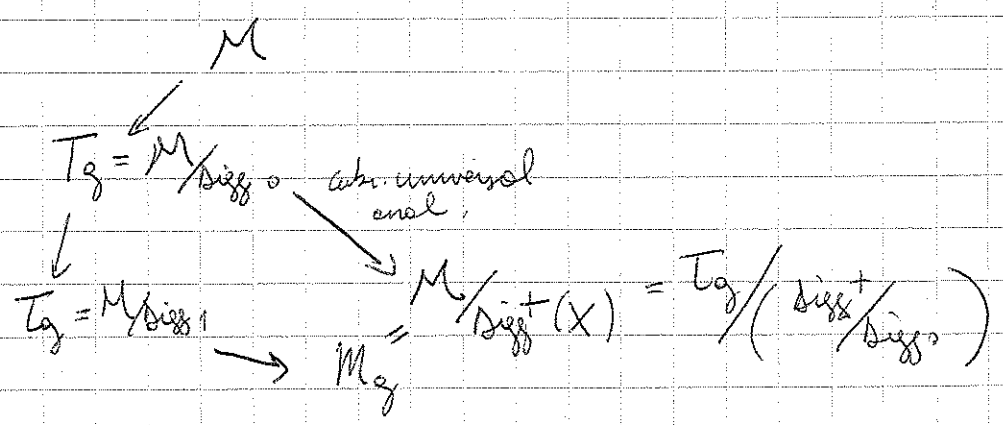
$\text{Diff}_0(X) = \{ f \in \text{Diff}^+(X): f \text{ homotópica a } \text{id}_X \} \subseteq \text{Diff}_1(X) = \{ f \in \text{Diff}^+:$
 $f \text{ induce id en } H_1(X, \mathbb{Z}) \} \subseteq \text{Diff}_2(X) = \{ \quad \quad \quad \text{id} \}$

los 3 son subgrupos normales de Diff^+

los 2 primeros actúan libremente en \mathcal{M} .

$\Rightarrow T_g = \mathcal{M}/\text{Diff}_0(X) \approx \mathbb{R}^{6g-6} \quad T_g = \mathcal{M}/\text{Diff}_1(X)$

ambos son variedades complejas dim $3g-3$



$f \in \text{Diff}^+(X)$, $f_*: H_1(X) \rightarrow H_1(X)$.

$[f_*]_B \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$.

$\text{Diff}^+(X) \xrightarrow{\theta} \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ $\ker = \text{Diff}$

$\theta(f) \cdot z(\mu) = z(f^*(\mu))$
 $(I \ z(f^*(\mu))) = (I \ z(\mu)) \theta(f) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$

$\rightarrow \text{Aut}(X^\mu) \quad X^\mu \leftrightarrow t \in T_g$
 $G = \text{Im}(\text{Stab}(t)) \subseteq \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$
 $\text{Diff}^+/\text{Diff}^0$

es el subgrupo que fija $z(\mu) = \{ \theta(f) : f \in \text{Aut}(X^\mu) \} \cup \{ \pm I \}$

$\therefore \text{Aut}(X^\mu) = \begin{cases} G & \text{si } X \text{ es hiper.} \\ G/\pm \text{id} & \text{si } X \text{ no es hiper.} \end{cases}$

$X \rightarrow X/\text{Aut}(X) = Y = \text{Sup. Riemann comp. genérico } X$
 como sobre k puntos.

$\dim(T_g(\text{Aut}(X))) = 3g - 3 + k$

