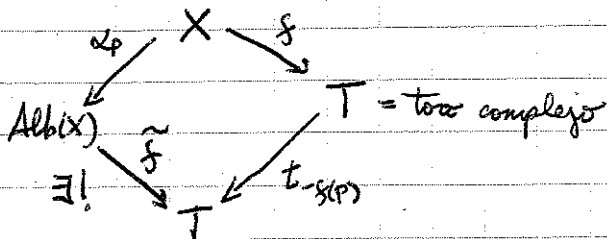
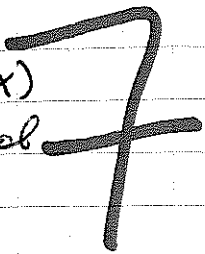


Superficies Abelianas (1-October-2012)

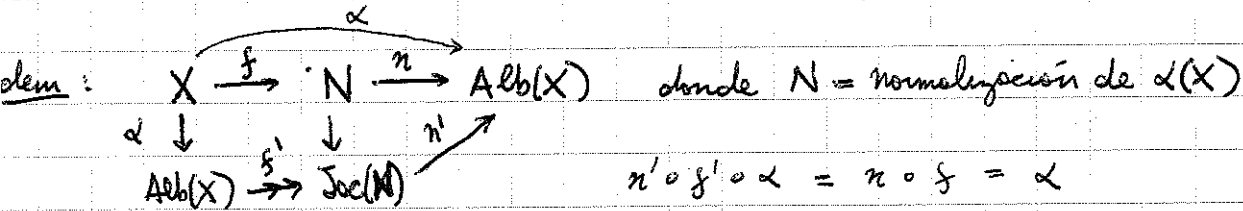
(13)

Def: Dada $X =$ variedad proy. suvete $|_{\mathbb{C}}$ y $p \in X$, existe variedad abeliana $Alb(X)$ ($dim = g(X) = h^0(\omega_X)$) y $d_p: X \rightarrow Alb(X)$ morfismo holomorfo lo cual satisface la prop. universal



Def: usar $Alb(X)$ cuando $X =$ superficie.

Def: $X =$ sup. $\Rightarrow d(X) =$ curva o superficie. Si $d(X) =$ curva $\Rightarrow d(X)$ es suvete de género $g(X)$ y $d: X \rightarrow d(X)$ es aplicación conexa. Tenemos $Alb(X) = Jac(d(X))$.



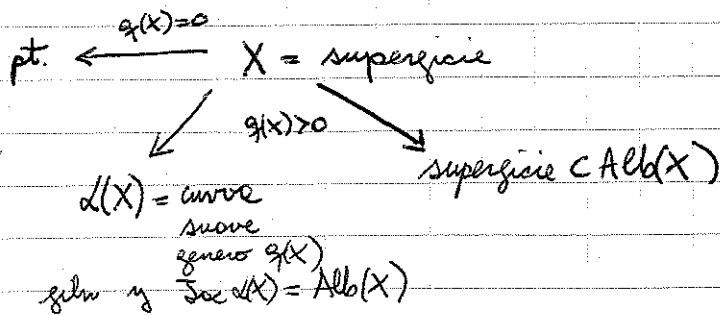
$$n' \circ f' \circ \alpha = n \circ f = \alpha$$

y como $\| \alpha = \alpha$, por la prop. universal tenemos $n' \circ f' = \| \Rightarrow f'$ es 1-1 $\Rightarrow n'$ y f' son isomorfismos.

Pero $N \hookrightarrow Jac(N) \Rightarrow N \hookrightarrow Alb(X) \Rightarrow d(X) = N$ y así género $(d(X)) = g(X)$.

Reintegro superficies

Para conexidad: Stein + norm $X \rightarrow M \xrightarrow{\text{zinto}} N$ usando curvas con M (en vez de N), $Jac(M) \xrightarrow{\text{conexa}} Jac(N) \Rightarrow$ zinto es isomorfismo



o: $X = \text{superficie}$ con $p_g = 0$ y $g \geq 1 \Rightarrow d(X) = \text{curva}$.

u: Si $d(X) = \text{superficie} \Rightarrow X \xrightarrow{\alpha} d(X)$ es genéricamente junto (dim fibra = 0 para casi todos). Así existe $U \subset d(X)$ abierto Zariski donde $d^{-1}(U) \xrightarrow{\alpha} U$ es cubrimiento topológico.

Tomar $f \in U$ mover coord u_1, \dots, u_g en $\text{Alb}(X)$ con $d(X)$ en $g = \{u_1=0, \dots, u_g=0\}$. u_1, u_2 parámetros y $du_1 \wedge du_2$ es diferencial 2 y se extiende en $\text{Alb}(X) \Rightarrow d^*(du_1 \wedge du_2)$ termine siendo una 2-dif. holom. en X y no cero $\rightarrow \leftarrow$.

∴ Minor Beauville cap. VI (pp 68 \rightarrow 86) con clasificación para ellas.

o: X', X no resgadas y minimaliz \Rightarrow cualquier mapeo birracional entre ellos es isomorfismo (unidad modelo minimal).

m: $\begin{matrix} & \hat{X} & \\ & \swarrow f & \\ X' & \dashrightarrow & X \end{matrix}$ Si $X' \rightarrow X \Rightarrow$ listas. Suponer resolución mínima $X' \leftarrow \hat{X}$. En \hat{X} vive la última E (-1) -urva tal que $f(E) = C = \text{curva}$.

... $K_X \cdot C \leq -2$ y así $C^2 \geq 0$. Tenemos $h^0(nK_X) = 0 \forall n$ (ya que $0 \leq D \sim nK_X$ y $C^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq D \cdot C = -2n \rightarrow \leftarrow$)

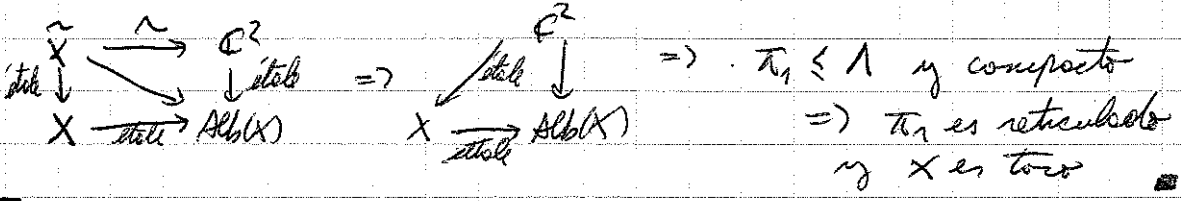
Caso 1: $g(X) = 0 \Rightarrow$ usar Teo de Castelnuovo para decir $X = \text{racional}$.

Caso 2: $g(X) > 0 \Rightarrow X \xrightarrow{\alpha} d(X)$ Albanese ($p_g = h^0(K_X) = 0$). Como $C = \text{racional} \Rightarrow C \subset$ fibra y $C^2 \geq 0 \Rightarrow F = rC$ con $C^2 = 0 \Rightarrow C^2 = 0, C \cdot K = -2$ y $r = 1 \Rightarrow g(C) = 0$ y $F = P^1 \Rightarrow$ genéricamente $P^1 \Rightarrow$ resgada $\rightarrow \leftarrow$.

∴ Cada clase birracional no resgada contiene una única superficie minimal. (sup. obeliones son minimal)

teo: $X = \text{sup. proy. suve } \mathbb{C} \text{ y minimal. Entonces,}$
 $X = \text{var. abeliana} \iff K=0, p_g=1, g=2$

demo: \implies) obvio, \Leftarrow) Poincaré se hace un análisis de K_X sabiendo que $K=0 \implies K^2=0$. Luego considero $\alpha: X \rightarrow \text{Alb}(X)$ y se analizan los casos $d(X) = \text{curva} + K=0$ super. $K \neq 0$ (ie 4 casos), 3 de ellos generan contradicciones excepto d suve y $K=0$.
En este caso, η_1, η_2 base de $H^0(\text{Alb}, \mathcal{O}_{\text{Alb}}^1)$ y $w_1 = \alpha^* \eta_1$ y $w_2 = \alpha^* \eta_2$
 $\implies w = w_1 + w_2$ da como caso al lugar geom. de ramificación. Pero w es trivial y así no hay ramificación.
 $\implies X \rightarrow \text{Alb}(X)$ es étale



Análisis Abelianos

(X, L) con polarización $L \iff \text{Im } H = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

\rightarrow R-R: $\chi(L) = h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \frac{1}{2} L^2$

ya que $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$ y $K=0$. En efecto,

Teo ($X = \text{sup. Abel.}$) L amplio $\iff h^i(L) = 0 \ i=1,2$ y $L^2 > 0 \iff h^0(L) = L^2$

(demo: L amplio $\implies h^1(L) = h^1(-L) = 0$ y $h^2(L) = h^0(-L) = 0$ y $L^2 > 0$.)
pero esto implica amplio en una sup. Abel. (ver lemma)

Si L es amplio $\implies h^0(L) = d_1 d_2 = \frac{L^2}{2}$, $\mathcal{E}_L: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{d_1 d_2 - 1}$

\rightarrow Adyunción: Si $p_a(D) = (-1)^g (\chi(\mathcal{O}_D) - 1) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$
 $\implies 2 p_a(D) - 2 = D^2$, $D = \text{divisor efectivo}$

$\mathcal{E}_L: E \subset X$ algebra
 $\implies E^2 = 0$
y $h^0(E) > 0$
no amplio

obs1: No hay curvas racionales en X . (\mathbb{P}^1 ver ady.)

obs2: $C \in |L|$, L amplio $\implies p_a(C) = d_1 d_2 + 1$.

(así si $C = \text{género } 1 \implies$ no amplio, ya que amplio $\implies d_1 d_2 > 0$.
de esta manera, $g(C) = 1 \implies C^2 = 0$ (o usando adyunción))