ent A. "Varios ejemplos".

(1)

4

es : (Condiciones de Riemann)

V/Λ es va ssi existe una base $\mathcal{B}$ de V, enteros $d_1,\dots,d_g$ positivos, $d_i \mid d_{i+1}$ y matriz cuadr. compleja de $g\times g$ τ tal que

$g = \dim V$

$$\tau = \tau^t, \quad \operatorname{Im}\tau > 0 \text{ (cada subdet } >0) \text{ tal que en } \mathcal{B},$$

$$\Lambda = \tau\mathbb{Z}^g \oplus D\mathbb{Z}^g \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_g\end{pmatrix}.$$

dem/. $\Rightarrow$) Si v.a. $\exists H$ Herm., $\operatorname{Im}H = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0\end{pmatrix}$ en una base $\{l_1,\dots,l_{2g}\}$ de Λ con D anterior. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{d_1}l_1,\dots,\frac{1}{d_g}l_g\}$.

En $\mathcal{B}$, $\Pi = [l_1,\dots,l_{2g}]_{\mathcal{B}} = [D \;\; \tau]$ y resulta ser que τ cumple lo anterior. Luego $[H] = (\operatorname{Im}\tau)^{-1}$.

$\Leftarrow$) $H = (\operatorname{Im}\tau)^{-1}$ es una forma hermi con las prop. ∎

Ej/. $\tau = \begin{pmatrix} 3i & 1 \\ 1 & 2i\end{pmatrix}$

Ej/. $\tau = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 3 & i\end{pmatrix}$, $\mathbb{C}^2/\Lambda$ va $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix}2i\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$(\operatorname{Im}\tau)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad H\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = \frac12\left(x_1\bar y_1 + x_2\bar y_2\right)$$

$\longrightarrow \{\tau\in M_g(\mathbb{C}) : \tau=\tau^t, \operatorname{Im}\tau>0\}/G$ $\qquad$ Calcular $\{\tau\in M_g(\mathbb{C}) : \tau = \tau^t\}$ $\Rightarrow \frac{g(g+1)}{2}$

$M_g \hookrightarrow A_g$

No var. abel.

Sea E forma alternante real en Λ, y A su matriz con respecto a $\{l_1, \dots, l_{2g}\}$. Entonces E es la parte imaginaria de una forma Hermitiana $\iff \Pi A^{-1} \Pi^t = 0$

Ej no es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i\sqrt{2} & i\sqrt{5} \\ 0 & 1 & i\sqrt{3} & i\sqrt{7} \end{pmatrix}$

Fibrado en línea $L(H, \alpha)$, $\alpha : \Lambda \to S^1$

$$\alpha(l_1 + l_2) = \alpha(l_1) \cdot \alpha(l_2) (-1)^{E(l_1, l_2)}$$

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow NS(X) = \{H \text{ forma herm. } ; \mathrm{Im}(H(\Lambda \times \Lambda)) \subseteq \mathbb{Z}\}$$
$$L(H, \alpha) \longmapsto H$$

Sea $\{l_1, \dots, l_{2g}\}$ una base de Λ tq $\mathrm{Im}\, H = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = E$

$$E(l_i, l_{j+g}) = d_i \implies \Lambda = \underbrace{\{l_1, \dots, l_g\}}_{\Lambda_1} \oplus \underbrace{\{l_{g+1}, \dots, l_{2g}\}}_{\Lambda_2} \quad \text{desc. para } \Lambda$$

$$\alpha(\lambda) = e^{\pi i E(\lambda_1, \lambda_2)}$$
$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \lambda_i \in \Lambda_i .$$

$$\alpha(\lambda + \mu) = e^{\pi i E(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot e^{\pi i E(\mu_1, \mu_2)} \cdot \underbrace{e^{\pi i E(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2)}}_{(-1)}$$

$f : V/\Lambda \to V'/\Lambda'$ homo $\qquad f^* L(H', \alpha') = L(H' \circ (F, F), \alpha \circ F)$

$(-1) : V/\Lambda \to V/\Lambda \qquad z + \Lambda \mapsto -z + \Lambda$

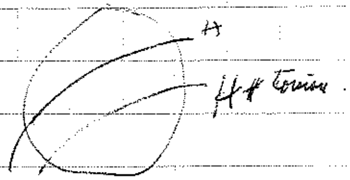
$$(-1)^* L(H, \alpha) = L(H, \alpha^{-1})$$

Def: L es simétrico si $(-1)^*L = L \iff L(H,\alpha) = L(H,\alpha^{-1})$

$\iff L(0,\alpha^2) = L(0,1) \iff$ Imagen$(\alpha) \subseteq \{\pm 1\}$

Corolario $\forall H \in NS(X)$, $\exists L(H,\alpha)$ simétrico.

Ejr Calcular $\#$ {fibrados simétricos}.

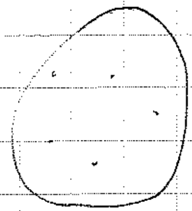


Lema: $x \in X$, $t_x : X \to X$ $\quad z+\Lambda \mapsto z+\Lambda+x$

1) $t_x^* L(H,\alpha) = L(H, \alpha e^{2\pi i E(\cdot,x)})$

2) $\forall \alpha, \beta$ semi-caracteres para H, existe $x \in X$ tal que

$$L(H,\alpha) = t_x^* L(H,\beta).$$



$$\varphi : X \to \hat{X}, \quad x \mapsto t_x^* L \otimes L^{-1}$$

Calcular los simétricos: $(-1)^* L(H,\alpha) = L(H,\alpha^{-1}) = L(H,\alpha) \iff \alpha^2 = 1$

Sea $L(H,1)$ el fibrado simétrico que encontramos

Todos los otros son $L(H, e^{2\pi i E(\cdot,x)})$

Queremos $e^{2\pi i E(\ell,2x)} = 1 \quad \forall \ell \in \Lambda$. $\iff E(\ell,2x) \in \mathbb{Z}, \forall \ell \in \Lambda$

$\bigoplus_{i=1}^{g} (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})^2 = \ker \varphi_H \qquad \varphi_H : X \to \hat{X}, \quad x \mapsto H(\cdot,x) + \hat{\Lambda}$

is Zamora

3

Haces lineales en v. a.

$X = V/\Lambda$ $\dim_{\mathbb{C}} V = g$, $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$, X proyectivo $\exists L$ haz lineal en X

compacto $\{s_0, \dots, s_N\}$ base de $H^0(X, L)$ $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$.

Lema : Sea $u : X \longrightarrow X'$ una aplicación holomorfa entre toros
$\Rightarrow \exists\ V \to V'$ afín etc etc.

L haz lineal sobre X. $\pi : V \xrightarrow{\pi} X$ $\Rightarrow$ $\pi^* L$ es trivial.

Acción de Λ en $V \times \mathbb{C} \longrightarrow L$, $\gamma \in \Lambda$ $\gamma(z,t) = (z+\gamma, e_\gamma(z) \cdot t)$

$$\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

$e_\gamma(z) : V \to \mathbb{C}^*$
holomorfa.

acción : $(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot (z,t) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2(z,t))$ $e_{\gamma_1+\gamma_2}(z) = e_{\gamma_1}(z+\gamma_2) \cdot e_{\gamma_2}(z)$.

$$\Rightarrow \quad e_\gamma(z) = \alpha(\gamma) \cdot e^{\pi H(\gamma,z) + \frac{\pi}{2} H(\gamma,\gamma)}$$

$\alpha : \Lambda \longrightarrow S^1$ $\alpha(\gamma_1+\gamma_2) = \alpha(\gamma_1) \cdot \alpha(\gamma_2)(-1)^{\omega(\gamma_1,\gamma_2)}$

H forma Hermitiana

$\omega = \operatorname{Im} H$ es forma real, alternada y $\omega|_{\Lambda \times \Lambda} \subset \mathbb{Z}$

$H = \omega(x, iy) + i\omega$.

Teo : Todo Haz lineal se obtiene de esa manera : $L = L(\alpha, H)$.

$L_1 = L_1(\alpha_1, H_1)$, $L_2 = L(\alpha_2, H_2)$ $\Rightarrow$ $L_1 \otimes L_2 = (\alpha_1\alpha_2, H_1 + H_2)$.

$c_1(H) = \omega$ (tipo top) y α tipo analítica.

Teo : (Lefschetz) Sea X un toro complejo y L un haz lineal tal que $H^0(X, L) \neq 0$
$\Rightarrow$ $L^{\otimes 2}$ define un morfismo y $L^{\otimes 3}$ es una inmersión.

- H definida positiva ($H(z,z) \in \mathbb{R}$ y así $H(z,z) > 0$)
tal que parte imaginaria $\omega|_{\Lambda \times \Lambda} \subset \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\exists$ base V tal que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_g) \quad d_i \in \mathbb{N}$$

$d_1 | d_2 | \dots | d_n$.

$H^0(X,L) = \prod_{i=1}^{g} d_i$.

Def.- Una varied. abel. es p.p. si ~~todo~~ existe L en X tal que
$h^0(X,L) = 1$.

$C \times C'$

- Moduli de vapp.

Espacio analítico o var. algebraica : A_g parametriza las clases de equiv de vapp $[X] \in A_g$ clase de equiv. de va.
$(X,H) \xrightarrow{\sim} (X',H')$ $\quad X \xrightarrow[\alpha]{\sim} X'$ $\quad \alpha^* H' \equiv_{alg} H$. $\quad \left(X \xrightarrow{3H} \mathbb{P}^{3^g-1} \right)$

→ Esp. Moduli : Si tenemos Λ ret y H una forma Hermitiana que define una pol. princ. en $X = V/\Lambda$ existe una base de $\mathbb{C}^g$ tq generador de Λ son las columnas (I_g, τ) $\tau^t = \tau$, $\operatorname{Im} \tau > 0$.

$X_\tau = X_{\tau'}$ sii $\exists\, \sigma \in Sp(2g,\mathbb{Z})$ $\sigma * \tau = \tau'$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\sigma * \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$

$\{ \tau^t = \tau , \operatorname{Im} \tau > 0 \} = \mathbb{H}_g$ espacio de Siegel

$\Rightarrow \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{H}_g / Sp(2g,\mathbb{Z}) = A_g$

Y no sing
$f : Y \to Z$ cubri. ramificado
y $R(f)$ tiene codim. al menos 2
$\Rightarrow B(f)$ será sing
Z en $f(Y)$

Afirmación : A_g es singular y para $g \geq 3$ su lugar singular
$\operatorname{Sing} A_g = \{ [X] \in A_g \; ; \; \exists \alpha \in \operatorname{Aut}(X,H) , \alpha \notin \{\pm 1\} \}$ → es de codim 2

$\mathbb{H}_g \to A_g$ es un cubrimiento ram. de espacios analíticos.
$\tau \in \mathbb{H}_g$ es ramificado si $\{ \sigma \in S_p \; / \; \sigma\tau = \tau \} \neq id$.
$\Downarrow$
$\exists$ una aplicación entera $\Lambda \to \Lambda$ no trivial
si esta se extiende a $\mathbb{C}^g$ como aplicación $\mathbb{C}$-lineal
si lo hace ya que es S_p

$f : Y \to X$ cubrimiento ramificado esp. analíticos no sing
$R(f) \subseteq Y$ $\quad |Jf| = 0$
$R(f) = V(|Jf|)$ hipersuperficie

- Def.- V = esp. vect. $/_{\mathbb{C}}$ dim g, $\Lambda < V$ subgrupo disc. de rango $2g$.
  subtoro $Y \subseteq X = V/\Lambda$, $Y = W/M$ $W \subset V$, $M = W \cap \Lambda$

- Def.- (homom. de toros) $f : X \to Y$ analítica tq que es homo. de grupos.
  Prop: (1) $X \xrightarrow{f} Y$ analítica $\Rightarrow$ $f - f_0$ es homo.
  (2)
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ V/\Lambda & \xrightarrow[f]{} & W/M \end{array}$$
  Si $f(0) = 0$, $\exists! F : V \to W$ lineal, $F(\Lambda) \subseteq M$.
  (repr. analítica de F)

  (3) Si $f(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f, (\ker f)_0$ son subtoros.

- Def.- (isogenia) $f : X \to Y$ entre toros, homo, sobre y ker finito.
  Ej.- $n \in \mathbb{Z}$, $n_X : X \to X$, $z \mapsto nz$ $\quad \ker n_X = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} = X[n]$ = pts de 2 torsion.

Prop: $X \xrightarrow{f} Y$ isogenia $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$, $g : Y \to X$ tq $f \circ g = n_Y$, $g \circ f = n_X$.

$$0 \to \ker c_1 \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to \operatorname{Im} c_1 \to 0$$
$$\ker c_1 = \operatorname{Pic}^0 X, \quad H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \operatorname{Pic} X, \quad \operatorname{Im} c_1 = NS(X)$$
$$NS(X) = \{H : V \times V \to \mathbb{C} \text{ Herm} : \operatorname{Im} H(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}$$
$$= \{E : V \times V \to \mathbb{R} \text{ altern. tq } E(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z},\ E(ix, iy) = E(x, y)\}$$

Si $X \subset \mathbb{P}^n \Rightarrow$ Fubini-Study $\Rightarrow \exists H$ positiva def. tal que $\operatorname{Im}(H(\Lambda \times \Lambda)) \subseteq \mathbb{Z}$.

- Teo (Lefschetz) Si $H : V \times V \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} H(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$, H pos. def.
  $\Rightarrow \exists \varphi : X \to \mathbb{P}^n$ inmersión.

Def.- Una variedad abeliana es un toro $X = V/\Lambda$ tq $\exists H : V \times V \to \mathbb{C}$ herm. pos. def. $\operatorname{Im} H(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$
(X, H) (ó (X, E)) se llama variedad v.a. polar.

Ej: $\mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle$ $H: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(z,w) \mapsto \frac{z\bar{w}}{\mathrm{Im}\,\tau}$

Prop: $\beta = \{v_1,\dots,v_g\}$ base de V y $\{l_1,\dots,l_{2g}\}$ base de Λ

$\Pi = [l_1,\dots,l_{2g}]_\beta$

X es ~~pa~~ v. a. $\Leftrightarrow \exists\, \overset{E}{A} \in M_{2g}(\mathbb{Z})$ no deg., alt. tq.

(1) $\pi A^{-1}\pi^t = 0$ (forma Hermitiana) $\to$ con $\mathrm{Im}\,H(\Lambda\times\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$.

(2) $i\pi A^{-1}\bar{\pi}^t > 0$ (def. positiva)

Ej: $\Lambda = \langle \binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{i\sqrt{2}}{i\sqrt{3}}, \binom{i\sqrt{5}}{i\sqrt{7}} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

$\mathbb{C}^2/\Lambda$ no es var. abeliana ya que de condiciones dep. entre los números.

$\to \bar{v}^t H v$ es real y positi

V/Λ $H: V\times V \to \mathbb{C}$ herm. pos. def. $\mathrm{Im}(H(\Lambda\times\Lambda)) \subseteq \mathbb{Z}$.

(V,H) v. a. polarizada. $\longrightarrow$ $\bar{H}^t = H$ $\mathrm{Im}\,H = E$

y siempre $\mathrm{Im}\,H(\Lambda\times\Lambda) \subseteq$

Fibrados en línea, Pic, pull-back.

$\Rightarrow$ $\pi: \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g/\Lambda$

Lema: $\mathrm{Pic}\,\mathbb{C}^g = \{0\}$. Los fibrados en línea serán cocientes del trivial por una acción Λ como sigue:

Def: $\theta: V \to \mathbb{C}$ es una función theta (holomorfa) para Λ

si $\Theta(z+l) = e^{2\pi i a_l(z) + b_l}\cdot\Theta(z)$, $\forall l \in \Lambda$

$a_l: V \to \mathbb{C}$ lineal, $b_l \in \mathbb{C}$.

Θ es normalizado de tipo (H,α) si

$$\Theta(z+l) = \alpha(l)\cdot e^{\pi H(l,z) + \frac{\pi}{2}H(l,l)}\,\Theta(z)$$

$H =$ forma Hermit.

$\alpha: \Lambda \to S^1$

$\alpha(l_1+l_2) = \alpha(l_1)\alpha(l_2)(-1)^{\mathrm{Im}}$

Prop $\Theta(z) = \tilde{\Theta}(z)\, e^{Q(z)}$, $\tilde{\Theta}$ fn theta normalizada
Q polin. cuadrático.

Ejr $\tau \in M_g(\mathbb{C})$ $\tau^t = \tau$ $\operatorname{Im}\tau > 0$, $a, b \in \mathbb{C}^g$.

$$\Theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](\tau, z) = \dots$$

$\Lambda \curvearrowright V \times \mathbb{C}$, $\ell \cdot (z,t) = (z+\ell, e_\ell(z)\, t)$
y para que llegue a ser fibr. en línea para V/Λ , $e_\ell(z)$ satisface algo por los cociclos para que se satisfaga lo de la función Θ norm.

$$\Rightarrow \quad e_\ell(z) = \alpha(\ell)\, e^{\pi H(\ell, z) + \frac{\pi}{2} H(\ell, \ell)}$$

Prop: $(V \times \mathbb{C})/\Lambda$ es un fibrado en líneas en V/Λ y se denota por $L(H,\alpha)$

Teo (Humbert-Apell) $\operatorname{Pic}(X) = \{ L(H, \alpha)$, H forma, Herm, $\operatorname{Im} H(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$.

$$L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2) = L(H_1 + H_2, \alpha_1 \alpha_2)$$

$$0 \to \operatorname{Pic}^0(X) \to \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} NS(X) \longrightarrow 0$$
$$L(H,\alpha) \mapsto \operatorname{Im} H$$

$\operatorname{Pic}^0(X) = \{ L(0, \alpha) : \alpha : \Lambda \to S^1 \text{ Hom} \} = \operatorname{Hom}(\Lambda, S^1)$ toro dual.

También el $\bar{\Omega}/\hat{\Lambda} = \operatorname{Pic}^0(X) = \hat{X}$

$\to$ Si existe H tal que X es v. abel con ese H.

$$\varphi_H : X \longrightarrow \hat{X}$$
$$x \mapsto H(x, \cdot) + \hat{\Lambda}$$

es un homomorfismo sobre (H no deg) y $\ker \varphi_H$ es finito.

$g=1$, $X = \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}}$ $\quad \tau \in \mathbb{H}$

$$\hat{X} = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) / \hat{\Lambda}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ \cong \\ \mathbb{C} \end{array}$$

$\lambda(z) = \bar{z}\,\lambda(1) \quad \Rightarrow \quad \hat{\Lambda} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}\,\tau} \oplus \frac{\tau\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}\,\tau}$.

$H(z,w) = \dfrac{z\bar{w}}{\mathrm{Im}\,\tau}$

<u>Prop</u>: H ; $\mathrm{Im}H : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$\exists$ une base de réel tq V g dim $\langle\Lambda\rangle_{\mathbb{R}} = V$

$e_1,\dots,e_{2g} \in \Lambda$

tal que $\mathrm{Im}H = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix}$ $\quad d_i / d_{i+1}$.