uperficies Abelianas (1-Octubre-2012)

éo: Dada X = variedad proy. suave $/_{\mathbb{C}}$ y $p \in X$, existe variedad abeliana $Alb(X)$ ($\dim = g(X) = h^0(\Omega^1_X)$) y $\alpha_p : X \longrightarrow Alb(X)$ morfismo holomorfo la cual satisface la prop. universal

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\alpha_p"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Alb(X) \arrow[dr, "\exists!\ \tilde{f}"'] & & T = \text{toro complejo} \arrow[dl, "t_{-f(p)}"] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

oy: usar $Alb(X)$ cuando X = superficie.

éo: X = sup. $\Rightarrow \alpha(X)$ = curva o superficie. Si $\alpha(X)$ = curva $\Rightarrow \alpha(X)$ es suave de género $g(X)$ y $\alpha : X \to \alpha(X)$ es fibración conexa. Tenemos $Alb(X) = Jac(\alpha(X))$.

dem:
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & N \arrow[r, "n"] \arrow[d] & Alb(X) \\
Alb(X) \arrow[r, "f'"] & Jac(N) \arrow[ur, "n'"'] &
\end{tikzcd}$$
donde N = normalización de $\alpha(X)$

$$n' \circ f' \circ \alpha = n \circ f = \alpha$$

y como $1\!\!1 \circ \alpha = \alpha$, por la prop universal tenemos $n' \circ f' = 1\!\!1 \Rightarrow f'$ es 1-1 $\Rightarrow n'$ y f' son isomorfismos. Pero $N \hookrightarrow Jac(N) \Rightarrow N \hookrightarrow Alb(X) \Rightarrow \alpha(X) = N$ y así género$(\alpha(X)) = g(X)$.

Riemann surfaces

Para conexidad: Stein + norm $X \longrightarrow M \xrightarrow{\text{finito}} N$ usando arriba con M (en vez de N), $Jac(M) \xrightarrow[\sim]{\text{conexa}} Jac(N) \Rightarrow$ finito es isomorfismo ∎

$$\begin{tikzcd}
\text{pt.} & X = \text{superficie} \arrow[l, "g(X)=0"'] \arrow[dl, "g(X)>0"'] \arrow[dr] & \\
\alpha(X) = \text{curva suave género } g(X) \text{ fibr y } Jac\,\alpha(X) = Alb(X) & & \text{superficie} \subset Alb(X)
\end{tikzcd}$$

o : X = superficie con $p_g = 0$ y $q \geq 1$ $\Rightarrow$ $\alpha(X)$ = curva.

n: Si $\alpha(X)$ = superficie $\Rightarrow$ $X \xrightarrow{\alpha} \alpha(X)$ es genéricamente finito (dim fibra $= 0$ para casi todos). Así existe $\mathcal{U} \subset \alpha(X)$ abierto Zariski donde $\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{U}$ es cubrimiento topológico.
Tomar $p \in \mathcal{U}$ nueva coord $u_1, \dots, u_q$ en $Alb(X)$ con $\alpha(X)$ en p $= \{u_3 = 0, \dots, u_q = 0\}$. u_1, u_2 parámetros y $du_1 \wedge du_2$ es diferencial 2 y se extiende en $Alb(X)$ $\Rightarrow$ $\alpha^*(du_1 \wedge du_2)$ termina siendo una 2-dif. holom. en X y no cero $\rightarrow\leftarrow$. ∎

∴ Mirar Beauville cap. VI (pp 68 → 86) con clasificación para ellas.

o : X', X no regladas y minimales $\Rightarrow$ cualquier mapeo biracional entre ellos es isomorfismo (Unicidad modelo minimal).

m :
$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[dl] \arrow[dr, "f"] & \\ X' \arrow[rr, dashed] & & X \end{tikzcd}$$

Si $X' \longrightarrow X$ $\Rightarrow$ listos. Suponer resolución mínima $X' \longleftarrow \hat{X}$. En $\hat{X}$ vive la última E (-1)-curva tal que $f(E) = C$ = curva.
... $\boxed{K_X \cdot C \leq -2}$ y así $C^2 \geq 0$. Tenemos $h^0(nK_X) = 0$ $\forall n$ (ya que $0 \leq D \sim nK_X$ y $C^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $0 \leq D \cdot C = -2n$ $\rightarrow\leftarrow$)

Caso 1 : $q(X) = 0$ $\Rightarrow$ usar Teo de Castelnuovo para decir X = racional.

Caso 2 : $q(X) > 0$ $\Rightarrow$ $X \xrightarrow{\alpha} \alpha(X)$ albanese ($p_g = h^0(K_X) = 0$).
Como C = racional $\Rightarrow$ $C \subset$ fibra y $C^2 \geq 0 \Rightarrow F = rC$ con $C^2 = 0$ $\Rightarrow$ $C^2 = 0$, $CK = -2$ y $r = 1$ $\Rightarrow g(C) = 0$ y $F = \mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ genéricamente $\mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ reglada $\rightarrow\leftarrow$. ∎

∴ Cada clase biracional no reglada contiene una única superficie minimal. (sup. abelianas son minimales)

eo : $X =$ sup. proy. suave $/_{\mathbb{C}}$ y minimal. Entonces,
$$X = \text{Var. abeliana} \iff \kappa = 0,\ p_g = 1,\ q = 2$$

dem : $\Rightarrow$) obvio. $\Leftarrow$) Primero se hace un análisis de K_X sabiendo que $\kappa = 0 \Rightarrow K^2 = 0$. Luego considerar $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ y se analizan los casos $\alpha(X) = \underset{\text{super.}}{\text{curva}} + \begin{matrix}\kappa = 0 \\ \kappa \neq 0\end{matrix}$ (ie 4 casos), 3 de ellos generan contradicciones excepto α sobre y $\kappa = 0$.

En este caso, η_1, η_2 base de $H^0(\mathrm{Alb}, \Omega^1_{\mathrm{Alb}})$, $\omega_1 = \alpha^*\eta_1$ y $\omega_2 = \alpha^*\eta_2$
$\Rightarrow$ $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ da como ceros al lugar geom. de ramificación. Pero ω es trivial y así no hay ramificación.
$\Rightarrow$ $X \twoheadrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ es étale

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{étale}"'] \arrow[dr] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "\text{étale}"] \\ X \arrow[r, "\text{étale}"'] & \mathrm{Alb}(X) \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} & \mathbb{C}^2 \arrow[dl, "\text{étale}"'] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\text{étale}"'] & \mathrm{Alb}(X) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\pi_1 \leq \Lambda$ y compacto
$\Rightarrow$ π_1 es reticulado y X es toro ∎

$\boxed{\text{Análisis Abelianas}}$: (X, L) con polarización $L \longleftrightarrow \mathrm{Im}\, H = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ **R-R** : $\chi(L) = h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \frac{1}{2} L^2$
ya que $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$ y $K = 0$. En efecto,

Teo ($X =$ Sup. Abel.) L amplio $\iff$ $h^i(L) = 0$ $i = 1, 2$ y $L^2 > 0$ $\iff$ $h^0(L$ … L^2 …

(**dem**: L amplio $\Rightarrow$ $h^1(L) = h^1(-L) = 0$ y $h^2(L) = h^0(-L) = 0$ y $L^2 > 0$.
pero esto implica amplio en una sup. Abel. (ver Lange))

Si L es amplio $\Rightarrow$ $h^0(L) = d_1 \cdot d_2 = \dfrac{L^2}{2}$, $\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{d_1 d_2 - 1}$

$\longrightarrow$ **Adjunción** : Si $p_a(D) = (-1)^1(\chi(\mathcal{O}_D) - 1) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$
$\Rightarrow$ $2p_a(D) - 2 = D^2$, $D =$ divisor efectivo.

Ej. $E \subset X$ elíptica $\Rightarrow E^2 = 0$ y $h^0(E) > 0$ no amplio

obs 1 : No hay curvas racionales en X. ($\mathbb{P}^1$ ver adj.)
obs 2 : $C \in |L|$, L amplio $\Rightarrow$ $p_a(C) = d_1 d_2 + 1$.

(así si $C =$ género 1 $\Rightarrow$ no amplio, ya que amplio $\Rightarrow$ $d_1 d_2 > 0$.
de esta manera, $g(C) = 1 \Rightarrow C^2 = 0$ (o usando adjunción))