Cubrimientos cíclicos ramificados" Gian (1)

14

⇒ X = variedad suave sobre $\mathbb{C}$. (o sobre $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$ en char arbitraria coprima con los ν_i y n más abajo)

$\cup$

D = divisor efectivo (subvariedad de codim 1)

Meta: Encontrar variedad normal que represente la raíz n-ésima de $D\subset X$, algún n entero positivo.

Ej: En $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ tomar $D=\sum_{i=1}^{r} n_i p_i$ ⇒ Tomamos la raíz n-ésima de $f(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-p_i)^{n_i}$ y $\overline{X'}$ = normalización de $\mathbb{C}[x,y]/y^n-f(x)$. (es decir, el Spec)

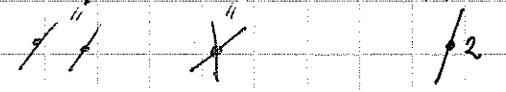
★ Recuerdo: A Anillo (dominio o no) commutativo con 1, tenemos un $K(A)=A\{\frac{a}{b} : b \text{ no div de zero en } A\}$ anillo de fracciones de A, $A=\{\frac{a}{1}\}\subset K(A)$

(Si es dominio ⇒ $K(A)$ = cuerpo frac). La clausura integral de A en $K(A)$ es el anillo de elementos integrales$/A$ → $z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots+a_0=0$ para $a_i\in A$, $z\in K(A)$.

Ej: En $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ $D=2\cdot p$ ⇒ $y^2=x^2$ (digamos $p=0$)

⇒ $\text{anillo}(Y) = \mathbb{C}[x,y,\frac{y}{x}]/_{y^2=x^2} \longleftarrow \mathbb{C}[u,v,w]\ \begin{smallmatrix} u^2=v^2\\ w^2=1\\ uw=v\end{smallmatrix} \cong \mathbb{C}[v,w]/(w^2=1)$

⇒ $\overline{X'} \longrightarrow X' \longrightarrow X=\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$



★ Recuerdo: Y = variedad normal ⟺ todo $\mathcal{O}_{Y,p}$ es integralmente cerrado ⇒ $\text{sing}(Y)$ tiene codim 2. Y = var. suave ⇒ normal.

Así curva normal = suave, superficie normal ⇒ dim Sing = 0.
(normalizar para curvas es desingularizar)

⇒ Sea X = Var. proy. suave y $D=\sum_{i=1}^{r}\nu_i D_i$ divisor en X, $\nu_i>0$
D_i ~~primos~~ distintos irreducibles

Asumir D es SNC (cruces simples normales) → En $\mathbb{C}^n$, significa localmente $x_1\cdot x_2\cdots x_m=0$, $1\le m\le n$

Clave: Asumir existe $\mathcal{L}$ = fibrado en línea en X tal que

Dato clave ⟶ $\boxed{\mathcal{L}^n := \underbrace{\mathcal{L}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}}_{n \text{ veces}} \simeq \mathcal{O}_X(D)}$.

Ej:

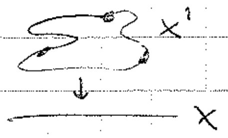
Sea $\{s=0\} = D$ una sección en $\mathcal{O}_X(D)$ que define D.

$\Rightarrow$ s define una estructura de $\mathcal{O}_X$-álgebra en $\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-i}$

a través de $0 \to \mathcal{L}^{-n} \simeq \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X$

(es decir, multiplicación $\mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{L}^{-j} \to \mathcal{L}^{-i-j}$ cae en)

i.e. $\boxed{X' := \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{i=0} \mathcal{L}^{-i}\right) \xrightarrow{f_1} X \text{ mapeo finito}}$



paso 1

→ Si algún $\nu_i \geq 1$ $\Rightarrow$ no normal. Así, tomamos normalización:

$$\begin{tikzcd} \overline{X'} \arrow[r] & X' \arrow[r] & X \\ \text{normal} & \arrow[ur, bend right, phantom, "\text{cubrimiento cíclico } f_2"] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo: $D_1, \dots, D_r$ curvas en $\mathbb{P}^2$ con SNC
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \nu_i \deg(D_i) = n$ (por ejemplo)
y $\sum \nu_i D_i \sim nL$
dato para cubr. cíclico $\mathbb{Z}_n$

Notar que $\overline{X'}$ es una variedad proyectiva también

Explícitamente podemos encontrar $\overline{X'}$ como $\mathrm{Spec}_X \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}^{(i)^{-1}}$

donde

$$\mathcal{L}^{(i)} := \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{O}_X\left(-\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\nu_j\, i}{n}\right] D_j\right)$$

$[\ ]$ = parte entera
Ej: $[2.2]=2$ $[-1.5]=-2$

Prop.- $\overline{X'}$ tiene sólo sing racionales, y f_2 es flat y $\underbrace{f_{2*}\mathcal{O}_{\overline{X'}} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{(i)^{-1}}}_{\text{¡por definición!}}$ pero esto no aparece

(ver Esnault-Viehweg en "Vanishing theorems" Crelle 335 (1982))

Obs.- El ~~????~~ f_2 está ~~ramificado~~ branch en un divisor $\subset D$ (típicamente es D)

Obs.- Sea $d_j = (n, \nu_j)$ $n = d_j n'$ y $\nu_j = d\nu_j'$ $\Rightarrow$ $(f_2)^{-1}(P)$, $P \in D_j$ suave consiste de d_j puntos distintos (y suaves) y sobre esos puntos f_2 produce rotación en ángulo $\frac{2\pi q_j}{n'}$ con $q_j \cdot \nu_j' \equiv 1 (n')$

¡Así los ν_j son prácticamente # de rotación! ∡ de rotación del cubr.

Obs.- Podemos tomar multiplicidades en el rango $0 \leq \nu_i < n$ (sino produciríamos un isomorf. entre las $\mathcal{O}_X$-álgebras).

③

→ Nos interesarían X = curva o superficie y
Así tenemos $\overline{X'}$ suave o con resolución única de singularidades Y

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\text{resol.}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \overline{X'} \arrow[r] & X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

un procedimiento similar se puede describir para cualquier cubr. Abeliano. (ver Pardini)

$\therefore \quad H^j(Y, \mathcal{O}_Y) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^j(X, \mathcal{L}^{(i)-1})$ (invariantes/numéricos genéricos están det. por $\mathcal{L}^{(i)-1}$)

Así $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(X, \mathcal{L}^{(i)-1})$.

hay un paper que habla de cubrimientos S_3

Prop | Y es conexa $\Leftrightarrow (\nu_1, \dots, \nu_r, n) = 1$.

Dem- $h^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \sum_{i=0}^{n-1} h^0(X, \mathcal{L}^{(i)-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} h^0(X, \mathcal{L}^{(i)-1})$

Y no es conexa $\Leftrightarrow h^0(Y, \mathcal{O}_Y) \geq 2 \Leftrightarrow h^0(X, \mathcal{L}^{(i)-1}) \geq 1$
para algún i. Luego
$$E = \sum_{j=1}^{r} \left(\left[\frac{\nu_j i}{n} \right] - \frac{\nu_j i}{n} \right) D_j > 0$$
(es efectivo) pero intersectando con una "curva amplia"
$\Rightarrow \left[\frac{\nu_j i}{n} \right] = \frac{\nu_j i}{n} \ \forall j \Rightarrow i\nu_j \equiv 0 \ (n) \ \forall j$. Esto
sucede $\Leftrightarrow (\nu_1, \dots, \nu_r, n) \neq 1$ ∎

Ejs varios ... • Si Y es conexa, como es suave $\Rightarrow$ es irreducible.

obs | Si $D = 0$, entonces Y es conexa $\Leftrightarrow \mathcal{L}^r \not\cong \mathcal{O}_Y \quad \forall r = 1, \dots, n-1$
Luego $\mathcal{L}$ es exactamente torsión n y $Y \to X$ es cubrimiento topológico (étale) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\longrightarrow \quad K_Y \equiv f^*\left(K_X + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{(n, \nu_j)}{n}\right) D_j\right) + \underbrace{\Delta}_{\text{sobre el excepcional de una desing.}}$

$\boxed{X = \text{curva}}$, $D = \sum_{i=1}^{r} \nu_i P_i$, P_i = puntos distintos

Asumir $0 \equiv \sum_{i=1}^{r} \nu_i$ módulo n dg ; $(n, \nu_1, \dots, \nu_r) = 1$.

obs Para curvas, $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{L}^n \iff \sum \nu_i \equiv 0\,(n)$

y así es trivial! condición numérica $\left(\begin{array}{c} Pic^0 \hookrightarrow Pic \overset{\partial}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z} \\ \mathcal{L}^0 = D - nP \in Pic^0 \text{ y } \mathcal{L}^0 = n\mathcal{L}' \end{array} \right)$.

$\therefore$ $Y \xrightarrow{f} X$ cubrimiento cíclico orden n, $X/\mathbb{Z}_n = Y$

Por R-R (Riemann Roch): $\underbrace{1 - g(Y)}_{\chi(Y, \mathcal{O}_Y)} = \partial(f_* \mathcal{O}_Y) + n(1 - g(X))$ $\quad \partial$ = grado

$$\partial(f_*\mathcal{O}_Y) = -\sum_{i=1}^{n-1} \partial(\mathcal{L}^i) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\nu_j i}{n}\right]$$

$$\partial(\mathcal{L}) = \frac{\partial(D)}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\nu i}{n}\right] = \frac{\nu(n-1) - n + (n,\nu)}{2}$$

$$\Rightarrow \dots \quad 2g(Y) - 2 = n(2g(X) - 2) + \sum_{j=1}^{r} (n - (n, \nu_j)).$$

es decir R-H (Riemann-Hurwitz)

obs Incluso cuando n = primo, ν_j juegan un rol en la determinación de la clase de isom de Y (no en su género por supuesto). En dimensiones ≥ 2 los ν_j entran incluso en el cálculo de géneros, etc.

Para la acción mirar lema 1.4 y 1.5 del paper de Viehweg "Vanishing theorems". Para sección local s de $\mathcal{L}^{(i)-1}$ y $\langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}_n$ $\Rightarrow \sigma(s) = e^i \cdot s$, para e = n-ésima raíz prim de 1.

[lo que sigue:
$\longrightarrow$ ∇ (n) para superficies ; caso $n = 2$.
$\longrightarrow$ Construcción de Kum (Sup. abeliana)
$\overset{?}{\longrightarrow}$ Prym (siguiendo Mumford).]

obs Tenemos $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^1(X, \mathcal{L}^{(i)-1})$

y en el caso de curvas $h^1(X, \mathcal{L}^{(i)-1}) = \deg(\mathcal{L}^{(i)}) + 1 - g(X)$
$$= \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\nu_j i}{n} - \left[\frac{\nu_j i}{n} \right] \right) - 1 + g(X)$$

Ej. Si $X = \mathbb{P}^1$, $D = P_1 + (n-1)P_2$
$\Rightarrow h^1(X, \mathcal{L}^{(i)-1}) = 1 \quad \forall i \geq 0$.

Ej. Si $D = P_1 + \dots + P_n$, $X = \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow h^1(X, \mathcal{L}^{(i)-1}) = i \quad \forall i \geq 1$.