...up. abel. : la variedad de Albanese (1)

X = variedad proj. suave / $\mathbb{C}$. Entonces existe variedad abeliana $\mathrm{Alb}(X)$ y morfismo $X \xrightarrow{\alpha_p} \mathrm{Alb}(X)$ con la siguiente prop. universal
$p_0 \mapsto 0$

(*) Para todo toro complejo T y morfismo $X \xrightarrow{f} T$ holomorfo, existe $\mathrm{Alb}(X) \xrightarrow{\tilde{f}} T$ único morfismo de toro tal que $\tilde{f} \circ \alpha = f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & T \\ {\scriptstyle \alpha_{p_0}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle t_{-f(p_0)}} \\ \mathrm{Alb}(X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & T \end{array}$$

(Hodge $b_1 = 2g$, $g = \dim h^0(\Omega^1_X)$)

(α_p^* es iso. entre $H^0(\mathrm{Alb}, \Omega^1) \to$

...em: Asumir lo siguiente: $i : H_1(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X, \Omega^1_X)^*$ el mapeo definido por

$$\langle i(\gamma), \omega \rangle = \int_\gamma \omega \quad \text{para } \gamma \in H_1(X,\mathbb{Z}),\ \omega \in H^0(X,\Omega^1_X)$$

$\Rightarrow$ Imagen de i = <u>reticulado</u> y cociente es variedad abeliana.

$\to$ Fijar $p_0 \in X$ y $\Lambda = \mathrm{Im}\, i$, $\Omega = H^0(X, \Omega^1_X)$, $A = \Omega^*/\Lambda$.
Dado $x \in X$, definir $a(C_x) = \{\omega \mapsto \int_{C_x} \omega\}$ $C_x = p_0 \rightsquigarrow x$.
La clase $a(C_x)$ depende sólo de x en A : $\alpha(x)$

$\to$ Holomorfa : $\overline{qx}$ = segmento único dentro de bola $\Rightarrow$ localmente analítica en U
U = Bola $\subset \mathbb{C}^n$

$\to$ Queremos tener $H^0(X, \Omega^1_X)^* \to \mathbb{C}^g$ donde $\mathbb{C}^g/_H = T$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^g \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/_H = T \end{array}$$

$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_g)$ holom. Ver $\pi_1(X, p_0)$ como transf. en $\tilde{X} \xrightarrow{\gamma} \tilde{X}$ (determinados por $\tilde{\gamma}$)

$\Rightarrow$ induce transf. en $\mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g$ $\phi(z) + \lambda = \phi(\gamma(z))$

$\Rightarrow d(\phi_i \circ \gamma) = d\phi_i \Rightarrow d\phi_i \in H^0(\Omega^1_X) = \langle \underline{\omega_1, \dots, \omega_g} \rangle \to$ choose it right!

...traslación

$d\phi_i = \sum_{j=1}^{g} a_{ij}\omega_j \rightsquigarrow$ linear map $A : H^0(\Omega^1_X)^* \longrightarrow \mathbb{C}^g$

y $A(H_1(X,\mathbb{Z})) \subset H$ $\Rightarrow$ rep. analítica $\mathrm{Alb}(X) \xrightarrow{\alpha} T$

y sólo depende de p_0.

…gunos preparativos.

① Dado un toro analítico V/Γ $\overset{T}{/\!/}$, $V\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_T$ = haz tangente y $V^*\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_T$ el haz cotangente. Las secciones globales de Ω^1_T están en biyección con V^*: $x^*\in V^* \Rightarrow x^*: V\to\mathbb{C}$ tal que $x^*(v+\gamma) = x^*(v)+n(\gamma) \rightsquigarrow d(x^*)$ en $H^0(T,\Omega^1_T)$.

Dada variedad compacta analítica X, podemos crear $Alb(X) = A$ y por ① $H^0(X,\Omega^1_X) \xrightarrow[\delta]{\sim} H^0(A,\Omega^1_A)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \Omega^* \arrow[d, "\pi"] \\ & \Omega^*/\Lambda \end{tikzcd}$$

El mapeo $X \xrightarrow{\alpha_p} Alb(X)$, $x \mapsto \{\omega \mapsto \int_x \omega\}$ dará

$$\alpha_p^*(\delta\omega) = \underbrace{a^*\pi^*(\delta\omega)}_{local} = a^* d(\langle \omega, \cdot \rangle)$$

$$\text{y } d(\langle \omega, a(x)\rangle) = d\left(\int_p^x \omega\right) = \omega(x) \Longrightarrow \boxed{H^0(X,\Omega^1_X) \xrightarrow[\sim]{\alpha_p^*} H^0(A,\Omega^1_A)}$$

…atos extra:

Prop 1: X = smooth proj. var. $n\geq 3$ y $N \hookrightarrow X$ smooth hyperplane section $\Rightarrow (Pic^0(X), H_X) \simeq (Pic^0(N), H_N)$.

Prop 1: (X,H) pol. abel. var. $\Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{N}$ y S = sup. proy. suave tal que $(X, mH) \simeq (Pic^0(S), H_S)$.

2

→ Prop. universal : $T = V/\Gamma$ toro complejo y $f : X \to T$ morfismo.

1) Unicidad : $H^0(X,\Omega^1_X) \xleftarrow{f^*} H^0(T,\Omega^1_T)$

$\simeq \uparrow \alpha^*$

$H^0(A,\Omega^1_A) \leftarrow \tilde{f}^*$ existe ya que α^* isom.

$\Rightarrow$ tenemos $\hat{f} : Alb(A) \to T$ y es determ salvo fijar un punto.

2) existencia es lo de arriba dual y el hecho de de $\tilde{F}(\Lambda) \subset \Gamma$ ■

otra manera

os)

) $\dim Alb(X) = \dim H^0(X,\Omega^1_X)$ y así si es $=0$

$\Rightarrow$ Todo morfismo $X \to T$= Toro es trivial. En particular, Toros no contienen curvas racionales:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 = \bar{R} \arrow[r] \arrow[dr] & R \arrow[r, hook] & T \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

y así en general $X \to Alb(X)$ no es 1-1.

(4) $X \to Y$ morfismo entre vari. proy. suaves $\Rightarrow$ $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Alb(X) \arrow[r, "F"] & Alb(Y) \end{tikzcd}$ F único

$\alpha(X)$ genera $Alb(X)$ (No hay subtoro $T \subsetneq Alb(X)$ con $\alpha(X) \subset T$, ya que sino T sería el universal)

Así, si $Alb(X) \neq (0) \Rightarrow \alpha(X)$ no es trivial. Si $X \twoheadrightarrow Y$ $\Rightarrow$ F es sobre también. $\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ Alb(X) \arrow[r, "F"] & T \subsetneq Alb(Y) \end{tikzcd}\right)$

Ejl. X = superf. con $h^0(\Omega^1_X) > 0 \Rightarrow X \to Alb(X)$ no trivial y si $\mathbb{P}^1 \subset X \Rightarrow$ no 1-1.

(2) X = curva $\Rightarrow Alb(X) = JX$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\shortparallel"] \arrow[d, "f"] & X \\ Alb(X) & \end{tikzcd}$$

(3) X = Variedad abeliana $\Rightarrow X \simeq Alb(X)$

$$\begin{tikzcd} X = \text{Abel. Variety} \arrow[r, "1\!\!1"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathrm{Alb}(X) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, g"'] & \end{tikzcd}$$

$g \circ p = 1\!\!1_X \Rightarrow p$ 1-1
y $\dim X = \dim \mathrm{Alb}(X) \Rightarrow p$ isom.

5) Producto (Yo creo) $\mathrm{Alb}(X\times Y) = \mathrm{Alb}(X) \times \mathrm{Alb}(Y)$

El mapeo $i : H_1(X\times Y, \mathbb{Z}) \simeq H_1(X,\mathbb{Z}) \oplus H_1(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X\times Y, \Omega^1_{X\times Y})^* = H^0(X,\Omega^1_X)^* \oplus H^0(Y,\Omega^1_Y)^*$

$$\langle i(\gamma), \omega\rangle = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega_1+\omega_2 = \int_{\gamma_1}\omega_1 \oplus \int_{\gamma_2}\omega_2$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(i) = \text{ret. } \Lambda$ con $\Lambda \cap H^0(X,\Omega^1_X)^* = \Lambda_X$ y así para Y.
$\Rightarrow \mathrm{Alb}(X\times Y) = \mathrm{Alb}(X) \times \mathrm{Alb}(Y)$.

6) Asumir $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ inclusión entre variedades (irred, red.) suaves proyectivas, $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$, f sobre tal que $f\circ i = 1\!\!1_Y$ y $q(X) = q(Y)$
$\Rightarrow \mathrm{Alb}(X) = \mathrm{Alb}(Y)$.

dem:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "1\!\!1_Y"] \arrow[d] & X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \mathrm{Alb}(Y) \arrow[r, "I"] & \mathrm{Alb}(X) \arrow[r, "F"] & \mathrm{Alb}(Y) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F\circ I = 1\!\!1_{\mathrm{Alb}(Y)} \Rightarrow I$ es 1-1
$+\ q(X) = q(Y) \Rightarrow I$ es iso ∎

Ej: $S \twoheadrightarrow B$ = curva con sección y una fibra simplemente conexa.
(S sup.) $\Rightarrow \pi_1(S) \simeq \pi_1(B) \Rightarrow q(X) = q(Y)$
$\Rightarrow \mathrm{Alb}(S) = \mathrm{Jac}(B)$. (Image of S es la curva $B \hookrightarrow \mathrm{Jac}\, B$).

7) Vimos que para superficie S, $\alpha : S \to \mathrm{Alb}(S)$ tiene imagen $\neq (0)$.
Asumir $\alpha(S)$ = curva C $\Rightarrow C$ = suave de género q y las fibras de α son conexas. (Usar factorización Stein)

Si $S \overset{f}{\twoheadrightarrow} T \to$ (α) con f sobre $\Rightarrow \mathrm{Alb}(T) \simeq$

Ej: Dado C = curva suave proj $\Rightarrow C \longrightarrow \mathrm{Alb}(C)$ cuya imagen tiene que ser una curva. Sea N su normalización

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\text{finito}"'] & \mathrm{Alb}(C) \\ N \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mathrm{Alb}(N) \simeq \mathrm{Alb}(C)$ por la prop. universal.
Pero sabemos el $C \hookrightarrow \mathrm{Alb}(C)$ con lo que $C = N$.