

mp. Abel. : la Variedad de Albanese.

(1)

$X =$ variedad proj. suave / \mathbb{C} . Entonces existe variedad abeliana

$\text{Alb}(X)$ y morfismo $X \xrightarrow{\alpha_p} \text{Alb}(X)$ con la siguiente prop. universal
 $p \mapsto 0$

6

(*) Para todo toro complejo T y morfismo $X \xrightarrow{f} T$ holomorfo, existe $\text{Alb}(X) \xrightarrow{\tilde{f}} T$ único morfismo de toro tal que $\tilde{f} \circ \alpha = f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & T \\ \alpha_p \downarrow & & \downarrow \tau_{-f(p_0)} \\ \text{Alb}(X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & T \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Hodge } b_1 = 2g \\ g = \dim h^0(\Omega_X^1) \end{array} \right)$$

(α_p^* es iso. entre $H^0(\text{Alb}, \mathbb{Z}^g) \rightarrow$)

em: Asumir lo siguiente: $i: H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^*$ el mapeo definido por

$$\langle i(\gamma), \omega \rangle = \int_{\gamma} \omega \quad \text{para } \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z}), \omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$$

\Rightarrow Imagen de $i =$ reticulado y cociente es variedad abeliana.

\rightarrow Fijar $p_0 \in X$ y $\Lambda = \text{Im } i$, $\Omega = H^0(X, \Omega_X^1)$, $A = \Omega^* / \Lambda$.

Dado $x \in X$, definir $a(C_x) = \int_{C_x} \omega$ y $C_x = p_0^{-1} \sim x$.

La clase $a(C_x)$ depende sólo de x en A ; $\alpha(x)$

\rightarrow Holomorfo: $\overline{D_x} =$ segmento chico dentro de bola \Rightarrow localmente analítica en \mathcal{U}

\rightarrow Queremos tener $H^0(X, \Omega_X^1)^* \rightarrow \mathbb{C}^g$ donde $\mathbb{C}^g / \Lambda = T$.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{X} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^g \\ \downarrow \\ X \longrightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda = T \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi = (\phi_1, \dots, \phi_g) \text{ holom. Ver } \pi_1(X, p_0) \text{ como transg. en } \\ \tilde{X} \xrightarrow{\alpha} \tilde{X} \text{ (determinados por } \tilde{\alpha}_i) \\ \Rightarrow \text{ induce transg. en } \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^g \quad \phi(z) + \Lambda = \phi(\alpha(z)) \\ \Rightarrow d(\phi_i \circ \alpha) = d\phi_i \Rightarrow d\phi_i \in H^0(\Omega_X^1) = \langle \omega_1, \dots, \omega_g \rangle \end{array}$$

choose it next!

$$d\phi_i = \sum_{j=1}^g a_{ij} \omega_j \rightsquigarrow \text{linear map } A: H^0(\Omega_X^1)^* \rightarrow \mathbb{C}^g$$

y $A(H(X, \mathbb{Z})) \subset \Lambda \Rightarrow$ repr. analítica $\text{Alb}(X) \xrightarrow{\alpha} T$
 y sólo depende de p_0 .

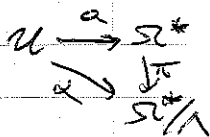
casos particulares.

(2)

Dado un toro analítico V/Γ , $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T =$ haz tangente y $V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ el haz cotangente. Las secciones globales de \mathcal{O}_T^1 están en biyección con V^* : $z^* \in V^* \Rightarrow z^*: V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $z^*(v+y) = z^*(v) + z^*(y) \rightsquigarrow d(z^*)$ en $H^0(T, \mathcal{O}_T^1)$.

Dada variedad compacta analítica X , podemos crear $\text{Alb}(X) = A$ y por ① $H^0(X, \mathcal{O}_X^1) \xrightarrow{\sim} H^0(A, \mathcal{O}_A^1)$.

El mapeo $X \xrightarrow{\alpha_p} \text{Alb}(X)$, $x \mapsto \{w \mapsto \int_x w\}$
 da así



$$d_p^*(\int w) = \underbrace{\alpha^* \pi^*}_{\text{local}} (\int w) = \alpha^* d(\langle w, \cdot \rangle)$$

$$\text{y } d(\langle w, \alpha(x) \rangle) = d\left(\int_p^x w\right) = w(x) \Rightarrow \boxed{H^0(X, \mathcal{O}_X^1) \xrightarrow[\sim]{d_p^*} H^0(A, \mathcal{O}_A^1)}$$

casos extra :

Prop 1: $X =$ smooth proj. var. $n \geq 3$ y $N \hookrightarrow X$ smooth hyperplane section
 $\Rightarrow (\text{Pic}^0(X), H_X) \cong (\text{Pic}^0(N), H_N)$

Prop 1: (X, H) pl. Abel. var. $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ y $S =$ sup. proy. suave
 tal que $(X, mH) \cong (\text{Pic}^0(S), H_S)$

Prop. Universal: $T = V/\Gamma$ toro complejo
 $f: X \rightarrow T$ morfismo.

1) unicidad: $H^0(X, \Omega_X^1) \xleftarrow{f^*} H^0(T, \Omega_T^1)$
 $\triangle \uparrow \alpha^*$
 $H^0(A, \Omega_A^1) \xleftarrow{f^*}$ existe ya que α^* isom.

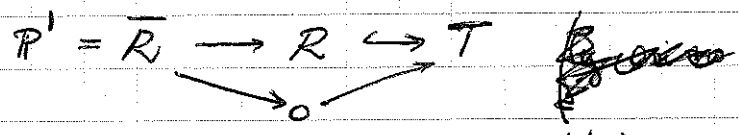
\Rightarrow tenemos $\hat{f}: \text{Alb}(A) \rightarrow T$ y es determinado salvo fijas un punto.

2) existencia es la de curvas dual y el hecho de que $\tilde{F}(\Lambda) \subset \Gamma$.

otra manera

3) $\dim \text{Alb}(X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1)$ y así si es = 0

\Rightarrow Todo morfismo $X \rightarrow T = \text{Toro}$ es trivial. En particular, Toros no contienen curvas racionales:



y así en general $X \rightarrow \text{Alb}(X)$ no es 1-1.

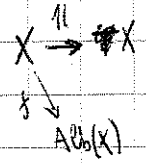
(4) $X \rightarrow Y$ morfismo entre var. proy. suaves \Rightarrow $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \alpha & \searrow F & \downarrow \beta \\ \text{Alb}(X) & \xrightarrow{F} & \text{Alb}(Y) \end{array}$ Función

$\alpha(X)$ genera $\text{Alb}(X)$ (no hay subtoro $T \subsetneq \text{Alb}(X)$ con $\alpha(X) \subset T$, ya que sino T sería el universal)

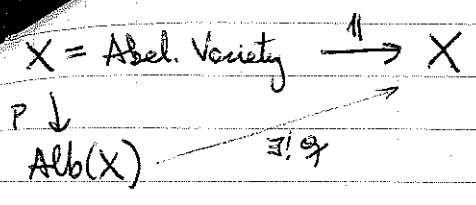
Así, si $\text{Alb}(X) \neq \{0\} \Rightarrow \alpha(X)$ no es trivial. Si $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow F$ es sobre también. $\left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \alpha & \searrow F & \downarrow \beta \\ \text{Alb}(X) & \xrightarrow{F} & \text{Alb}(Y) \end{array} \right)$

Ej: $X = \text{superf. con } h^0(\Omega_X^1) > 0 \Rightarrow X \rightarrow \text{Alb}(X)$ no trivial y si $P^1 \subset X \Rightarrow$ no 1-1.

(*) $X = \text{curva} \Rightarrow \text{Alb}(X) = JX$.



(B) $X = \text{variedad abeliana} \Rightarrow X \simeq \text{Alb}(X)$



$g \circ p = \text{id}_X \Rightarrow p \text{ 1-1}$
 $\text{y } \dim X = \dim \text{Alb}(X) \Rightarrow p \text{ isom.}$

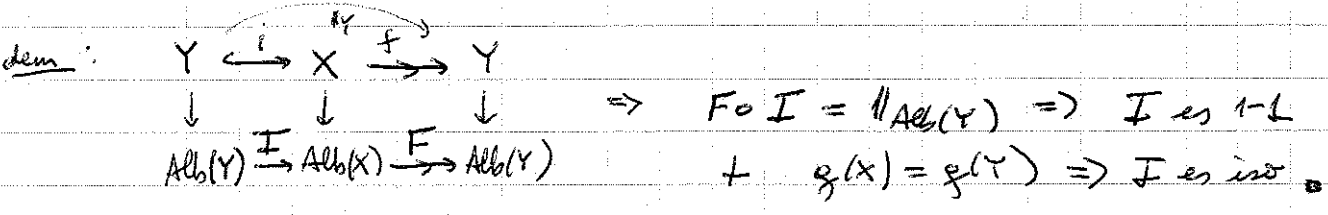
5) Producto (yo cruz) $\text{Alb}(X \times Y) = \text{Alb}(X) \times \text{Alb}(Y)$

El mapeo $i: H_1(X \times Y, \mathbb{Z}) \cong H_1(X, \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y}^*)^* = H^0(X, \mathcal{O}_X^*)^* \oplus H^0(Y, \mathcal{O}_Y^*)^*$

$$\langle i(\gamma), \omega \rangle = \int_Y \omega = \int_{Y_1 + Y_2} \omega = \int_{Y_1} \omega_1 \oplus \int_{Y_2} \omega_2$$

$\Rightarrow \text{Im}(i) = \text{ret. } \Lambda \text{ con } \Lambda \cap H^0(X, \mathcal{O}_X^*)^* = \Lambda_X \text{ y asi para } Y.$
 $\Rightarrow \text{Alb}(X \times Y) = \text{Alb}(X) \times \text{Alb}(Y).$

6) Asumir $Y \xrightarrow{i} X$ inclusion entre variedades suaves proyectivas ^{med, red.}
 $\downarrow f$
 $\Rightarrow \text{Alb}(X) = \text{Alb}(Y).$ f solve tal que $f \circ i = \text{id}_Y$ y $g(X) = g(Y)$



Ej: $S \xrightarrow{\pi} B = \text{curva con seccion y una fibra simplemente conexa}$
 $\text{sup.} \Rightarrow \pi_1(S) \cong \pi_1(B) \Rightarrow g(X) = g(Y)$
 $\Rightarrow \text{Alb}(S) = \text{Jac}(B).$ (Image of S es la curva $B \hookrightarrow \text{Jac}(B)$)

7) Vimos que para superficie S , $\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ tiene imagen $\neq (0)$ / Si $S \cong T \rightarrow \text{Alb}(T) \cong \text{Alb}(S)$
 Asumir $\alpha(S) = \text{curva } C \Rightarrow C = \text{mueva de genes } g \text{ y las fibras de } \alpha \text{ son conexas. } C \text{ (Usar generalizacion stein)}$
 $\Rightarrow \text{Alb}(T) \cong \text{Alb}(S)$

8) Dado $C = \text{curva suave proj} \Rightarrow C \rightarrow \text{Alb}(C)$ curva imagen tiene que ser una curva. Sea N su normalizacion $C \rightarrow \text{Alb}(C)$
 $\Rightarrow \text{Alb}(N) \cong \text{Alb}(C)$ por la prop. universal.

Para sabemos el $C \hookrightarrow \text{Alb}(C)$ con lo que $C = N$.