Kummer surfaces : 8-octubre-2012 (1)

8

> Preliminares superficiales.

X = super. proy suave $/_{\mathbb{C}}$ con $\kappa = 0$, $h^0(\Omega^1_X) = 2$, $h^0(\Omega^2_X) = 1$
, ie, $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$, $K_X = 0$

Una polarización de X corresponde a un line bundle $\mathcal{L} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.
amplio

Teo: $\mathcal{L}$ amplio $\Leftrightarrow h^i(\mathcal{L}) = 0 \; i = 1,2$ y $\mathcal{L}^2 > 0 \Leftrightarrow h^0(\mathcal{L}) \neq 0$ y $\mathcal{L}^2 > 0$.

Teo: (R-R) $\mathcal{L}$ arbitrario $\Rightarrow \chi(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^2$.
Si $\mathcal{L}$ es amplio $\Rightarrow h^0(\mathcal{L}) = d_1 d_2 = \frac{1}{2}\mathcal{L}^2$.
Así $\mathcal{L}$ principal $\Leftrightarrow \mathcal{L}^2 = 2$

obs: (Fórmula de adjunción) $\mathcal{L}^2 = 2p_a(D) - 2$ donde $D \in |\mathcal{L}|$.
Así $\mathcal{L}$ amplio principal $\Leftrightarrow p_a(D) = 2$ (obs: $|\mathcal{L}|$ contiene sólo divisores reducidos, pero puede ser reducible o irred sing)
(Teo en Lange)

obs: X no contiene curvas racionales. Si $E \subset X$ tiene $p_a(E) = 1$
$\Rightarrow$ singular o curva elíptica. Pero sing $\Rightarrow E$ es racional $\rightarrow\leftarrow$
$\therefore$ $E \subset X$ curva irred, $E^2 = 0 \Leftrightarrow E = $ ⊚.

Dado $E \subset X$, siempre existe E' complemento.
Suponer $E \cdot E' = d \Rightarrow E \times E' \xrightarrow{f} X$
$(e, e') \longmapsto e + e'$

y kernel $= \{(e,e') : e + e' = 0$, ie $e' = -e$ y comunes $e \in E \cap E'$ en $X\}$
Así isogenia en general y $E \cdot E' = 1 \Rightarrow X \simeq E \times E'$.

Es decir, $E \subset X \Rightarrow X$ es cubrimiento étale de algún grado de $E \times E'$ para algún E'. $\boxed{\text{Ruppert's criterio Lange p. 304.}}$

$\rightarrow$ Asumir $\Gamma \subset X$ irred $\Rightarrow \Gamma^2 > 0$.
Si $\Gamma^2 = 2 \Rightarrow$ polarización principal y $p_a(\Gamma) = 2$
la sing de Γ tiene que ser doble.

En cualquier caso, lo único posible es $\overset{\text{elíptica}}{E} \longrightarrow \Gamma \subset X$

$\Rightarrow$ $E \longrightarrow X$ morfismo holom genéricamente 1-1 $\Rightarrow$ $\hookrightarrow$

y así Γ no es $\underset{\text{y } g=1}{\text{singular}}$ $\Rightarrow$ $\Gamma^2 = 0$ $\rightarrow\leftarrow$.

$\therefore$ Si $\Gamma^2 = 2 \iff \Gamma$ es suave de género 2.

Obs.- Si tenemos p.p. $\mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $|\mathcal{L}|$ contiene una curva quizás reducible $\Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$. Pero $\mathcal{L}^2 = 2 = \Sigma \Gamma_i^2 + 2\sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j$
$\Rightarrow$ (no $E \subset X$) $\Gamma_1^2 = 1 = \Gamma_2^2$ pero es par! $\Rightarrow$ $\boxed{\Gamma_1^2 = 2}$ sólo una.
(Sino $|\mathcal{L}| \ni E + E'$ $E \cdot E' = 1$)

El asunto es que en ese caso ($g(\Gamma) = 2$), X es $Jac(\Gamma)$.
(ver Weil). O se puede usar Matsusaka-Ran:

Teo (criterio para Jacob.) (X, L) ppav dim g y $C = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu C_\nu$ un 1-ciclo efectivo que genera a X con $C \cdot L = g$
$\Rightarrow$ $r_1 = \dots = r_n = 1$, C_ν = suaves y $(X, L) \simeq (J(C_1), \Theta_1) \times \dots \times (J(C_n), \Theta_n)$

Para nosotros del principio $n = 1$, $\Gamma = C_1$.

$\therefore$ p.p.a.v son Jacobianos o productos de curvas elípticas

~~Ejemplo: Producto cartesiano $E \times E'$ de curvas elípticas también son $Jac(\ )$?~~

Más simple: Si $\Gamma \subset X$ = abel. superficie $\Rightarrow$

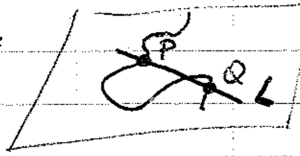
$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \\ Jac(\Gamma) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Donde Im f tiene que ser X ya que sino es un subtoro de X que contiene a Γ $\rightarrow\leftarrow$. Pero ahora f es un cubrimiento de X el cual es identidad en Γ. Así $f^{-1}(\Gamma)$ es un montón de curvas disjuntas y Γ está ahí. Sea $\Gamma' \subset f^{-1}(\Gamma)$ otra
$\Rightarrow$ $\Gamma' \cdot \Gamma = 0$ pero podemos trasladar $p \in \Gamma'$ a un punto en Γ manteniendo clase numérica $\Rightarrow$ $\Gamma' \cdot \Gamma = t(\Gamma') \cdot \Gamma = 0$ $\Rightarrow$ $t(\Gamma') = \Gamma$ y $\Gamma^2 = 0$ $\rightarrow\leftarrow$ ($g(\Gamma) = 2$) Así $f^{-1}(\Gamma)$ es sólo Γ y f tiene grado 1.

$E \neq E'$

Construiremos $E \times E'$ con E, E' curvas arbitrarias género 1 y $\Gamma \subset E \times E'$ curva suave irr. género 2. $\therefore$ $E \times E' = \mathrm{Jac}(\Gamma)$ por lo anterior.

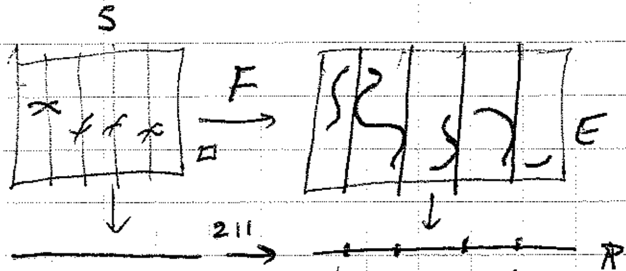
$E \hookrightarrow \mathbb{P}^2 =$



Elegir L intersectando E en 3 puntos. Tomar dos P, Q y hacer blow-up de P y Q y luego blow-down de L

$\Rightarrow$ $E \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ como sección doble en ambas proyecciones, es decir, es de clase $(2,2)$ en $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$

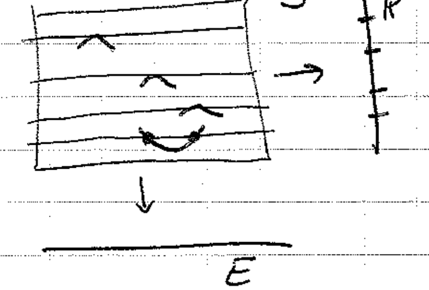
2)



$F^{-1}(E) = E_1 + E_2$, ambos $E_i \simeq E$

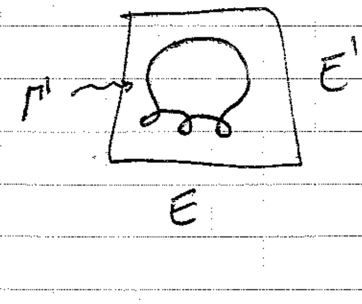
$S = E \times \mathbb{P}^1$

3)



dado $E' \Rightarrow E' \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ con 4 ptos marcados en $\mathbb{P}^1$, tomarlos en, tal que 3 son arbitrarios con 3 horizontales tang a E_1 y el cuarto es tal que horizontal $\cap$ dos pts a E_1

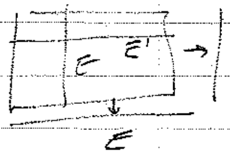
4) tomar cambio base $E' \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ como antes, pero ahora E_1 ramifica en esos dos puntos y así



cuya normalización tiene género 2. Γ' da polarización $d_1 d_2 = 4$ y debería venir de ~~una~~ la producto.

Un poco más acerca de $E \times E'$ e isógenas. (3)

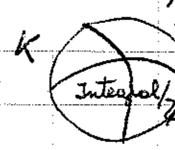
1.- Dados E, E' curvas elípticas $\mathrm{Hom}(E, E')$ es típicamente 0.
Así si $\Gamma \subset E \times E'$ es curva de género 2 $\Rightarrow$ produce p.p
y $E \times E' = \mathrm{Jac}(\Gamma)$. pero $\underset{[\Gamma]}{\mathrm{Pic}(E \times E')} = \mathrm{Pic}(E) \oplus \mathrm{Pic}(E') \oplus \mathrm{Hom}(E, E')$
$= (a, b, c)$
y $\Gamma^2 = 2 \Rightarrow a = 1, b = 1$ si $\mathrm{Hom}(E, E') = 0$
$\Rightarrow [\Gamma] \in p_1^*(\text{pto}) \otimes p_2^*(\text{pto})$ pero esta es la polarización trivial!



$\Gamma \sim E + E' \Rightarrow E \cdot \Gamma = E \cdot E' = 1$
$\Rightarrow E \simeq \Gamma \rightarrow\leftarrow$.

$\therefore$ es necesario $\mathrm{Hom}(E, E') \neq 0$.

2.- ¿Pero es posible $E \times E' = \mathrm{Jac}(\text{ })$? Recordar que basta tener $\Gamma \subset E \times E'$ de género 2. Si es posible: "Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves" Hayashida, Nishi J. Math. Soc. Japan Vol. 17, No 1, 1965: $E \times E'$ can be a Jac for all values of m except 1, 3, 7 and 15 where $\mathrm{Hom}(E, E') \simeq \mathcal{O}(\mathbb{Q}\sqrt{-m})$
$\parallel$



$\Rightarrow K \cap$ Integ

3.- Torelli dice: C, C' curvas proy. suaves/$\mathbb{C}$ género g. Si $(\mathrm{Jac}(C), \Theta) \simeq (\mathrm{Jac}(C'), \Theta)$
$\Rightarrow C \simeq C'$. Pero podría pasar que un Jac sea Jac de dos curvas dist. Eso pasa con $E \times E'$ en 2.-
(mirar mismo paper).

4.- Si Γ = género 2 tiene involución no hiperelíptica ($\Leftrightarrow \Gamma \xrightarrow{2:1} \text{ } = E$)
$\Rightarrow \mathrm{Jac}(\Gamma)$ es isógeno a $E \times E'$ algún E'.

Como es conexo
$E_1 \hookrightarrow \mathrm{Jac}(\Gamma) \twoheadrightarrow$
y dualmente
$\exists E \rightarrow \mathrm{Jac}(\Gamma)$
$\therefore E \times E_1 \twoheadrightarrow \mathrm{Jac}(\Gamma)$
isogenia

<u>dem</u>: $\begin{array}{ccc} \Gamma & \hookrightarrow & \mathrm{Jac}(\Gamma) \\ {\scriptstyle 2:1}\downarrow & \swarrow & \\ E & & \end{array}$

Si $\mathrm{Jac}(\Gamma) \twoheadrightarrow E$ no es conexo:
(STEIN) $\mathrm{Jac}(\Gamma) \xrightarrow{\text{conexo}} M \xrightarrow{\text{finito}} E$ y $g(M) \leq 2$
(1) $g(M) = 2 \Rightarrow$ habrá $E' \rightarrow M \rightarrow\leftarrow$. (usar kernel $E_0 \subset \mathrm{Jac}(\Gamma)$
(2) $g(M) = 1 \Rightarrow$ problemas con el grado.
a menos que finito $= 1$
Conexo