"Cubrimientos cíclicos ramificados II" Gian (1)

14

→ Hoy X = superficie suave proyectiva compleja (irreducible reducida)

$\cup$

D = divisor efectivo $= \sum_{i=1}^{r} \nu_i D_i$, D_i = curva proy. suave

y singularidades de D a lo más nodos (localmente $\{xy=0\} \subset \mathbb{C}^2$)

<u>Asumir</u> existencia de $n \geq 2$ entero positivo y $\mathcal{L}$ = fibrado de líneas tal que $\mathcal{L}^n = \underbrace{\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}}_{n \text{ veces}} \simeq \mathcal{O}_X(D)$. (*)

En términos de divisores, $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(M)$ para algún divisor M en X y así (*) significa $nM \sim D$ (nM es linealmente equivalente a D) o $nM - D = \operatorname{div} f$ para alguna función racional $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

<u>Asumir</u> que $(n, \nu_1, \dots, \nu_r) = 1$. Así tenemos la construcción de la raíz n-ésima de $D \subset X$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\text{resolver sing}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \overline{X'} = \operatorname{Spec} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{(i)-1} \arrow[r, "\text{normalizar}"] & X' = \operatorname{Spec} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-i} \arrow[r, "\sqrt[n]{\ } \text{ brutal}"] & X \supset D = \sum_{i=1}^{r} \nu_i D_i \end{tikzcd}$$

Y = superficie suave proyectiva irreducible

branch de $f = D$, $\overline{X'}$ = superficie normal proyectiva con singularidades sólo sobre los nodos de D del tipo cíclico (sing. tóricas)

de la charla anterior
$\mathcal{L}^{(i)} = \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{O}_X\left(-\sum_{j=1}^{r} \left[\frac{\nu_j i}{n}\right] D_j\right)$
$[x]$ = parte entera de x
$\mathcal{L}^{(i)-1}$ = inversa de $\mathcal{L}^{(i)}$

$\swarrow$ $Y \longrightarrow \overline{X'}$ resuelve estas singularidades a través de cadenas de $\mathbb{P}^1$'s $\frown \cdots \frown \longrightarrow$ sing

Como singularidades son (en particular) racionales, tenemos

$$f_* \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{(i)-1} \quad \text{y} \quad H^m(Y, \mathcal{O}_Y) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^m(X, \mathcal{L}^{(i)-1}).$$

$$\Rightarrow \chi(Y, \mathcal{O}_Y) = n\,\chi(X, \mathcal{O}_X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}^{(i)} \cdot (\mathcal{L}^{(i)} + K_X)$$

numéricamente
$\mathcal{L}^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\nu_j i}{n} - \left[\frac{\nu_j i}{n}\right]\right) D_j$
$\forall i$ $(\mathcal{L}^{(0)} \equiv 0)$

→ Uno puede calcular explícitamente la clase canónica de Y', donde

$$K_Y \equiv f^*\left(K_X + \sum_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{(n,\nu_j)}{n}\right)D_j\right) + \Delta$$

donde Δ tiene soporte en las cadenas de $\mathbb{P}^1$ que resuelven singularidades (Δ es explícito también, pero no quiero escribir tanto).

<u>Obs</u>: Si los divisores D_i son disjuntos $\Rightarrow$ $\overline{X}'$ es suave (y así es Y) y los invariantes numéricos principales son

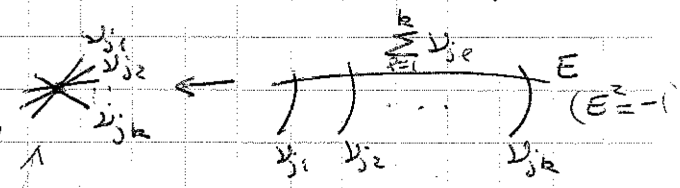
$$\chi(Y,\mathcal{O}_Y) = n\,\chi(X,\mathcal{O}_X) - \sum_{j=1}^{r}\frac{n^2-(n,\nu_j)^2}{12n}D_j^2 + \sum_{j=1}^{r}\frac{(n-(n,\nu_j))(g(D_j)-1)}{2}$$

$$K_Y^2 = n K_X^2 - \sum_{j=1}^{n}\frac{n^2-(n,\nu_j)^2}{n}D_j^2 + 4\sum_{j=1}^{r}(n-(n,\nu_j))(g(D_j)-1)$$

$$e(Y) = \text{Característica top. de Euler} = n\,e(X) + 2\sum_{j=1}^{r}(n-(n,\nu_j))(g(D_j)-1)$$

Notar que por supuesto $12\chi = K^2 + e$ (Fórmula de Noether).

<u>Ejemplo</u>: $\{D_j\}_{j=1}^{r}$ = líneas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y $\sum_{j=1}^{r}\nu_j = n$ para así tener la condición $\sum \nu_j D_j \sim n$ Línea. Asumir $(n,\nu_1,\ldots,\nu_r) = 1$ también. Problema es que pueden haber sing peores que nodos $\Rightarrow$ blow-up cada una de ellas $\Rightarrow$



En la nueva superficie consideramos

$$\widetilde{D} = \sum_{j=1}^{r}\nu_j\widetilde{D}_j + \sum_{s\in \mathrm{Sing}(D)}\mu_s E_s$$

$\widetilde{D}_j$: transf. estricta de los D_j; μ_s: $\sum \nu_j$ dependiendo de

y es nuevamente divisible por n (ie $nL \sim \widetilde{D}$ en la nueva superficie)

$\Rightarrow$ tenemos $Y \xrightarrow{f} X \to \mathbb{P}^2$

lo simpático es considerar en $\mathbb{P}^2$ un pencil trivial a través de un punto fuera de D $\Rightarrow$ este pencil se levanta a Y como pencil de curvas que cubren cíclicamente a $\mathbb{P}^1$. Así se pueden mirar sus degeneraciones estables.

Obs |- Si $\nu_j = 1$ para todo j (ie D es divisor reducido)

$\Rightarrow$

$$K_Y^2 = n K_X^2 + \frac{(n-1)^2}{n} D^2 + 2(n-1) D\cdot K_X$$

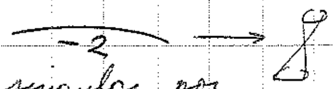
$$e(Y) = n\, e(X) + (n-1)(D^2 + D\cdot K_X)$$

$$\chi(Y,\mathcal{O}_Y) = n\,\chi(X,\mathcal{O}_X) + \frac{(n-1)(2n-1)}{12n} D^2 + \frac{(n-1)}{4} D\cdot K_X$$

$\rightarrow$ Cubrimientos dobles: Arriba con $n=2$ y $\nu_j = 1$ $\forall j$.

El cubrimiento doble sobre cada nodo se ve como $\{z^2 = xy\} \subset \mathbb{C}^3$

Esta singularidad es precisamente $\mathbb{C}^2/\langle (x,y)\mapsto(-x,-y)\rangle$ (mirar polinomios invariantes). Es conocida como nodo con la notación A_1.

Su resolución es la más simple posible: 

(es decir, la cirugía de reemplazar el punto singular por un $\Gamma = \mathbb{P}^1$ con $\Gamma^2 = -2$) (Para "verlo" hacer blow-up de $\mathbb{C}^3$ en $(0,0,0)$ y ver que sucede con $z^2 = xy$)

Ej |- Un número par $2s$ de líneas en $\mathbb{P}^2$ produce una superficie X' con $\binom{2s}{2} = s(2s-1)$ singularidades A_1. La superficie Y contiene entonces $s(2s-1)$ $\mathbb{P}^1$ con auto-intersección (-2) y disjuntas.

Obs |- En un cubrimiento doble, siempre por resolución de las singularidades de un D nodal (como en el ejemplo de un arreglo de líneas cualquiera) podemos modificar la situación a un cubrim doble con branch compuesto de curvas disjuntas.

$\longrightarrow$ Siempre si / escribimos $2M \sim D \Rightarrow$

$$K_Y^2 = 2K_X^2 + 2M^2 + 4M\cdot K_X$$

$$e(Y) = 2e(X) + 4M^2 + 2M\cdot K_X$$

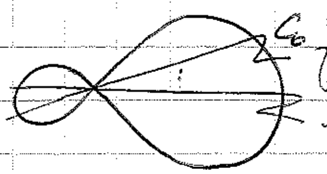
$$\chi(Y,\mathcal{O}_Y) = 2\chi(X,\mathcal{O}_X) + \frac{M^2}{2} + \frac{M\cdot K_X}{2}$$

Ej |- C_6 = séxtica suave plana $\Rightarrow C_6 \sim 2C_3 \Rightarrow C_3 = M$

$\Rightarrow K_Y \sim f^*(K_X + \frac{1}{2}C_6) \sim 0$ $\quad e(Y) = 2\cdot 3 + 4\cdot 9 + 2\cdot -9 = 24$

y $\chi(\mathcal{O}_Y) = 2$ ... Y = superficie K3

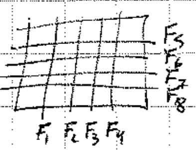
→ Si la séxtica tiene un nodo ⇒



⇒ Sobre la K3 correspondiente
tendremos una fibración elíptica
donde las fibras vienen dadas por las líneas.

Ejh (Kummer dim = 2) Una superficie abeliana X con una polarización principal irreducible ($\Leftrightarrow \Gamma \subset X$, $\Gamma =$ (oo)) $\Rightarrow X \xrightarrow{2:1} Kum(X) \subset \mathbb{P}^3$
y $Kum(X)$ es una cuártica con 16 singularidades A_1.
Notar que estos X son $Jac(\Gamma)$ para $\Gamma =$ (oo).

Si por otro lado $Y = E_1 \times E_2$ con E_1, E_2 curvas elípticas
$\Rightarrow Y \xrightarrow{2:1} Kum(Y) \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = Y/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \circlearrowright E_i$
involución hiperelíptica ($E_i \to E_i/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{P}^1$). La $Kum(Y) \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
Es un cubrimiento doble como antes con $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $Kum(Y) = \overline{X'} = X'$.
El D es

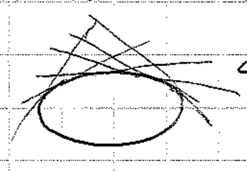


$$\sum_{i=1}^{8} F_i = D \sim 4F_h + 4F_v = 2(2F_h + 2F_v)$$

y por eso los 16 A_1.

Ahora algunas veces $X = Y$ para algunos E_1, E_2 (relacionados entre ellos) o al menos X isógeno a Y.

Se puede probar que toda $Kum(Jac\,\Gamma) \subset \mathbb{P}^3 \xrightarrow[2:1]{\text{proyección}} \mathbb{P}^2$ desde un nodo, y el branch D es un arreglo de 6 líneas tangentes a una cónica.
El mapeo se resuelve resolviendo ese nodo: $\underbrace{Bl_{nodo}(Kum\,JAC\,\Gamma)}_{Z} \xrightarrow[2:1]{g} \mathbb{P}^2$
y así $Z \xrightarrow{g}$



$\subset \mathbb{P}^2$

Luego $g^*(\text{Cónica}) = E + F$ con $E^2 = F^2 = -2$ y $E.F = 6$.
El $g^*(\text{Línea}) = 2\tilde{\Gamma}$ y $\tilde{\Gamma} \cong \mathbb{P}^1$ y conteniendo 5 nodos más intersección transversal de E ∴ $X \xrightarrow[g]{2:1} Kum(Jac\,\Gamma)$ recupera Γ como $g^*(\tilde{\Gamma})$.